



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Doctorado

**Modelado y Control de un Motor Reciprocante  
Magnético**

presentado por

**M.C. Christian Rios Enriquez**

como requisito para la obtención del grado de

**Doctor en Ciencias en Ingeniería  
Electrónica**

Director de tesis

**Dr. Manuel Adam Medina**

Codirector de tesis

**Dr. Jarniel García Morales**

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2024.

 <small>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico</small>	<b>ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL</b>	<b>Código: CENIDET-AC-006-D20</b>
		<b>Revisión: 0</b>
	<b>Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4</b>	<b>Página 1 de 1</b>

Cuernavaca, Mor., a 20 de junio de 2024

**Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza**  
**Subdirector Académico**  
**Presente**

**At'n: Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez**

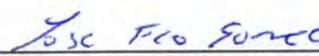
**Presidente del Claustro Doctoral**

**Departamento de Ingeniería Electrónica**

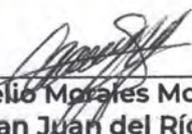
Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante Christian Rios Enriquez manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado "MODELADO Y CONTROL DE UN MOTOR RECIPROCANTE MAGNÉTICO", realizado bajo la dirección del Dr. Manuel Adam Medina y la codirección del Dr. Jarniel García Morales, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.

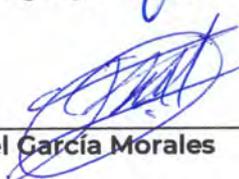
ATENTAMENTE

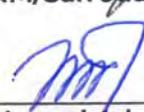
  
 \_\_\_\_\_  
 Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez  
 CENIDET

  
 \_\_\_\_\_  
 Dr. José Francisco Gómez Aguilar  
 CENIDET

  
 \_\_\_\_\_  
 Dr. Jesús Aguayo Alquicira  
 CENIDET

  
 \_\_\_\_\_  
 Dr. Cornelio Morales Morales  
 TecNM/San Juan del Río Querétaro

  
 \_\_\_\_\_  
 Dr. Jarniel García Morales  
 CENIDET

  
 \_\_\_\_\_  
 Dr. Manuel Adam Medina  
 CENIDET

c.c.p: M.T.I Maria Elena Gómez Torres/ jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
 c.c.p: Dr. Jarniel García Morales / jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica.  
 c.c.p: Expediente.



Cuernavaca, Mor.,  
No. De Oficio:  
Asunto:

24/junio/2024  
SAC/195/2024  
Autorización de  
impresión de tesis

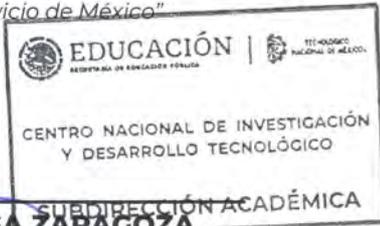
**CHRISTIAN RIOS ENRIQUEZ  
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“MODELADO Y CONTROL DE UN MOTOR RECIPROCANTE MAGNÉTICO”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®  
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”*



**CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA**  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica  
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



---

# Dedicatoria

---

*A mi madre Beatriz Enriquez Guzman y a mi padre Alfredo Rios Carrera que me dieron la vida, por ser los mejores padres del mundo y un ejemplo a seguir, por haberme apoyado e inculcado los valores que me regirán toda mi existencia.*

*A mi gran hermano Emmanuel Rios Enriquez y a mi querida hermana Nathaly Rios Enriquez, por los grandes momentos que hemos disfrutado juntos y por orientarme cuando he estado indeciso. Ustedes me motivan a ser mejor que ayer.*

*Y con todo mi corazón, quiero dedicar este logro y honrar la memoria de mi padre, quien estuvo presente en para mí en todo momento a pesar de todas las situaciones que pasamos juntos en familia. El lograr estar en esta última etapa de culminación de mi grado de estudios y cumplir con los objetivos que siempre anhelaste de ver en tu hijo al pasar por el proceso de doctorado. Espero que estes orgulloso de mi papá, siempre serás mi modelo a seguir y aunque ya no estes aquí, siempre llevaré el amor y la enseñanza que me diste en mi corazón, nunca dejaremos de amarte y recordarte con cariño, gracias papá.*

---

# Agradecimientos

---

*Quiero expresar mi gratitud a Dios, quien con su bendición llena siempre mi vida y a toda mi familia por estar siempre presentes.*

*A mi asesores el Dr. Manuel Adam Medina y al Dr. Jarniel García Morales les agradezco el haberme guiado en la realización del trabajo de investigación, mediante sus invaluable observaciones y consejos; de igual forma agradezco la confianza, el apoyo, su paciencia y la amistad brindada.*

*A los integrantes del comité revisor: el Dr. José Francisco Gómez Aguilar, el Dr. Jesús Aguayo Alquicira y el Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, cuyos comentarios y observaciones fueron muy valiosos como guía y mejora para el desarrollo del presente trabajo.*

*A todos mis profesores del CENIDET, quienes me compartieron sus conocimientos y experiencias, así como su paciencia y comprensión en toda la trayectoria de mi maestría.*

*A mis amigos y compañeros de CENIDET con quienes compartí momentos muy agradables. Pero sobre todo a mis amigos de generación de control, potencia y de energías renovables de doctorado, Omar Arturo, Alexis, Donaciano, Colín, Felipe, Héctor, Zetina, Jonathan, Eusebio, Diana, Sabido, Benjamín Chavarría, Laura, quienes compartieron conmigo muchos momentos tanto divertidos como difíciles y a pesar de eso siempre estuvimos juntos.*

*También quiero agradecer al director Dr. Arturo Ernesto Mares Gardea, la Mtra. Norma Eugenia Cámara Chan y la M.C Silvia Patricia Pérez Sabino por todo su apoyo brindado durante el proceso de InnovaTecnm 2023.*

*Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por brindarme el sustento económico necesario para culminar en tiempo y forma mis estudios de posgrado.*

*Agradezco profundamente al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por proporcionarme los medios necesarios para mi formación académica y por las facilidades otorgadas durante mi estancia, así como de tener un ambiente muy agradable de trabajo y una atención excelente en todo momento.*

---

# Resumen

---

Los motores recíprocos magnéticos se presentan como una nueva alternativa para mitigar la contaminación del aire producido por quema de combustibles fósiles usados en los motores de combustión interna. Estos tipos de motores presentan una característica principal: utilizan la estructura de un motor de combustión interna y sustituyen el uso de combustible fósil por campos magnéticos.

Al igual que los motores de combustión interna, para mantener la operación del motor magnético en condiciones óptimas, se requieren tener el diseño de modelos matemáticos y controladores para determinar sus puntos de operación.

En estas tesis se presenta el diseño y la formulación del modelo matemático de un motor recíproco magnético tipo monocilíndrico basado en el enfoque energético Euler-Lagrange junto al diseño y aplicación de un controlador tipo neuronal para controlar la velocidad del motor.

El desarrollo del modelo matemático se estructura de dos partes: primero se formula el modelo matemático utilizando el enfoque energético de Euler-Lagrange y después se desarrolla la parte magnética para representar la fuerza de repulsión magnética del motor magnético y completar el modelo matemático.

Dentro de la tesis, se presenta la metodología utilizada para la construcción del motor recíproco magnético junto a la plataforma de operación utilizando el software de LabVIEW. Además, se presentan las pruebas realizadas para poder validar el modelo matemático, la determinación de los ángulos de operación y la fuerza magnética generada entre un imán de neodimio y un electroimán de configuración tipo solenoide multicapa.

