



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Diagnóstico de Fallas en Sistemas LPV Basado en
Observadores Intervalares

presentada por

M.C. Jorge Yusef Colín Castillo

como requisito para la obtención del grado de
**Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo

Codirector de tesis

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2024.



Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

12/agosto/2024

SAC/238/2024

Autorización de
impresión de tesis

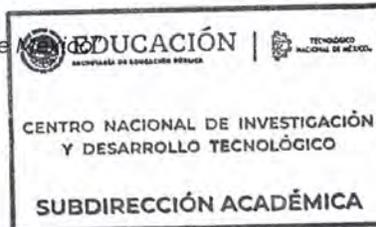
**JORGE YUSEF COLIN CASTILLO
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Diagnóstico de Fallas en Sistemas LPV Basado en Observadores Intervalares”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”



**CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



 <small>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico</small>	ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL	Código: CENIDET-AC-006-D20
		Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4	Página 1 de 1

Cuernavaca, Mor., a 09 de agosto de 2024

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
 Subdirector Académico
 Presente

At'n: Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
 Presidente del Claustro Doctoral
 del Departamento De Ing. Electrónica

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante **M.C. JORGE YUSEF COLÍN CASTILLO** manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado **"Diagnóstico de Fallas en Sistemas LPV Basado en Observadores Intervalares"**, realizado bajo la dirección de la **Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo** y la codirección del **Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez**, el trabajo se **ACEPTA** para proceder a su impresión.

ATENTAMENTE



Dr. Luis Gerardo Vela Valdés
 CENIDET



Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
 CENIDET



Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
 CENIDET



Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez
 CENIDET



Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
 CENIDET

c.c.p: M.T.I Maria Elena Gómez Torres / jefa del Departamento de Servicios Escolares.
 c.c.p: Dr. Jarniel García Morales / jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica.
 c.c.p: Expediente.

Dedicatoria

*Dedicado a mis padres y a mi hermana,
quienes han sido mis pilares para seguir
adelante.*

Agradecimientos

A mis padres (Jorge Colín, Adriana Castillo) y a mi hermana (Casandra Colín), por ser el motor de mis sueños, gracias a ellos por cada día confiar y creer en mí y en mis expectativas, gracias por las oportunidades que me han brindado para poder llegar hasta este nivel. Este logro es fruto de su esfuerzo y dedicación. Los amo con todo mi corazón.

A mi novia (Ximena Delgado) quien ha sido mi mayor apoyo y soporte emocional durante este proceso. Gracias por creer en mí, por alentarme en seguir adelante, inclusive en los momentos y situaciones más difíciles. Esta victoria es nuestra, ya que juntos hemos superado todos los obstáculos. Te amo con todo mi corazón y espero poder compartir muchos más éxitos a tu lado.

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de doctorado.

A mis asesores, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo y el Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, por todo ese apoyo académico brindado en todas esas asesorías, gracias por la amistad y el apoyo que siempre me brindaron.

Al Dr. Vicenç Puig por el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo de tesis y por su confianza depositada en mi persona.

A los integrantes del comité revisor: Dr. Luis Gerardo Vela Valdés, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y al Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez, cuyos comentarios y observaciones fueron muy valiosos para el desarrollo del presente trabajo.

A mis compañeros del CENIDET: Samuel, Alexis, Donaciano, Alberto, Christian, Jesus y muchos más compañeros por su apoyo, gracias por hacer amena la estancia durante este periodo.

Agradezco a la comunidad del CENIDET por la amabilidad y atención brindada durante la estancia de Doctorado.

Resumen

En este trabajo de investigación se presenta el desarrollo de diferentes esquemas de detección y diagnóstico de fallas, el cual es aplicado a un sistema robótico de articulación flexible de un solo eslabón.

Para realizar los esquemas de detección y diagnóstico de fallas se utilizó un modelo no lineal de un robot de articulación flexible de un solo eslabón que presenta de forma general el comportamiento dinámico del desplazamiento angular del motor, velocidad angular del motor, desplazamiento angular del eslabón y la velocidad angular del eslabón. Debido a que los esquemas propuestos en este tema de tesis se basa en la teoría de sistemas lineales. Se utiliza una representación de sistemas lineales de parámetros variantes (LPV), considerando que el modelo no lineal trabaja en diferentes puntos de operación.

Para el diseño del esquema de detección de fallas intervalar se utiliza una estructura de observador TNL la cual es un observador Luenberger modificados (donde T , N y L denotan las matrices de ganancias utilizadas en esta estrategia). Para determinar las ganancias del observador se utiliza el enfoque de Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs) considerando una restricción paramétrica de la matriz del sistema Metzler. El esquema de detección de fallas propuesto se considera robusto debido a las estimaciones intervalares las cuales generan un umbral natural generado por las acciones de entradas exógenas.

Para el diseño del esquema de diagnóstico de fallas intervalar se utiliza una estructura proporcional generalizada, la cual cuenta con múltiples grados de libertad (N , J , H , T y D) que permiten realizar la estimación a intervalos de estados y fallas. Para determinar las ganancias del observador se utiliza el enfoque LMIs considerando una restricción de sistemas positivos mediante la matriz del sistema Metzler, para asegurar la estabilidad y mitigar el efecto de las incertidumbres en las estimaciones de estados y fallas se utiliza la función cuadrática común de estabilidad entrada-estado

(ISS) junto con la función de Lyapunov.

Finalmente, los esquemas de detección y diagnóstico de fallas se evaluaron en la plataforma de Matlab versión (2020b) con el toolbox YALMIP-SEDUMI, en la cual se elaboraron diferentes escenarios de fallas.

Abstract

This research work presents the development of different fault detection and diagnosis schemes, which is applied to a single-link flexible joint robotic system.

To perform the fault detection and diagnosis schemes, a nonlinear model of a single-link flexible joint robot was used, which presents in a general way the dynamic behavior of the motor angular displacement, motor angular velocity, link angular displacement and link angular velocity. Because the schemes proposed in this thesis topic are based on the theory of linear systems. A representation of linear systems of varying parameters (LPV) is used, considering that the non-linear model works at different operating points.

For the design of the interval fault detection scheme, a TNL observer structure is used which is a modified Luenberger observer (where T , N and L denote the gain matrices used in this strategy). The Linear Matrix Inequalities (LMIs) approach is used to determine the observer's gains by considering a parametric constraint of the Metzler system matrix. The proposed fault detection scheme is considered robust due to the interval estimates which generate a natural threshold generated by the actions of exogenous inputs.

For the design of the interval fault diagnosis scheme, a generalized proportional structure is used, which has multiple degrees of freedom (N , J , H , T and D) that allow for the interval estimation of states and faults. To determine the observer gains the LMIs approach is used considering a positive systems constraint using the Metzler system matrix, to ensure stability and mitigate the effect of uncertainties in the state and fault estimates the input-state stability (ISS) common quadratic function is used together with the Lyapunov function.

Finally, the fault detection and diagnosis schemes were evaluated on the Matlab version (2020b) platform with the YALMIP-SEDUMI toolbox, in which different fault scenarios were elaborated.

Índice general

Índice general	VIII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
Nomenclatura	XIV
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Objetivos	3
1.2.1 Objetivo general	3
1.2.2 Objetivos específicos	3
1.3 Justificación	3
1.4 Estudio del estado del arte	4
1.5 Alcances	6
1.6 Aportaciones	7
1.7 Organización del documento	7
1.8 Conclusiones del capítulo	8
2 Marco Teórico	9
2.1 Conceptos básicos sobre fallas	9
2.1.1 Sistemas de detección y diagnóstico de fallas	11
2.2 Sistemas de parámetros variantes (LPV)	12
2.2.1 Representación LPV Politópica	13
2.2.2 Sistemas cuasi-LPV	14
2.2.3 Propiedades de los sistemas LPV	14

2.3	Matrices Metzler y no negativas	16
2.4	Sistemas positivos	17
2.4.1	Condición de positividad	17
2.5	Análisis intervalar	18
2.6	Observador intervalar	20
2.6.1	Estructuras de observadores intervalares	21
2.7	Estabilidad de entrada-estado (ISS)	22
2.8	Conclusiones del capítulo	24
3	Caso de estudio	25
3.1	Robots de articulación flexible	25
3.1.1	Elementos de un robot de articulación de flexible	27
3.2	Modelo matemático de un robot de articulación flexible de un eslabón	29
3.2.1	Simulación del modelo no lineal	30
3.3	Modelo Cuasi-LPV	33
3.3.1	Obtención del modelo cuasi-LPV	33
3.3.2	Estabilidad del sistema cuasi-LPV	36
3.3.3	Validación del modelo cuasi-LPV	38
3.4	Conclusiones del capítulo	40
4	Diseño de observadores intervalares	41
4.1	Diseño del observador intervalar Luenberger modificado	41
4.1.1	Análisis de la dinámica del error	43
4.1.2	Análisis de estabilidad y convergencia ISS	45
4.2	Estrategia de detección de fallas	51
4.2.1	Evaluación del esquema de detección de fallas	52
4.3	Estrategia de diagnóstico de fallas	59
4.3.1	Evaluación del esquema de diagnóstico de fallas	60
4.4	Diseño del observador intervalar proporcional generalizado (IGPO)	65
4.4.1	Análisis de la dinámica del error del observador IGPO	66
4.4.2	Análisis de estabilidad y convergencia ISS del IGPO	69
4.4.3	Evaluación del observador IGPO para la estimación de variables	72
4.5	Estrategia de diagnóstico de fallas IGPO	75
4.5.1	Evaluación del esquema de diagnóstico de fallas IGPO	76

4.6 Conclusiones del capítulo	81
5 Conclusiones generales	82
5.1 Trabajos futuros	83
Anexos	84
Bibliografía	1

Índice de figuras

2.1	Secciones del sistema donde se presentan fallas.	10
2.2	Esquema de detección de fallas basado en observadores.	11
2.3	Análisis residual.	12
2.4	Estimación intervalar.	20
3.1	Esquema de un robot de articulación flexible.	26
3.2	Esquema de articulación flexible	27
3.3	Esquema de flexibilidad en eslabones	28
3.4	Diagrama de un robot flexible de un grado de libertad construido en aluminio y montado en voladizo.	29
3.5	Torque de alimentación $u(t)$	31
3.6	Desplazamiento angular del motor (x_1).	31
3.7	Velocidad angular del motor (x_2).	32
3.8	Desplazamiento angular del eslabón (x_3).	32
3.9	Velocidad angular del eslabón (x_4).	33
3.10	Dinámica de la no linealidad $\rho(t)$	34
3.11	Dinámica de las funciones de ponderación.	35
3.12	Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_1(t)$).	38
3.13	Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_2(t)$).	39
3.14	Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_3(t)$).	39
3.15	Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_4(t)$).	40
4.1	Señal de ruido uniforme (w_t).	49
4.2	Salida $y_1(t)$ y sus estimaciones intervalares.	49
4.3	Salida $y_2(t)$ y sus estimaciones intervalares.	50
4.4	Salida $y_3(t)$ y sus estimaciones intervalares.	50

4.5	Diagrama esquemático de un esquema de detección de falla basado en un observador intervalar	52
4.6	Salida $y_1(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.	53
4.7	Salida $y_2(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.	54
4.8	Salida $y_3(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.	54
4.9	Residuos superiores e inferiores con falla abrupta.	55
4.10	Salida $y_1(t)$ con falla incipiente y sus estimaciones intervalares.	56
4.11	Salida $y_2(t)$ con falla incipiente y sus estimaciones intervalares.	57
4.12	Salida $y_3(t)$ con falla incipiente y sus estimaciones intervalares.	57
4.13	Residuos superiores e inferiores con falla incipiente.	58
4.14	Estado $x_1(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares	62
4.15	Estado $x_2(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.	62
4.16	Estado $x_3(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.	63
4.17	Estado $x_4(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.	63
4.18	Falla abrupta en el actuador y su estimación intervalar.	64
4.19	Posición del motor $x_1(t)$ y su estimación intervalar	73
4.20	Velocidad del motor x_2 y su estimación intervalar	74
4.21	Posición del eslabon x_3 y su estimación intervalar	74
4.22	Velocidad del eslabon x_4 y su estimación intervalar	75
4.23	Escenario falla abrupta con observador IGPO: Posición del motor $x_1(t)$	78
4.24	Escenario falla abrupta con observador IGPO: Velocidad del motor $x_2(t)$	79
4.25	Escenario falla abrupta con observador IGPO: Posición del eslabón $x_3(t)$	79
4.26	Escenario falla abrupta con observador IGPO: Velocidad del eslabón $x_4(t)$	80
4.27	Falla abrupta en el actuador y su estimación intervalar con observador IGPO	80

Índice de tablas

Tabla 3.1	Definición de parámetros	30
Tabla 3.2	Valores máximos y mínimos	34
Tabla 4.1	Matriz de firma de fallas tipo abrupto	55
Tabla 4.2	Matriz de firma de fallas tipo incipiente.	58

Nomenclatura y acrónimos

Conjuntos

\mathbb{R} Conjunto de todos los números reales.

Matrices y Vectores

$A > 0$	Matriz positiva.
$A \succ 0$	Matriz definida positiva.
$A < 0$	Matriz negativa.
$A \prec 0$	Matriz definida negativa.
$A \succeq 0$	Matriz semidefinida positiva.
$A \preceq 0$	Matriz semidefinida negativa.
I	Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
$(*)$	Elemento transpuesto de una matriz.
0	Matriz con elementos cero de dimensiones apropiadas.
I_n	Matriz identidad de dimensión $n \times n$.
A^{-1}	Inversa de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$.
A^T	Traspuesta de una matriz A .
A^\dagger	Pseudoinversa de una matriz A .
$\lambda(A)$	Conjunto de todos los eigenvalores de la matriz A .
$\text{rango}(A)$	Rango de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
$(+)$	Matriz no-negativa.
M_z	Matriz Metzler.
$\mathcal{H}(A)$	Hermitiana de una matriz cuadrada A se denota por $\mathcal{H}(A) = A + A^T$.
$[x, \bar{x}]$	Intervalo de un vector.

Acrónimos

T-S	Takagi-Sugeno.
LTI	Lineal de Tiempo Invariante.
LMI	Desigualdad Matricial Lineal.
LPV	Lineal de Parámetros Variables.
cuasi-LPV	cuasi Lineal de Parámetros Variables.
IFAC	Federación Internacional de Control Automático.
LTV	Lineal de Tiempo Variable.
UIO	Observador de Entradas Desconocidas.
G-UIO	Observador Generalizado de Entradas Desconocidas.
ISS	Estabilidad Entrada-Estado.
IGPO	Observador Intervalar Generalizado Proporcional.

Capítulo 1

Introducción

Los procesos industriales de dinámica compleja requieren de una mayor supervisión para la detección y diagnóstico de fallas, dada la gran cantidad de equipos y componentes que contienen. El objetivo de la detección y localización de las fallas es tomar acciones preventivas que permiten conservar una operación segura y confiable de los procesos. En estos procesos las fallas en equipos y componentes pueden dar lugar a pérdidas económicas o incluso eventos catastróficos. Por lo tanto, es importante para los procesos industriales contar con sistemas de detección y diagnóstico de fallas. La importancia de realizar un esquema de detección y diagnóstico de fallas de manera oportuna es una valiosa herramienta, en el entendido de que toda falla lleva un costo asociado que se incrementa a medida que la falla evoluciona y no es atendida. En sentido opuesto, una falla detectada y atendida de manera oportuna, tendrá un costo mínimo. En la actualidad, en el área de control automático, una de las técnicas más utilizadas para el desarrollo de esquemas de detección de fallas son los observadores, que se utilizan para obtener una estimación simultánea de estados y fallas.

Sin embargo, en la práctica, las incertidumbres en los sistemas son poco exploradas, ya que no se pueden describir con precisión. Por tal motivo, el observador intervalar se presenta bajo las suposiciones de que las incertidumbres son acotadas, los observadores intervalares pueden proporcionar los límites superior e inferior de las variables de estado utilizando los datos disponibles de los dos puntos del observador de manera que la dinámica de error de estimación sea tanto cooperativa como estable. La aplicación de observadores intervalares se ha extendido a diferentes sistemas, tales como sistemas lineales positivos, sistemas no lineales y sistemas de parámetros variantes (LPV).

En la literatura existen diversos trabajos que abordan el diseño de observadores intervalares para sistemas LPV, este tipo de trabajos cuentan con estructuras de diseño con un mínimo grado de robustez. Es por ello que, en este trabajo de tesis se abordan los diseños de observadores intervalares con un número mayor de grado de libertad, tales como observadores intervalares TNL , los cuales son observadores Luenberger modificados (donde T , N y L denotan las matrices de ganancias utilizadas en esta estrategia). También, se propone una nueva estructura de observador de intervalo para sistemas LPV de tiempo continuo, basada en el enfoque de observadores generalizados, el cual cuenta con múltiples grados de libertad N , J , H , T y D los cuales nos permiten realizar una estimación intervalar de estados y fallas.

1.1. Planteamiento del problema

Todos los procesos existentes en las distintas ramas de la industria están propensos a presentar fallas y/o averías en sensores, actuadores y/o componentes. La poca atención a este tipo de fallas puede reducir el desempeño y la vida de los componentes, lo que deriva en un paro no programado. Actualmente, se han desarrollado diversos esquemas de diagnóstico de fallas para atender dicha problemática, sin embargo, estos esquemas presentan pérdida de información, lo que los hace poco confiables. De acuerdo con lo anterior, los observadores son una estrategia ampliamente usada para el diseño de sistemas de detección y diagnóstico de fallas.

Los observadores logran obtener una estimación simultánea de estados y fallas, donde la estimación de fallas proporciona la magnitud de la falla, esta información permite calcular el daño y el efecto que puede generar la falla. Por esta razón, en este trabajo de tesis, se propone diseñar un esquema de diagnóstico de fallas basado en observadores intervalares los cuales permitan detectar los síntomas de fallas de una manera más eficaz en comparación de otros esquemas reportados en la literatura.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

- Obtener información sobre la falla en un sistema con representación LPV, mediante un esquema de diagnóstico implementando observadores intervalares.

1.2.2. Objetivos específicos

- Diseñar un observador utilizando la técnica intervalar para estimar variables de estado.
- Proponer una nueva estructura de observador intervalar que minimice el efecto de las perturbaciones, mediante el enfoque de robustez.
- Desarrollar un esquema de diagnóstico de fallas para sistemas LPV que minimice los efectos de las perturbaciones en las variables estimadas del sistema.

1.3. Justificación

La importancia de realizar un diagnóstico de fallas de manera oportuna es una valiosa herramienta en la operación de un proceso, en el entendido de que toda falla lleva un costo asociado que se incrementa a medida que la falla evoluciona y no es atendida. En sentido opuesto, una falla detectada y atendida con oportunidad, tendrá un costo mínimo. Dicho lo anterior, es necesario contar con sistemas diagnóstico de fallas, los cuales son empleados para mejorar la confiabilidad del sistema, a menudo son empleados para monitorear, localizar e identificar fallas utilizando el concepto de redundancia, ya sea por hardware o de forma analítica.

En la literatura existen diversas herramientas para realizar un esquema de diagnóstico de fallas, sin embargo, una de las herramientas más utilizadas son los observadores los cuales son usados en una amplia variedad de técnicas como la estimación de estados no medibles, estimación de parámetros, estimación y detección de fallas, generación de residuos, diseño de controles tolerantes a fallas, por mencionar algunos. Si bien, el área de aplicaciones para el uso de observadores es muy amplia y bastante estudiada, aún sigue en desarrollo. Es por eso que, en este trabajo de investigación, se

propone diseñar un nuevo esquema diagnóstico de fallas basado en observadores intervalares, el cual brinde una mejora significativa en los resultados encontrados en la literatura.

1.4. Estudio del estado del arte

La estimación de estados para los sistemas dinámicos en presencia de incertidumbres (perturbaciones, error de modelado y ruido) es un problema desafiante (Solsona and Valla (2003), Wu et~al. (2016), Busawon and Kabore (2001)). En la teoría de control, los observadores tienen la capacidad de reconstruir el estado interno desconocido de estos sistemas a partir de los datos disponibles de las entradas y salidas de estos mismos. Sin embargo, en la práctica, la precisión de los estados estimados depende principalmente de la exactitud de los modelos utilizados para el diseño de observadores. Sin embargo, en la práctica, las incertidumbres son poco conocidas y no se pueden describir con precisión. Por tal motivo, el observador intervalar se presenta bajo las suposiciones de que las incertidumbres están acotadas, los observadores intervalares pueden proporcionar los límites superior e inferior de las variables de estado utilizando los datos disponibles de los dos puntos del observador de manera que la dinámica de error de estimación sea tanto cooperativa como estable (Gouzé et~al. (2000), Meseguer et~al. (2008)).

Los observadores intervalares han recibido una atención considerable en los últimos años. Se han propuesto diversos enfoques para los sistemas dinámicos de tiempo continuo como los sistemas en tiempo discreto, tales como Raïssi et~al. (2010) quienes presentan el diseño de un observador intervalar en tiempo continuo. El desarrollo del observador se basa en la teoría de sistemas positivos, los cuales permiten obtener una estimación intervalar favorable. Años más adelante Rotondo et~al. (2016) abordan el diseño de un banco de observadores intervalares tipo Luenberger con la finalidad de detectar fallas en sensores de un sistema discreto. En Guo and Zhu (2017) abordan los problemas de diseño en los sistemas que no cumplen las normas de positividad, por tal motivo, proponen realizar un cambio de coordenadas para un sistema conmutado, con base al sistema obtenido proponen el diseño de un observador Luenberger capaz de generar un banco de residuos para la detección de fallas. Por otro lado, García et~al. (2018) presentan el diseño de un observador intervalar en tiempo discreto para sistemas Takagi-Sugeno (T-S). Con el objetivo principal de realizar una estimación robusta de estados y fallas a pesar de las incertidumbres. El diseño del observador

se realizó mediante el criterio de H_∞ el cual permite minimizar el efecto de las incertidumbres. En He and Xie (2018) se presenta un controlador de estados basado en el diseño de observadores de intervalo tipo Luenberger para una clase de sistemas no lineales con incertidumbres acotadas, para garantizar la positividad del sistema realizan una serie de transformaciones mediante la teoría matricial.

Más adelante Dinh et~al. (2019) presentaron dos metodologías para el diseño de observadores intervalares para sistemas conmutados lineales de tiempo discreto afectados por perturbaciones acotadas pero desconocidas. La primera metodología consiste en comprobar que el sistema es cooperativo, ya que requiere que la dinámica del error de observación no sea negativa, mientras que la segunda metodología relaja el requisito de cooperatividad mediante un cambio de coordenadas en el estudio de la dinámica del error. En ese mismo año Sehli et~al. (2019) presentan el diseño de un observador intervalar para modelos múltiples desacoplados que admiten incertidumbres en los parámetros del sistema y perturbaciones aditivas en la salida. En Ma et~al. (2019) desarrollan una metodología de diseño de observadores intervalares de tiempo finito para sistemas conmutados que presentan perturbaciones las cuales se consideran acotadas. Más adelante Gu et~al. (2019) realizan el diseño de observadores de intervalo de orden reducido para sistemas LTI con perturbaciones acotadas variables en el tiempo. El diseño del observador se llevó a cabo mediante la resolución de un tipo de ecuaciones de Sylvester generalizadas, dicha solución evita eficazmente el problema de cálculo de las desigualdades matriciales lineales.

En Haj et~al. (2020) desarrollan el diseño de un observador de intervalos para sistemas lineales fraccionarios con ruido aditivo y perturbaciones, los autores realizan un cambio de coordenadas de forma que se obtenga un error de estimación positivo. En ese mismo año Ifqir et~al. (2020) presentan una metodología de estimación de conjuntos de miembros para sistemas LPV en tiempo discreto sujetos a entradas desconocidas, variaciones paramétricas no medibles y ruido. El esquema propuesto considera las bases de un observador generalizado, el enfoque propuesto es solucionado mediante la optimización en términos de LMIs. Más adelante, Chevet et~al. (2021) presentan el diseño de un observador de intervalo para sistemas lineales de tiempo invariante (LTI) en tiempo continuo, el cual se encuentra sujeto a perturbaciones desconocidas pero acotadas. El observador propuesto es utilizado para minimizar el efecto de las perturbaciones por medio de los grados de

libertad añadidos al estudio de desigualdad de matrices lineales (LMIs). En Khan et~al. (2021) se presentaron algunos de los conceptos básicos para el diseño de observadores de intervalo para sistemas continuos, discretos, LPV y sistemas multiagentes. En ese mismo año Alex Reis~Souza (2021) abordan el esquema de un controlador robusto predictivo de modelos (CPM) con realimentación de salida de sistemas lineales restringidos en tiempo discreto. El controlador predictivo propuesto incorpora un observador de intervalos, que explota las medidas disponibles para actualizar el conjunto de estados del sistema, y un predictor de intervalos, utilizado en el paso de predicción del MPC. En Chevet et~al. (2022) presentan el diseño de un observador de entradas desconocidas con segmentos zonótopicos basado en un filtro de Kalman extendido, donde consideran aplicar un cambio de coordenadas al sistema utilizado, ya que no cumple las condiciones de sistemas positivos. En Huang (2022) se desarrolla un esquema de control tolerante a fallas mediante el uso de observadores intervalares los cuales brindan estimaciones intervalares de fallas y estados mediante algoritmos. Por otro lado, Li et~al. (2022) desarrollan un observador intervalar para sistemas LTI con perturbaciones aditivas. El desarrollo consiste en proponer una metodología mediante desigualdades las cuales aprovechan la positividad del sistema para garantizar que la dinámica del error sea estable y positiva. En ese mismo año, Lamouchi et~al. (2022) proponen un esquema activo de Control Tolerante a Fallas (FTC) para sistemas LPV en tiempo discreto el cual se encuentra sujetos a incertidumbres y fallas en los actuadores. El esquema FTC considera un observador intervalar TNL el cual cuenta con múltiples grados de libertad que le permiten estimar el estado del sistema y el fallo del actuador. En Torres et~al. (2022) abordan un esquema de detección de fallas mediante un observador intervalar robusto, dicho esquema es utilizado para la detección de fallas en los sensores de caudal de hidrógeno de un proceso de producción de biohidrógeno.

1.5. Alcances

- Obtener un modelo LPV de un robot de articulación flexible, el cual permite utilizar técnicas de diseño de sistemas lineales.
- Obtener el diseño de un observador intervalar Luenberger modificado utilizando el enfoque LPV, el cual permita estimar estados y fallas simultáneamente.
- Obtener el diseño de un observador intervalar generalizado utilizando el enfoque LPV, el cual permita estimar estados y fallas simultáneamente.

1.6. Aportaciones

- La obtención de un modelo cuasi-LPV de un robot de articulación flexible con un grado de libertad.
- Diseño de un observador intervalar TNL por medio del enfoque cuasi-LPV, que estima simultáneamente estados y fallas del sistema. El observador intervalar TNL se diseña considerando la condición de positividad Metzler sin tener que realizar una transformación del sistema. La estructura del observador se basa en la estructura de un observador tipo Luenberger con términos aditivos.
- Diseño de un observador intervalar generalizado por medio del enfoque cuasi-LPV, que estima simultáneamente estados y fallas del sistema. El observador intervalar generalizado se diseña considerando la condición de positividad Metzler sin tener que realizar una transformación del sistema. La estructura del observador se basa en la estructura de un observador generalizado convencional con términos aditivos.

1.7. Organización del documento

En el **Capítulo 2** se presentan los conceptos teóricos los cuales sirven de apoyo para el desarrollo del trabajo de tesis. Donde se describe los conceptos fundamentales sobre fallas, sistemas LPV. Asimismo, se da la descripción de los conceptos fundamentales sobre los sistemas positivos, condiciones sobre matrices Metzler y no negativas, análisis intervalares y la descripción sobre observadores intervalares.

En el **Capítulo 3** se presenta el modelo no lineal de un robot de articulación flexible de un solo grado de libertad. Asimismo, se muestra la representación cuasi-LPV, así como los resultados de la evaluación del modelo cuasi-LPV contra el modelo no lineal.

En el **Capítulo 4** se presentan los dos diseños de observadores intervalares. El primer diseño se utiliza para desarrollar dos diferentes esquemas de detección, el primer esquema se basa en la detección de falla pasiva en donde se generan señales residuales. El segundo esquema se basa en la detección y localización de fallas, el cual permite obtener la estimación de estados y fallas.