Finalmente, con los resultados obtenidos del modelo matemático se procede al diseño del controlador utilizando redes neuronales basado en una estructura recurrente de configuración 3-2-1 y su implementación en el prototipo experimental.

---

# Abstract

---

Magnetic reciprocating engines are presented as a new alternative to mitigate air pollution produced by burning fossil fuels in internal combustion engines. These types of engines have one main characteristic: they use the structure of an internal combustion engine and replace its use of fossil fuel with magnetic fields.

As with internal combustion engines, mathematical models and controllers must be designed to determine the magnetic engine's operating points to maintain optimal operation.

This thesis presents the design and formulation of the mathematical model of a single-cylinder magnetic reciprocating engine based on the Euler-Lagrange energy approach, together with the design and application of a neural-type controller to control the engine's speed.

The development of the mathematical model is structured in two parts: first, the mathematical model is formulated using the Euler-Lagrange energy approach, and then the magnetic part is developed to represent the magnetic repulsion force of the magnetic motor and complete the mathematical model.

The thesis presents the methodology used for building a magnetic reciprocating engine and the operation platform using LabView software. In addition, it presents the tests performed to validate the mathematical model, the determination of the operating angles, and the magnetic force generated between a neodymium magnet and a multilayer solenoid electromagnet configuration.

Finally, with the results obtained from the mathematical model, we proceed to the design of the controller using neural networks based on a recurrent structure of 3-2-1 configuration and its implementation in the experimental prototype.

---

# Índice general

---

Índice general	V
Índice de tablas	VII
Índice de figuras	VIII
Nomenclatura	X
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Problemática de investigación . . . . .	2
1.2. Estudios sobre el motor reciprocante magnético . . . . .	3
1.3. Propuesta de solución . . . . .	5
1.4. Hipótesis . . . . .	6
1.5. Objetivos . . . . .	6
1.5.1. Objetivo general . . . . .	6
1.5.2. Objetivos específicos . . . . .	6
1.5.3. Metas . . . . .	7
1.6. Limitaciones . . . . .	7
1.7. Organización del documento . . . . .	7
<b>2. El motor reciprocante magnético</b>	<b>9</b>
2.1. Los motores de combustión interna . . . . .	9
2.2. El motor reciprocante magnético tipo monocilíndrico . . . . .	10
2.3. Mecanismo manivela-biela-corredera . . . . .	11
2.4. Análisis mecánico del MRM . . . . .	12
2.4.1. Análisis cinemático de un motor monocilíndrico . . . . .	12
2.4.2. El par del motor . . . . .	13
2.4.3. Formulación de Euler-Lagrange para el modelado dinámico de un motor monocilíndrico . . . . .	14
2.5. Sumario . . . . .	16
<b>3. La operación magnética en el MRM</b>	<b>17</b>
3.1. Estudios sobre el campo magnético en un MRM . . . . .	18
3.2. El campo magnético . . . . .	19
3.2.1. Formulación de un campo magnético en un solenoide sobre el eje Z . . . . .	21
3.2.2. Análisis del campo magnético de un imán permanente sobre el eje Z . . . . .	22
3.2.3. La fuerza magnética entre imanes . . . . .	23
3.3. La Formulación de la fuerza magnética . . . . .	24
3.3.1. El electroimán del MRM, el solenoide multicapa . . . . .	24
3.3.2. El imán permanente, el comportamiento tridimensional . . . . .	27

3.3.3. El imán permanente, relación entre el comportamiento tridimensional y análisis sobre el eje Z . . . . .	29
3.4. Sumario . . . . .	32
<b>4. El prototipo experimental, la validación del modelo matemático</b>	<b>33</b>
4.1. Diseño del motor magnético y programación . . . . .	34
4.2. Determinación de la fuerza magnética entre el electroimán y el imán de neodimio . . .	38
4.3. Validación del modelado matemático del MRM con pruebas experimentales y el efecto de la fricción . . . . .	42
4.4. Sumario . . . . .	48
<b>5. El controlador del MRM</b>	<b>49</b>
5.1. Planteamiento del problema para el control del MRM . . . . .	50
5.2. La neurona artificial . . . . .	51
5.2.1. Modelo neuronal básico (formal) - Modelo McCulloch-Pitts . . . . .	51
5.2.2. Modelo neuronal discreto . . . . .	52
5.2.3. Capacidad de aprendizaje - El modelo perceptrón . . . . .	52
5.2.4. Arquitecturas y clasificación de redes neuronales . . . . .	53
5.3. Estructura del controlador neuronal del MRM . . . . .	54
5.4. Pruebas del controlador neuronal . . . . .	56
5.5. Pruebas de par del MRM . . . . .	57
5.6. Sumario . . . . .	58
<b>6. Conclusión general y aportaciones</b>	<b>60</b>
6.1. Discusión de resultados . . . . .	60
6.2. Conclusiones . . . . .	62
6.3. Trabajos Futuros . . . . .	63
6.4. Logros durante la tesis . . . . .	63
6.4.1. Artículos de Revista . . . . .	63
6.4.2. Extra actividades . . . . .	64
<b>Bibliografía</b>	<b>66</b>
<b>Anexos</b>	<b>74</b>
<b>A. El controlador PID</b>	<b>75</b>
A.1. Comprensión de aplicación de una ley de control en el MRM . . . . .	75
<b>B. Análisis de campos magnéticos fuera del eje Z</b>	<b>79</b>
B.1. El solenoide, su comportamiento tridimensional . . . . .	79

---

# Índice de tablas

---

1.1.	Comparativa de avances realizados sobre MRM. . . . .	4
2.1.	Parámetros utilizados en el modelo matemático de la parte mecánica del MRM. . . .	16
3.1.	Artículos de sistemas relacionados con la operación magnética del MRM. . . . .	18
3.2.	Parámetros utilizados para la formulación magnética. . . . .	31
4.1.	Pruebas de comportamiento de la fuerza de repulsión magnética entre un electroimán y un imán de neodimio a diferentes niveles de voltaje y corriente. . . . .	39
4.2.	Fricciones, ángulos de encendido y apagado, velocidades angulares experimentales y promediadas del modelo y FIT de las pruebas experimentales. . . . .	46

---

# Índice de figuras

---

1.1.	Diagrama del MRM tipo monocilíndrico. . . . .	2
1.2.	Propuesta de solución para el modelado del MRM. . . . .	5
1.3.	Propuesta de solución para el control del MRM. . . . .	6
1.4.	Esquema interno del bloque <i>controlador neuronal</i> . . . . .	6
1.5.	Organización de capítulos de la tesis. . . . .	8
2.1.	El motor de combustión interna. . . . .	9
2.2.	Ciclo de otto y partes de un cilindro de un MCI de 4 tiempos. . . . .	10
2.3.	Estructura del motor reciprocante magnético. . . . .	10
2.4.	Componentes de un motor tipo monocilíndrico. . . . .	11
2.5.	Diagramas de cuerpo libre de los componentes del motor: a) Pistón, b) Biela y c) Cigüeñal. . . . .	13
3.1.	Interacción del campo magnético en el motor reciprocante magnético. . . . .	17
3.2.	Ley de Biot-Savart y efecto de proximidad en corriente eléctrica. . . . .	19
3.3.	Análisis del campo magnético de un solenoide en el eje Z. . . . .	21
3.4.	Esquemático del imán en forma cilíndrica. . . . .	22
3.5.	Esquema para el cálculo del campo magnético producido por un imán. . . . .	22
3.6.	Imán permanente. . . . .	22
3.7.	Relaciones existentes entre el electroimán y la formulación de la fuerza magnética. . . . .	25
3.8.	Análisis del campo magnético de un solenoide tipo multicapa en el eje Z. . . . .	25
3.9.	Dimensión, proyección y esquema del cilindro elíptico. . . . .	28
3.10.	Densidad del campo magnético del imán permanente en el eje Z ecuación (3.26). . . . .	30
3.11.	Densidad del campo magnético del imán permanente en $\vec{B}_{k(z)}^{(3D)}$ a lo largo de $r$ , ecuación (3.56). . . . .	30
3.12.	Densidad del campo magnético tridimensional del imán permanente en $B_r$ y $B_{azimutal}$ a lo largo de $r$ , ecuaciones (3.53) y (3.59). . . . .	30
4.1.	Funcionamiento del prototipo experimental y estructura del modelo matemático. . . . .	33
4.2.	Momentos de generación de chispa para la operación del MCI. . . . .	33
4.3.	Metodología utilizada para la construcción y prueba del prototipo experimental del MRM tipo monocilíndrico. . . . .	34
4.4.	Prototipo experimental del MRM. . . . .	35
4.5.	Plataforma de monitoreo y operación del MRM en LabVIEW. . . . .	35
4.6.	Programación de la plataforma de operación en LabVIEW. . . . .	36
4.7.	Diagrama a bloques de cada parte del programa de LabVIEW del MRM. . . . .	37
4.8.	Estructura para pruebas de fuerza. . . . .	38
4.9.	Circuito RL del MRM. . . . .	38
4.10.	Fuerza magnética ecuación (3.36). . . . .	40
4.11.	Operación del circuito RL. . . . .	41

4.12.	Cantidad de giros realizados por el cigüeñal del motor vs simulación. . . . .	42
4.13.	Comparativa principal de operación entre el prototipo experimental y el modelo matemático. . . . .	43
4.14.	Operación de la corriente relación posición lineal del pistón (P.V. del solenoide). . . . .	44
4.15.	Comparativa principal de operación entre el prototipo experimental y el modelo matemático de las pruebas 13, 14 y 15. . . . .	47
5.1.	Posibilidades de aplicación de una ley de control en el MRM. . . . .	49
5.2.	Interpretación del error. . . . .	50
5.3.	a) Neurona Biológica b) Neurona artificial. . . . .	51
5.4.	Estructura de modelo neuronal discreto. . . . .	52
5.5.	Modelo neuronal tipo perceptrón. . . . .	52
5.6.	Funciones de activación tradicionales. . . . .	53
5.7.	Arquitecturas de redes neuronales. . . . .	53
5.8.	Conexión de señales del controlador neuronal. . . . .	54
5.9.	Propuesta de controlador con estructura tipo RNA. . . . .	54
5.10.	Estructura interna de la RNA utilizada como controlador. . . . .	55
5.11.	Prototipo experimental con sensor de par aplicado para las pruebas de par y controlador. . . . .	56
5.12.	Resultado de operación de controlador tipo neuronal aplicado en el prototipo experimental, prueba tipo rampa. . . . .	56
5.13.	Resultado de operación de controlador tipo neuronal aplicado en el prototipo experimental, prueba tipo escalón. . . . .	57
5.14.	Resultados de operación usando un filtro promediador del par, de la potencia y de la eficiencia del motor experimental con el sensor de par implementado. . . . .	58
6.1.	Resultados de investigación. . . . .	64
6.2.	Resultados de participación en eventos académicos. . . . .	65
A.1.	Identificaciones utilizando el toolbox de Matlab . . . . .	75
A.2.	Estructura de control PID utilizada. . . . .	77
A.3.	Aplicación de control PID . . . . .	77
B.1.	Análisis fuera del eje Z. . . . .	79
B.2.	Punto de análisis del campo magnético del solenoide fuera de su eje Z. . . . .	81
B.3.	Comportamiento de la densidad del campo magnético $B_z$ y $B_\rho$ fuera del eje Z del solenoide con núcleo magnético. . . . .	81

---

# Nomenclatura

---

## Abreviaturas

---

MRM	Motor Reciprocante Magnético
MCI	Motor de Combustión Interna
EMP	Propulsión electromagnética
PMS	Punto muerto superior
PMI	Punto muerto inferior
RMSE	Error medio cuadrático (Root mean square error)
NRMSE	Error medio cuadrático normalizado (Normalized root mean square error)
PID	Control Proporcional Integral Derivativo

---

## Símbolos del Capítulo 2

---

$x_m$	Posición del centro de gravedad del cigüeñal en el eje X
$\dot{x}_m$	Velocidad del centro de gravedad del cigüeñal en el eje X
$\ddot{x}_m$	Aceleración del centro de gravedad del cigüeñal en el eje X
$y_m$	Posición del centro de gravedad del cigüeñal en el eje Y
$\dot{y}_m$	Velocidad del centro de gravedad del cigüeñal en el eje Y
$\ddot{y}_m$	Aceleración del centro de gravedad del cigüeñal en el eje Y
$x_b$	Posición del centro de gravedad de la biela en el eje X
$\dot{x}_b$	Velocidad del centro de gravedad de la biela en el eje X
$\ddot{x}_b$	Aceleración del centro de gravedad de la biela en el eje X
$y_b$	Posición del centro de gravedad de la biela en el eje Y
$\dot{y}_b$	Velocidad del centro de gravedad de la biela en el eje Y
$\ddot{y}_b$	Aceleración del centro de gravedad de la biela en el eje Y
$y$	Posición del pistón desde el punto de vista del PMS
$y_p$	Posición del pistón desde el punto de vista del movimiento mecánico
$\dot{y}_p$	Velocidad del pistón desde el punto de vista del movimiento mecánico
$\ddot{y}_p$	Aceleración del pistón desde el punto de vista del movimiento mecánico
$\theta$	Posición angular del cigüeñal
$\dot{\theta}$	Velocidad angular del cigüeñal
$\ddot{\theta}$	Aceleración angular del cigüeñal
$\beta$	Posición angular de la biela
$\dot{\beta}$	Velocidad angular de la biela
$\ddot{\beta}$	Aceleración angular de la biela
$T$	Energía cinética
$U$	Energía Potencial
$\mathcal{L}$	El Lagrangiano
$\mathcal{G}$	Disipación lagrangiana
$\tau_m$	Par del motor
$q_i$	Coordenadas generalizadas

$i$	Numero de coordenadas generalizadas
$R$	Longitud del cigüeñal
$j$	Proporción entre la longitud de la biela entre BG y BA ( $0 < j < 1$ )
$h$	Proporción entre la longitud del cigüeñal entre OC a OB ( $0 < h < 1$ )
$m_p$	Masa del pistón
$m_b$	Masa de la biela
$m_c$	Masa del cigüeñal
$I_B$	Momento de inercia de la biela
$I_C$	Momento de inercia del cigüeñal
$I_V$	Momento de inercia del volante
$\mu_1$	Fricción generalizada del cigüeñal
$\mu_2$	Fricción generalizada de la biela
$g$	Aceleración gravitacional