Posteriormente, el segundo diseño de observador intervalar es utilizado para realizar un monitoreo de variables de estado y generar un esquema de detección y localización de fallas, el cual permite obtener la estimación de estados y fallas

En el **Capítulo 5** se presentan las conclusiones del trabajo de tesis y los trabajos futuros que se pueden realizar a partir de esta investigación.

1.8. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se describieron de manera detallada los objetivos, planteamiento del problema, alcances y aportaciones del tema de tesis. En el estado del arte se presentaron algunos de los trabajos más importantes reportados en la literatura.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se encuentra dedicado a la descripción de diferentes conceptos y definiciones para una mejor comprensión en el tema de tesis.

En la Sección 2.1 se describen los conceptos más importantes sobre fallas.

En la Sección 2.2 se abordan los sistemas LPV y cuasi-LPV y las propiedades que los caracterizan.

En la Sección 2.3, 2.4 y 2.5 se presentan conceptos, definiciones y lemas correspondientes para el entendimiento y desarrollo de observadores intervalares.

En la Sección 2.6 se presenta la definición de lo que representa un observador intervalar, así como diferentes tipos de observadores reportados en la literatura.

2.1. Conceptos básicos sobre fallas

Con el rápido desarrollo de la tecnología, los sistemas modernos se han vuelto cada vez más complejos, costosos y propensos a fallas severas, lo que resulta en mayor demanda de seguridad y confiabilidad. Las secciones del sistema propensas a fallas se muestran en la Figura 2.1.

Las fallas son aquellos elementos que deben detectarse y cuyos efectos deben eliminarse. De acuerdo con Rodarte (2013) menciona que el comité técnico de la Federación Internacional de Control Automático (IFAC) ha establecido los siguientes conceptos

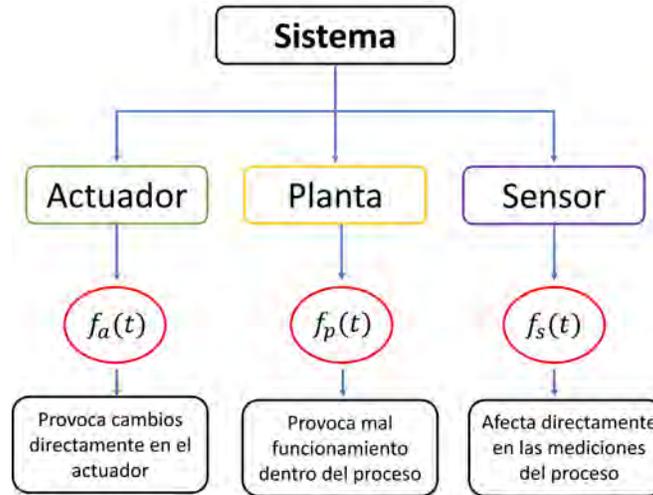


Fig. 2.1. Secciones del sistema donde se presentan fallas.

- **Falla:** Una falla es un evento que cambia el desempeño de un sistema, tal que el sistema ya no satisface el propósito para el cual fue diseñado. Por lo tanto, una falla en un solo componente puede cambiar el rendimiento del sistema en general.
- **Avería:** Una avería es una interrupción permanente de la capacidad de un sistema para realizar una función requerida en condiciones operativas específicas.
- **Mal funcionamiento:** Un mal funcionamiento es una irregularidad intermitente en el cumplimiento de una función deseada en el sistema.

El comité técnico del IFAC se dió a la tarea de realizar una clasificación de fallas basada en patrones aprendidos. En Blanke. et~al. (2006) se presenta la siguiente clasificación:

- **Falla abrupta:** La falla se manifiesta con un cambio repentino y puede ser modelada mediante una función tipo escalón donde se desconoce el tiempo de ocurrencia y desaparece también de la misma forma.
- **Falla incipiente:** Se manifiesta con un cambio de magnitud en las variables del sistema que va aumentando paulatinamente con respecto al tiempo y puede modelarse mediante una función tipo rampa con un tiempo de ocurrencia desconocido.
- **Falla intermitente:** Este tipo de fallas se considera que no tiene una evolución determinada

en el tiempo y frecuentemente solo se presenta en ciclos de trabajo de manera aleatoria y desaparece también de la misma forma.

2.1.1. Sistemas de detección y diagnóstico de fallas

El objetivo de los sistemas de detección y diagnóstico de fallas consiste principalmente en realizar una decisión binaria: es decir, que está bien o mal. Los sistemas de detección y diagnóstico de fallas no solo son importantes desde un punto de vista de seguridad, sino también desde el punto de vista de la confiabilidad del proceso, ya que es utilizado para monitorear el desempeño de un proceso real.

Dentro de los esquemas de detección y localización de fallas se encuentra la generación de residuos basados en observadores, los cuales permiten detectar la falla, como se muestra en la Figura 2.2. La base para la detección de fallas de este tipo de esquemas es la comparación de las salidas medidas y las salidas estimadas por el observador, en condiciones nominales de operación esta diferencia debe ser cero. En el caso de que exista la presencia de falla en el sistema, el residuo cambiará su valor.

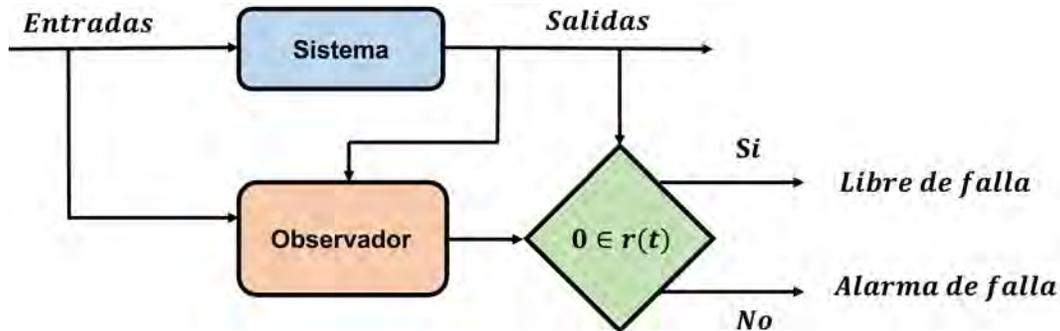


Fig. 2.2. Esquema de detección de fallas basado en observadores.

De acuerdo con Rodarte (2013) algunos conceptos importantes sobre los esquemas de generadores de residuos basado en observadores son:

- Residuo: Señal que contiene información de la falla, la cual es obtenida mediante la comparación entre la salida medida del sistema (original) y estimaciones obtenidas mediante un modelo del mismo.
- Síntoma: Es un indicador de falla, que se activa cuando ocurre cualquier desviación de un residuo diferente de cero.

- Umbral: Es un valor predefinido que se utiliza para predecir si los residuos indican la presencia de falla en el sistema.

La evaluación de la generación de residuos se realiza con el objetivo de detectar y aislar una falla, la cual debe analizarse mediante un umbral, el cual se determina considerando el ruido y las incertidumbres del modelo. En la Figura 2.3 se presenta una señal residual obtenida mediante el esquema de detección de fallas basado en observador.

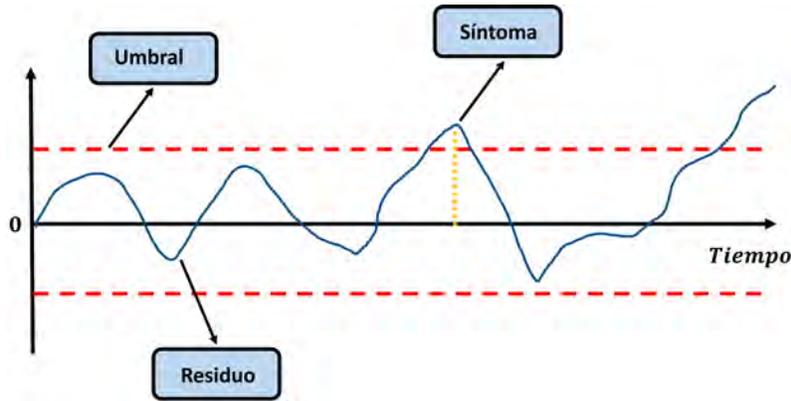


Fig. 2.3. Análisis residual.

2.2. Sistemas de parámetros variantes (LPV)

Un sistema lineal de parámetros variantes (LPV) es un modelo lineal de espacio de estados cuya dinámica varía en función de ciertos parámetros variables en el tiempo llamados parámetros de programación. Los modelos LPV se representan en forma de espacio de estados utilizando coeficientes dependientes de parámetros.

Considere un sistema Lineal Variante en el Tiempo (LTV) cuya dinámica está definida por la variación de un parámetro, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son los estados, la entrada y la salida. $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$ es un vector con parámetros variantes. Las matrices $A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$ dependen de la variación del

parámetro y C es una matriz de dimensiones apropiadas.

Los sistemas LPV se pueden diferenciar facialmente de los sistemas LTV, dado que los sistemas LTV consideran las variaciones conocidas, mientras que en los sistemas LPV las variaciones están contenidas en los parámetros variantes en el tiempo. Los modelos LPV son ampliamente utilizados para representar el comportamiento dinámico de sistemas no lineales en un amplio rango de operación. Una representación ampliamente usada para los modelos LPV es la politópica, en donde la característica principal es que los parámetros variantes en el tiempo se consideran acotados, por lo tanto, la representación LPV politópica se representa mediante un conjunto de sistemas lineales invariante en el tiempo (LTI) ponderados por una función dependiente de las trayectorias de los parámetros variantes.

2.2.1. Representación LPV Politópica

Esta representación obtiene el nombre de politópica porque los parámetros varían de manera afín dentro de un politopo convexo. La forma general de un sistema LPV con formulación politópica se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas. Las variables A_i , B_i y C son matrices reales conocidas, $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de parámetros variantes y $\mu_i(\rho(t))$ son las funciones de ponderación.

La representación politópica de un sistema LPV consiste en definir funciones de ponderación que permitan obtener las variables del sistema como la suma de los modelos definidos en cada vértice del politopo. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones.

$$0 \leq \mu_i(\rho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) = 1\tag{2.3}$$

donde el vector de parámetros variantes $\rho(t) = [\rho_1(t), \dots, \rho_k(t)]$, $\forall k = 1, \dots, N$ varía dentro del politopo convexo; N es el número de componentes del vector $\rho(t)$. El número de vértices del

politopo se define mediante la regla $M = 2^N$, donde cada componente de $\rho_k(t)$ se considera medible y acotado dentro de un intervalo $[\underline{\rho}_k, \overline{\rho}_k]$, $\forall k = 1, \dots, N$; $\overline{\rho}_k, \underline{\rho}_k$ son el límite superior e inferior de variación del parámetro $\rho_k(t)$.

2.2.2. Sistemas cuasi-LPV

Una de las representaciones ampliamente utilizadas dentro de los sistemas LPV politópicos, es la representación cuasi-LPV, la cual considera que el vector $\rho(t)$ en lugar de agrupar parámetros variantes, éste incorpora las no linealidades del modelo, las cuales se encuentran contenidas en las variables de estado (Briat (2015)).

Considere un modelo no lineal expresado de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son los estados, la entrada y la salida. C es una matriz de dimensiones apropiadas, $A(x(t))$ y $B(x(t))$ son matrices que dependen de funciones no lineales con respecto a los estados.

Definiendo las no linealidades de las matrices $A(x(t))$ y $B(x(t))$ como un vector medible $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$, el modelo (2.4) puede quedar expresado de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

De la cual se puede obtener una representación de la forma politópica.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde A_i , B_i y C son matrices reales conocidas, $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de r no linealidades y $\mu_i(\rho(t))$ son las funciones de ponderación.

2.2.3. Propiedades de los sistemas LPV

Considerando el sistema cuasi-LPV definido en la ecuación (2.6), se definen algunas propiedades importantes.

Análisis de controlabilidad de sistemas LPV

Se dice que el sistema descrito de la ecuación (2.6) es de estados controlables en $t = t_0$, solo si es posible construir una señal de control sin restricciones, la cual permita trasladar un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito. Para conocer si el sistema es completamente controlable se plantea la siguiente condición (2.7).

$$\text{rango} \begin{bmatrix} B & A_i B & \dots & A_i^{n-1} B \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (2.7)$$

la cual se conoce comúnmente como la matriz de controlabilidad (Ogata (2010)).

Análisis de observabilidad de sistemas LPV

La observabilidad es una propiedad que determina la capacidad de estimar los estados del sistema a través de las mediciones de salida y entrada (Ogata (2010)). La matriz de observabilidad para el sistema (2.6) está dada por la siguiente condición.

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^2 \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (2.8)$$

Análisis de estabilidad en sistemas LPV

La teoría de Lyapunov permite analizar la estabilidad de un sistema sin la necesidad de conocer sus valores propios. Dicha condición resulta de utilidad dado que los sistemas LPV tienen un número infinito de valores propios, esto debido al número de parámetros variantes. La estabilidad de los sistemas cuasi-LPV se define en Madrigal-Espinosa et al. (2017).

Una función de Lyapunov $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, que contiene un punto de equilibrio $x = 0$ tal que $x = 0 \in D$, y que cumpla con las siguientes desigualdades.

$$V(0) = 0 \quad (2.9)$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{0\} \quad (2.10)$$

$$\dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{0\} \quad (2.11)$$

Demostración. *Considere el siguiente sistema cuasi-LPV autónomo*

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) \quad (2.12)$$

el sistema (2.12) es cuadráticamente estable si y solo si existe una función cuadrática de Lyapunov $V(x) = x^T(t)Px(t)$, con una matriz P simétrica definida positiva $P > 0$, tal que

$$\dot{V}(x) = x^T(t)(A(x(t))^T P + P A(x(t)))x(t) < 0 \quad (2.13)$$

La estabilidad cuadrática de un sistema LPV implica la estabilidad global asintótica de su origen

2.3. Matrices Metzler y no negativas

Definición 1. *(Ifqir (2019)) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no-negativa (+) es una matriz en la que todos los elementos son estrictamente mayores que cero $A > 0$.*

Ejemplo: Considere una matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, donde cada elemento de la matriz A es mayor a cero.

Definición 2. *(Ifqir (2019)) La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada Metzler (M_z) si y solo si todos los elementos fuera de la diagonal son no-negativos.*

Ejemplo: Considere una matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, donde $A(1,2) = 1 > 0$ y $A(2,1) = 5 > 0$.

Lema 1. *(Kaczorek (2002)) La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es M_z si y solo si existe una constante $\eta \in \mathbb{R}$ que $A + \eta I_n \geq 0$.*

Considere una matriz A :

$$e^{At} > 0, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.14)$$

si solo si la matriz A es M_z .

Demostración. Se considera la expansión:

$$e^{At} = I_n + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots > 0 \quad (2.15)$$

donde la ecuación (2.14) se cumple para pequeños intervalos de tiempo $t > 0$ si solo si la matriz A es M_z .

Teniendo en cuenta la ecuación (2.14) se considera una matriz A M_z y un escalar $\eta > 0$ tal que

$$(A + \eta I_n)(-\eta I_n) = (-\eta I_n)(A + \eta I_n) \quad (2.16)$$

para obtener

$$e^{At} = e^{(A+\eta I_n)t-\eta I_n t} = e^{(A+\eta I_n)t} e^{(-\eta I_n)t} > 0 \quad (2.17)$$

donde $e^{(A+\eta I_n)t} > 0$ y $e^{(-\eta I_n)t} > 0$.

2.4. Sistemas positivos

Los sistemas positivos son aquellos donde todas las variables de estado y de salida son no negativas para cualquier entrada no negativa, esto quiere decir que la respuesta del sistema no presenta ningun comportamiento anormal dentro de un proceso real, como por ejemplo: la concentracion negativa de una sustancia, niveles de inventarios, la temperatura de un horno, etc. Dichos sistemas presentan una gran cantidad de ventajas con respecto a los sistemas en lazo cerrado, en las cuales se encuentran: robustez, rendimiento y simplicidad (Kaczorek (2002)).

2.4.1. Condición de positividad

- **Sistema continuo:** Considere el siguiente sistema lineal en tiempo continuo.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde

(i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz M_z .

(ii) $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ es una matriz $+$.

(iii) $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es una matriz $+$.

El sistema (2.18) es positivo si solo si las condiciones (i), (ii) y (iii) se cumplen.

- **Sistema discreto:** Considere el siguiente sistema lineal en tiempo discreto.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde

(i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz $+$.

(ii) $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ es una matriz $+$.

(iii) $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es una matriz $+$.

El sistema (2.19) es positivo si solo si las condiciones (i), (ii) y (iii) se cumplen.

2.5. Análisis intervalar

Definición 3. (Le (2013)) Un intervalo $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ es definido por el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}\}$

Considere los intervalos $[\underline{x}, \bar{x}]$ y $[\underline{y}, \bar{y}]$. Las operaciones aritméticas de un intervalo en términos de operaciones binarias, se describen como se muestra a continuación.

1. Suma

$$[\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

2. Resta

$$[\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$

3. Multiplicación

$$[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}] = [\min(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}), \max(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y})]$$

4. División

$$[\underline{x}, \bar{x}] / [\underline{y}, \bar{y}] = \left[\frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}} \right]$$

Definición 4. (Efimov et al. (2013)) Considere dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ donde se cumple $A \leq B$. La matriz A se puede descomponer como $A = A^+ - A^-$, donde $A^+ = \max\{0, A\}$ (el operador máximo se mantiene en cada elemento) y A^- se puede calcular como $A^- = A^+ - A$, de modo que $A^+, A^- \geq 0$. Las operaciones anteriores se extienden a cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Considere una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

- Evaluando todos los elementos de A mayores que 0 mediante el comando $A^+ = \max\{0, A\}$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

- Realizando la resta correspondiente para obtener $A^- = A^+ - A$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}}_{A^+} - \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^-} \quad (2.21)$$

Lema 2. (Efimov et al. (2013)) Sea $x(t) \in \mathbb{R}^n$ un vector con un intervalo $\bar{x}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$.

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante.

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x}(t) \leq Ax(t) \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x}$$

2. Sea $A, \underline{A}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz variable $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$

$$\underline{A}^+ \underline{x}^+ - \bar{A}^+ \underline{x}^- - \underline{A}^- \bar{x}^+ + \bar{A}^- \bar{x}^- \leq Ax \leq \bar{A}^+ \bar{x}^+ - \underline{A}^+ \bar{x}^- - \bar{A}^- \underline{x}^+ + \underline{A}^- \underline{x}^-$$

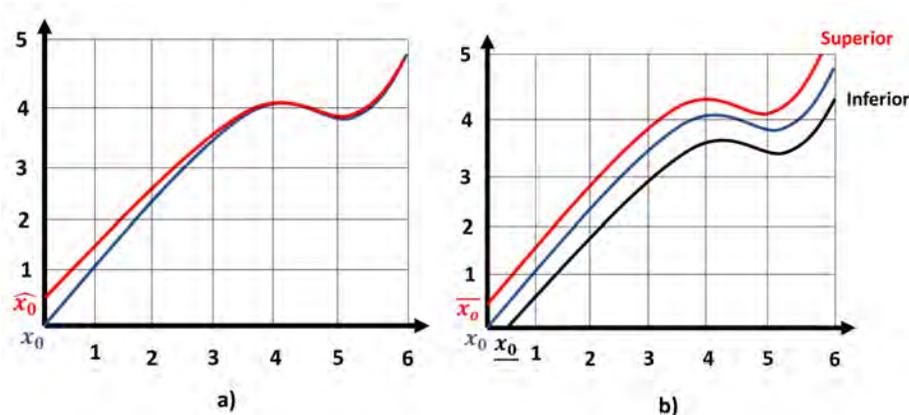


Fig. 2.4. Estimación intervalar.

2.6. Observador intervalar

Los observadores intervalares son recomendados cuando existen incertidumbres, variables acotadas pero desconocidas e incertidumbres paramétricas (por ejemplo: ruido, perturbaciones o incertidumbres paramétricas). Los observadores de intervalo proporcionan una estimación superior e inferior de las variables que se desean estimar, tal como se muestra en la Figura 2.4b.

Las estimaciones intervalares se pueden utilizar para añadir robustez en un sistema de diagnóstico de fallas. La ventaja de estos observadores es que, a pesar de la falta de conocimiento de la incertidumbre, el observador proporciona un rango de estimación garantizado donde se ubica el valor de la variable.

Algunas de las características que describen a los observadores intervalares son las siguientes.

- Se obtienen resultados favorables cuando se estudian sistemas con incertidumbres.
- La técnica intervalar garantiza información sobre el estado desconocido del sistema en cualquier instante de tiempo $t \geq 0$, mientras que el observador clásico solo proporciona una estimación asintótica hacia los estados del sistema, tal como se muestra en la Figura (2.4a).
- La amplitud del intervalo proporciona en todo momento una indicación acerca de la estimación.

2.6.1. Estructuras de observadores intervalares

Considerando el siguiente sistema LTI en tiempo continuo.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.22}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son las salidas medibles. A , B , C son matrices reales conocidas de dimensiones apropiadas.

- **Estructura intervalar tipo Luenberger**

La estructura de un observador intervalar tipo Luenberger para un sistema (2.22) en tiempo continuo se muestra a continuación (Gu et al. (2019)).

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + Bu(t) + \bar{L}(y(t) - \bar{y}(t)) \\ \bar{y}(t) &= C\bar{x}(t)\end{aligned}\tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) + \underline{L}(y(t) - \underline{y}(t)) \\ \underline{y}(t) &= C\underline{x}(t)\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde $\bar{x}(t)$ y $\underline{x}(t)$ son las estimaciones intervalares de $x(t)$, las variables \bar{L} y \underline{L} son las ganancias del observador usadas para calcular las cotas inferiores y superiores de los estados estimados, $\underline{y}(t)$ y $\bar{y}(t)$ representa las salidas intervalares estimadas de $y(t)$ y $u(t)$ es el vector de entradas.

- **Estructura intervalar de entradas desconocidas (UIO)**

La estructura de un observador intervalar tipo UIO para un sistema (2.22) en tiempo continuo se muestra a continuación (Tian et al. (2020)).

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}(t) &= TA\bar{x}(t) + TBu(t) - \bar{L}(y(t) - \bar{y}(t)) \\ \bar{x}(t) &= \bar{z}(t) + Hy(t) \\ \bar{y}(t) &= C\bar{x}(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{\hat{x}}}(t) &= TA\underline{\hat{x}}(t) + TBu(t) - \underline{L}(y(t) - \underline{\hat{y}}(t)) \\
 \underline{\hat{x}}(t) &= \underline{z}(t) + Hy(t) \\
 \underline{\hat{y}}(t) &= C\underline{\hat{x}}(t)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde $\underline{\hat{z}}(t)$ y $\underline{\hat{x}}(t)$ representa el vector intervalar de estados desconocidos, $\overline{\hat{x}}(t)$ y $\underline{\hat{x}}(t)$ son las estimaciones intervalares de $x(t)$, $\underline{\hat{y}}(t)$ y $\overline{\hat{y}}(t)$ representa las salidas intervalares estimadas de $y(t)$ y $u(t)$ es el vector de entradas y T, H, \overline{L} y \underline{L} son las ganancias locales del observador las cuales permiten tener varios grados de libertad.

▪ **Estructura intervalar de generalizada entradas desconocidas (G-UIO)**

La estructura de un observador intervalar tipo G-UIO para un sistema (2.22) en tiempo continuo se muestra a continuación (Ifqir et~al. (2018)).

$$\begin{aligned}
 \dot{\overline{\hat{x}}}(t) &= N\overline{\hat{x}}(t) + Ky(t) + Gu(t) - H\dot{y}(t) \\
 \overline{\hat{y}}(t) &= C\overline{\hat{x}}(t)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{\hat{x}}}(t) &= N\underline{\hat{x}}(t) + Ky(t) + Gu(t) - H\dot{y}(t) \\
 \underline{\hat{y}}(t) &= C\underline{\hat{x}}(t)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde $\overline{\hat{x}}(t)$ y $\underline{\hat{x}}(t)$ son las estimaciones intervalares de $x(t)$, las variables N, K, G, H son las ganancias del observador usadas para calcular las cotas inferiores y superiores de los estados estimados, $\underline{\hat{y}}(t)$ y $\overline{\hat{y}}(t)$ representa las salidas intervalares estimadas de $y(t)$ y $u(t)$ es el vector de entradas.

2.7. Estabilidad de entrada-estado (ISS)

La estabilidad de entrada-estado (ISS) es un concepto utilizado para describir la estabilidad de sistemas de control no lineales con entradas exógenas. Es una medida cualitativa de la estabilidad desde los estados iniciales y las entradas (Grüne (2002)). La propiedad ISS proporciona un marco

natural para formular nociones de estabilidad con respecto a las perturbaciones de entrada. En términos simples, se dice que un sistema es estable de entrada-estado si existe una constante tal que la magnitud del estado del sistema está limitada por una función de la magnitud de la entrada. Esto significa que la salida del sistema permanece acotada incluso cuando la entrada no se encuentra acotada (Vu et al. (2007)).

Definición 5. Una función α_2 es una función K si y solo si es continua y estrictamente creciente con $\alpha_2(0) = 0$.

Definición 6. Una función $\alpha_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función KL si, para cada instante $t \geq 0$, la función $\alpha_1(\cdot, t)$ es una función K , y para cada paso de muestreo $s \geq 0$, la función $\alpha_1(s, \cdot)$ es decreciente con $\alpha_1(s, t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$

Lema 3. (A.Yu. Aleksandrov (2019)) Considere el siguiente sistema politópico

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + \zeta(t) \quad (2.29)$$

donde la variable $\zeta(t)$ es considerada como una entrada exógena desconocida pero acotada.

El sistema (2.29) se considera ISS si y solo si existe una función KL y una función K , tal que para cada señal de entrada exógena $\zeta(t)$ que cumpla con la norma $\|\zeta(t)\|_\infty < \infty$, para cualquier condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, la trayectoria asociada a la condición inicial $x(0)$ y la entrada exógena $\zeta(t)$ satisface la siguiente ecuación.

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1(\|x(0)\|, t) + \alpha_2(\|\zeta(t)\|_\infty) \quad (2.30)$$

En general, el concepto ISS es una propiedad crucial en el análisis de estabilidad de sistemas de control no lineales y tiene implicaciones para el desarrollo de estrategias de control, las cuales aseguran la estabilidad y confiabilidad de múltiples sistemas.

2.8. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se mostraron alguno de los conceptos básicos de fallas, características y representaciones de las mismas, así como los conceptos, definiciones y lemas utilizados para el diseño de observadores intervalares los cuales se trabajan a lo largo de este tema de tesis.

Capítulo 3

Caso de estudio

En este capítulo se aborda de forma muy general el funcionamiento de un robot de articulación flexible, así como la clasificación de sus componentes y articulaciones. También se muestra el modelo matemático no lineal de un robot de articulación flexible, así mismo, se realiza una representación en espacio de estados del modelo no lineal, ya que a partir de dicha representación se obtiene el modelo cuasi-LPV presentado en este trabajo.

En la Sección 3.1 se abordan conceptos y clasificaciones sobre el funcionamiento de un robot de articulación flexible.

En la Sección 3.2 se presenta el modelo no lineal de un robot de articulación flexible con el cual se trabajará, su nomenclatura y las pruebas de evaluación.

En la Sección 3.3 se presenta el diseño de un sistema cuasi-LPV, el cual se obtiene por medio del sistema no lineal, así mismo, se llevan a cabo las pruebas de evaluación del mismo.

3.1. Robots de articulación flexible

Dentro de la industria, los robots flexibles han despertado un gran interés, ya que ofrecen una gran cantidad de ventajas en términos de adaptabilidad, modularidad y eficiencia en diversas aplicaciones, especialmente en la industria aeroespacial. La dinámica de estos robots es muy compleja, lo que ha atraído el interés de muchos investigadores en campos como la mecánica (diseños de robots con nuevas propiedades dinámicas) y el control automático (desarrollo de nuevos sistemas

de control).

Los robots de articulación flexible son robots que están equipados con articulaciones giratorias. Las articulaciones permiten un rango completo de movimiento, ya que giran a través de múltiples planos, y aumentan considerablemente las capacidades del robot. La Figura 3.1 muestra la configuración de un robot de articulación flexible. En términos amplios, un robot flexible es aquel que incluye algún elemento con un cierto grado de flexibilidad. La propiedad de flexibilidad dentro de la ingeniería mecánica se refiere a la deformación elástica de una pieza ante la aplicación de una fuerza o par.