---

### Símbolos del Capítulo 3

---

$d\ell$	Elemento diferencial de línea
$dS$	Elemento diferencial de superficie
$dV$	Elemento diferencial de volumen
$\vec{B}$	Densidad de flujo magnético
$\vec{H}$	Intensidad de flujo magnético
$\vec{H}^a, \vec{H}^b$	Intensidad de campos magnéticos para cada lado de superficie
$\vec{E}$	Campo eléctrico
$\vec{v}$	Velocidad de carga
$\vec{R}$	Vector de distancia
$\hat{R}$	Vector unitario de distancia
$\vec{F}$	Vector de fuerza
$\vec{F}_{mag}$	Fuerza magnética generada por un campo magnético externo
$\nabla$	Gradiente
$\nabla \cdot \vec{A}$	Divergencia
$\vec{A}$	Potencial vectorial magnético
$\vec{J}$	Densidad de corriente
$\vec{M}$	Magnetización
$\vec{m}$	Momento del dipolo magnético
$\vec{J}_m$	Volumen de densidad de corriente
$\vec{j}_m$	Densidad de corriente de superficie
$\vec{x}$	Punto de observación
$\vec{x}'$	Punto de origen
$\hat{n}$	Vector unitario
$\vec{n}$	Vector normal unitario
$\Phi_{dipolo}$	Flujo magnético en dipolo
$\chi_m$	Susceptibilidad del material
$\rho_m$	Densidad de carga volumétrica
$\sigma_m$	Densidad de carga de superficie
$V$	Volumen
$I$	Corriente constante

$x_{es}$	Desplazamiento del pistón desde el punto de vista del PMS
$M$	Magnetización constante
$z$	Altura
$\rho$	Radio
$N_t$	Número de vueltas
$\ell_E$	Altura del solenoide
$\mu$	Permeabilidad magnética
$\mu_r$	Permeabilidad magnética relativa
$\bar{\theta}$	Media de velocidad angular del modelo matemático
$k_a$	Factor del empaque de bobina
$d_E$	Diámetro del cable magnético
$D$	Profundidad del embobinado
$N_t$	Número de vueltas
$d$	Distancia entre el electroimán y el pistón en PMS
$R_{mag}$	Radio del imán
$z_h$	Punto de altura para el análisis del imán
$\ell_{mag}$	Altura del imán
$B_r$	Remanencia magnética
$\vec{B}_{mag}(z)_{max}$	Máximo valor de la densidad magnética del imán
$\ell_E$	Altura del solenoide
$r_1$	Radio interno del solenoide
$r_2$	Radio externo del solenoide
$\mu_0$	Permeabilidad magnética del vacío
$R_{elec}$	Resistencia de 300W (experimental)
$R_{inductor}$	Resistencia interna de la bobina (experimental)
$L_{elec}$	Inductancia del solenoide

---

#### Símbolos del Capítulo 4

$V_2$	Voltaje de salida del electroimán del divisor de voltaje
$\bar{\theta}$	Media de la velocidad del modelo matemático
$y_{exp}$	Velocidad experimental del motor

---

#### Símbolos del Capítulo 5

$E$	Función costo o de desempeño
$\eta$	Valor de aprendizaje o paso de integración
$\theta$	Umbral
$u(k)$	Representa la entrada actual
$u(k-1)$	Entrada con un atraso
$y(k)$	Representa la salida actual
$y(k-1)$	Representa la salida con un atraso
$\varphi$	Función de activación.
$Z_1, Z_2$	Pesos sinápticos de la tercera capa
$w_{b1}, w_{b2}, w_{b3},$	Pesos sinápticos de la segunda capa
$w_{c1}, w_{c2}, w_{c3},$	
$w_{a1}, w_{a2}, w_{a3}$	Pesos sinápticos de la primera capa

$\theta_a$	Umbral de la primera capa referente a la entrada $u_{n_e}$ .
$e(k)$	Representa el error
$ref(k)$	Representa la referencia
$u_{n_e}$	Salida del controlador neuronal
$\theta_n$	Representa el valor de $u_{n_e}$ interpretado en el ángulo de energización
$P_{elec}$	Potencia eléctrica
$P_{mec}$	Potencia mecánica
$\bar{\tau}_{exp}$	Media del par experimental
$\bar{\theta}_{exp}$	Media de la velocidad experimental

---

# Capítulo 1

---

## Introducción

---

En los últimos años, la creciente sensibilidad hacia el medioambiente y el incremento en los costos del petróleo están cambiando nuestra percepción de la movilidad. La abundancia de vehículos particulares está dando lugar a otros paradigmas donde los peatones asumen un rol central. Este avance ha propiciado el incremento de medios de transporte más respetuosos con el planeta, más accesibles y que se adaptan a las demandas de movilidad, particularmente en zonas urbanas.

A pesar de que el automóvil continúa siendo importante, su influencia en nuestras vidas es indiscutible. Desde su creación, ha forjado un nuevo estilo de vida donde los vehículos pueden ser usados como casas móviles, restaurantes portátiles y una variedad de servicios destinados hacia los automovilistas. Cabe mencionar, que una de las funciones del automóvil es ser un medio de transporte que nos permita desplazarnos de un lugar a otro en menos tiempo, con menos esfuerzo y de un modo más seguro. El automóvil al ser un medio de transporte, este contribuye al desarrollo global de la economía, sin embargo, el transporte también contribuye a la contaminación atmosférica debido a la cantidad de gases de efecto invernadero que produce.

La movilidad sostenible es un concepto utilizado para reducir los efectos medioambientales y sociales causados por el transporte, especialmente en el uso de vehículos, debido a que los vehículos utilizan un Motor de Combustión Interna (MCI) que funciona con gasolina como principal fuente de energía y es transformado por el MCI en energía de desplazamiento permitiendo que el vehículo pueda desplazarse [Higueras-Castillo et al., 2019].

Debido a los problemas ambientales generados por el uso de gasolina en los vehículos, han surgido nuevos paradigmas energéticos sostenibles centrados en el uso de la electricidad como fuente de energía alternativa para el transporte conocidos como vehículos eléctricos. Asimismo, el desarrollo de vehículos que utilizan combustibles alternativos como el etanol, el hidrógeno, combinaciones de gasolina y etanol, o el simple uso de gasolina y permitiendo la combinación de motores eléctricos son conocidos como vehículos híbridos [Perujo et al., 2011].

Sin embargo, la adquisición de estas nuevas tecnologías implementadas en vehículos puede ser costosa, y su uso puede verse limitado debido a la falta de estaciones de servicio para estos nuevos tipos de combustibles o energías alternativas, lo cual provoca que la mayoría de la población opte por seguir utilizando vehículos impulsados por MCI. [Ehsani et al., 2018].

A lo largo de varias décadas, los investigadores han introducido diversas modificaciones en el motor de combustión interna con el objetivo de aumentar su eficiencia y reducir las emisiones de gases de escape, sin embargo, siguen basados en el combustible fósil y continúan contaminando [Abouel-Seoud et al., 2023]. Buscando nuevas alternativas que permitan utilizar la estructura diseñada en los MCI y que también pueda replicar la operación del movimiento alternativo del pistón

sin la necesidad de utilizar combustibles fósiles, los campos magnéticos se presentan como una opción para este tipo de problema.

### 1.1. Problemática de investigación

Los MCI utilizan un mecanismo biela-manivela que requiere la aplicación de una fuerza sobre la cabeza del pistón para generar un movimiento alternativo. Para un MCI, la fuerza generada sobre el pistón se obtiene mediante la presión desarrollada en el interior de la cámara de combustión debido a la quema del aire-combustible.

Los MCI requieren de un tiempo para generar la quema del combustible y que la presión se genere en una posición del pistón que haya pasado y se encuentre cerca del punto muerto superior (PMS) con el fin de aprovechar el mejor par del motor y dar la mayor velocidad posible. Por lo que, las bujías e inyectores son accionados en los instantes indicados en el ciclo Otto y la quema de combustible se acciona antes de llegar al PMS según la posición angular del cigüeñal.

Los motores magnéticos alternativos o motores reciprocantes magnéticos (MRM) se presentan como una nueva propuesta que permite utilizar la estructura ya diseñada de los MCI y reemplazar el uso de combustibles fósiles por campos magnéticos. Estos motores magnéticos utilizan la propiedad de los campos magnéticos conocida como fuerza de repulsión o de atracción magnética. Esta fuerza magnética se presenta cuando se acercan entre si dos polos magnéticos entre dos imanes, si tienen la misma polaridad se repelen y si tienen polaridades distintas se atraen. Esta propiedad puede ser generado también por un electroimán, por lo que al instalarse en un MCI se puede replicar la misma operación de movimiento alternativo del pistón.

Dentro de las configuraciones de estos motores magnéticos, se presentan 3 posibles diseños: imán-imán, electroimán-imán o electroimán-electroimán. Al igual que el MCI, es imprescindible poder determinar su ángulo de energización o activación acorde a la posición angular del cigüeñal para poder generar la fuerza magnética considerando el tiempo de carga del solenoide en caso de utilizar alguna configuración de motor magnético que utilice un electroimán. Por lo que es importante contar con modelos matemáticos y controladores implementados en estos tipos de motores para que operen de manera adecuada.

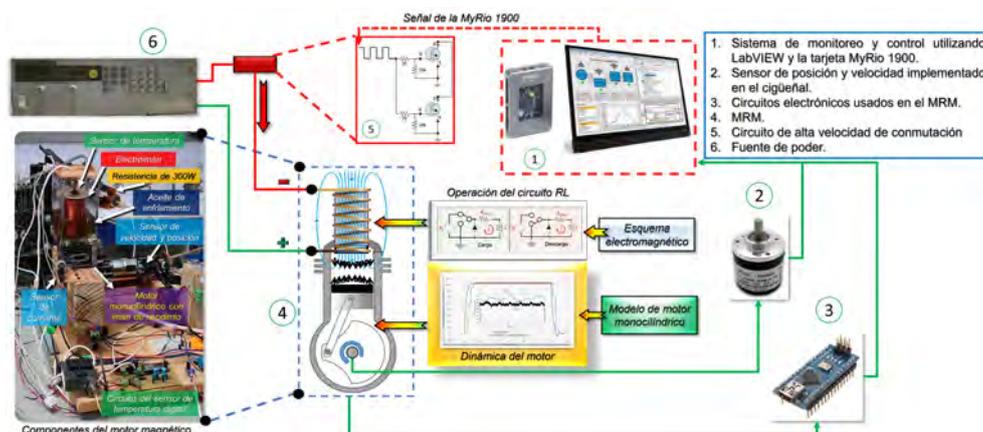


Figura 1.1. Diagrama del MRM tipo monocilíndrico.

Como caso de estudio se seleccionó la construcción y desarrollo de un motor reciprocante magnético tipo monocilíndrico utilizando un motor de desbrozadora. En la Figura 1.1 se presenta como está

diseñado e instrumentado el MRM de manera experimental. EL MRM utiliza un electroimán tipo multicapa en su parte superior y un imán permanente de neodimio unido en la cabeza del pistón. El motor requiere el desarrollo de un modelo matemático que permita representar su parte magnética y mecánica para poder determinar los ángulos de energización y requiere de una ley de control para poder controlar la velocidad del motor.

## 1.2. Estudios sobre el motor reciprocante magnético

El uso y la aplicación de esta configuración ha despertado el interés de los investigadores en este tipo de motores. En Butler [Butler, 2015], se analizan los diferentes tipos de energía utilizados en diferentes tipos de vehículos comparando las ventajas e inconvenientes que podría tener un MRM frente a los MCI. Los trabajos [Rithula et al., 2013, Lokhande et al., 2017, Rawal et al., 2020, Pol et al., 2023] describen los componentes requeridos para usar MRM tipo monocilíndrico y sus ventajas de implementación como alternativa energética.

En el trabajo de [Zhang et al., 2018], se propone un nuevo tipo de diseño utilizando un MRM de dos cilindros donde se aprovecha el campo magnético generado por el solenoide en una estructura de cámara magnética. En [Singh et al., 2022], se muestran los pasos para construir un motor V4 utilizando solenoides sin imanes trabajando con corriente alterna (AC) para alternar la polaridad del solenoide para generar una atracción magnética del material ferromagnético utilizado como pistón. En el caso de [Sivakumar et al., 2014], se presenta un diseño de MRM utilizando dos imanes de neodimio que funcionan utilizando únicamente repulsión magnética. El trabajo se centra en mostrar las capacidades del MRM frente a un MCI según la fuerza de repulsión experimental obtenida.

En [Rajesh et al., 2014], se muestran las consideraciones a utilizar para el diseño del MRM tipo monocilíndrico con un electroimán y un imán de neodimio presentando el circuito electrónico a utilizar junto a la estructura del prototipo experimental. En el trabajo de [Rafay Hammad et al., 2018] se presenta el diseño del MRM monocilíndrico junto al uso de un calculador del campo magnético para seleccionar el imán de neodimio a utilizar junto a pequeñas pruebas de operación experimental para accionar el motor con una fuente de 12 V a 44 A.

Los trabajos de [Das, 2013, Eapen et al., 2014, Dhangar et al., 2015, Vigneshwaran, 2018] y [Roshan et al., 2019] analizan el rendimiento de un prototipo de MRM monocilíndrico alimentado por una fuente de alimentación de corriente directa, en [Hota et al., 2015] es un motor V2, en los trabajos de [Yadav et al., 2018, Vaddepalli et al., 2020, Kumar et al., 2021] es un MRM de dos cilindros, en [Patil et al., 2020] es un MRM de cuatro cilindros, en [Morgado et al., 2022] es un motor comercial V8, para [Ansari et al., 2022] es un MRM monocilíndrico alimentado por CA y en caso de [Dhawale et al., 2020] es un MRM de doble cilindro que utiliza únicamente imanes de neodimio. Estos análisis muestran ecuaciones estáticas referidas a la parte mecánica y magnética de la MRM; sólo [Eapen et al., 2014, Vigneshwaran, 2018, Yadav et al., 2018, Patil et al., 2020, Morgado et al., 2022] muestran pruebas experimentales reportando eficiencias superiores al 21% y junto con [Hota et al., 2015] se presenta el uso de controladores tipo ON-OFF.

En [Tiwari et al., 2019], se diseña un MRM con 4 pistones accionados por corriente alterna y se explica la funcionalidad del motor aplicado a un vehículo. En [Zhao et al., 2018], se presentó un análisis mostrando un modelo matemático de la parte mecánica del MRM centrándose sólo en el pistón y el electroimán.