Fig. 3.1. Esquema de un robot de articulación flexible.

En el área de la robótica se consideran dos tipos de flexibilidad, las cuales se encuentran en eslabones y articulaciones.

La **flexibilidad en las articulaciones** de un robot, se refiere a la conexión de motores y eslabones, la cual brinda el movimiento del robot. Los robots articulados son capaces de realizar movimientos en varias direcciones, lo que les permite adaptarse a tareas diversas y trabajar en espacios confinados. La flexibilidad de estas articulaciones es lo que hace que los robots articulados sean tan valiosos para una amplia gama de aplicaciones en la industria. La Figura 3.2 muestra el comportamiento de la flexibilidad dentro de las articulaciones del motor.

La **flexibilidad en los eslabones** de un robot, se refiere a la deflexión resultante en cada eslabón,

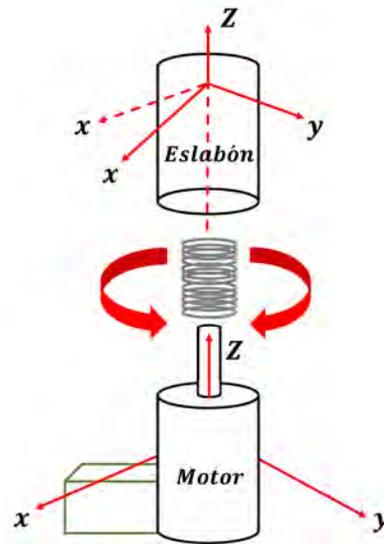


Fig. 3.2. Esquema de articulación flexible

debido a movimientos bruscos que se generan al momento de transportar cargas pesadas o a la generación de grandes fuerzas aplicadas en el extremo del brazo del robot. El fenómeno de la deflexión se muestra en la Figura 3.3. En Batalle (2010) se representa la siguiente clasificación:

- **Flexional:** En este tipo de deflexión, el eslabón se curva de forma lateral, pero sin existir un movimiento de giro en torno al eje longitudinal. Por lo tanto, la sección transversal de dicho elemento se mantiene intacta.
- **Torsional:** En la deflexión de tipo torsional, como su nombre lo indica, se percibe una rotación de la sección transversal del elemento en torno al eje longitudinal del elemento, o el centro de cualquier sección transversal.
- **Flexo-torsional:** En la deflexión tipo flexo-torsional, en donde el eslabón sufre ambos tipos mencionados anteriormente en simultáneo, el eslabón se ve flectado y girado al mismo tiempo. Pero éste no presenta cambios en la sección transversal.

3.1.1. Elementos de un robot de articulación de flexible

- **Eslabones:** Los eslabones en un robot de articulación flexible son los elementos que conforman la estructura mecánica del robot y están unidos mediante articulaciones que permiten

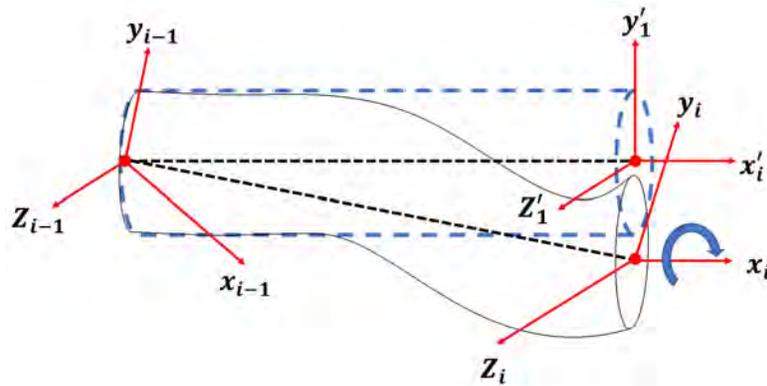


Fig. 3.3. Esquema de flexibilidad en eslabones

el movimiento relativo entre cada dos eslabones sucesivos. En algunos casos, los eslabones pueden presentar flexibilidad en la articulación debido al desplazamiento dinámico que se introduce entre la posición de los actuadores y de los eslabones.

- **Actuadores:** Los actuadores en un robot de articulación flexible son los componentes que transforman las señales de control de velocidad y posición en un movimiento de cada una de las articulaciones del robot. En los robots de articulación flexible, los actuadores pueden ser neumáticos, hidráulicos o eléctricos, y su función es proporcionar la energía necesaria para mover los eslabones y las articulaciones del robot. En algunos casos, los actuadores pueden estar integrados en las articulaciones para proporcionar una mayor flexibilidad y movilidad.
- **Sistema sensorial:** Los sensores en un robot de articulación flexible tienen la función de proporcionar información sobre el entorno y el estado del robot para permitir su control y operación. Los sensores más comunes utilizados en robots de articulación flexible son el acelerómetro y la galga extensiométrica, que miden la aceleración y la deformación, respectivamente. Además, se pueden utilizar cámaras de visión para medir la posición del extremo del robot. Los sensores también pueden ser utilizados para medir la fuerza y el par en las articulaciones, lo que permite al robot ajustar su movimiento y fuerza en respuesta a cambios en el entorno.
- **Articulaciones:** Las articulaciones en un robot de articulación flexible desempeñan un papel crucial en la movilidad y la flexibilidad del robot. Las articulaciones flexibles permiten que el robot se deforme y se ajuste a diferentes situaciones, lo que mejora su capacidad para

interactuar con el entorno y realizar tareas complejas.

3.2. Modelo matemático de un robot de articulación flexible de un eslabón

En Rajamani and Cho (1998) se describe el modelo matemático no lineal que representa el comportamiento de un robot manipulador de un eslabón accionado por un sistema de motor DC, el cual se muestra en la Figura 3.4.

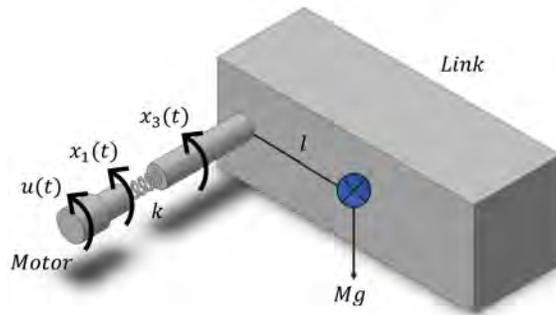


Fig. 3.4. Diagrama de un robot flexible de un grado de libertad construido en aluminio y montado en voladizo.

Las ecuaciones dinámicas del sistema se expresan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\frac{b_V x_2(t)}{J} - \frac{k(x_1(t) - x_3(t))}{J} + \frac{k_\tau}{J}(u(t)) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= -\frac{Mgl \sin(x_3(t))}{I} - \frac{k(x_3(t) - x_1(t))}{I}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $x_1(t)$ es el desplazamiento angular del motor (rad), la velocidad angular del motor es $x_2(t)$ (rad/s), $x_3(t)$ es el desplazamiento angular del eslabón (rad), y $x_4(t)$ es la velocidad angular del eslabón (rad/s). $u(t)$ es el par torsional del motor (Nm), $y(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ son las salidas medidas del sistema. La descripción de los parámetros se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1. Definición de parámetros

Parámetro	Valor	Definición
g	$9.81m/s^2$	Gravedad
M	$0.31Kg$	Masa del eslabón
l	$0.15m$	Centro de masa del eslabón
k	$0.18Nm/rad$	Coefficiente de elasticidad
b_v	$0.0083Nms/rad$	Coefficiente de fricción viscosa
k_τ	$0.08Nm/V$	Ganancia de amplificación
J	$0.0037Kgm^2$	Inercia del motor
I	$0.0093Kgm^2$	Inercia del eslabón

Representación matricial del modelo

La representación matricial en variables de estado del modelo no lineal está dada por la siguiente representación.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b_v}{J} & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & 0 & -\frac{k}{I} - \frac{Mgl \operatorname{sen}(x_3(t))}{I} & \frac{Mgl \operatorname{sen}(x_3(t))}{I} x_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_\tau}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.2)$$

La característica no lineal del modelo está contenida en el término; $-\frac{k}{I} - \frac{Mgl \operatorname{sen}(x_3(t))}{I} x_3(t)$

3.2.1. Simulación del modelo no lineal

El objetivo de esta simulación es mostrar el comportamiento de cada una de las variables de estado del modelo no lineal. Las simulaciones se llevaron a cabo en la plataforma MATLAB/Simulink *R2020b* con un método de solución y tiempo de muestreo seleccionado automáticamente por Matlab. El sistema es simulado teniendo en cuenta las siguientes condiciones iniciales $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ con una entrada $u(t)$ descrita en la Figura 3.5. Las pruebas de valuación se ilustran en las Figuras 3.6 - 3.9.

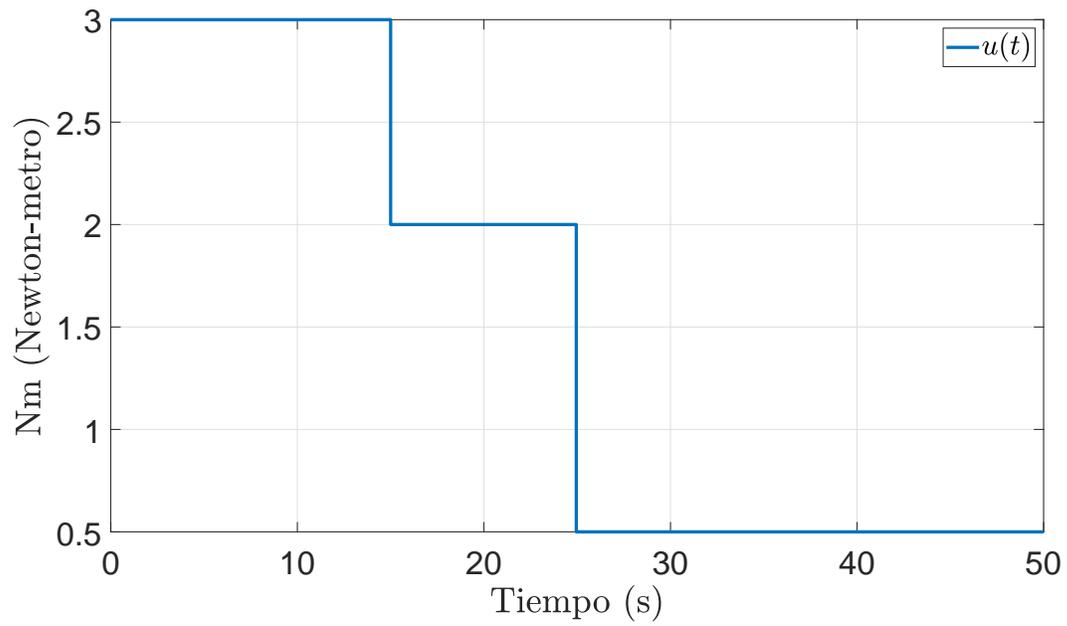


Fig. 3.5. Torque de alimentación $u(t)$.

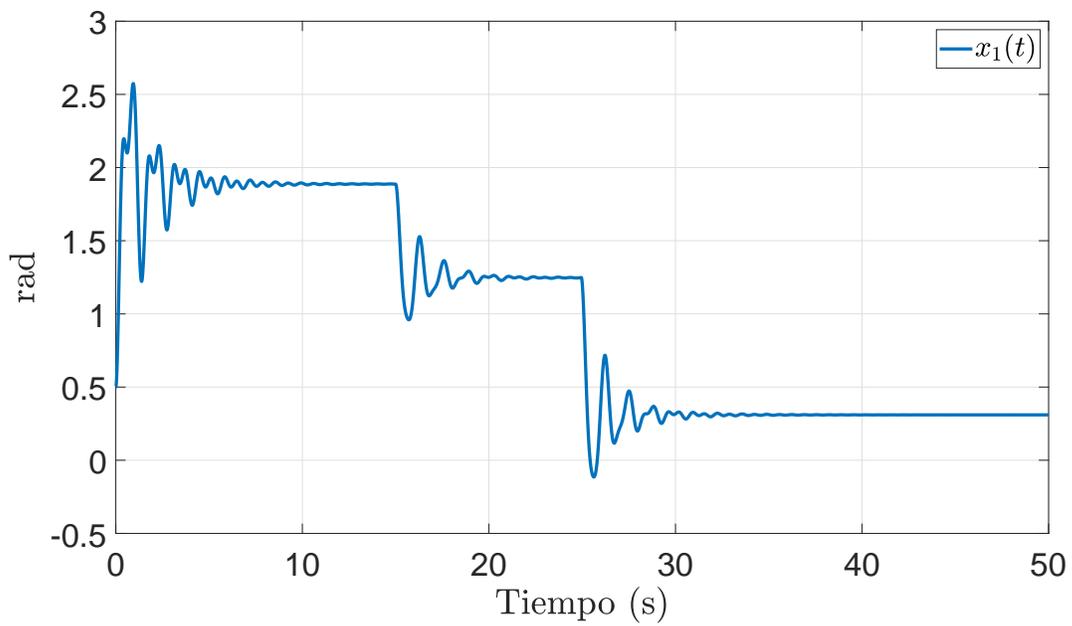


Fig. 3.6. Desplazamiento angular del motor (x_1).

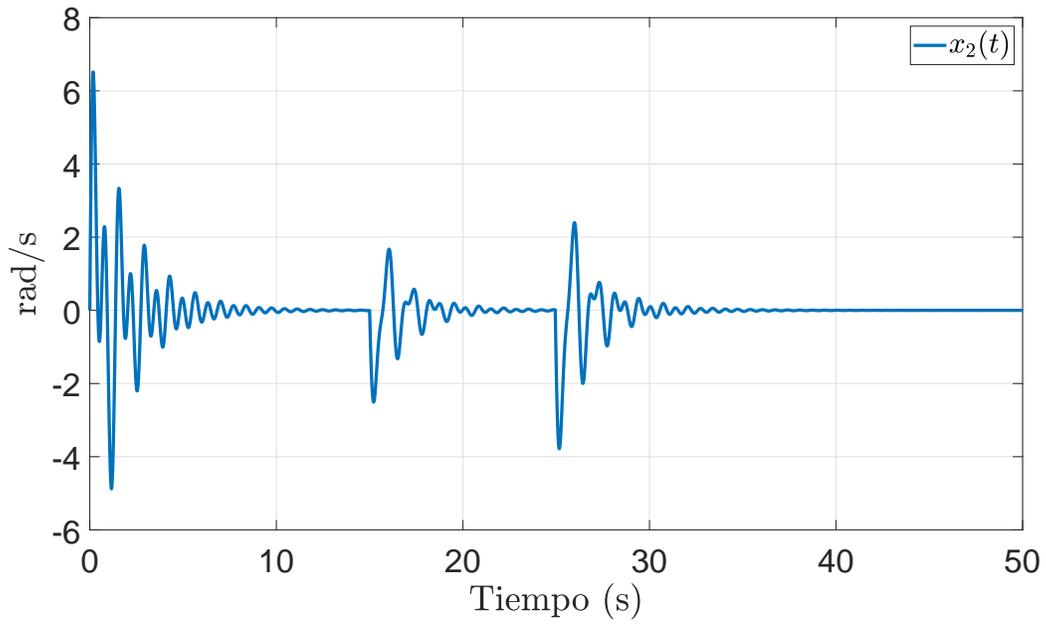


Fig. 3.7. Velocidad angular del motor (x_2).

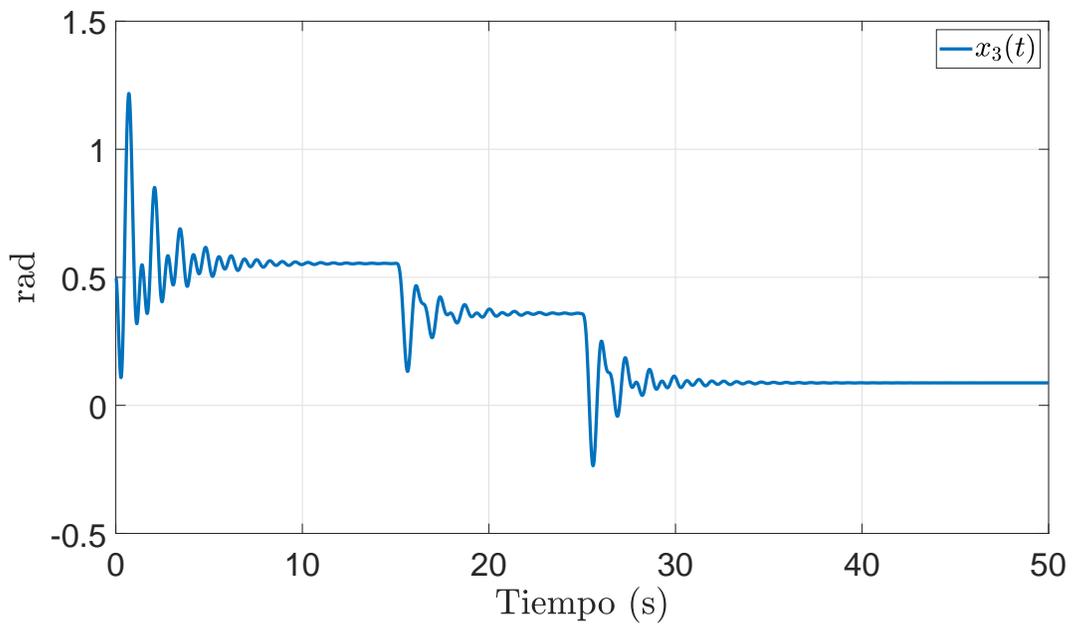


Fig. 3.8. Desplazamiento angular del eslabón (x_3).

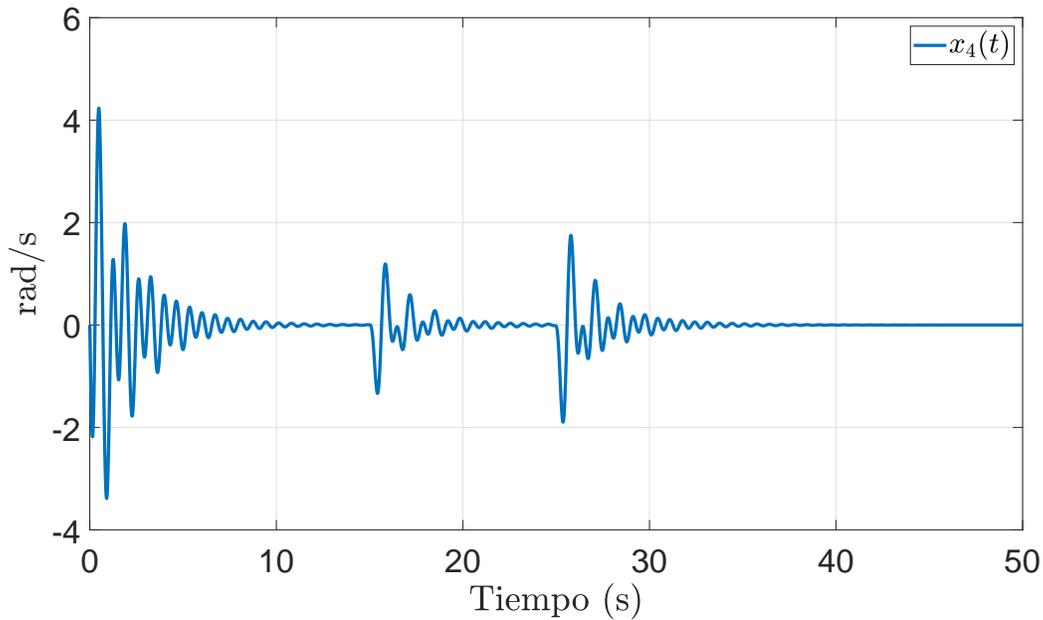


Fig. 3.9. Velocidad angular del eslabón (x_4).

Se puede apreciar que en la Figura 3.6 el motor del robot, presenta una cierta dificultad para mover el eslabón, ya que en cada cambio de par de entrada se generan pequeñas oscilaciones, las cuales se estabilizan en un periodo de 5s. La Figura 3.7 muestra el tiempo que tarda en llegar el motor a una posición deseada. El mismo comportamiento se presenta en la Figura 3.8, donde se puede apreciar que el eslabón se estabiliza en 6s y la Figura 3.9 muestra el tiempo que tarda en llegar el eslabón al estado estable.

3.3. Modelo Cuasi-LPV

3.3.1. Obtención del modelo cuasi-LPV

El modelo que describe el comportamiento del robot de articulación flexible de un solo eslabón (3.1) contiene una no linealidad $\sin(x_3(t))$. Estas ecuaciones se puede representar mediante un enfoque lineal utilizando una representación cuasi-LPV.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\text{donde } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}, A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b_V}{J} & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & 0 & \rho(t) & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_\tau}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definiendo $\rho(t)$ como la agrupación de parámetros variantes, se puede expresar mediante la siguiente ecuación.

$$\rho(t) = -\frac{k}{I} - \frac{Mgl \operatorname{sen}(x_3(t))}{I x_3(t)} \quad (3.4)$$

el cual se encuentra acotada dentro de los intervalos $[\bar{\rho}, \underline{\rho}]$ como se muestra en la Tabla 3.2

Tabla 3.2. Valores máximos y mínimos

$\rho(t)$	$\bar{\rho}$	$\underline{\rho}$
$\rho(t)$	-56	-70

donde $\bar{\rho}$ y $\underline{\rho}$ denotan los valores máximos y mínimos de la no linealidad. Los valores de la Tabla 3.2 son obtenidos al considerar la entrada $u(t)$ de la Figura 3.5. De forma gráfica se muestra en la Figura 3.10.

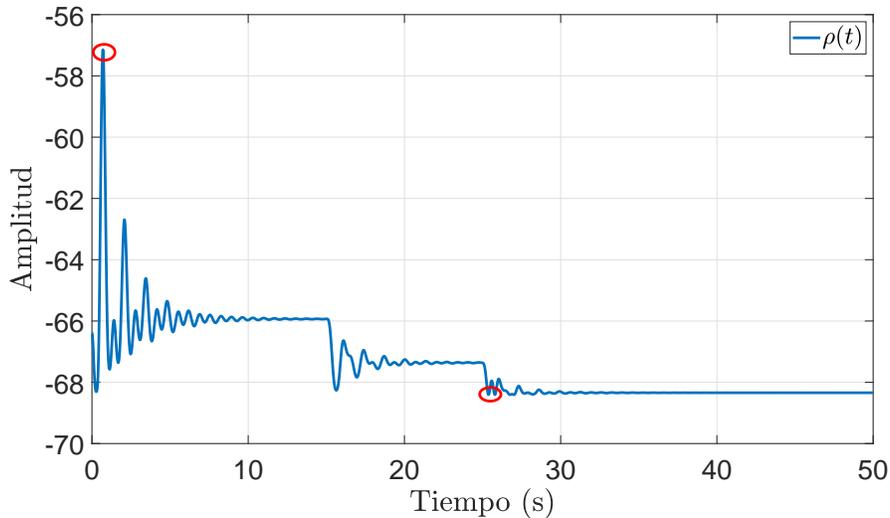


Fig. 3.10. Dinámica de la no linealidad $\rho(t)$.

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como se muestra a continuación.

$$\mu_1(\rho(t)) = \frac{\bar{\rho} - \rho(t)}{\bar{\rho} - \underline{\rho}}, \quad \mu_2(\rho(t)) = \frac{\rho(t) - \underline{\rho}}{\bar{\rho} - \underline{\rho}} \quad (3.5)$$

Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones.

$$0 \leq \mu_i(\rho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) = 1 \quad (3.6)$$

donde $M = 2^N$ es número de combinaciones posibles de los límites de los parámetros variables. Para el caso de estudio se considera $N = 1$.

En la Figura 3.11 se presenta el comportamiento de las funciones de ponderación, donde cada señal representa la participación de cada modelo local, las cuales nos permiten obtener la dinámica global del modelo no lineal descrito en (3.1).

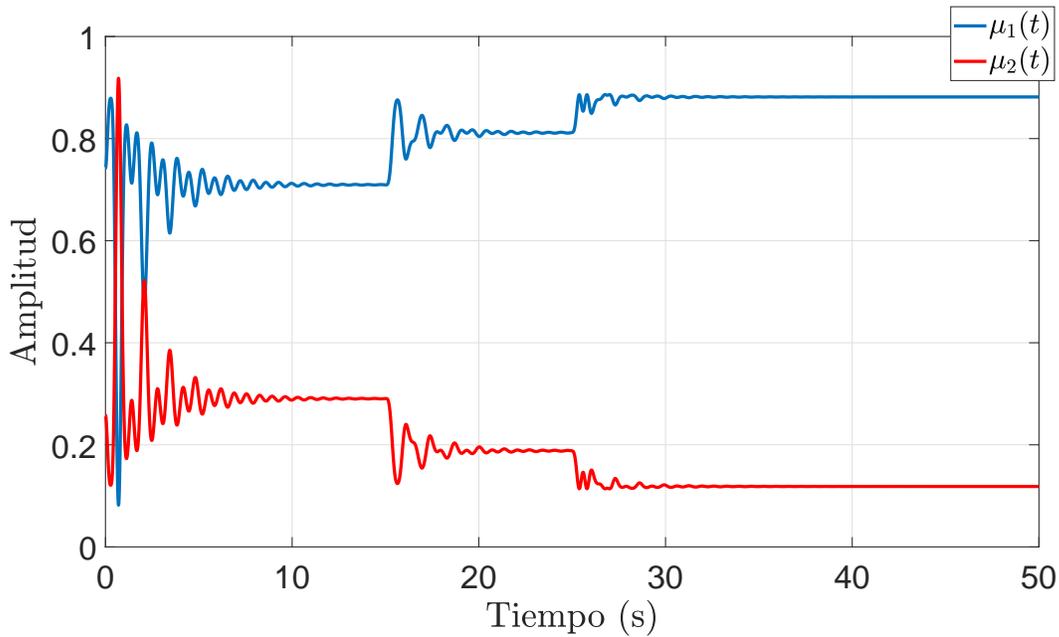


Fig. 3.11. Dinámica de las funciones de ponderación.

Para cada función de ponderación descrita en la ecuación (3.5) le corresponde un conjunto difuso al sustituir los valores máximos y mínimos de cada variable premisa. Ahora, el sistema (3.3) puede ser expresado en su formato cuasi-LPV como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b_V}{J} & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & 0 & \underline{\rho} & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b_V}{J} & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & 0 & \bar{\rho} & 0 \end{bmatrix}$, las matrices B y C se definen en (3.3).

Remplazando los valores de los parámetros de la Tabla 3.1 en el sistema (3.7), se obtienen las siguientes matrices.

$$A_1(\underline{\rho}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.64 & -2.24 & 48.64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.35 & 0 & -70 & 0 \end{bmatrix}, A_2(\bar{\rho}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.64 & -2.24 & 48.64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.35 & 0 & -56 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.62 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Los eigenvalores de las matrices A_i de los vértices del politopo tiene parte real negativa con valores imaginarios, por lo tanto, se consideran sistemas locales estables, tal como muestran a continuación.

$$\lambda(A_1) = \begin{bmatrix} -0.3608 + 9.4932i \\ -0.3608 - 9.4932i \\ -0.7608 + 5.1692i \\ -0.7608 - 5.1692i \end{bmatrix} \quad \lambda(A_2) = \begin{bmatrix} -0.4802 + 9.0182i \\ -0.4802 - 9.0182i \\ -0.6414 + 4.6311i \\ -0.6414 - 4.6311i \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.3.2. Estabilidad del sistema cuasi-LPV

El sistema cuasi-LPV descrito en (3.7), con la definición de las matrices en (3.8) y las funciones de ponderación descritas en (3.5), es estable, debido a que existe una matriz simétrica definida positiva ($P > 0$), dado que:

$$P = \begin{bmatrix} 1.2659 & 0.0498 & -0.5719 & 0.1011 \\ 0.0498 & 0.0328 & -0.1102 & 0.0189 \\ -0.5719 & -0.1102 & 3.3982 & -0.0651 \\ 0.1011 & 0.0189 & -0.0651 & 0.0666 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

con los siguientes valores propios positivos.

$$\lambda(P) = \begin{bmatrix} 0.0226 \\ 0.0637 \\ 1.1290 \\ 3.5482 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta los vértices del sistema cuasi-LPV, se definen las siguientes matrices $(A_i(\bar{\rho}_k, \underline{\rho}_k))^T P + PA_i(\bar{\rho}_k, \underline{\rho}_k)$ definidas negativas.