La Tabla 1.1 muestra más información sobre los avances realizados en motores magnéticos en los últimos años, de los cuales sólo unos pocos mencionan, sin ser específicos, los instantes de energización del solenoide para generar la repulsión o atracción magnética. Además, la Tabla 1.1 muestra que no se utiliza el comportamiento dinámico de los motores magnéticos para diseñarlos, y la mayoría de los avances en investigación se basan únicamente en analizar el motor con ecuaciones estáticas de forma generalizada.

De los artículos expuestos se desprende que la mayoría de los investigadores buscan el diseño y desarrollo de motores magnéticos trabajando con diferentes configuraciones ya sea utilizando únicamente imanes de neodimio, trabajando con un solenoide y un imán, o únicamente utilizando solenoides sin imanes unidos a la cabeza del pistón.

En conclusión, la mayoría de las investigaciones aún no han profundizado en la dinámica de los motores magnéticos y cómo los instantes de energización del electroimán afecta al motor. Además, no se presentan alguna estructura de controlador en el cual solo dependen de operaciones de encendido y apagado en un ángulo de energización no definido, generando deficiencias de operación en estos motores magnéticos. Esto permite visualizar el nicho de oportunidad de poder abarcar en el desarrollo de modelos matemáticos, determinación de ángulos de operación y determinar estructuras de control para tener un correcto funcionamiento del motor magnético.

Tabla 1.1. Comparativa de avances realizados sobre MRM.

Artículo	Año	FMg	DM	TM	FMM	PExp	AO	TC	EF
[Zhao et al., 2018]	2018	✓	X	Monocilíndrico	✓	X	X	100 A en CD	X
[Dhangar et al., 2015]	2018	✓	✓	Monocilíndrico	X	X	X	CD	21.44 % TH
[Vigneshwaran, 2018]	2018	✓	✓	Monocilíndrico	X	✓	X	CD	38.83 %
[Rafay Hammad et al., 2018]	2018	Cálculo por Software	✓	Monocilíndrico	X	✓	Alrededor del PMS y PMI	CD	X
[Zhang et al., 2018]	2018	✓	✓	Bicilíndrico	X	X	X	CD	X
[Yadav et al., 2018]	2018	✓	✓	Bicilíndrico	X	✓	Alrededor del PMS y PMI	CD	27.193 %
[Roshan et al., 2019]	2019	✓	✓	Monocilíndrico	X	X	X	CD	80.73 % TH
[Tiwari et al., 2019]	2019	✓	✓	Cuatro cilindros	X	✓	X	CA	X
[Dhawale et al., 2020]	2020	X	✓	Bicilíndrico	X	X	PMS	Usa imanes	X
[Rawal et al., 2020]	2020	X	X	Monocilíndrico	X	X	X	X	X
[Patil et al., 2020]	2020	✓	✓	Cuatro cilindros	X	✓	Alrededor del PMS y PMI	CD	74 %
[Vaddepalli et al., 2020]	2020	X	✓	Bicilíndrico	X	X	X	X	X
[Kumar et al., 2021]	2021	✓	✓	Bicilíndrico	X	X	Alrededor del PMS y PMI	CD	26.38 % TH
[Singh et al., 2022]	2022	X	✓	Motor V4	X	X	Alrededor del PMS y PMI	CA	X
[Ansari et al., 2022]	2022	✓	✓	Monocilíndrico	X	✓	X	CA	X
[Morgado et al., 2022]	2022	X	✓	Motor V8	X	✓	X	CD	24 %
[Pol et al., 2023]	2023	X	✓	Monocilíndrico	X	X	X	X	X

Nomenclatura:

FMg= Formulación Magnética, DM= Diseño de motor, TM= Tipo de motor, FMM= Formulación de modelo matemático, PExp= Prueba Experimental, AO= Ángulo de operación, TC= Tipo de corriente, EF=Eficiencia, TH= Teórica, CD= Corriente directa, CA= Corriente Alterna, PMS= Punto muerto Superior, PMI= Punto muerto inferior.

### 1.3. Propuesta de solución

Como propuesta solución se plantea el formular el modelo matemático que represente la dinámica del MRM tipo monocilíndrico relacionando su parte mecánica y la parte electromagnética para poder determinar los ángulos de energización del motor. Además, se propone diseñar e implementar una ley de control utilizando redes neuronales tipo recurrentes para la manipulación del ángulo de energización.

En la Figura 1.2 se muestra un bosquejo general para la determinación de los ángulos de energización del prototipo experimental del MRM a partir del modelo matemático. Con la representación matemática se podrá determinar la fuerza de repulsión magnética generada entre el electroimán tipo solenoide multicapa y el imán permanente de neodimio.

Como resultado final en la Figura 1.2, se realizará una comprobación de las variables obtenidas por el modelo matemático y serán comparadas con las variables medidas del prototipo experimental. El poder representar con el modelo matemático la dinámica del MRM tipo monocilíndrico permitirá diseñar leyes de control aplicables al prototipo experimental.

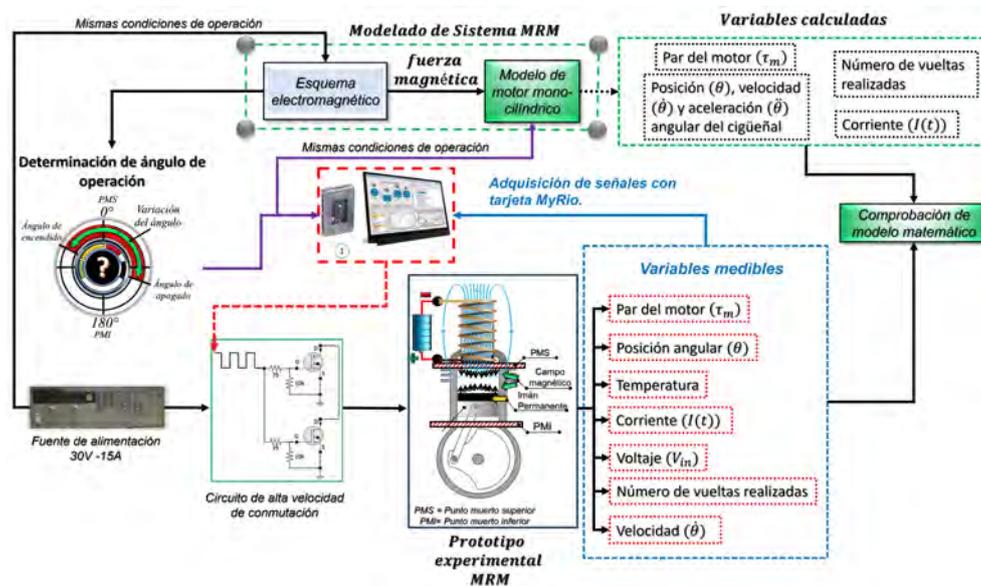


Figura 1.2. Propuesta de solución para el modelado del MRM.

En la Figura 1.3 se muestra un bosquejo general de lazo cerrado donde la velocidad del motor será la referencia de la ley de control. En el bosquejo se presenta el uso de un controlador neuronal que calculará el valor del ángulo de energización requerido para llegar a la velocidad requerida. El ángulo determinado por el controlador será comparado con la medición de la posición angular experimental y, una vez se encuentre dentro del rango calculado, este activará los transistores MOSFETS para accionar el electroimán y generar su fuerza de repulsión magnética.

En la Figura 1.4 se muestra como se estructura el bloque del controlador neuronal, donde utiliza el error que es generado entre la referencia y la velocidad angular ( $\dot{\theta}$ ) del prototipo experimental para alimentar al algoritmo de aprendizaje que ajusta a la red neuronal artificial (RNA) recurrente. La RNA utiliza la referencia y la variable controlada como entradas y retroalimenta su salida neuronal ( $u_{ne}$ ). Al final, la señal del controlador neuronal ajusta el ángulo de energización (señal manipulada,  $\theta_n$ ) del MRM. En las Figuras 1.2 y 1.3, el MRM es monitoreado, operado y controlado con la interfaz programada en la tarjeta MyRio 1900 mediante el software de LabVIEW.

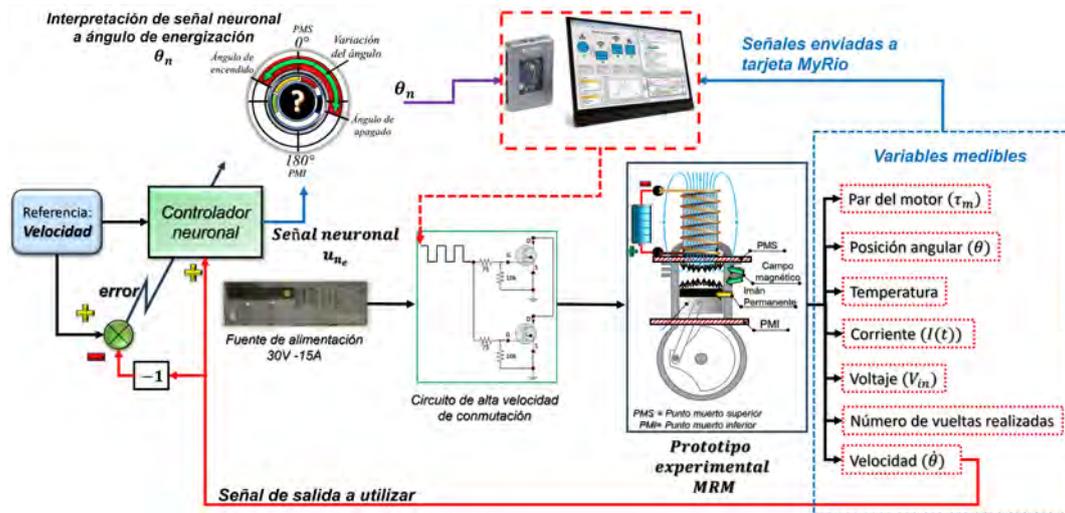


Figura 1.3. Propuesta de solución para el control del MRM.

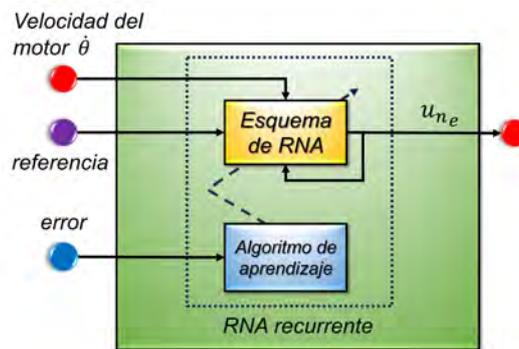


Figura 1.4. Esquema interno del bloque controlador neuronal.

## 1.4. Hipótesis

A través del uso de estrategias de control en base a la formulación de un modelado matemático de un motor recíprocante magnético, es posible implementar un controlador que pueda permitir energizar en el momento adecuado el actuador magnético y suministrar la corriente necesaria de acuerdo a la velocidad del cigüeñal y carga del motor.

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo general

Modelar un MRM tipo mono cilíndrico basado en el enfoque energético de Euler-Lagrange y proponer un esquema de control que permita manipular el ángulo de energización del actuador magnético para diferentes puntos de operación del motor con el fin de obtener la mejor velocidad angular y par del motor.

### 1.5.2. Objetivos específicos

- Diseñar un modelo matemático representativo de un MRM monocilíndrico basado en el esquema Euler-Lagrange.

- Proponer un esquema de control para obtener el máximo par motor para diferentes puntos de operación del MRM monocilíndrico.
- Implementar la estrategia de control en el prototipo experimental de un MRM.

### 1.5.3. Metas

- Representar con un modelo matemático la dinámica de un MRM monocilíndrico.
- Comparar o aproximar el valor de la eficiencia energética que pueda tener la maqueta académica del MRM tipo monocilíndrico con las eficiencias reportadas en el estado del arte.
- Obtener un programa de control que garantice el par del motor deseado de acuerdo a las limitaciones del MRM monocilíndrico experimental.

## 1.6. Limitaciones

Si bien se consideraron algunos lineamientos para el diseño del MRM, los efectos causados por la *pandemia de Covid-19* limitaron los avances para una construcción adecuada del prototipo experimental. Por lo que se tuvieron que descartar las ideas a implementar el prototipo experimental y utilizar los componentes desarrollados y adquiridos con anterioridad que fueron: el motor de desbrozadora, el electroimán con su almacenamiento con aceite, el sistema de enfriamiento y el circuito de alta velocidad de conmutación.

Otras de las limitaciones que se tuvieron fue el tiempo, debido a que era necesario desarrollar la plataforma de monitoreo y operación en LabVIEW y en conjunto terminar el prototipo experimental regresando de la pandemia de Covid-19 para poder evaluar el modelado matemático desarrollado. Por lo que se entregaron prototipos con un acabado no profesional para poder cumplir con los tiempos de trabajo.

La estructura del modelo matemático se obtiene con base a la geometría del mecanismo manivela-corredera para su formulación donde no se toman en consideración los efectos de fricción de cada componente del mecanismo. Al igual, tampoco se toman en consideración los efectos de temperatura en los componentes mecánicos y eléctricos y tampoco los efectos de saturación en los componentes eléctricos y electrónicos.

## 1.7. Organización del documento

Los capítulos están organizados para familiarizar al lector con temas como teoría y diseño de redes neuronales, teoría y análisis de campos magnéticos, formulación de modelos matemáticos y aplicación de teoría de control. La Figura 1.5 ilustra como se encuentran conectados cada uno de los capítulos de la tesis.

En este capítulo se presentó la motivación general por la cual se realiza el proyecto de investigación seguido por los objetivos planteados y las metas a cumplir. Además, se presentan las investigaciones realizadas en años recientes sobre los MRM mostrando los nichos de oportunidad para aportar conocimiento referente a estos tipos de motores magnéticos. En los capítulos siguientes se profundiza en la temática involucrada en el desarrollo de la tesis.

En el *Capítulo 2* se aborda el tema del MRM. Donde se presenta primero con una introducción sobre estos tipos de motores magnéticos juntos a los últimos avances de investigación sobre este tipo

---

de motores. Luego, se abarca la formulación del modelo matemático de la parte mecánica del MRM utilizando el método de Euler-Lagrange.

En el *Capítulo 3* se aborda la parte magnética del MRM para obtener la fuerza magnética que completa al modelo matemático en su parte mecánica. Este capítulo representa al bloque *esquema electromagnético* de la Figura 1.2. Al principio se presenta un poco de investigaciones trabajando con sistemas magnéticos para después formular el campo magnético del imán de neodimio, el del electroimán tipo solenoide multicapa y como interactúan entre ellos.