- Para el vértice 1

$$A_1(\underline{\rho}_1)^T P + PA_1(\underline{\rho}_1) = \begin{bmatrix} -0.9290 & -0.0753 & -0.5585 & -0.2037 \\ -0.0753 & -0.0476 & -0.0535 & -0.0515 \\ -0.5585 & -0.0535 & -1.5978 & -0.3418 \\ -0.2037 & -0.0515 & -0.3418 & -0.1303 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

con los siguientes valores propios

$$\lambda(A_1(\underline{\rho}_1)^T P + PA_1(\underline{\rho}_1)) = \begin{bmatrix} -2.0035 \\ -0.6153 \\ -0.0753 \\ -0.0107 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

- Para el vértice 2

$$A_2(\bar{\rho}_2)^T P + PA_2(\bar{\rho}_2) = \begin{bmatrix} -0.9290 & -0.0753 & 0.8572 & -0.2037 \\ -0.0753 & -0.0476 & 0.2114 & -0.0515 \\ 0.8572 & 0.2114 & -3.4219 & 0.5903 \\ -0.2037 & -0.0515 & 0.5903 & -0.1303 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

con los siguientes valores propios

$$\lambda(A_2(\bar{\rho}_2)^T P + PA_2(\bar{\rho}_2)) = \begin{bmatrix} -3.8086 \\ -0.6634 \\ -0.0422 \\ -0.0147 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.3.3. Validación del modelo cuasi-LPV

Las siguientes pruebas tienen el propósito de evaluar la similitud del modelo c-LPV con respecto al modelo no lineal, evaluando las respuestas dinámicas de las variables de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$ del modelo no lineal (3.1) y el modelo cuasi-LPV (3.7).

En las Figuras 3.12 - 3.15 se muestran las respuestas de las variables de ambos modelos, las cuales tienen una tendencia dinámica similar. Las simulaciones se llevaron a cabo en la plataforma de simulación Matlab/Simulink R2020b, con un método de solución y tiempo de muestreo seleccionado automáticamente por Matlab, las condiciones iniciales son las mismas para el sistema cuasi-LPV como para el modelo no lineal y son: $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ con una entrada $u(t) = 1Nm$.

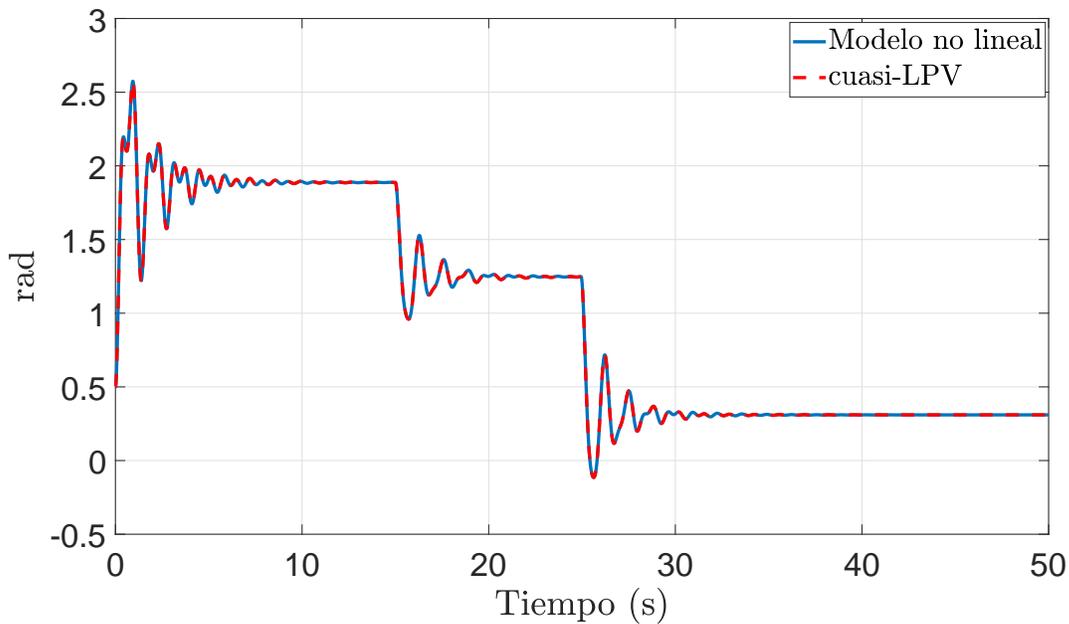


Fig. 3.12. Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_1(t)$).

En las Figuras 3.12 - 3.15 se puede observar que el sistema cuasi-LPV representado por la línea punteada roja mantiene el comportamiento del modelo no lineal representado por la línea azul, esto se debe a la información que brinda cada una de las funciones de pertenencia ilustradas en la Figura 3.11.

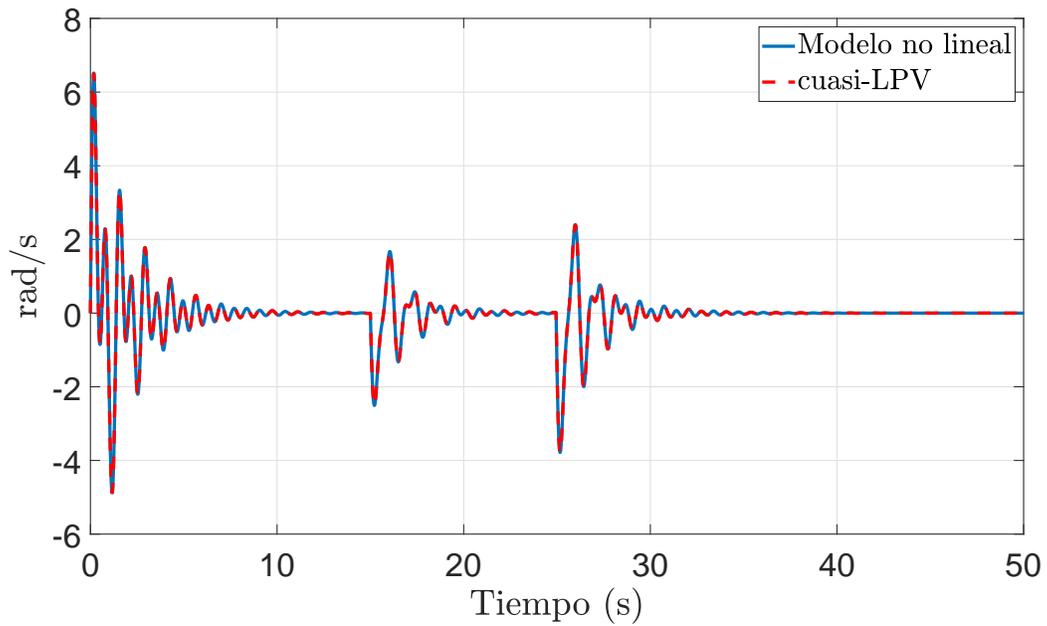


Fig. 3.13. Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_2(t)$).

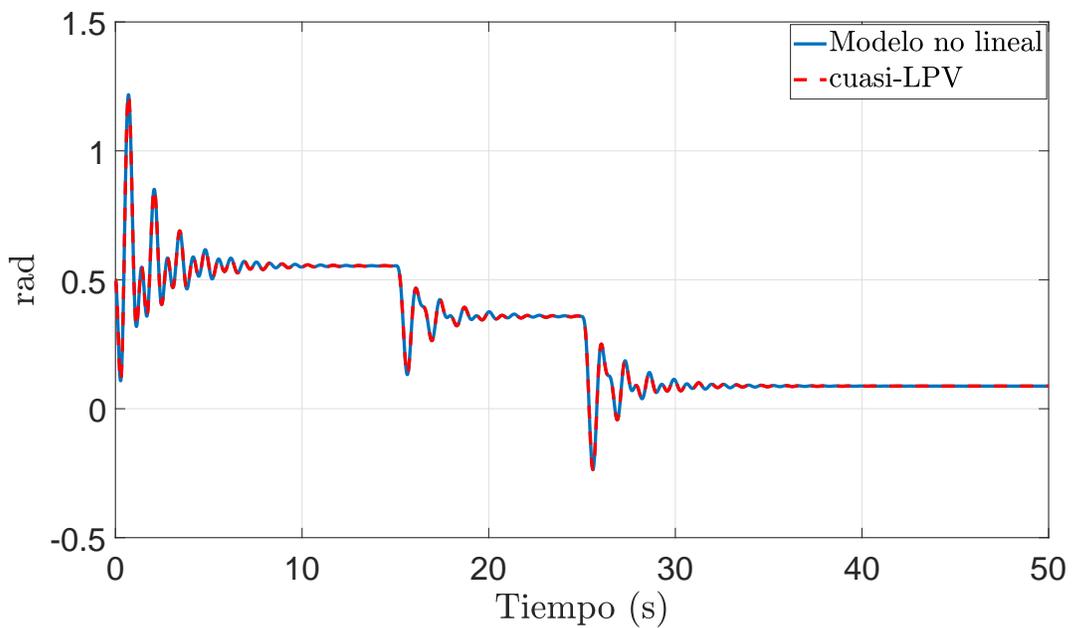


Fig. 3.14. Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_3(t)$).

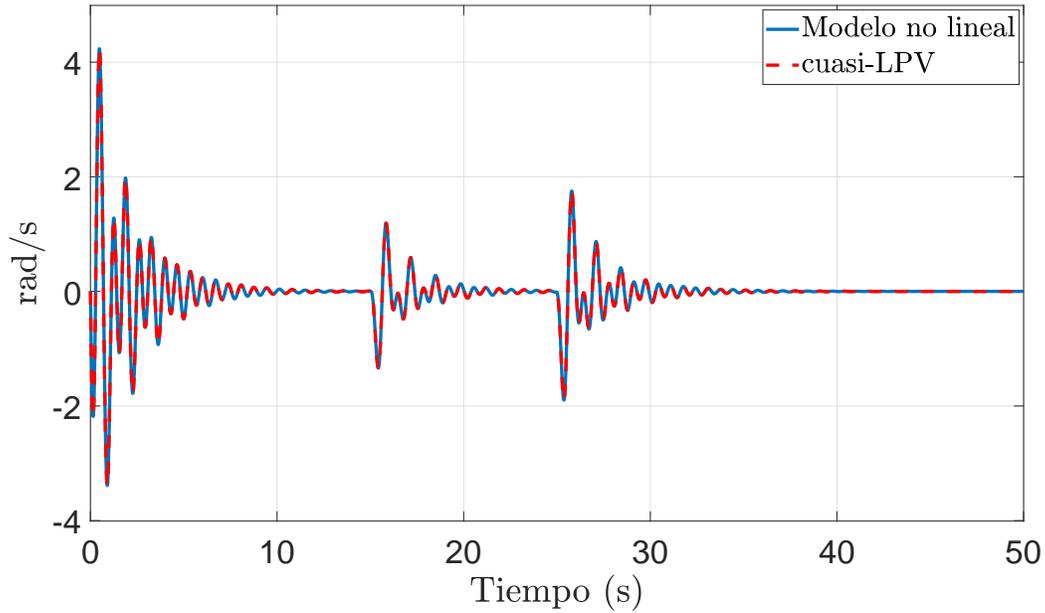


Fig. 3.15. Comparación del modelo no lineal respecto al modelo cuasi-LPV ($x_4(t)$).

3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el modelo no lineal de un robot de articulación flexible de un solo grado de libertad. Posteriormente, se obtuvo una representación matricial del modelo el cual fue utilizado para diseñar un sistema cuasi-LPV. En el diseño del sistema cuasi-LPV se obtuvieron dos modelos locales, los cuales representan de manera exacta el comportamiento del modelo no lineal.

Capítulo 4

Diseño de observadores intervalares

En este capítulo se presenta el diseño de dos observadores intervalares, los cuales son utilizados para el desarrollo de diferentes esquemas de estimación de estados, detección y diagnóstico de fallas.

El primer diseño de observador intervalar se basa en la estructura de un observador Luenberger, el cual es modificado añadiendo grados de libertad adicionales. El observador intervalar Luenberger modificado es utilizado para diseñar un esquema de detección de fallas, el cual proporciona señales residuales intervalares, las cuales son utilizadas para detectar y aislar la falla que se presenta en las variables de salida del sistema. Posteriormente, el observador intervalar Luenberger modificado también es utilizado para el diseño de un esquema de diagnóstico de fallas, el cual permite obtener la estimación intervalar de estados y fallas.

El segundo diseño de observador intervalar se basa en la estructura de un observador proporcional generalizado, el cual cuenta con múltiples grados de libertad. El observador intervalar proporcional generalizado (IGPO) es utilizado para realizar un esquema de estimación de estados. Posteriormente, el observador IGPO también es utilizado para el diseño de un esquema de detección y localización de fallas, el cual permite obtener la estimación intervalar de estados y fallas.

4.1. Diseño del observador intervalar Luenberger modificado

En esta sección se presenta el diseño de un observador intervalar Luenberger modificado para la estimación de estados, en donde se considera un sistema cuasi-LPV en presencia de una entrada

exógena. El sistema cuasi-LPV se representa de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables de salidas medidas, $E \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la matriz de distribución de perturbación y $w(t) \in \mathbb{R}^r$ es una entrada exógena como perturbación. Las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ son conocidas y de dimensiones apropiadas.

Antes de introducir la estructura del observador de intervalar, se consideran las siguientes suposiciones.

Suposición 4.1.1. *Los valores exactos de $w(t)$ son desconocidos pero considerados dentro de un intervalo, es decir:*

$$\underline{w}(t) \leq w(t) \leq \bar{w}(t)\tag{4.2}$$

Suposición 4.1.2. *El vector de estado inicial $x(0)$ satisface*

$$\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)\tag{4.3}$$

donde $\underline{x}(0), \bar{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ son vectores constantes.

Suposición 4.1.3. *Sea $E \in \mathbb{R}^{n \times r}$ una matriz constante y $w(t) \in \mathbb{R}^r$, considerando el Lema 2 y la Suposición 4.1.1, obtenemos*

$$E^+ \underline{w}(t) - E^- \bar{w}(t) \leq Ew(t) \leq E^+ \bar{w}(t) - E^- \underline{w}(t)\tag{4.4}$$

Para el sistema cuasi-LPV de tiempo continuo (4.1), se propone el siguiente observador de intervalos.

$$\dot{\bar{\zeta}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))((TA_i - L_i C)\bar{x}(t) + TB_i u(t) + L_i y(t)) + \Delta\tag{4.5}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{\zeta}(t) + Ny(t)\tag{4.6}$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t)\tag{4.7}$$

$$\dot{\underline{\zeta}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))((TA_i - L_i C)\underline{\hat{x}}(t) + TB_i u(t) + L_i y(t)) + \nabla \quad (4.8)$$

$$\underline{\hat{x}}(t) = \underline{\zeta}(t) + Ny(t) \quad (4.9)$$

$$\underline{\hat{y}}(t) = C\underline{\hat{x}}(t) \quad (4.10)$$

donde $\bar{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\underline{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^n$ representan vectores auxiliares de intervalo, los vectores $\bar{\hat{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\underline{\hat{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ representan las estimaciones superior e inferior del vector de estado $x(t)$. L_i , T y N son matrices de ganancia a diseñar. Las matrices Δ y ∇ son descritas de la siguiente manera.

$$\Delta = (TE)^+ \bar{w}(t) - (TE)^- \underline{w}(t) \quad (4.11)$$

$$\nabla = (TE)^+ \underline{w}(t) - (TE)^- \bar{w}(t) \quad (4.12)$$

4.1.1. Análisis de la dinámica del error

El diseño del observador intervalar requiere del estudio del error de estimación de los umbrales superiores e inferiores, de la siguiente manera.

$$\bar{e}(t) = \bar{\hat{x}}(t) - x(t) \quad (4.13)$$

$$\underline{e}(t) = x(t) - \underline{\hat{x}}(t) \quad (4.14)$$

reemplazando (4.6) en (4.13) se tiene.

$$\bar{e}(t) = \bar{\zeta}(t) - Tx(t) \quad (4.15)$$

donde $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y

$$T = NC - I_n \quad (4.16)$$

de manera similar, el procedimiento se aplica en (4.14).

$$\underline{e}(t) = Tx(t) - \underline{\zeta}(t) \quad (4.17)$$

derivando (4.15) y (4.17), se obtiene las representaciones de las dinámicas del error de estimación intervalar descritas de la siguiente manera.

$$\dot{\bar{e}}(t) = \dot{\bar{\zeta}}(t) - T\dot{x}(t) \quad (4.18)$$

$$= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(TA_i - L_i C)\bar{e}(t) + (TE)^+\bar{w}(t) - (TE)^-\underline{w}(t) - TEw(t) \quad (4.19)$$

$$\dot{\underline{e}}(t) = T\dot{x}(t) - \dot{\underline{\zeta}}(t) \quad (4.20)$$

$$= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(TA_i - L_i C)\underline{e}(t) + TEw(t) - (TE)^+\underline{w}(t) + (TE)^-\bar{w}(t) \quad (4.21)$$

De acuerdo con el Lemma 2 y la Suposición 4.1.1, se obtienen las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned} (TE)^+\bar{w}(t) - (TE)^-\underline{w}(t) - TEw(t) &\geq 0 \\ TEw(t) - (TE)^+\underline{w}(t) + (TE)^-\bar{w}(t) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta que la estabilidad del observador intervalar cuasi-LPV, resulta de la estabilidad del error intervalar.

$$e(t) = \bar{\hat{x}}(t) - \underline{\hat{x}}(t) \quad (4.23)$$

$$= \bar{e}(t) + \underline{e}(t) \quad (4.24)$$

La dinámica del error intervalar se describe de la siguiente manera.

$$\dot{e}(t) = \dot{\bar{e}}(t) + \dot{\underline{e}}(t) \quad (4.25)$$

$$= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) \left[(TA_i - L_i C)e(t) + \mathcal{M}\omega(t) \right] \quad (4.26)$$

donde $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} (TE)^+ & -(TE)^- \end{bmatrix}$ $\omega(t) = \begin{bmatrix} \bar{w}(t) - \underline{w}(t) \\ \underline{w}(t) - \bar{w}(t) \end{bmatrix}$

De acuerdo con (4.22), la expresión $(TA_i - L_i C)$ satisface la condición de Metzler. Por lo tanto, teniendo en cuenta las condiciones iniciales $\underline{e}(0) = x(0) - \underline{\hat{x}}(0)$, $\bar{e}(0) = \bar{\hat{x}}(0) - x(0)$, el observador de intervalos proporcionará una estimación positiva, el cual mantiene los límites del estado intervalar correctos.

La parametrización de las matrices se hace con la finalidad de encontrar una solución para el conjunto de matrices (4.16), las cuales pueden ser descritas de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} T & N \end{bmatrix} \Sigma = I_n \quad (4.27)$$

donde $\Sigma = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$, tiene que ser de $\text{rango}(\Sigma) = n$ la solución general de (4.27) está dada por

$$T = \underbrace{\Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{T_1} + Z \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^\dagger)}_{T_2} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$N = \underbrace{\Sigma^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{N_1} + Z \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^\dagger)}_{N_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

donde $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n+p)}$ es una matriz arbitraria. Tomando en cuenta la definición de la matriz T dentro de la ecuación (4.26) la dinámica del error de estimación intervalar es representada como:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) [\mathcal{A}_i e(t) + \mathcal{M} \omega(t)] \quad (4.30)$$

donde $\mathcal{A}_i = T_1 A_i + Z T_2 A_i - L_i C$. \mathcal{M} y $\omega(t)$ se encuentran definidas en (4.26)

Así, el diseño del observador se reduce a obtener la matriz L_i , tal que (4.30) sea estable. El valor de la matriz Z es un parámetro de diseño del observador, por simplicidad, se considera conocido.

4.1.2. Análisis de estabilidad y convergencia ISS

En esta sección se presenta la metodología de diseño del observador intervalar (4.5)-(4.10). Se dan las condiciones ISS suficientes para garantizar la estabilidad y positividad de la dinámica del error (4.30). La función ISS permite atenuar el efecto de las perturbaciones sobre las estimaciones intervalares de $x(t)$.

Teorema 1. *Para el sistema cuasi-LPV (4.1) existe una función de Lyapunov $V(e(t)) = e^T(t) P e(t)$, si existe una matriz diagonal positiva P , con una matriz R_i , y escalares $\beta > \alpha > 0$, $\gamma > 0$ para un $\epsilon \geq 1$, $\alpha \geq 1$ y $\eta > 0$, tales que se satisfacen las siguientes LMIs.*

$$\alpha I_n \preceq P \preceq \beta I_n \quad \min_{P, R_i, \gamma} \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(PT_1A_i + PZT_2A_i - R_iC) + \epsilon P & (*) \\ \begin{bmatrix} (P(TE)^+)^T \\ (-P(TE)^-)^T \end{bmatrix} & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (4.32)$$

$$PT_1A_i + PZT_2A_i - R_iC + \eta P \geq 0 \quad (4.33)$$

por lo tanto, el sistema (4.5)-(4.10) puede estimar asintóticamente los intervalos máximos y mínimos del vector de estado $x(t)$.

Demostración. Consideremos la función cuadrática común ISS-Lyapunov

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t) \succ 0 \quad (4.34)$$

donde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante diagonal positiva. La derivada de (4.34) a lo largo de la trayectoria de (4.30) se representa como se muestra a continuación.

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \quad (4.35)$$

$$= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) \left[e^T(t) (\mathcal{A}_i^T P + P\mathcal{A}_i) e(t) \right] + e^T(t)P\mathcal{M}\omega(t) + \omega^T(t)\mathcal{M}^T Pe(t) \prec 0 \quad (4.36)$$

añadimos sumando y restando los términos $\epsilon V(e(t)) - \gamma \omega^T(t)\omega(t)$ en (4.35) para obtener la siguiente desigualdad.

$$\dot{V}(e(t)) + \epsilon V(e(t)) - \gamma \omega^T(t)\omega(t) \leq \zeta^T(t)\Omega\zeta(t) \quad (4.37)$$

con

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i P + P\mathcal{A}_i + \epsilon P & P\mathcal{M} \\ \mathcal{M}^T P & -\gamma I \end{bmatrix}$$

donde $\zeta(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$, ϵ y γ son escalares positivos. Reemplazando \mathcal{A}_i y \mathcal{M} de (4.30) se obtiene

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(PT_1A_i + PZT_2A_i - R_iC) + \epsilon P & (*) \\ \begin{bmatrix} (P(TE)^+)^T \\ (-P(TE)^-)^T \end{bmatrix} & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

donde $R_i = PL_i$ es una matriz desconocida de dimensiones apropiadas.

De acuerdo con Ifqir et-al. (2018) el sistema (4.30) es ISS si $\Omega \preceq 0$ y el tamaño de $\omega^T(t)\omega(t) < \infty$, tal que:

$$\dot{V}(e(t)) \leq \varsigma^T(t)\Omega\varsigma(t) - \epsilon V(e(t)) + \gamma\omega^T(t)\omega(t) \quad (4.39)$$

de modo que, el término del lado derecho de la desigualdad (4.39) es negativo. Por lo tanto, la siguiente desigualdad cumple con la siguiente representación.

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\epsilon V(e(t)) + \gamma\omega^T(t)\omega(t) \quad (4.40)$$

integrando ambos lados de la desigualdad, se obtiene.

$$V(e(t)) \leq e^{-\epsilon t}V(0) + \gamma \int_0^t e^{-\epsilon(t-s)} \|\omega(s)\|_2 ds \quad (4.41)$$

teniendo en cuenta que (4.34) se cumple para algún escalar $\beta > \alpha > 0$, dada la siguiente desigualdad.

$$\alpha\|e(t)\|_2 \leq V(e(t)) \leq \beta\|e(t)\|_2 \quad (4.42)$$

por lo que se deduce

$$\|e(t)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(e^{-\epsilon t}V(0) + \frac{\gamma}{\epsilon} \|\omega(t)\|_\infty \right)^{1/2} \quad (4.43)$$

por lo tanto, cuando $t \rightarrow \infty$ y el exponencial converge a cero, implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\epsilon}} \max \|\omega(t)\|_\infty \quad (4.44)$$

Se puede apreciar que utilizando el concepto ISS es posible garantizar las cuotas intervalares del error. Así mismo, los intervalos de un observador intervalar se pueden ajustar de manera óptima, si el límite $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\epsilon}} \max \|\omega(t)\|_\infty$ es minimizado.

En un segundo paso, necesitamos asegurar que \mathcal{A}_i cumple con la condición Metzler. Considerando el Lemma 1, \mathcal{A}_i es Metzler si existe un escalar $\eta > 0$ que cumpla la siguiente expresión.

$$\mathcal{A}_i + \eta I \geq 0 \quad (4.45)$$

Dado que solo los elementos fuera de la diagonal de \mathcal{A}_i deben ser no negativos para satisfacer la propiedad Metzler, el término ηI se agrega como se muestra en (4.45). Al pre-multiplicar la

desigualdad (4.45) por una matriz diagonal positiva P de (4.34), la matriz PA_i es Metzler teniendo en cuenta la siguiente condición.

$$PT_1A_i + PZT_2A_i - R_iC + \eta P \geq 0 \quad (4.46)$$

esto prueba que la positividad de los errores intervalares se encuentra ligada a una matriz diagonal definida positiva P . Por lo tanto, concluimos que el vector de estado siempre está limitado por las soluciones del observador intervalar.

Resolviendo el problema de optimización del Teorema 1 con los siguientes parámetros; $\eta = 10$, $\epsilon = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = 2.18$ mediante el software Matlab 2020b y el toolbox YALMIP-SEDUMI, se obtienen las siguientes ganancias del observador de intervalo descritas por:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 10 & -1.1893 & -6.3398 \times 10^{-10} \\ -24.3243 & 7.1891 & 24.3243 \\ -6.3251 \times 10^{10} & -1.1893 & 10 \\ 19.3548 & 4.7279 & -70 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2.1893 & 0 & -1.1893 \\ 1.6893 & 0.50 & -1.1893 \\ 1.1893 & 0 & -0.1893 \\ -4.7279 & 0 & 5.7279 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 10 & -1.1893 & -6.3384 \times 10^{10} \\ -24.3243 & 7.1891 & 24.3243 \\ -6.3236 \times 10^{10} & -1.1893 & 10 \\ 19.3548 & 4.7279 & -56 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1.1893 & 0 & 1.1893 & 0 \\ -1.6893 & 0.50 & 1.1893 & 0 \\ -1.1893 & 0 & 1.1893 & 0 \\ 4.7279 & 0 & -5.7279 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -3.3786 & 0 & 2.3786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.3786 & 0 & 2.37863 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.3786 & 0 & 1.3786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.4557 & 0 & -11.4557 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las pruebas de evaluación se llevaron a cabo en la plataforma de simulación Matlab/Simulink R2020b, con un método de solución y tiempo de muestreo seleccionado automáticamente por Matlab, las condiciones iniciales del sistema no lineal son: $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$, mientras que las condiciones iniciales del observador intervalar fueron: $\bar{\hat{x}}(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $\underline{\hat{x}}(0) = [-1 \ -1 \ -1 \ -1]^T$, y los intervalos del $w(t)$ se encuentran descritos por $\bar{w}(t) = w(t) + 0.1$, $\underline{w}(t) = w(t) - 0.1$, tal como se muestra en la Figura 4.1.

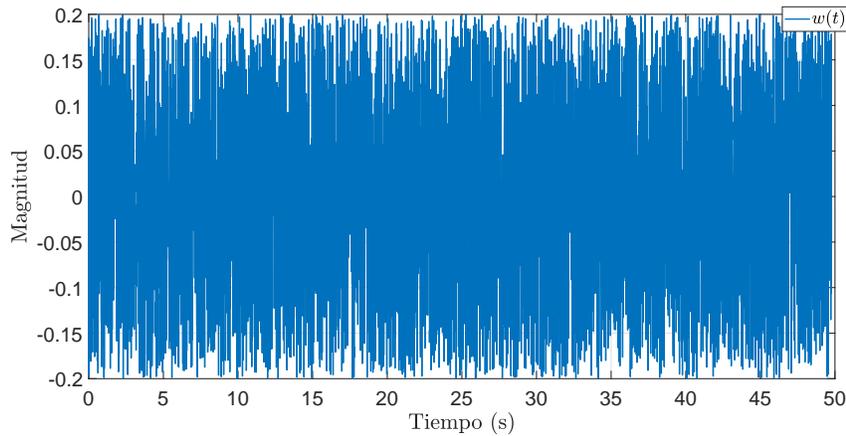


Fig. 4.1. Señal de ruido uniforme (w_t).

Escenario libre de falla

En esta sección, se considera evaluar al sistema en condiciones nominales. Los resultados se muestran en las Figuras 4.2 - 4.4, donde muestra las estimaciones de las salidas del sistema sin la presencia de falla (la línea de color negro representa el comportamiento no lineal del estado, la línea azul y roja representan la estimación del intervalo superior e inferior, respectivamente), el inciso (a) muestra la dinámica completa de la salida, el inciso (b) muestra un aumento en la gráfica para apreciar mejor el intervalo de estimación y la sección con aumento se representa con un rectángulo amarillo.

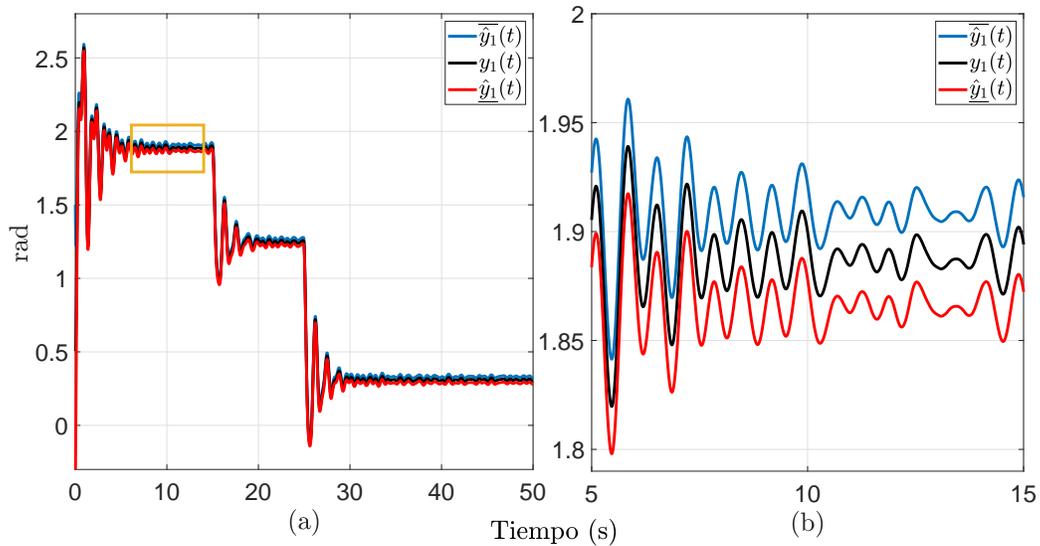


Fig. 4.2. Salida $y_1(t)$ y sus estimaciones intervalares.

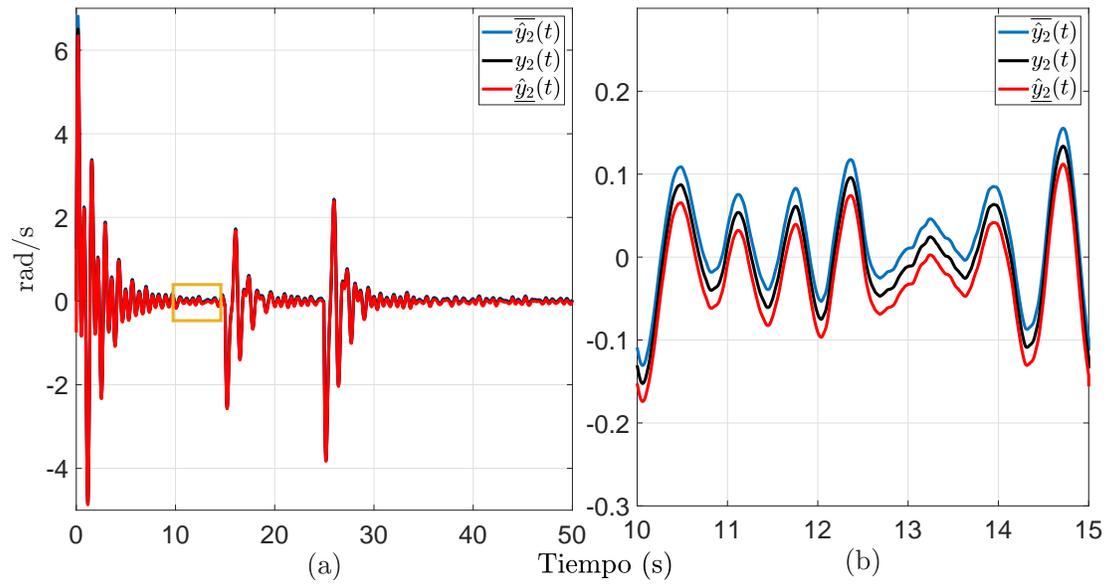


Fig. 4.3. Salida $y_2(t)$ y sus estimaciones intervalares.

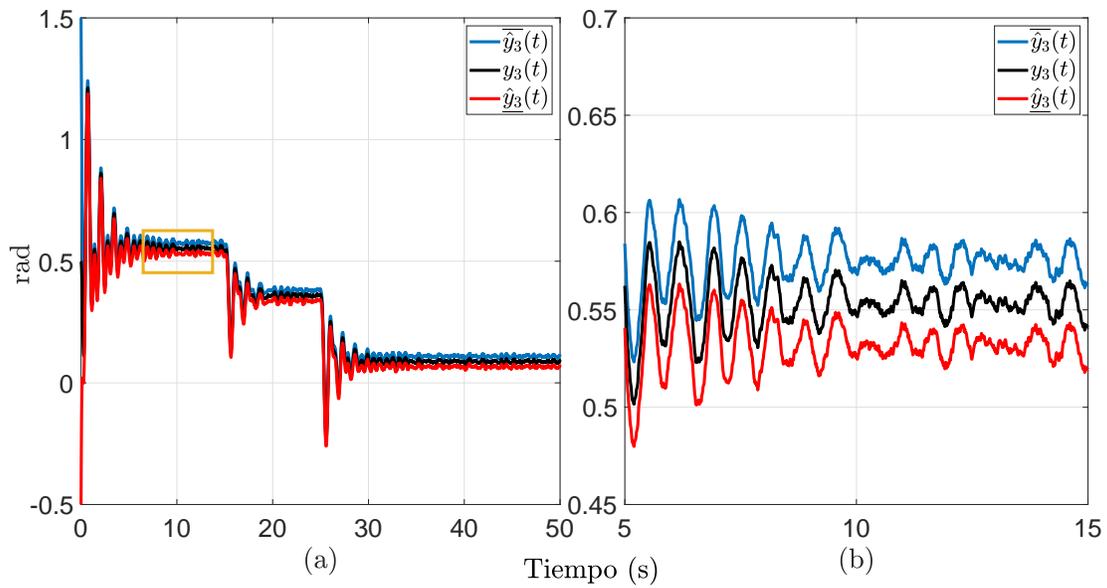


Fig. 4.4. Salida $y_3(t)$ y sus estimaciones intervalares.

4.2. Estrategia de detección de fallas

En esta sección se considera que el sistema (4.1) presenta fallas en las variables de salida debido a un sobrecalentamiento en los devanados del motor. Por tal motivo, el sistema puede representarse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Ff(t)\end{aligned}\tag{4.47}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables de salidas medidas, $E \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la matriz de distribución de perturbación, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ es una entrada exógena como perturbación, $F \in \mathbb{R}^{p \times s}$ es la matriz de distribución de fallas y $f(t) \in \mathbb{R}^s$ es la fallas en los sensores. Las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ son conocidas y de dimensiones apropiadas.

La estrategia de detección de fallo consiste en realizar la comparación de la salida medida $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y la salida estimada $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$. Esta comparación se basa en generar una señal residual, como se muestra a continuación.

$$r(t) = \hat{y}(t) - y(t)\tag{4.48}$$

A partir del Lemma 2, se pueden obtener las siguientes expresiones para las ecuaciones (4.7) y (4.10), respectivamente.

$$\bar{\hat{y}}(t) = C^+ \bar{\hat{x}}(t) - C^- \hat{x}(t)\tag{4.49}$$

$$\underline{\hat{y}}(t) = C^+ \hat{x}(t) - C^- \bar{\hat{x}}(t)\tag{4.50}$$

En el contexto de perturbación acotada, es posible detectar una falla, construyendo los siguientes límites de señal residual, tal como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\bar{r}(t) = \bar{\hat{y}}(t) - y(t)\tag{4.51}$$

$$\underline{r}(t) = \underline{\hat{y}}(t) - y(t)\tag{4.52}$$

La estrategia de detección de falla, muestra que en el caso $0 \in [\bar{r}(t), \underline{r}(t)]$ las señales del sistema se encuentran libre de falla. De lo contrario, si $1 \notin [\bar{r}(t), \underline{r}(t)]$ se detecta la presencia de falla. Esta estrategia es eficaz para evitar las falsas alarmas que se producen debido a la presencia de perturbaciones en el sistema. Sin embargo, es posible que no se detecten fallas de baja magnitud debido a los límites superiores e inferiores de la perturbación descritos en la Suposición 4.1.1.

En la Figura 4.5 se presenta de manera desglosada un diagrama de detección de falla.

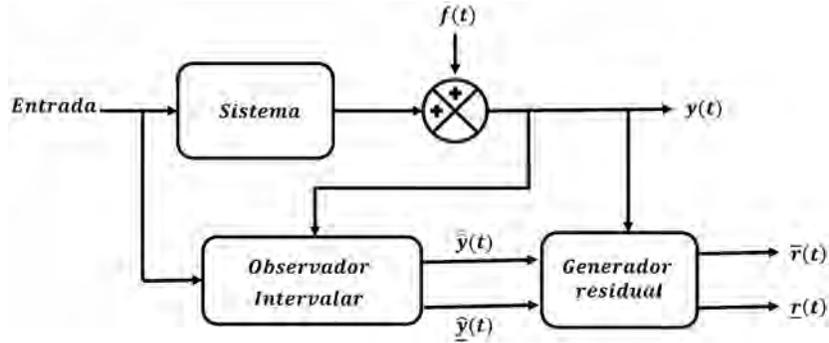


Fig. 4.5. Diagrama esquemático de un esquema de detección de falla basado en un observador intervalar

Para realizar la evaluación del esquema de detección de fallas, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

Suposición 4.2.1. *El esquema de detección de fallas propuesto considera $f(t) = 0$ para el diseño del observador, de forma que la salida $y(t)$ del sistema (4.47) se expresa como $y(t) = Cx(t)$. Por lo tanto, el diseño y el análisis del observador intervalar se basa en el sistema (4.1).*

4.2.1. Evaluación del esquema de detección de fallas

El objetivo de esta simulación es mostrar el comportamiento de las señales residuales, en donde se consideran dos escenarios; en el primer escenario se considera que el sistema presenta una señal de falla tipo abrupta en las variables de salida y en el segundo escenarios se considera una señal de falla tipo incipiente en las variables de salida.

Escenario en presencia de falla tipo abrupta

En esta sección, se considera evaluar al sistema ante la presencia de falla en las salidas del sistema debido a un sobrecalentamiento en los devanados del motor, lo que genera un aumento brusco de la magnitud, como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.1 & 5 \leq t \leq 10 \\ -0.2 & 25 \leq t \leq 35 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.53)$$

Los resultados se muestran en las Figuras 4.6 - 4.9, donde se puede apreciar que las Figuras 4.6 - 4.8 muestra que en el tiempo $t = 5s$ y $t = 10s$, los intervalos $\bar{y}(t)$ superiores he $\underline{y}(t)$ inferiores de $y(t)$ no generan una envolvente de la señal adecuada, debido a la presencia de la falla. El mismo comportamiento se presenta en el instante $t = 25s$ y $t = 35s$, el inciso (a) muestra la dinámica completa de la salida, el inciso (b) muestra un aumento en la gráfica para apreciar mejor el intervalo de estimación y la sección con aumento se representa con un rectángulo amarillo.

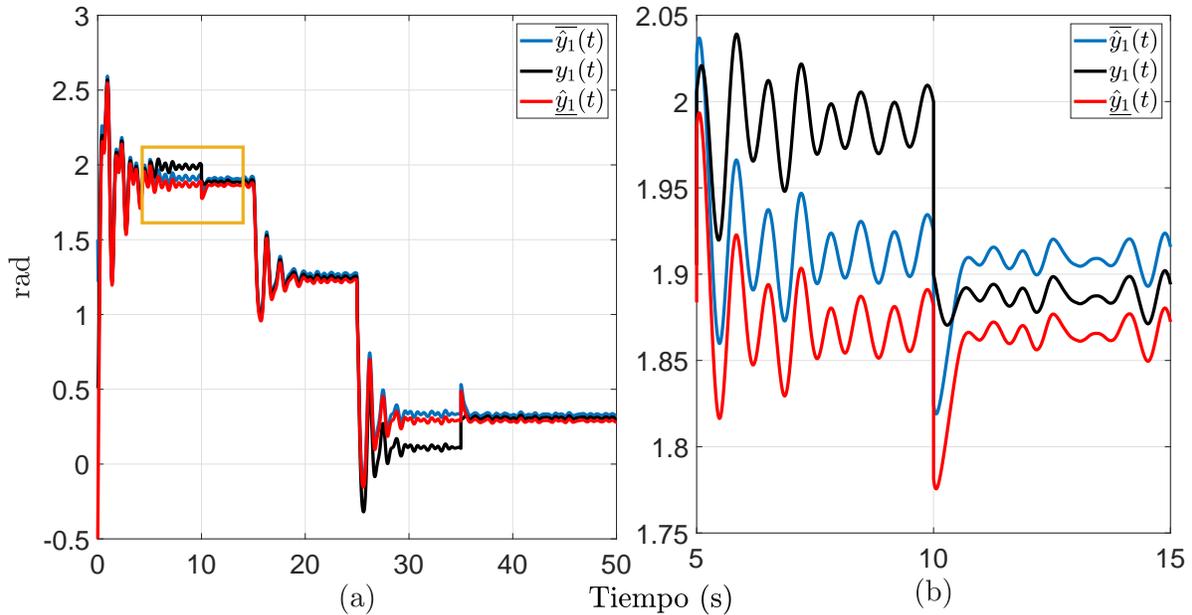


Fig. 4.6. Salida $y_1(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.

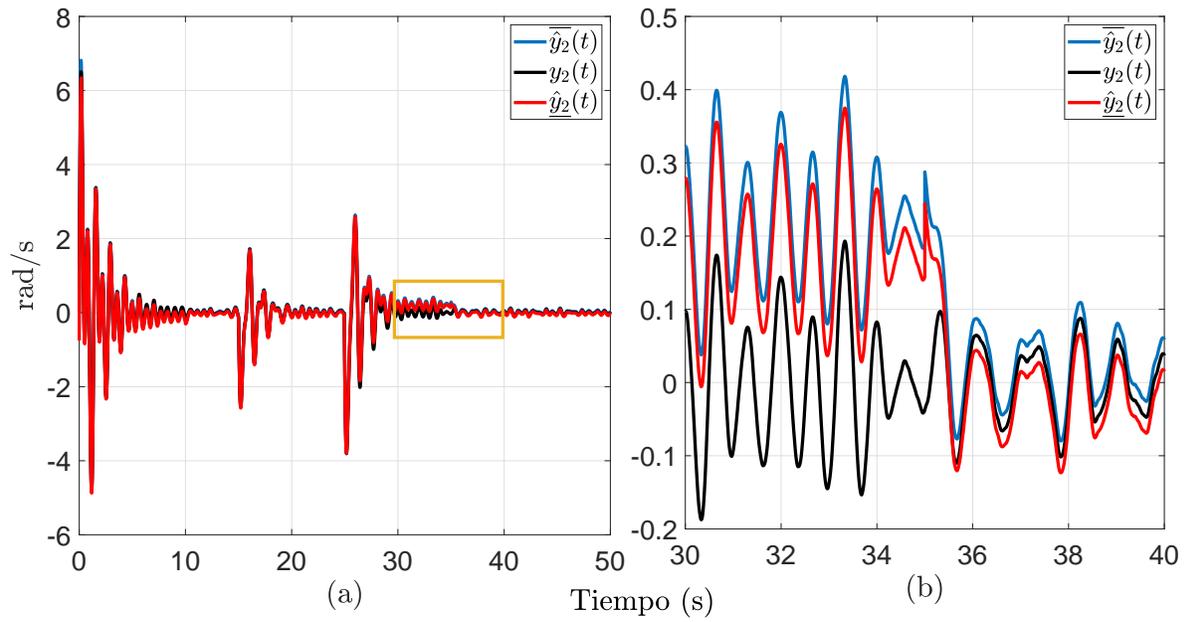


Fig. 4.7. Salida $y_2(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.

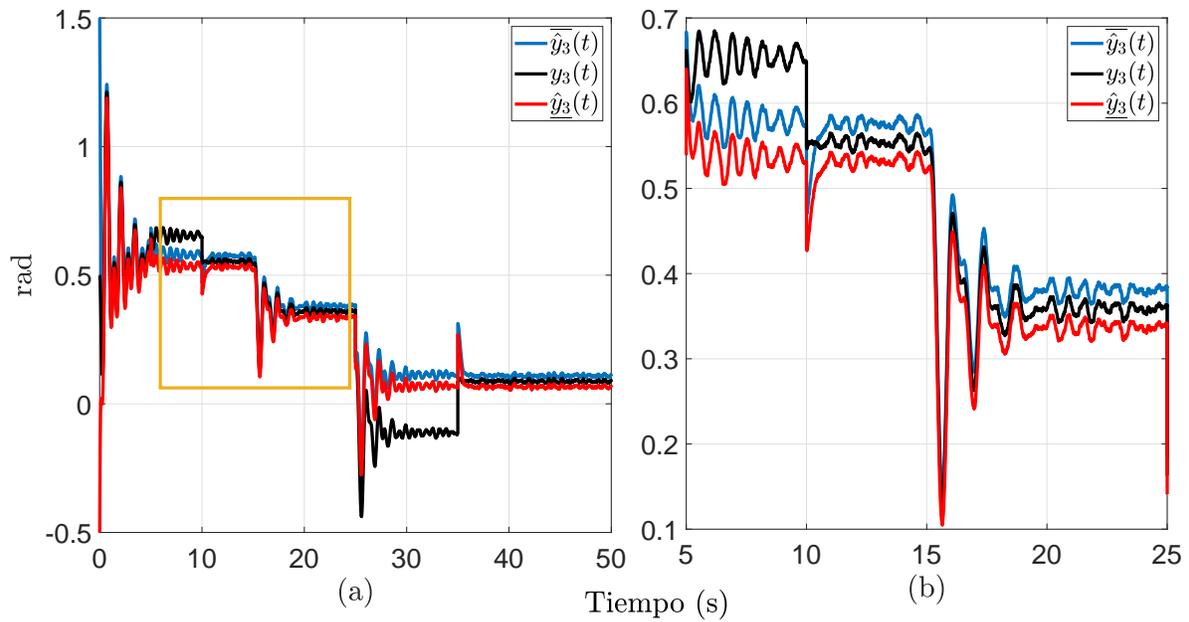


Fig. 4.8. Salida $y_3(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.

Las Figuras 4.9 muestra que los residuos ya no están en el umbral natural del observador, esto debido a la presencia de falla en las señales de salida, por lo tanto, podemos decir que $1 \notin [\bar{r}(t), \underline{r}(t)]$ la falla es detectada. La Tabla 4.1 muestra una matriz de firmas de falla.

Tabla 4.1. Matriz de firma de fallas tipo abrupto

Falla abrupta			
Residuo	$5 \leq t \leq 10$	$25 \leq t \leq 35$	en otro caso
r_1	1	1	0
r_2	1	1	0
r_3	1	1	0

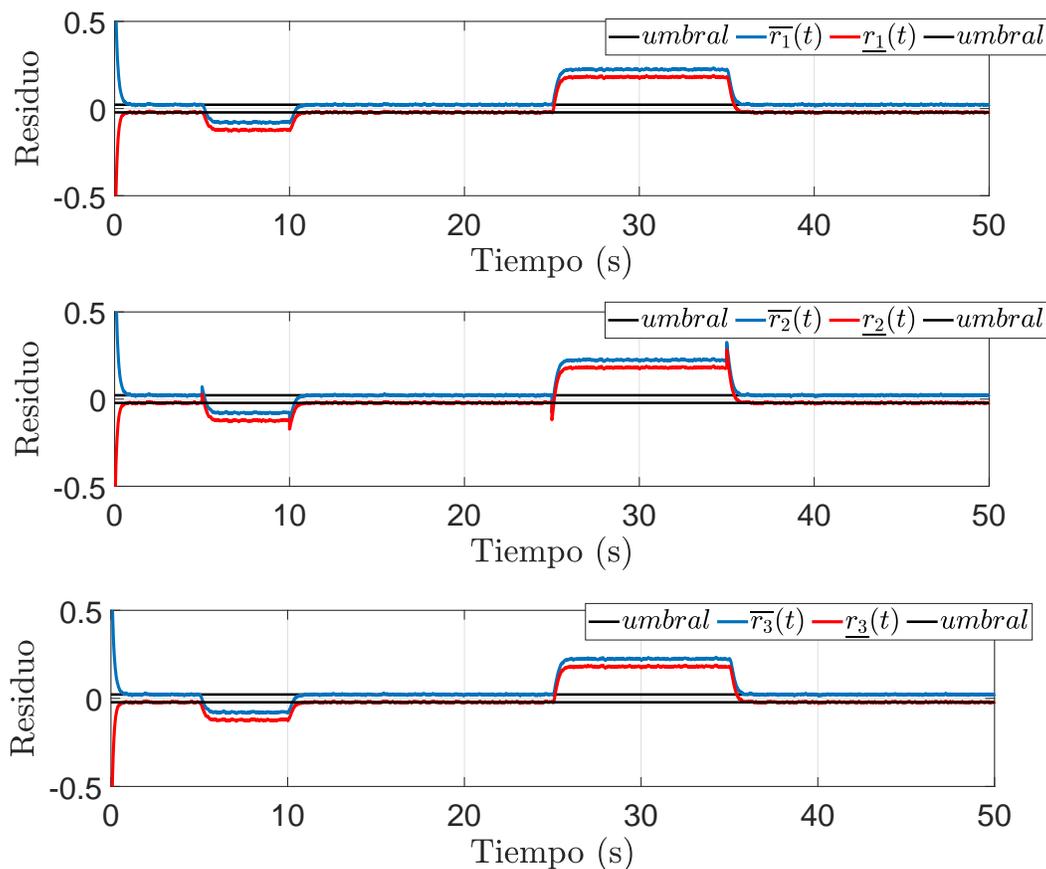


Fig. 4.9. Residuos superiores e inferiores con falla abrupta.

Escenario en presencia de falla tipo incipiente

En esta sección, se considera evaluar al sistema ante la presencia de falla en las salidas del sistema debido a una mala calibración en los sensores de posición angular, lo que genera un aumento de forma exponencial en la magnitud, como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.01 & 15 \leq t \leq 20 \\ 0.01 + t & 20 \leq t \leq 35 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.54)$$

Los resultados se muestran en las Figuras 4.10 - 4.13, donde se puede apreciar que las Figuras 4.10 - 4.12 muestra que en el instante $t = 15s$ y $t = 20s$, los intervalos superior $\bar{y}(t)$ e inferior $\underline{y}(t)$ de $y(t)$ no realizan una envolvente adecuada debido a la presencia de falla. Cuando la falla se hace incipiente en el tiempo $t = 20s$ y $t = 35s$, se observa que las variables de salida presentan un comportamiento creciente hasta alejarse de las estimaciones de intervalo, el inciso (a) muestra la dinámica completa de la salida, el inciso (b) muestra un aumento en la gráfica para apreciar mejor el intervalo de estimación y la sección con aumento se representa con un rectángulo amarillo.

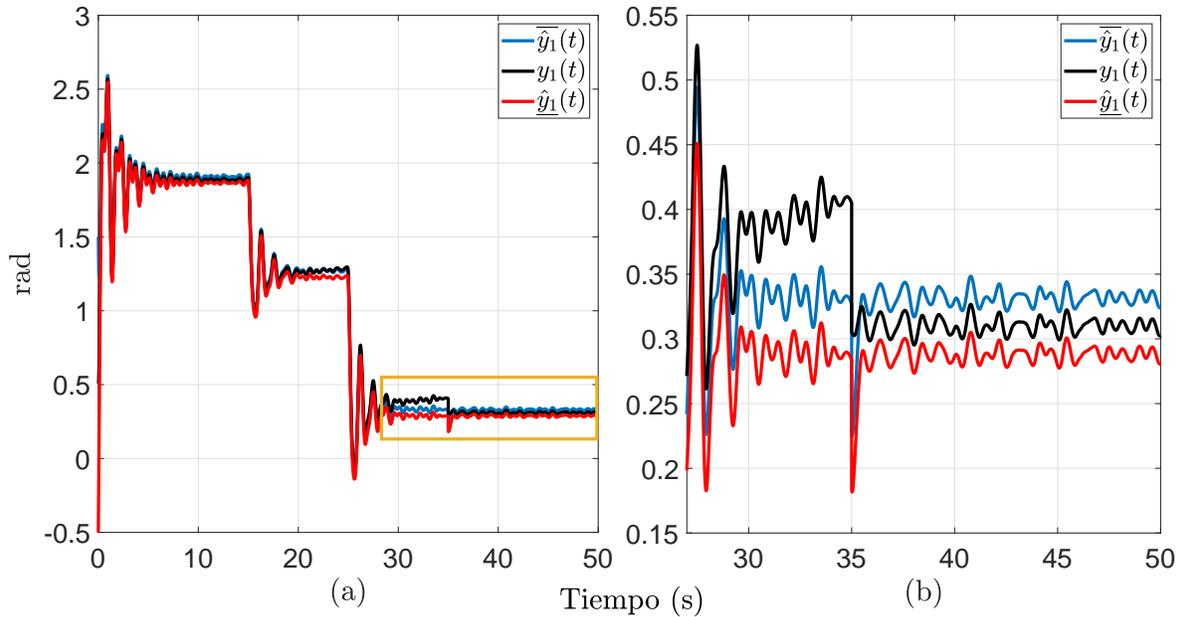


Fig. 4.10. Salida $y_1(t)$ con falla incipiente y sus estimaciones intervalares.

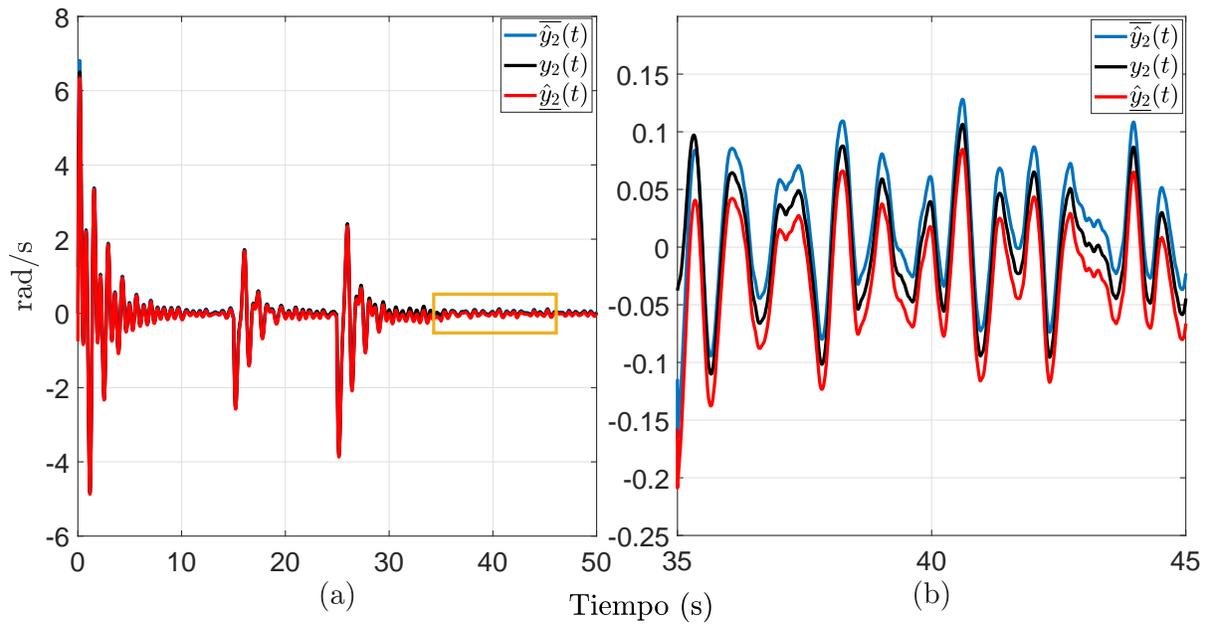


Fig. 4.11. Salida $y_2(t)$ con falla incipiente y sus estimaciones intervalares.

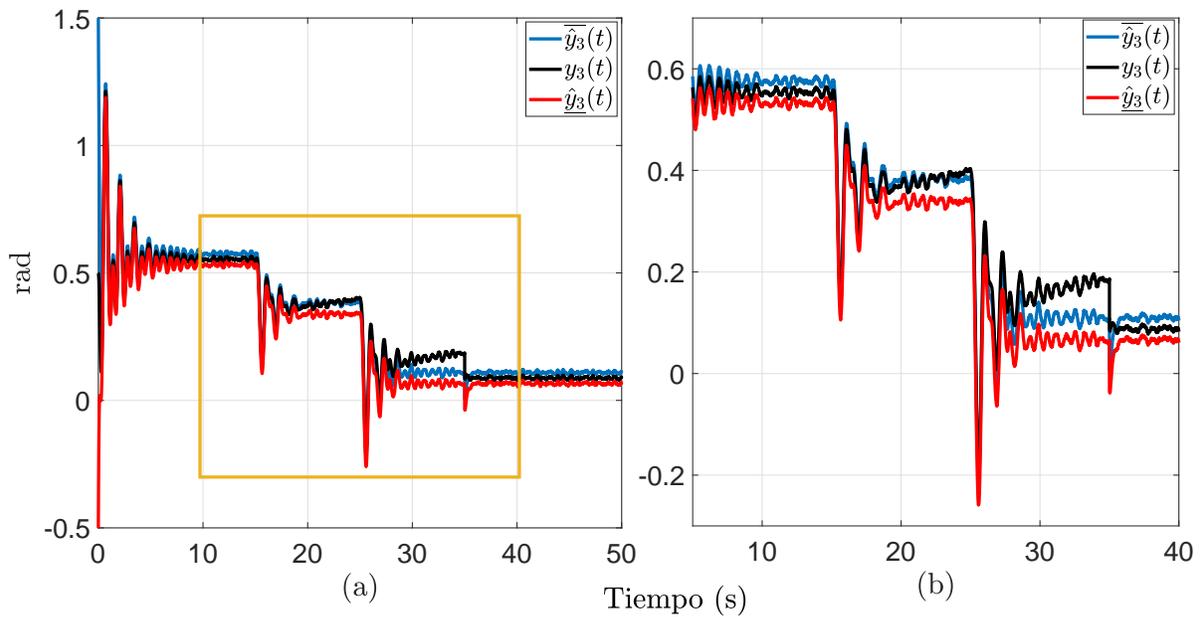


Fig. 4.12. Salida $y_3(t)$ con falla incipiente y sus estimaciones intervalares.

La Figura 4.13 muestran que los residuos ya no están en el umbral natural del observador, esto debido a la presencia de fallas en las señales de salida, por lo tanto, podemos decir que $1 \notin [\bar{r}(t), \underline{r}(t)]$ una falla es detectada. La Tabla 4.2 muestra una matriz de firma de fallas.

Tabla 4.2. Matriz de firma de fallas tipo incipiente.

Falla incipiente			
Residuo	$15 \leq t \leq 20$	$20 \leq t \leq 35$	en otro caso
r_1	1	1	0
r_2	1	1	0
r_3	1	1	0

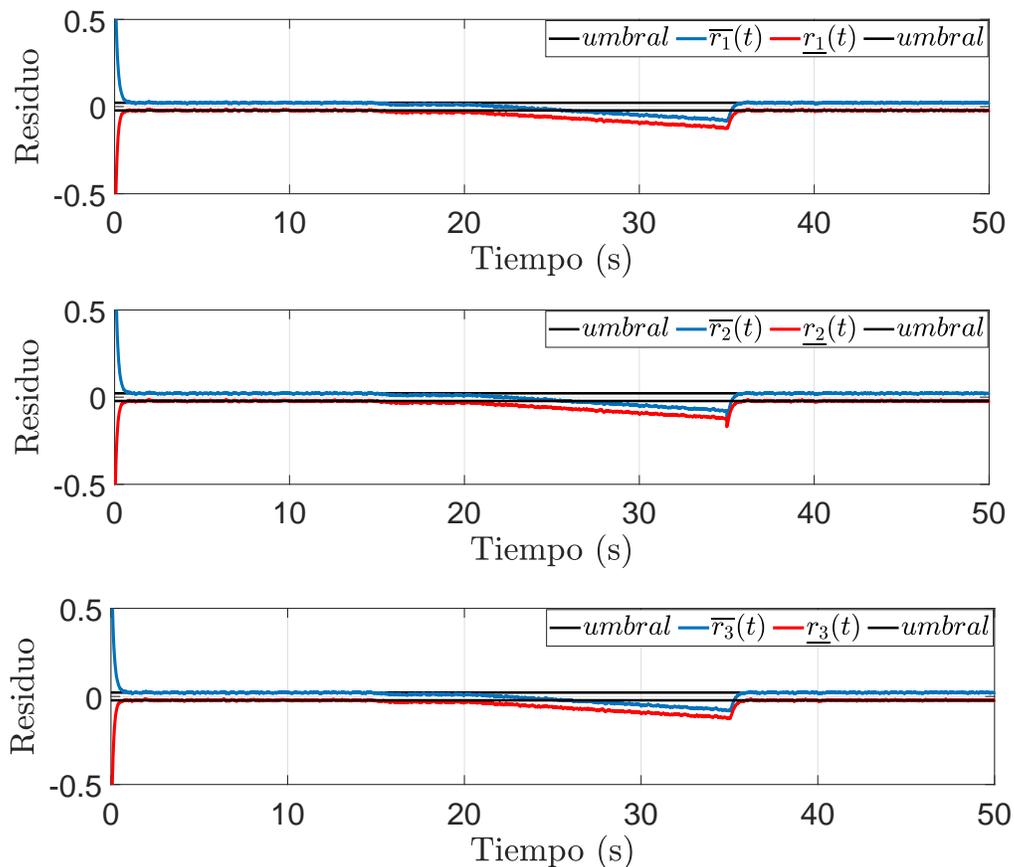


Fig. 4.13. Residuos superiores e inferiores con falla incipiente.

El esquema de detección de fallas se compone de un observador que realiza una estimación robusta

de las salidas del sistema con sus respectivos intervalos. Una ventaja de este tipo de esquemas de intervalos es la generación de un umbral natural generado por las acciones de entradas exógenas que afectan al sistema, tales como ruido o variaciones paramétricas. Los resultados muestran que el esquema de detección de fallas impone robustez al generar una respuesta residual frente a las perturbaciones acotadas que están presentes en el sistema (4.1). Así, en caso de que $0 \in [\bar{r}(t), \underline{r}(t)]$ no se puede indicar ninguna falla. En caso contrario, si $1 \notin [\bar{r}(t), \underline{r}(t)]$ se detecta una falla. Esta estrategia es eficaz para evitar las falsas alarmas que se producen debido a la presencia de perturbaciones en el sistema.

4.3. Estrategia de diagnóstico de fallas

En esta sección se considera que el sistema (4.1) presenta una falla aditiva en el actuador $B_b \bar{u}(t)$ debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor, donde $\bar{u}(t) = u(t) + f(t)$ de tal manera que $B_b = F_f$, siendo $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas del sistema y $f(t) \in \mathbb{R}^q$ es la falla en el actuador. Por tal motivo, el sistema puede representarse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{x}_x(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_{ai}x_x(t)) + B_b \bar{u}(t) + E_e w(t) \\ y(t) &= C_c x_x(t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde $x_x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables de salidas medidas, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas del sistema más el vector de fallas que afectan al sistema, $E_e \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la matriz de distribución de perturbación, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ es una entrada exógena como perturbación. Las matrices $A_{ai} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_b \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $C_c \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son conocidas y de dimensiones apropiadas.

Debido a la presencia de fallas en el actuador, se considera desacoplar el vector $f(t)$ considerando $\dot{f} = 0$ para obtener la siguiente representación.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + B u(t) + E w(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde $x(t) = \begin{bmatrix} x_x(t) \\ f(t) \end{bmatrix}$, $A_i = \begin{bmatrix} A_{ai} & F_f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [C_c \ 0]$, $E = \begin{bmatrix} E_e \\ 0 \end{bmatrix}$.

Suposición 4.3.1. *El esquema de diagnóstico de fallas propuesto considera que el sistema aumentado (4.56) cumple con las mismas condiciones de diseño que el sistema (4.1). Por lo tanto, el diseño y el análisis del observador intervalar se basa en el sistema (4.1).*

4.3.1. Evaluación del esquema de diagnóstico de fallas

El objetivo de esta simulación es mostrar la robustez de estimación de fallo del esquema de diagnóstico, en donde se considera una señal de falla aditiva tipo abrupta en el actuador del sistema.

Las pruebas de evaluación se llevaron a cabo en la plataforma de simulación Matlab/Simulink R2020b, con un método de solución y tiempo de muestreo seleccionado automáticamente por Matlab, las condiciones iniciales del sistema no lineal son: $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0]^T$, mientras que las condiciones iniciales del observador intervalar fueron: $\bar{x}(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$, $\underline{x}(0) = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0]^T$ y los intervalos del $w(t)$ se encuentran descritos por $\bar{w}(t) = w(t) + 0.1$, $\underline{w}(t) = w(t) - 0.1$, tal como se muestra en la Figura 4.1.

Resolviendo el problema de optimización del Teorema 1 con los siguientes parámetros; $\eta = 10$, $\epsilon = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = 4.03$ y una matriz $P = I_5$, mediante el software Matlab 2020b y el toolbox YALMIP-SEDUMI, se obtienen las siguientes ganancias del observador de intervalo descritas por:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 9.1584 & 0.3116 & 0.8416 \\ -0.6592 & 10.1876 & 0.6592 \\ -0.6373 & -0.2158 & 10.6373 \\ 18.6713 & -0.1884 & -69.3165 \\ 21.5295 & 0.5957 & -21.5295 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 9.1584 & 0.3116 & 0.8416 \\ -0.6592 & 10.1876 & 0.6592 \\ -0.6373 & -0.2158 & 10.6373 \\ 18.6713 & -0.1884 & -65.6165 \\ 21.5295 & 0.5957 & -21.5295 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0.6496 & -0.0173 & -0.3556 \\ -0.2180 & 0.9865 & -0.3194 \\ 0.1865 & -0.0131 & 0.7201 \\ 0.1569 & -0.0140 & 9.5301 \\ 0.3970 & 0.44264 & -0.3238 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -0.3238 & 0.0173 & 0.3557 & 0 & 0 \\ 0.2179 & 0.0136 & 0.3194 & 0 & 0 \\ -0.1864 & 0.0131 & 0.2799 & 0 & 0 \\ -0.1569 & 0.0141 & -9.5302 & 1 & 0 \\ -0.3970 & -0.4425 & 0.3238 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.3672 & 98.7430 & 2.1217 & 0 & 0 & 0.6664 & 98.7084 & 1.4104 \\ -0.2691 & 54.0369 & 1.7364 & 0 & 0 & -0.7050 & 55.0098 & 1.0976 \\ 0.3629 & -57.3144 & 0.4837 & 0 & 0 & 0.7358 & -57.3406 & 0.9239 \\ 0.4516 & 36.3253 & -20.2141 & 0 & 0 & 0.7654 & 36.2972 & -1.1538 \\ -0.1086 & 12.7329 & 1.6015 & 0 & 0 & 0.6854 & 13.6180 & 0.9539 \end{bmatrix}$$

Escenario en presencia de falla tipo abrupta

Para la simulación, se considera que existe una falla debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor, lo cual genera un aumento abrupto de magnitud $0.2Nm$ en el par de entrada del actuador, ocurrido en el segundo 25 y desapareciendo posteriormente en el segundo 35 como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq 25 \\ 0.2 & 25 < t \leq 35 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los resultados del observador Luenberger modificado se ilustran en las Figuras 4.14 - 4.18. En las Figuras 4.14 - 4.16 se muestran las estimaciones de las variables de estado del observador descritas en la ecuación (3.1) en presencia de una falla aditiva, la línea de color negro representa el comportamiento no lineal del estado, la línea azul y rojo representa la estimación intervalar superior e inferior, respectivamente. Las estimaciones de las variables de estado son adecuadas, ya que mantienen un involucramiento adecuado del sistema cuasi-LPV, el inciso (a) muestra la dinámica completa de la salida, el inciso (b) muestra un aumento en la gráfica para apreciar mejor el intervalo de estimación y la sección con aumento se representa con un rectángulo amarillo.

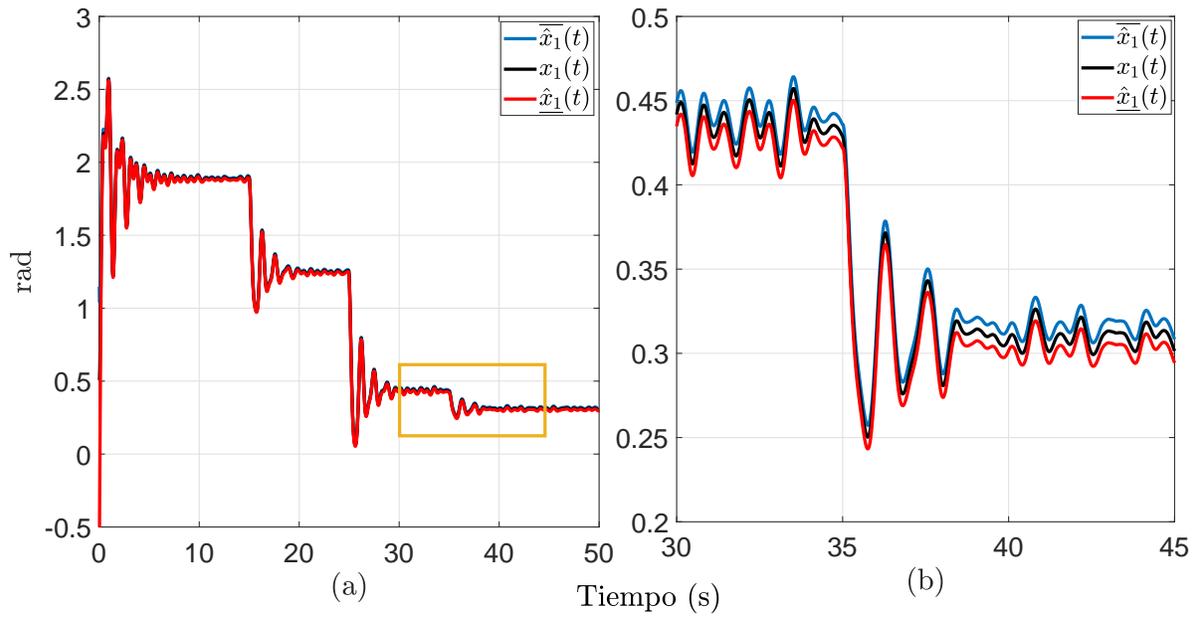


Fig. 4.14. Estado $x_1(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares

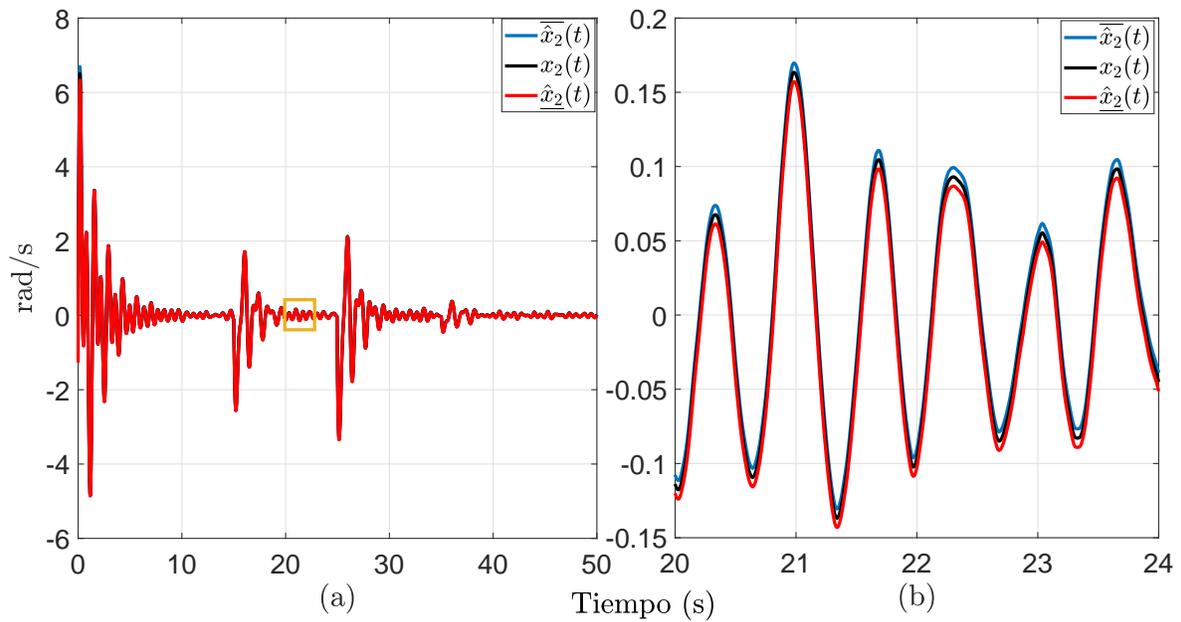


Fig. 4.15. Estado $x_2(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.

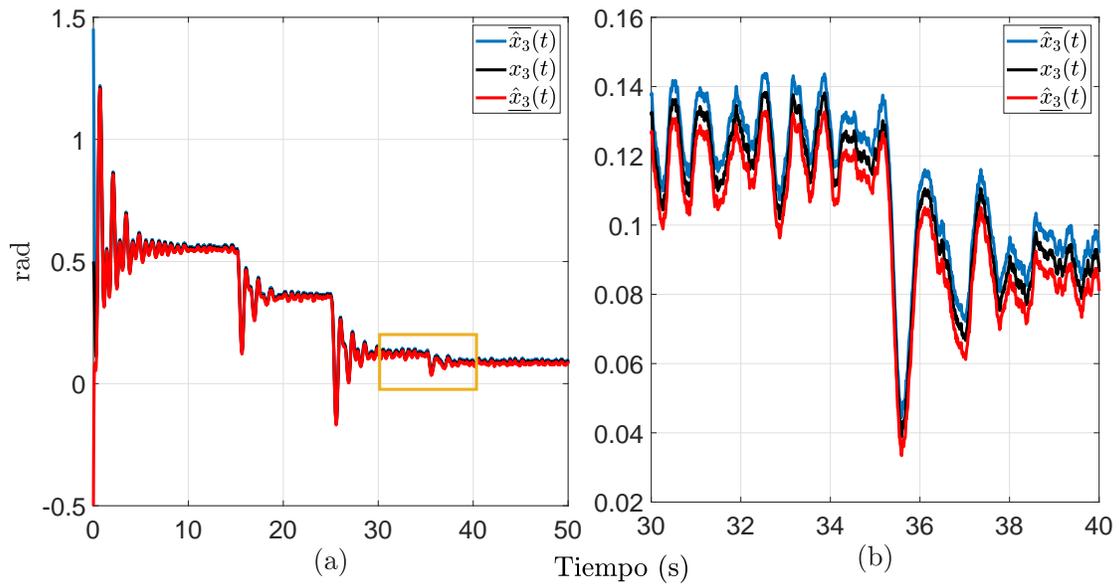


Fig. 4.16. Estado $x_3(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.

La Figura 4.17 muestra la estimación de la velocidad del eslabón, la cual se obtiene del observador Luenberger modificado dónde se puede apreciar que el envoltimiento se genera de manera correcta.

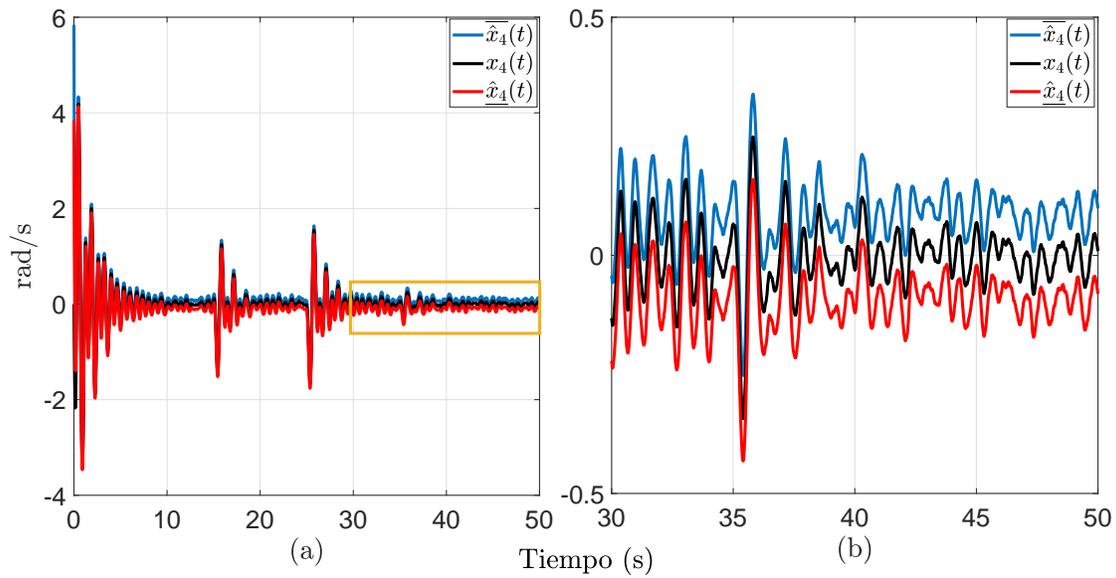


Fig. 4.17. Estado $x_4(t)$ con falla abrupta y sus estimaciones intervalares.

Se puede observar en la Figura (4.18) que el observador logra estimar la falla abrupta ocurrida en actuador en el segundo 25, y logra regresar a su valor sin la presencia de falla en el segundo 35 con un tiempo de involucrimiento de alrededor de 2 segundos.

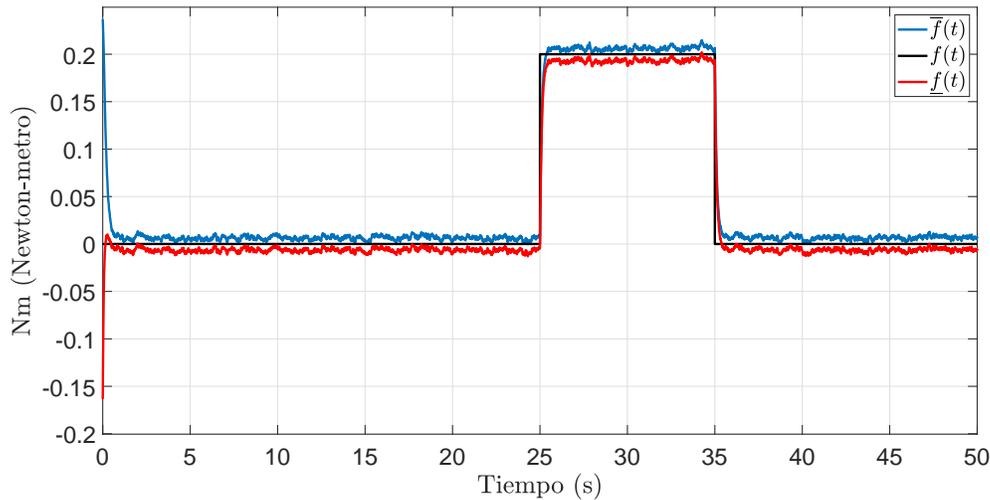


Fig. 4.18. Falla abrupta en el actuador y su estimación intervalar.

El esquema de diagnóstico de fallas se compone de observador que realiza una estimación robusta de estados y fallas. El enfoque intervalar en este tipo de esquemas de diagnóstico es sumamente efectivo, ya que las estimaciones intervalares son utilizadas para añadir robustez en el esquema de diagnóstico de fallas. Una de las ventajas es que a pesar de no conocer el comportamiento exacto de las entradas exógenas, el observador nos brinda un intervalo de estimación garantizado una ubicación del valor de la variable. Los resultados muestran que el observador propuesto proporciona la estimación del intervalo de estados y fallas, teniendo en cuenta las incertidumbres consideradas como ruido, las cuales se modelan en un contexto acotado. La estimación intervalar del observador no solo proporciona un valor nominal para los estados y fallas, sino también un intervalo de incertidumbre.

4.4. Diseño del observador intervalar proporcional generalizado (IGPO)

En esta sección se presenta el diseño de un observador IGPO para la estimación de estados, en donde se considera un sistema cuasi-LPV en presencia de una entrada exógena. El sistema cuasi-LPV se representa de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.57}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables de salidas medidas, $E \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la matriz de distribución de perturbación y $w(t) \in \mathbb{R}^r$ es una entrada exógena como perturbación. Las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son conocidas y de dimensiones apropiadas.

Antes de introducir la estructura del observador de intervalar, se consideran las siguientes suposiciones que son necesarias en el desarrollo.

Suposición 4.4.1. *Los valores exactos de $w(t)$ son desconocidos pero considerados dentro de un intervalo, es decir:*

$$\underline{w}(t) \leq w(t) \leq \bar{w}(t)\tag{4.58}$$

Suposición 4.4.2. *El vector de estado inicial $x(0)$ satisface*

$$\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)\tag{4.59}$$

donde $\underline{x}(0), \bar{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ son vectores constantes.

Suposición 4.4.3. *Sea $E \in \mathbb{R}^{n \times r}$ una matriz constante y $w(t) \in \mathbb{R}^r$, considerando el Lema 2 y la Suposición 4.4.1, obtenemos*

$$E^+ \underline{w}(t) - E^- \bar{w}(t) \leq Ew(t) \leq E^+ \bar{w}(t) - E^- \underline{w}(t)\tag{4.60}$$

Para el sistema cuasi-LPV de tiempo continuo (4.47), se propone el siguiente observador de intervalos.

$$\dot{\bar{\zeta}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(N_i \bar{\zeta}(t) + J_i y(t) + H u(t) + \Delta) \quad (4.61)$$

$$\bar{\hat{x}}(t) = \bar{\zeta}(t) + D y(t) \quad (4.62)$$

$$\bar{\hat{y}}(t) = C \bar{\hat{x}}(t) \quad (4.63)$$

$$\dot{\underline{\zeta}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(N_i \underline{\zeta}(t) + J_i y(t) + H u(t) + \nabla) \quad (4.64)$$

$$\underline{\hat{x}}(t) = \underline{\zeta}(t) + D y(t) \quad (4.65)$$

$$\underline{\hat{y}}(t) = C \underline{\hat{x}}(t) \quad (4.66)$$

donde $\bar{\zeta}(t)$, $\underline{\zeta}(t)$ representan el intervalo de vectores auxiliares, los vectores $\bar{x}(t)$, $\underline{x}(t)$ representan las estimaciones superior e inferior del vector de estado $x(t)$. Las matrices N_i , J_i , H , T y D son las ganancias del observador a determinar. Las matrices Δ y ∇ se definen como sigue:

$$\Delta = (TE)^+ \bar{w}(t) - (TE)^- \underline{w}(t) \quad (4.67)$$

$$\nabla = (TE)^+ \underline{w}(t) - (TE)^- \bar{w}(t) \quad (4.68)$$

4.4.1. Análisis de la dinámica del error del observador IGPO

La dinámica de los errores de estimación superior e inferior viene dada de la siguiente manera.

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t) \quad (4.69)$$

$$\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t) \quad (4.70)$$

reemplazando (4.62) en (4.69) se tiene.

$$\bar{e}(t) = \bar{\zeta}(t) - T x(t) \quad (4.71)$$

donde

$$T = I_n - DC \quad (4.72)$$

de manera similar, el procedimiento se aplica en (4.70).

$$\underline{e}(t) = Tx(t) - \underline{\zeta}(t) \quad (4.73)$$

Utilizando la ecuación (4.71) la dinámica del error de estimación superior de estado se puede obtener como se muestra continuación.

$$\dot{\bar{e}}(t) = \dot{\bar{\zeta}}(t) - T\dot{x}(t) \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(N_i\bar{\zeta}(t) + J_iCx(t) + Hu(t) + (TE)^+\bar{w}(t) - (TE)^-\underline{w}(t) \\ &\quad - TA_i x(t) - TBu(t) - TEw(t)) \end{aligned} \quad (4.75)$$

reemplazando $\bar{\zeta}(t) = \bar{e}(t) + Tx(t)$ en (4.75).

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(N_i\bar{e}(t) - (TA_i + K_iC - N_i)x(t) + (H - TB)u(t) \\ &\quad + (TE)^+\bar{w}(t) - (TE)^-\underline{w}(t) - TEw(t)) \end{aligned} \quad (4.76)$$

de manera similar, el procedimiento se aplica en (4.73).

$$\dot{\underline{e}}(t) = T\dot{x}(t) - \dot{\underline{\zeta}}(t) \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(TA_i x(t) + TBu(t) + TEw(t) - N_i\underline{\zeta}(t) - J_iCx(t) \\ &\quad - Hu(t) - (TE)^+\underline{w}(t) + (TE)^-\bar{w}(t)) \end{aligned} \quad (4.78)$$

reemplazando $\underline{\zeta}(t) = Tx(t) - \underline{e}(t)$ en (4.78).

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(N_i\underline{e}(t) + (TA_i + K_iC - N_i)x(t) + (TB - H)u(t) \\ &\quad + TEw(t) - (TE)^+\underline{w}(t) + (TE)^-\bar{w}(t)) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Para simplificar la expresión de (4.76) - (4.79) proponemos las siguientes condiciones.

$$\begin{aligned}
 TA_i + K_i C - N_i &= 0 \\
 N_i D - J_i &= K_i \\
 TB &= H
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Por lo tanto, si se satisfacen las restricciones (4.80), la dinámica de los errores de estimación superior e inferior puede reescribirse como se muestra continuación.

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) (N_i \bar{e}(t) + (TE)^+ \bar{w}(t) - (TE)^- \underline{w}(t) - TEw(t)) \tag{4.81}$$

$$\dot{\underline{e}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) (N_i \underline{e}(t) + TEw(t) - (TE)^+ \underline{w}(t) + (TE)^- \bar{w}(t)) \tag{4.82}$$

De acuerdo con el Lemma 2 y la Suposición 4.4.1, se obtienen las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned}
 (TE)^+ \bar{w}(t) - (TE)^- \underline{w}(t) - TEw(t) &\geq 0 \\
 TEw(t) - (TE)^+ \underline{w}(t) + (TE)^- \bar{w}(t) &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Considerando la estabilidad del observador intervalar propuesto, definimos una nueva representación del error intervalar $e(t) = \bar{x}(t) - \underline{x}(t) = \bar{e}(t) + \underline{e}(t)$, la dinámica de $e(t)$ está dada como se muestra continuación.

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) \left[N_i e(t) + M \omega(t) \right] \tag{4.84}$$

donde $M = \begin{bmatrix} (TE)^+ & -(TE)^- \end{bmatrix}$, $\omega(t) = \begin{bmatrix} \bar{w}(t) - \underline{w}(t) \\ \underline{w}(t) - \bar{w}(t) \end{bmatrix}$

El error intervalar de estados genera una envolvente correcta si la matriz N_i satisface las condiciones de Metzler. Sustituyendo $N_i = TA_i + K_i C$ de la condición descrita en (4.80), obtenemos.

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) \left[(TA_i + K_i C) e(t) + M \omega(t) \right] \tag{4.85}$$

La parametrización de las matrices se hacen con la finalidad de encontrar una solución para el conjunto de matrices (4.72), las cuales pueden ser descritas de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} T & D \end{bmatrix} \Sigma = I_n \quad (4.86)$$

donde $\Sigma = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$, tiene que ser de $\text{rango}(\Sigma) = n$ la solución general de (4.86) está dada por

$$T = \underbrace{\Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{T_1} + Z \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^\dagger)}_{T_2} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$D = \underbrace{\Sigma^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{D_1} + Z \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^\dagger)}_{D_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

donde $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n+p)}$ es una matriz arbitraria. Tomando en cuenta la definición de la matriz T dentro de la ecuación (4.85) la dinámica del error de estimación intervalar es representada de la siguiente manera.

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) [\mathcal{A}_i e(t) + M \omega(t)] \quad (4.89)$$

donde M y $\omega(t)$ se definen (4.84), $\mathcal{A}_i = T_1 A_i + Z T_2 A_i + K_i C$.

El problema de estimación robusta del estado se reduce a determinar la ganancia del observador K_i . El observador de intervalo proporcionará una estimación positiva, que proporcionará los límites correctos de estado de intervalo. El valor de la matriz Z es un parámetro de diseño del observador de intervalo propuesto por simplicidad, se considera conocido.

4.4.2. Análisis de estabilidad y convergencia ISS del IGPO

En esta sección se presenta la metodología de diseño de un observador de intervalo (4.61) - (4.66) en términos de Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs). Utilizando la función cuadrática múltiple ISS-Lyapunov, las condiciones de estabilidad y positividad que garantizan que el error de estimación de intervalo resultante (4.89) es estable con respecto al término aditivo $\omega(t)$ se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Para el sistema cuasi-LPV (4.57) existe una función de Lyapunov $V(e(t)) = e^T(t) Q e(t)$, si existe una matriz diagonal positiva Q , con una matriz G_i , y escalares $\beta > \alpha > 0$, $\gamma > 0$ para un $\epsilon \geq 1$, $\alpha \geq 1$ y $\eta > 0$, tales que se satisfacen las siguientes LMIs.*

$$\min_{P, R_i, \gamma} \alpha I_n \preceq P \preceq \beta I_n \quad (4.90)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(QT_1A_i + QZT_2A_i + G_iC) + \epsilon Q & [Q(TE)^+ & -Q(TE)^-] \\ (*) & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (4.91)$$

$$QT_1A_i + QZT_2A_i + G_iC + \eta P \geq 0 \quad (4.92)$$

el observador (4.61) - (4.66) puede estimar los límites inferior y superior del vector de estado $x(t)$ con $G_i = QK_i$.

Demostración. Consideremos la función cuadrática común ISS-Lyapunov.

$$V(e(t)) = e^T(t)Qe(t) \succ 0 \quad (4.93)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante diagonal positiva. La derivada de (4.93) a lo largo de la trayectoria de (4.85) se representa como se muestra continuación.

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}^T(t)Qe(t) + e^T(t)Q\dot{e}(t) \quad (4.94)$$

$$= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t)) \left[e^T(t) (\mathcal{A}_i^T Q + Q\mathcal{A}_i) e(t) \right] + e^T(t)Q\mathcal{M}\omega(t) + \omega^T(t)\mathcal{M}^T Qe(t) \prec 0 \quad (4.95)$$

añadimos sumando y restando los términos $\epsilon V(e(t)) - \gamma \omega^T(t)\omega(t)$ en (4.94) para obtener la siguiente desigualdad.

$$\dot{V}(e(t)) + \epsilon V(e(t)) - \gamma \omega^T(t)\omega(t) \leq \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

con

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i^T Q + Q\mathcal{A}_i + \epsilon Q & Q\mathcal{M} \\ \mathcal{M}^T Q & -\gamma I \end{bmatrix}$$

donde ϵ y γ son escalares positivos. Remplazando \mathcal{A}_i y \mathcal{M} de (4.89) se obtiene

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(QT_1A_i + QZT_2A_i + G_iC) + \epsilon Q & [Q(TE)^+ & -Q(TE)^-] \\ (*) & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

donde $G_i = QK_i$ es una matriz desconocida de dimensiones apropiadas.

El sistema (4.89) es ISS si $\Omega_i \preceq 0$ y el tamaño de $\omega^T(t)\omega(t) < \infty$, tal que.

$$\dot{V}(e(t)) \leq \varsigma^T(t)\Omega_i\varsigma(t) - \epsilon V(e(t)) + \gamma\omega^T(t)\omega(t) \quad (4.98)$$

de modo que, el término del lado derecho de la desigualdad (4.98) es negativo. Por lo tanto, la siguiente desigualdad cumple con.

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\epsilon V(e(t)) + \gamma\omega^T(t)\omega(t) \quad (4.99)$$

integrando ambos lados de la desigualdad, se obtiene.

$$V(e(t)) \leq e^{-\epsilon t}V(0) + \gamma \int_0^\infty e^{-\epsilon(t-s)}\|\omega(s)\|_2 ds \quad (4.100)$$

teniendo en cuenta que (4.93) se cumple para algún escalar $\beta > \alpha > 0$, dada la siguiente desigualdad.

$$\alpha\|e(t)\|_2 \leq V(e(t)) \leq \beta\|e(t)\|_2 \quad (4.101)$$

por lo que se deduce

$$\|e(t)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(e^{-\epsilon t}V(0) + \frac{\gamma}{\epsilon}\|\omega(t)\|_\infty \right)^{1/2} \quad (4.102)$$

por lo tanto, cuando $t \rightarrow \infty$ y el exponencial converge a cero, implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\epsilon}} \max \|\omega(t)\|_\infty \quad (4.103)$$

Se puede apreciar que utilizando el concepto ISS es posible garantizar las cuotas intervalares del error. Así mismo, los intervalos de un observador intervalar se pueden ajustar de manera óptima, si el límite $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\epsilon}} \max \|\omega(t)\|_\infty$ es minimizado.

Considerando el Lemma 1, \mathcal{A}_i definida (4.89) es Metzler si existe un escalar $\eta > 0$ que:

$$\mathcal{A}_i + \eta I \geq 0 \quad (4.104)$$

Dado que solo los elementos fuera de la diagonal de \mathcal{A}_i deben ser no negativos para satisfacer la propiedad Metzler, el término ηI se agrega como se muestra en (4.104). Al pre-multiplicar

la desigualdad (4.104) por una matriz diagonal positiva Q de (4.93), la matriz QA_i es Metzler teniendo en cuenta la siguiente condición.

$$QT_1A_i + QZT_2A_i + G_iC + \eta Q \geq 0 \quad (4.105)$$

esto prueba que la positividad de los errores intervalares se encuentra ligada a una matriz diagonal definida positiva Q . Por lo tanto, concluimos que el vector de estado siempre está limitado por las soluciones del observador intervalar.

Resolviendo el problema de optimización del Teorema 2 con los siguientes parámetros; $\eta = 10$, $\epsilon = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = 2.18$ y una matriz $P = I_4$, mediante el software Matlab 2020b y el toolbox YALMIP-SEDUMI, se obtienen las siguientes ganancias del observador de intervalo descritas por:

$$N_1 = N_2 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 1.1893 \\ 0 & -10 & 0 & 1.1893 \\ 0 & 0 & -10 & 1.1893 \\ 0 & 0 & 0 & -5.7279 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2.1893 & 0 & -1.1893 \\ 1.6893 & 0.50 & -1.1893 \\ 1.1893 & 0 & -0.1893 \\ -4.7279 & 0 & 5.7279 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.8108 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -10 & 1.1893 & 0 \\ 24.3243 & -7.1891 & -24.3243 \\ 0 & 1.1893 & -10 \\ -19.3548 & -4.7279 & 70 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -10 & 1.1893 & 0 \\ 24.3243 & -7.1891 & -24.3243 \\ 0 & 1.1893 & -10 \\ -19.3548 & -4.7279 & 66.30 \end{bmatrix},$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} -17.5161 & -1.1893 & 18.7054 \\ -46.8404 & 2.1891 & 43.0297 \\ -17.5161 & -1.1893 & 18.7054 \\ 18.7054 & -4.7279 & -102.8084 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -17.5161 & -1.1893 & 18.7054 \\ -46.8404 & 2.1891 & 43.0297 \\ -17.5161 & -1.1893 & 18.7054 \\ 18.7054 & -4.7279 & -99.1084 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -3.3786 & 0 & 2.3786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.3786 & 0 & 2.3786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.3786 & 0 & 1.3786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.4557 & 0 & -11.4557 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1.1893 & 0 & 1.1893 & 0 \\ -1.6893 & 0.50 & 1.1893 & 0 \\ -1.1893 & 0 & 1.1893 & 0 \\ 4.7279 & 0 & -5.7279 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4.3. Evaluación del observador IGPO para la estimación de variables

En esta sección se considera que el sistema (4.57) no cuenta con todas las variables disponibles para la medición directa. Por tal motivo, el observador IGPO se utiliza para realizar el monitoreo de variables de estado.

Las pruebas de evaluación se llevaron a cabo en la plataforma de simulación Matlab/Simulink R2020b, con un método de solución y tiempo de muestreo seleccionado automáticamente por Matlab, las condiciones iniciales del sistema no lineal son: $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$, mientras que las condiciones iniciales del observador intervalar fueron: $\bar{\hat{x}}(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $\underline{\hat{x}}(0) = [-1 \ -1 \ -1 \ -1]^T$, y los intervalos del $w(t)$ se encuentran descritos por $\bar{w}(t) = w(t) + 0.1$, $\underline{w}(t) = w(t) - 0.1$, tal como se muestra en la Figura 4.1.

Los resultados del observador IGPO se muestran en las Figuras 4.19 - 4.22. En las Figuras 4.19 - 4.21 se muestra las estimaciones de las variables conocidas del sistema, la línea de color negro representa el comportamiento no lineal del estado, la línea azul y rojo representa la estimación intervalar superior e inferior, respectivamente. Se puede observar que las estimaciones intervalares generan un envolvimiento adecuado de cada uno de los estados, este envolvimiento se debe a la condición de positividad Metzler, ya que dicha condición evita la propagación de las entradas exógenas dentro de las estimaciones superiores e inferiores, evitando estimaciones inciertas, el inciso (a) muestra la dinámica completa de la salida, el inciso (b) muestra un aumento en la gráfica para apreciar mejor el intervalo de estimación y la sección con aumento se representa con un rectángulo amarillo.

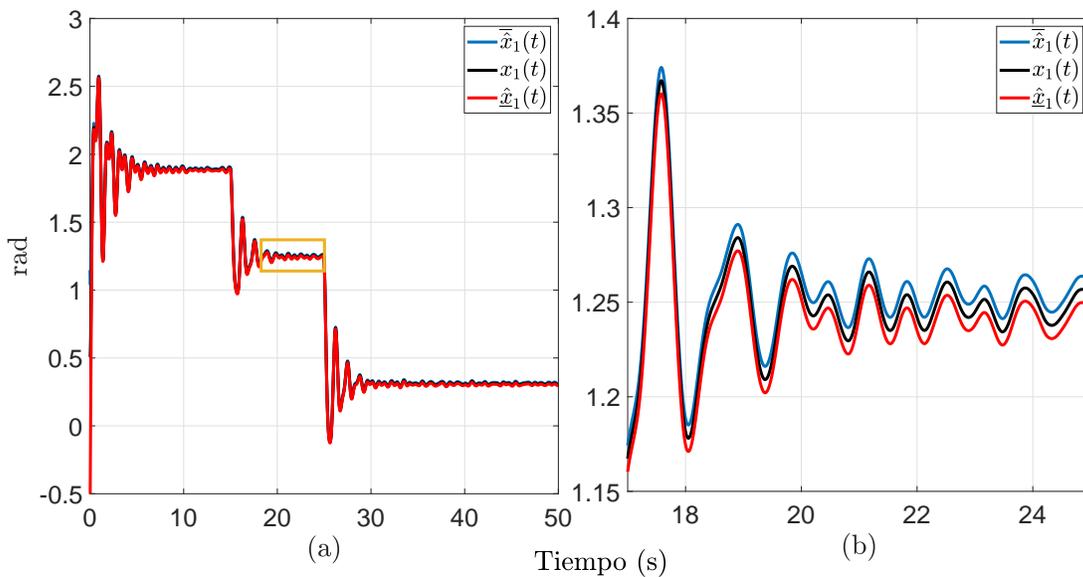


Fig. 4.19. Posición del motor $x_1(t)$ y su estimación intervalar

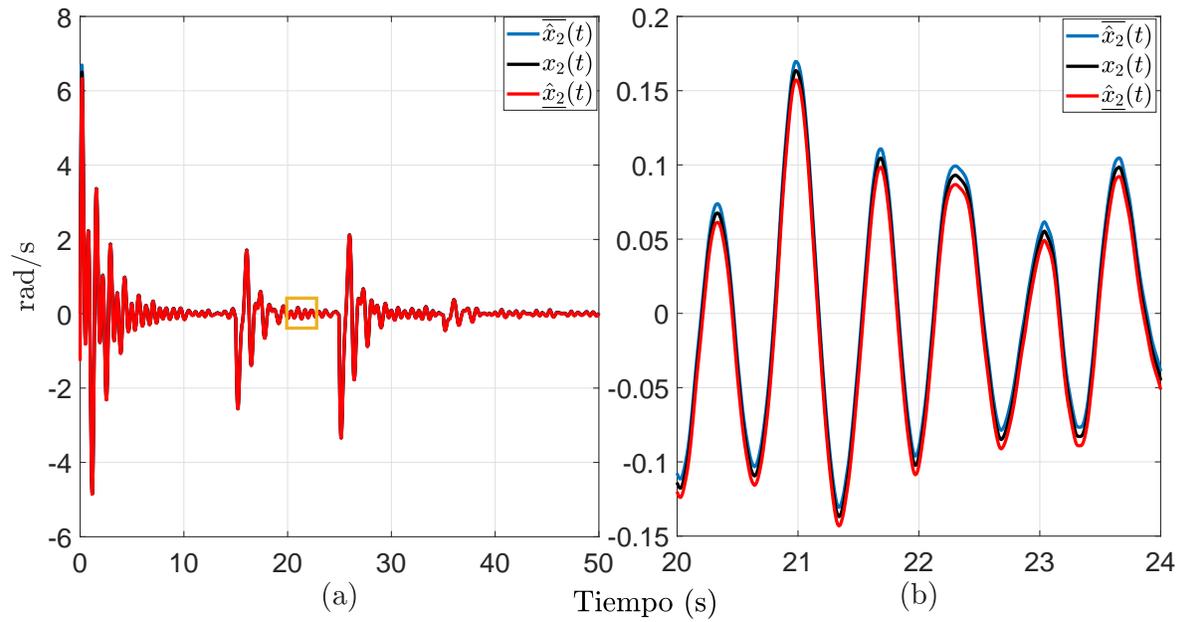


Fig. 4.20. Velocidad del motor x_2 y su estimación intervalar

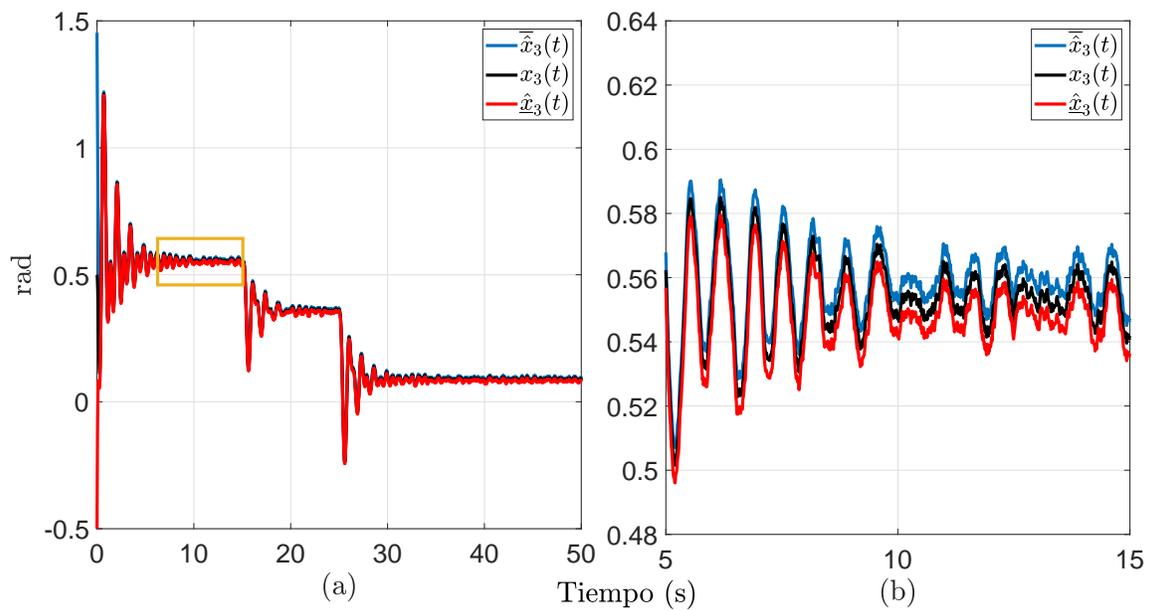


Fig. 4.21. Posición del eslabon x_3 y su estimación intervalar

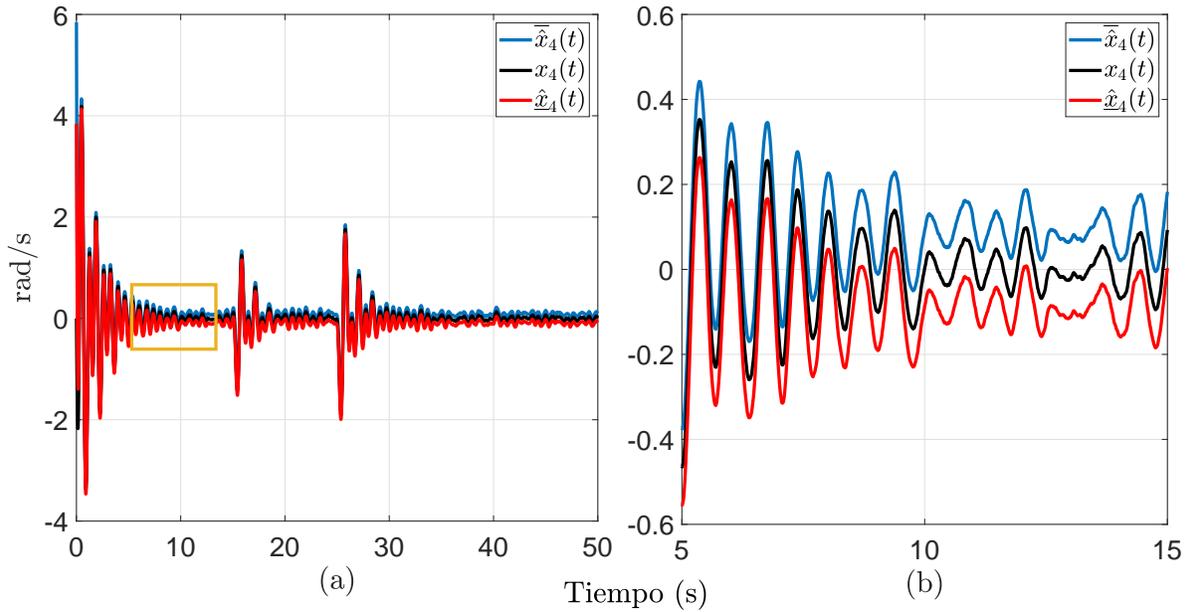


Fig. 4.22. Velocidad del eslabon x_4 y su estimación intervalar

En la Figura 4.22 se presenta la estimación de la variable de estado $x_4(t)$, donde en este caso particular no se consideró medible.

El esquema de monitoreo se compone de un observador IGPO, el cual cuenta con múltiples grados de libertad que le permiten obtener una mayor robustez ante la solución de las LMIs. Dentro de los esquemas intervalares, la condición de positividad es de suma importancia, ya que al considerar los intervalos de las estradas exógenas dentro del diseño, se corre el riesgo de presentar estimaciones inciertas, debido a la propagación de ruido o variaciones paramétricas dentro de cada muestreo de señal. Dicho lo anterior, la condición de positividad nos ayuda a limitar la propagación de las entradas exógenas dentro de las estimaciones, generando así una estimación con un involucimiento adecuado, tal como se muestran en los resultados obtenidos.

4.5. Estrategia de diagnóstico de fallas IGPO

En esta sección se considera que el sistema (4.57) presenta una falla aditiva en el actuador $B_b \bar{u}(t)$ debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor, donde $\bar{u}(t) = u(t) + f(t)$ de tal manera

que $B_b = F_f$, siendo $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas del sistema y $f(t) \in \mathbb{R}^q$ es la falla en el actuador. Por tal motivo el sistema puede representarse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\dot{x}_x(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_{ai}x_x(t)) + B_b\bar{u}(t) + E_e w(t) \\ y(t) &= C_c x_x(t)\end{aligned}\tag{4.106}$$

donde $x_x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables de salidas medidas, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas del sistema más el vector de fallas que afectan al sistema, $E_e \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la matriz de distribución de perturbación, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ es una entrada exógena como perturbación. Las matrices $A_{ai} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_b \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $C_c \in \mathbb{R}^{l \times n}$ son conocidas y de dimensiones apropiadas.

Debido a la presencia de fallas en el actuador, se considera desacoplar el vector $f(t)$ considerando $\dot{f} = 0$ para obtener la siguiente representación.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + B u(t) + E w(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned}\tag{4.107}$$

donde $x(t) = \begin{bmatrix} x_x(t) \\ f(t) \end{bmatrix}$, $A_i = \begin{bmatrix} A_{ai} & F_f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_c & 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} E_e \\ 0 \end{bmatrix}$.

Suposición 4.5.1. *El esquema de diagnóstico de fallas propuesto considera que el sistema aumentado (4.107) cumple con las mismas condiciones de diseño que el sistema (4.57). Por lo tanto, el diseño y el análisis del observador intervalar se basa en el sistema (4.57).*

4.5.1. Evaluación del esquema de diagnóstico de fallas IGPO

El objetivo de esta simulación es mostrar la robustez de estimación de fallas del esquema de diagnóstico, en donde se consideran dos escenarios; en el primer escenario se considera una señal de falla aditiva tipo abrupta en el ecuador del sistema, en el segundo escenario se considera una señal de falla aditiva tipo incipiente en el ecuador del sistema.

Las pruebas de evaluación se llevaron a cabo en la plataforma de simulación Matlab/Simulink R2020b, con un método de solución y tiempo de muestreo seleccionado automáticamente por Matlab, las condiciones iniciales del sistema no lineal son: $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0]^T$, mientras que las condiciones iniciales del observador intervalar fueron: $\bar{x}(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$, $\underline{x}(0) = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0]^T$ y los intervalos del $w(t)$ se encuentran descritos por $\bar{w}(t) = w(t) + 0.1$, $\underline{w}(t) = w(t) - 0.1$, tal como se muestra en la Figura 4.1.

Resolviendo el problema de optimización del Teorema 2 con los siguientes parámetros; $\eta = 10$, $\epsilon = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = 4.03$ y una matriz $P = I_5$, mediante el software Matlab 2020b y el toolbox YALMIP-SEDUMI, se obtienen las siguientes ganancias del observador de intervalo descritas por:

$$\begin{aligned}
 N_1 = N_2 &= \begin{bmatrix} -10 & 1.099 \times 10^{-07} & 1.297 \times 10^{-07} & 0.355 & 0.374 \\ 1.099 \times 10^{-07} & -10 & 1.491 \times 10^{-07} & 0.319 & 0.293 \\ 1.297 \times 10^{-07} & 1.491 \times 10^{-07} & -10 & 0.279 & 0.283 \\ 2.071 \times 10^{-09} & 2.318 \times 10^{-09} & 2.666 \times 10^{-09} & 9.530 & 0.303 \\ 5.683 \times 10^{-08} & 6.399 \times 10^{-05} & 7.425 \times 10^{-08} & 0.323 & -9.568 \end{bmatrix}, \\
 J_1 &= \begin{bmatrix} 2.866 & 0.645 & 7.666 \\ 1.686 & 0.448 & 6.802 \\ -2.345 & 0.036 & 6.012 \\ 17.296 & 0.079 & -160.238 \\ 17.781 & -3.643 & -15.345 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 2.866 & 0.645 & 7.666 \\ 1.686 & 0.448 & 6.802 \\ -2.345 & 0.036 & 6.012 \\ 17.296 & 0.079 & -156.538 \\ 17.781 & -3.643 & -15.345 \end{bmatrix}, \\
 T &= \begin{bmatrix} 0.350 & 0.017 & 0.355 & 0 & 0 \\ 0.217 & 0.013 & 0.319 & 0 & 0 \\ -0.186 & 0.013 & 0.279 & 0 & 0 \\ -0.156 & 0.014 & -9.530 & 1 & 0 \\ -0.397 & -0.442 & 0.323 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.649 & -0.017 & -0.355 \\ -0.218 & 0.986 & -0.319 \\ 0.186 & -0.013 & 0.720 \\ 0.156 & -0.014 & 9.530 \\ 0.397 & 0.442 & -0.323 \end{bmatrix}, \\
 Z &= \begin{bmatrix} 0.367 & 98.743 & 2.121 & 0 & 0 & 0.666 & 98.708 & 1.410 \\ -0.269 & 54.036 & 1.736 & 0 & 0 & -0.705 & 55.009 & 1.097 \\ 0.362 & -57.314 & 0.483 & 0 & 0 & 0.735 & -57.340 & 0.923 \\ 0.451 & 36.325 & -20.214 & 0 & 0 & 0.765 & 36.297 & -1.153 \\ -0.108 & 12.732 & 1.601 & 0 & 0 & 0.685 & 13.618 & 0.953 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.374 \\ 0.293 \\ 0.283 \\ 0.303 \\ -9.568 \end{bmatrix}, \\
 K_1 &= \begin{bmatrix} -9.158 & -0.311 & -0.841 \\ 0.659 & -10.187 & -0.659 \\ 0.637 & 0.215 & -10.637 \\ -18.671 & 0.188 & 69.316 \\ -21.529 & -0.595 & 21.529 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -9.158 & -0.311 & -0.841 \\ 0.659 & -10.187 & -0.659 \\ 0.637 & 0.215 & -10.637 \\ -18.671 & 0.188 & 65.616 \\ -21.529 & -0.595 & 21.529 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Escenario en presencia de falla tipo abrupta

Para la simulación, se considera que existe una falla debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor, lo cual genera un aumento abrupto de magnitud $0.2Nm$ en el par de entrada del actuador, ocurrido en el segundo 25 y desapareciendo posteriormente en el segundo 35, una segunda falla se presenta en el segundo 40 y desaparece en el segundo 45 con una magnitud de $0.1Nm$ como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq 25 \\ 0.2 & 25 < t \leq 35 \\ 0 & 35 < t \leq 40 \\ 0.1 & 40 < t \leq 45 \end{cases}$$

Los resultados del observador IGPO se ilustran en las Figuras 4.23 - 4.27. En las Figuras 4.23 - 4.25 se muestran las estimaciones de las variables de estado del observador descritas en (3.1) en presencia de una falla aditiva, la línea de color negro representa el comportamiento no lineal del estado, la línea azul y rojo representa la estimación intervalar superior e inferior, respectivamente. Las estimaciones de las variables de estado son adecuadas, ya que mantienen un envolvimiento adecuado del sistema cuasi-LPV, el inciso (a) muestra la dinámica completa de la salida, el inciso (b) muestra un aumento en la gráfica para apreciar mejor el intervalo de estimación y la sección con aumento se representa con un rectángulo amarillo.

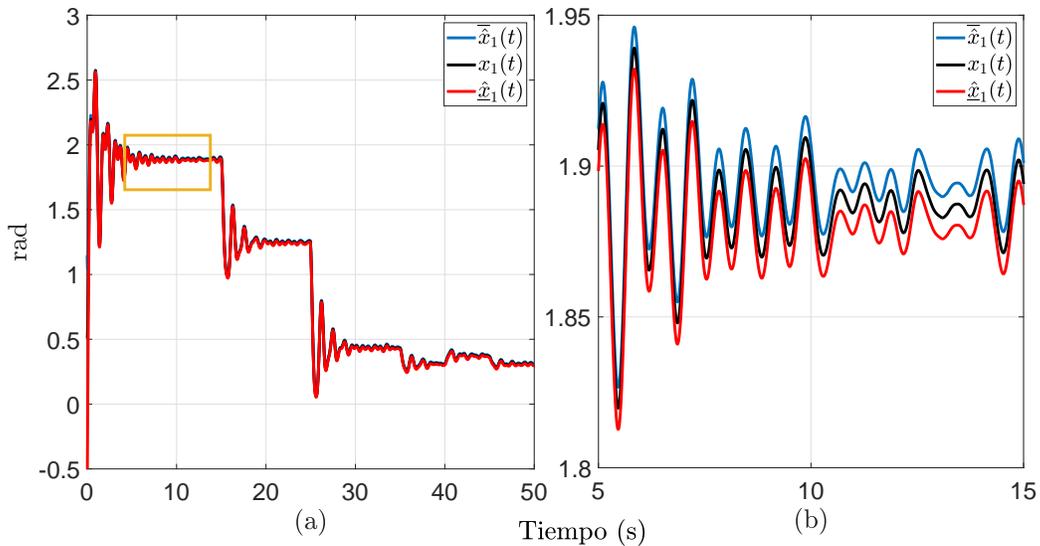


Fig. 4.23. Escenario falla abrupta con observador IGPO: Posición del motor $x_1(t)$

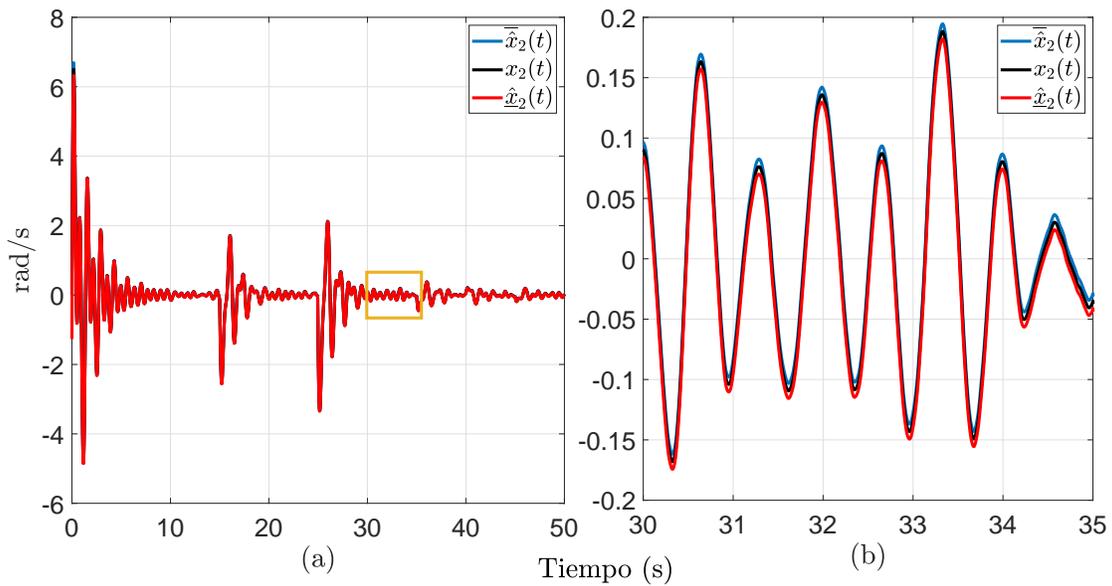


Fig. 4.24. Escenario falla abrupta con observador IGPO: Velocidad del motor $x_2(t)$.

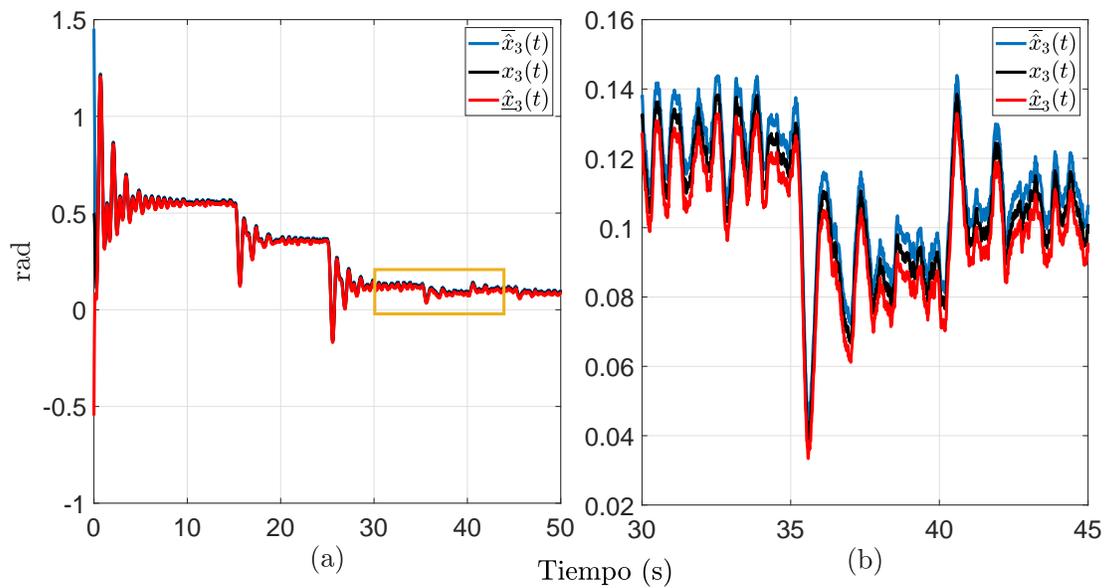


Fig. 4.25. Escenario falla abrupta con observador IGPO: Posición del eslabón $x_3(t)$.

La Figura 4.26 muestra la estimación de la velocidad del eslabón, la cual se obtiene del observador IGPO dónde se puede apreciar que el envolvimiento se genera de manera correcta.

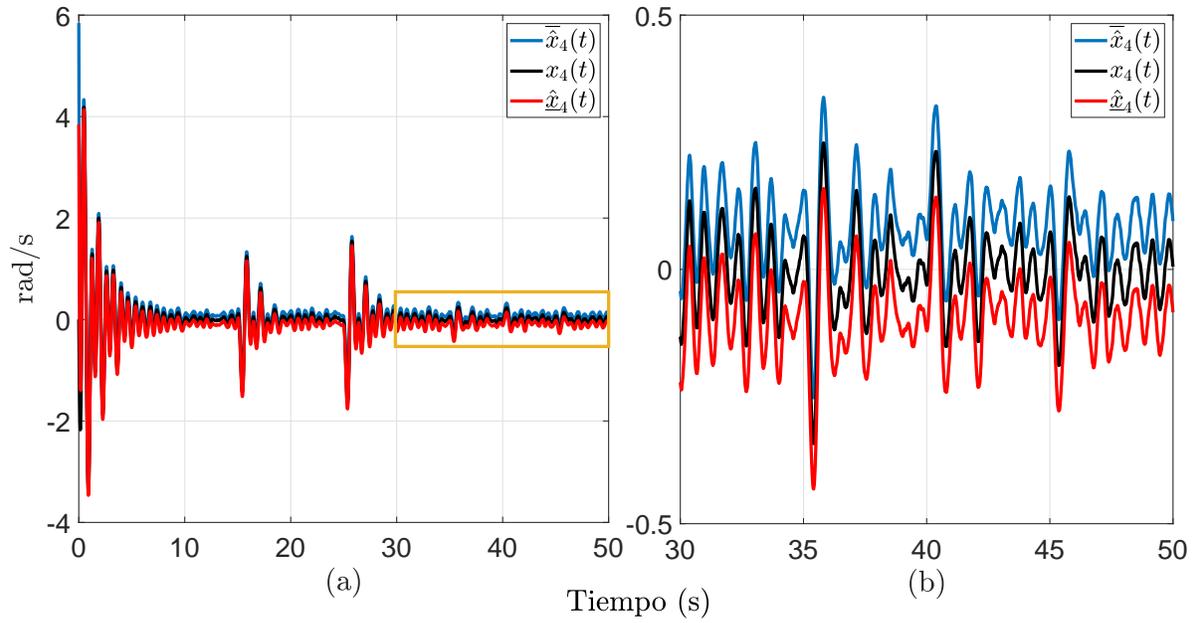


Fig. 4.26. Escenario falla abrupta con observador IGPO: Velocidad del eslabón $x_4(t)$.

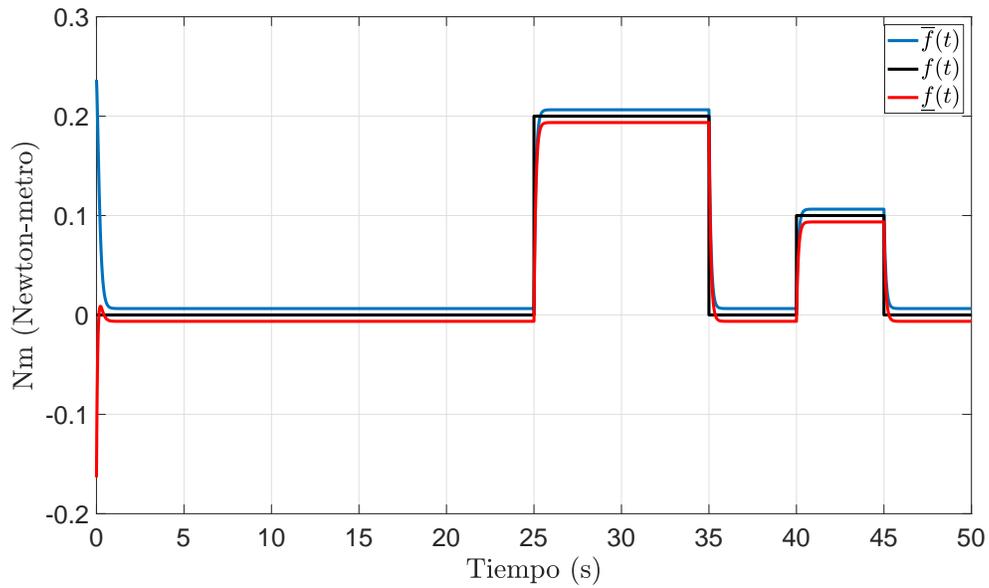


Fig. 4.27. Falla abrupta en el actuador y su estimación intervalar con observador IGPO

Se puede observar en la Figura 4.27 que el observador logra estimar la falla abrupta ocurrida en actuador en el segundo 25, y logra regresar a su valor sin la presencia de falla en el segundo 35, posteriormente en el segundo 40 se presenta una segunda señal de falla, la cual es estimada por el observador intervalar IGPO con un tiempo de involucramiento de alrededor de 2 segundos.

El esquema de diagnóstico de fallas se compone de un observador IGPO, el cual cuenta con múltiples grados de libertad para realizar las estimaciones de estados y fallas. El esquema intervalar dentro del área de diagnóstico de fallas es de gran relevancia, debido a que el observador intervalar con sus respectivos intervalos, nos brinda información en todo momento del comportamiento de estados y fallas. También se puede decir que, una de las ventajas es que a pesar de no conocer el comportamiento exacto de las entradas exógenas, el observador nos brinda un intervalo de estimación garantizado una ubicación del valor de la variable.

4.6. Conclusiones del capítulo

En esta sección se presentó el diseño de dos observadores intervalares los cuales fueron utilizados para realizar diversos esquemas, en los que se encuentran esquemas de estimación de estados, esquemas de diagnóstico de fallas y esquemas de detección de fallas. Para validar la robustez de los esquemas mencionados, se plantearon diversos escenarios de fallas, en los cuales se consideraron fallas abruptas. Los resultados obtenidos en los distintos escenarios de fallas, fueron sobresalientes, ya que cada uno de los esquemas logro estimar la falla en todo momento.

Capítulo 5

Conclusiones generales

En este trabajo de tesis se diseñaron dos estructuras de observadores intervalares. En la primera estructura, tenemos el diseño de un observador intervalar Luenberger modificado, el cual cuenta con grados de libertad adicionales. Dicho observador es utilizado para realizar un esquema de detección de fallo pasivo, el cual genera una señal residual intervalar que permite detectar fallas de una manera más sencilla, dicha metodología es comparada con el esquema tradicional de generación de residuos. También, se presenta el diseño de un esquema de detección y localización de fallas utilizando el observador intervalar Luenberger modificado, el cual permite realizar una estimación intervalar de estados y fallas.

La segunda estructura describe el diseño de un observador intervalar proporcional generalizado (IGPO) con múltiples grados de libertad. Dicho observador es utilizado para realizar la tarea de monitoreo de variables de estado, en donde se propone un sistema c-LPV en el cual no se tiene la información de todas las salidas. Es por ello que el observador IGPO se encarga de recopilar la información necesaria para estimar la variable de estado no medible. También, se presenta el diseño de un esquema de detección y localización de fallas utilizando el observador IGPO, el cual permite realizar una estimación intervalar de estados y fallas.

Para analizar el comportamiento de los esquemas propuestos, se consideró utilizar el caso de estudio de un robot de articulación flexible de un grado de libertad. Se estudiaron cada una de las variables y componentes que lo conforman. Dentro de las variables dinámicas se encuentra; el desplazamiento angular del motor $x_1(t)$, velocidad angular del motor $x_2(t)$, desplazamiento angular del eslabón

$x_3(t)$ y la velocidad angular del eslabón $x_4(t)$. El modelo no lineal es utilizado el diseño de un sistema Lineal de parámetros variantes, el cual está compuesto por dos sub modelos o modelos locales, los cuales representan de manera adecuada el comportamiento dinámico del modelo no lineal.

Para comprobar la efectividad del esquema de detección de fallas se analizan los resultados obtenidos ante los diferentes escenarios de fallas considerando fallas abruptas e incipientes de diferente magnitud para observar la capacidad del esquema propuesto.

Para los esquemas de diagnóstico de fallas de los observadores intervalares, se analizaron los resultados ante escenarios de fallas tipo abruptas, donde se puede apreciar que los resultados son favorables, debido a que cada esquema logra realizar una estimación intervalar de estados y fallas.

La principal contribución de este trabajo de tesis fue la elaboración de dos diseños de observadores intervalares robustos, los cuales cuentan con varios grados de libertad que permiten obtener una estimación intervalar mucho más precisa, debido a que los grados de libertad adicionales permiten añadir robustez ante las entradas exógenas que afecten al sistema.

5.1. Trabajos futuros

A partir de este trabajo realizado, se pueden generar otros trabajos como:

1. Considerar dentro del diseño de los observadores intervalares las variaciones paramétricas y el ruido en las señales de salida.
2. Considerar el diseño de un esquema de control tolerante a fallas activo (FTC) utilizando observadores intervalares.
3. Validación de los esquemas de detección y localización de fallas propuestos con resultados experimentales.

Publicaciones

Revistas indexadas en el Journal Citation Reports

- Castillo, JC, Gordillo, GO, Puig, V., Méndez, RV, Ramírez, GG, Reyes, JR, Zaragoza, CA (2024). Sensor Fault Detection for LPV Systems Using Interval Observers. IEEE Access, vol. 12, pp. 93701-93710.

Sensor fault detection for LPV systems using interval observers

COLÍN CASTILLO J. Y.¹, OSORIO GORDILLO G. L.¹, PUIG V.², VARGAS MÉNDEZ R. A.¹, GUERRERO RAMÍREZ G. V.¹, REYES REYES J.¹, ASTORGA ZARAGOZA C. M.¹

¹Tecnológico Nacional de México / CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, Cuernavaca, Mor. Mexico

²Universitat Politècnica de Catalunya - UPC, Rambla de Sant Nebridi 10, Terrassa, Spain

Corresponding author: Osorio Gordillo G. L. (e-mail: gloria.og@cenidet.tecnm.mx).

ABSTRACT This paper presents an approach for design a continuous-time interval observer for linear parameter varying (LPV) systems in the presence of disturbances that are considered unknown but bounded. The proposed observer is used for the design of a sensor fault detection scheme using the input to state stability (ISS) approach through a Lyapunov quadratic function. The conditions of stability and positivity are presented by a set of linear matrix inequalities (LMIs). The performance of the proposed method is shown in simulation using a case study based on a single-link flexible joint robotic system.

INDEX TERMS Interval observer, Fault detection, Interval estimation, Sensor fault, Linear parameter varying system.

I. INTRODUCTION

Fault detection is the process of discovering in real-time the presence of a fault in an equipment before it causes a breakdown using the available sensors. This topic has gained special interest during the last decades in the industry and academia because of the growing complexity of equipment and components in industrial processes making them prone to the occurrence of faults. A fault in a process can degrade its performance, reduce component life, generate unscheduled shutdowns (which can result in economic losses) and can even lead to human losses. Actually, in the area of automatic control, one of the most used techniques for the development of fault detection schemes are the observers, which are used to obtain a simultaneous estimation of states and faults, as shown in [1], [2], [3] and [4]. In the same way, these approaches have also been used to design robust schemes such as fault tolerant controls as shown in [5]. In model-based approaches, there always exist modeling uncertainties that make difficult to estimate a variable when using observers with a minimum degree of robustness. A possible robust state estimation scheme relies on the concept of interval observers, where an interval of estimated states is obtained under the assumptions that the uncertainties are unknown but bounded. Interval observers have received considerable attention in recent years. Different approaches have been proposed to deal with different class of continuous-time and discrete-time systems, such as [6], [7] and [8]. The main limitation of interval observers is that the trajectories of the system that

start from an internally bounded initial condition will enclose the stable system trajectory only if the system is *positive* that is, the system matrix is Metzler and Hurwitz [9]. The positivity of the error estimation is one of the most restrictive assumptions for interval observer design. Recently, the concept of interval observer has been extended to switched classes, see as e.g. [10], [11], [12], where the idea is to apply a combination of time-varying similarity transformations along with the observer's gains, which guarantee both positivity and practical stability of the switched dynamics of the estimation errors, as proposed in [13], [14] and [15]. There are different approaches to perform fault detection scheme, in which are the classical observers, such as [16], [17] and [18] where they calculate an asymptotic estimation based on the inputs and outputs of the system. Similarly, the concept of interval observers has been applied to fault detection schemes, as it considers the limits of uncertainties to provide the bounds for estimating the system state, thus having an interval estimate. Being thus considered as a natural threshold for detection as shown in [19], [20], [21], [22] and [23]. The advantage of these two estimation strategies is that they are usually more computationally efficient, since they use observers with a single degree of freedom L . However, due to the simplicity of the observer, low magnitude of faults may be undetected. This means that the efficiency of the fault detection scheme is highly dependent on the observer degrees of freedom. For this reason, the *TNL* design strategy is proposed, which is based on adding additional degrees of freedom T and N in

Bibliografía

- Alex Reis Souza, Denis Efimov, T. R. (2021). Robust output feedback model predictive control of time-delayed systems using interval observers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 32(3):1180–1193.
- A.Yu. Aleksandrov, Denis Efimov, S. D. (2019). On iss-lyapunov functions for mechanical systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Batalle, V. F. (2010). Robots flexibles: Hacia una generación de robots con nuevas prestaciones. In *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, ISSN:1697-7912. Vol.3:24-41*.
- Blanke., M., LanLunze., M. K., and Staroswiecki., M. (2006). *Diagnosis and Fault Tolerant Control*. Springer.
- Briat, C. (2015). *Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems*. Springer Berlin Heidelberg.
- Busawon, K. K. and Kabore, P. (2001). Disturbance attenuation using proportional integral observers. *International Journal of Control*, 74:618–627.
- Chevet, T., Dinh, T. N., Marzat, J., and Raïssi, T. (2021). Robust sensor fault detection for linear parameter-varying systems using interval observer. In *Proceedings of the 31st European Safety and Reliability Conference (ESREL 2021)*.
- Chevet, T., Dinh, T. N., Marzat, J., Wang, Z., and Raïssi, T. (2022). Zonotopic Kalman filter-based interval estimation for discrete-time linear systems with unknown inputs. *IEEE Control Systems Letters*, 6:806–811.
- Dinh, T. N., Marouani, G., Raïssi, T., Wang, Z., and Messaoud, H. (2019). Optimal interval observers for discrete-time linear switched systems. *International Journal of Control*, 93(11):2613–2621.

- Efimov, D., Raïssi, T., and Zolghadri, A. (2013). Control of nonlinear and LPV systems: Interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3):773–778.
- García, M., Puig, V., Astorga-Zaragoza, and Osorio-Gordillo, G. (2018). Robust fault estimation based on interval Takagi-Sugeno unknown input observer. *IFAC-PapersOnLine*, 51(24):508–514.
- Gouzé, J., Rapaport, A., and Hadj-Sadok, M. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 133(1-2):45–56.
- Grüne, L. (2002). *Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization*. Springer.
- Gu, D.-K., Liu, L.-W., and Duan, G.-R. (2019). Design of reduced-order interval observers for LTI systems with bounded time-varying disturbances: a parametric approach. *International Journal of Control*, 93(11):2551–2563.
- Guo, S. and Zhu, F. (2017). Interval observer design for discrete-time switched system. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):5073–5078.
- Haj, G., Malti, R., Aoun, M., and Raïssi, T. (2020). Fractional interval observers and initialization of fractional systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 82:105030.
- He, Z. and Xie, W. (2018). Control of non-linear systems based on interval observer design. *IET Control Theory and Applications*, 12(4):543–548.
- Huang, Z. (2022). Application of interval state estimation in vehicle control. *Alexandria Engineering Journal*, 61(1):911–916.
- Ifqir, S. (2019). *Interval Observers for Switched Dynamical Systems*. PhD thesis, Université Paris-Saclay.
- Ifqir, S., Ichalal, D., Ait Oufroukh, N., and Mammar, S. (2018). Robust interval observer for switched systems with unknown inputs: Application to vehicle dynamics estimation. *European Journal of Control*, 44:3–14.

- Ifqir, S., Puig, V., Ichalal, D., Ait-Oufroukh, N., and Mammar, S. (2020). Set-membership switched observers based on interval characterization of the estimation error. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):14261–14266.
- Kaczorek, T. (2002). *Positive 1D and 2D Systems*. Springer London.
- Khan, A., Xie, W., Zhang, B., and Liu, L.-W. (2021). A survey of interval observers design methods and implementation for uncertain systems. *Journal of the Franklin Institute*, 358(6):3077–3126.
- Lamouchi, R., Raïssi, T., Amairi, M., and Aoun, M. (2022). On interval observer design for active fault tolerant control of linear parameter-varying systems. *Systems amp; Control Letters*, 164:105218.
- Le, V. (2013). *Zonotopes : from guaranteed state-estimation to control*. ISTE Wiley, London Hoboken, NJ.
- Li, D., Chang, J., Chen, W., and Raïssi, T. (2022). IPR-based distributed interval observers design for uncertain LTI systems. *ISA Transactions*, 121:147–155.
- Ma, X., Huang, J., and Chen, L. (2019). Finite-time interval observers’ design for switched systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 38(11):5304–5322.
- Madrigal-Espinosa, G., Osorio-Gordillo, G.-L., Astorga-Zaragoza, C.-M., Vázquez-Román, M., and Adam-Medina, M. (2017). Fault detection and isolation system for boiler-turbine unit of a thermal power plant. *Electric Power Systems Research*, 148:237–244.
- Meseguer, J., Puig, V., and Escobet, T. (2008). Robust fault detection linear interval observers avoiding the wrapping effect. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):11570–11575.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson.
- Rajamani, R. and Cho, Y. M. (1998). Existence and design of observers for nonlinear systems: Relation to distance to unobservability. *International Journal of Control*, 69(5):717–731.
- Raïssi, T., Videau, G., and Zolghadri, A. (2010). Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3):518–527.

- Rodarte, C. V. (2013). *Monitoreo Y Diagnóstico Automático De Fallas En Sistemas Dinamicos*. Instituto de Ingenieria UNAM.
- Rotondo, D., Fernandez-Canti, R. M., Tornil-Sin, S., Blesa, J., and Puig, V. (2016). Robust fault diagnosis of proton exchange membrane fuel cells using a Takagi-Sugeno interval observer approach. *International Journal of Hydrogen Energy*, 41(4):2875–2886.
- Sehli, N., Taarit, K. I., Raissi, T., and Ksouri, M. (2019). Interval observers design for uncertain multiple model systems. In *2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*. IEEE Control Systems.
- Solsona, J. and Valla, M. (2003). Disturbance and nonlinear Luenberger observers for estimating mechanical variables in permanent magnet synchronous motors under mechanical parameters uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 50(4):717–725.
- Tian, Y., Zhang, K., Jiang, B., and Gang, X. (2020). Interval observer and unknown input observer-based sensor fault estimation for high-speed railway traction motor. *Journal of the Franklin Institute*, 357(2):1137–1154.
- Torres, I., Avilés, J. D., and Vargas, A. (2022). Sensor fault detection in a biohydrogen production process based on an interval observer and adaptive thresholds. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 5(1):324–330.
- Vu, L., Chatterjee, D., and Liberzon, D. (2007). Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control. *Automatica*, 43(4):639–646.
- Wu, Y., Dong, J., Li, X.-J., and Yang, G.-H. (2016). A new fault detection observer scheme for T-S fuzzy systems with unmeasurable variables. *12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*.