En el *Capítulo 4* se presentan los resultados de comparación entre el modelo matemático y los datos experimentales del MRM. Además, en el capítulo se aborda la metodología utilizada para la construcción del MRM tipo monocilíndrico junto con su plataforma de monitoreo y operación utilizando LabVIEW.

En el *Capítulo 5* se muestran el desarrollo y resultados del controlador neuronal utilizado en el MRM experimental. Al principio se muestran los resultados que se obtuvieron al utilizar un controlador PID. Previo a estos resultados, se presenta la teoría y construcción del controlador neuronal y se termina con los resultados obtenidos sobre el par del motor.

Finalmente, en el *Capítulo 6* se presentan algunas conclusiones que se obtuvieron tras el desarrollo del tema de investigación y también se muestran algunos trabajos que pueden desarrollarse en el futuro con fundamento en este trabajo de tesis.

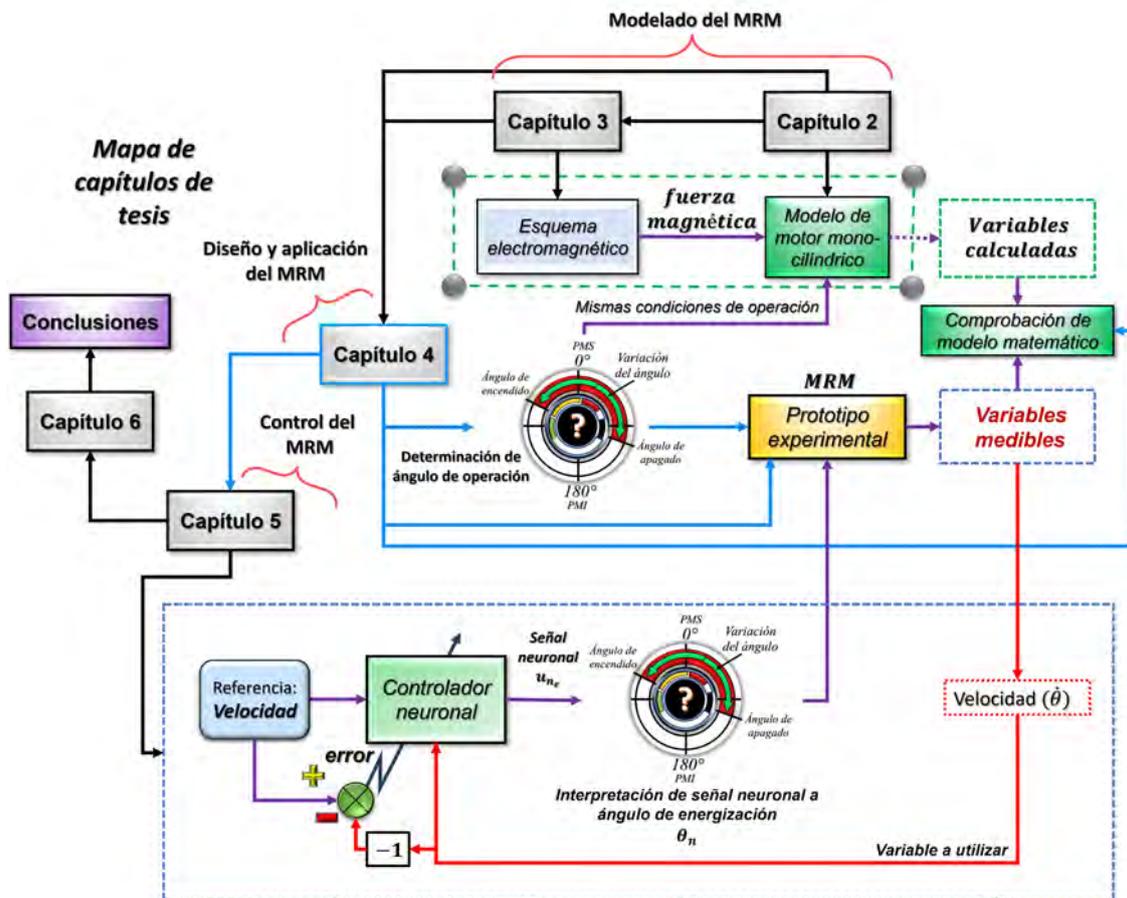


Figura 1.5. Organización de capítulos de la tesis.

# Capítulo 2

## El motor reciprocante magnético

Los motores reciprocantes magnéticos se presentan como una nueva alternativa para mitigar la contaminación ambiental. Estos motores basan su operación en el uso de campos magnéticos, por lo que es necesario tener modelos matemáticos que puedan representar su funcionamiento y dinámica de operación para poder dimensionarlos e implementarlos. El modelado matemático del MRM se ha dividido en 2 capítulos: uno desarrollando la parte mecánica y la otra diseñando la fuerza magnética. En este capítulo se presenta el diseño de la parte mecánica del modelado matemático del MRM utilizando la formulación de Euler Lagrange.

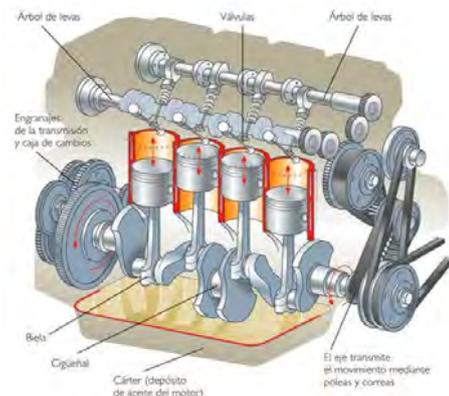
### 2.1. Los motores de combustión interna

Los automóviles son una invención revolucionaria que ha dejado una profunda huella en la sociedad moderna. Desde su invención a finales del siglo XIX, los automóviles han transformado la forma en que vivimos y nos desplazamos. El uso de automóviles ha traído grandes beneficios a la sociedad permitiendo el desarrollo urbano, el crecimiento económico, la innovación tecnológica, culturas y estilos de vida.

El motor de combustión interna, ilustrado en la Figura 2.1, es una de las máquinas más importantes que se han desarrollado debido a que es un componente esencial en el diseño y la construcción del automóvil. En el año de 1876, Nikolaus Otto inventó el primer motor de combustión interna que funcionaba con el ciclo de cuatro tiempos (admisión, compresión, expansión y escape, ver Figura 2.2). Desde entonces hasta hoy en día, el motor se ha ido modificando y mejorando notablemente de acuerdo a la demanda de los usuarios y adecuando según las normas ecológicas.



(a) Estructura física de un motor de automóvil.



(b) Partes del motor de combustión interna.

Figura 2.1. El motor de combustión interna.

Básicamente, el motor funciona a partir de una explosión que ocurre dentro de una cámara de combustión (Figura 2.2). En esta cámara se lleva a cabo una mezcla homogénea de aire y gasolina con una relación estequiométrica (AFR, por sus siglas en inglés) de 14.7 kg de aire por 1 kg de combustible ([Alippi et al., 2003, Wang et al., 2006]) si se desea una alta eficiencia. En el automóvil la mezcla de aire y combustible depende de la apertura de la válvula mariposa y del sistema de inyección (automóviles posteriores al año 1992 ([Hayat et al., 2013])), además que esta etapa es una de la más importantes en el proceso, por lo que es necesario tener el control del ingreso de aire y de la inyección del combustible, de lo contrario se verá afectado el rendimiento de la máquina.

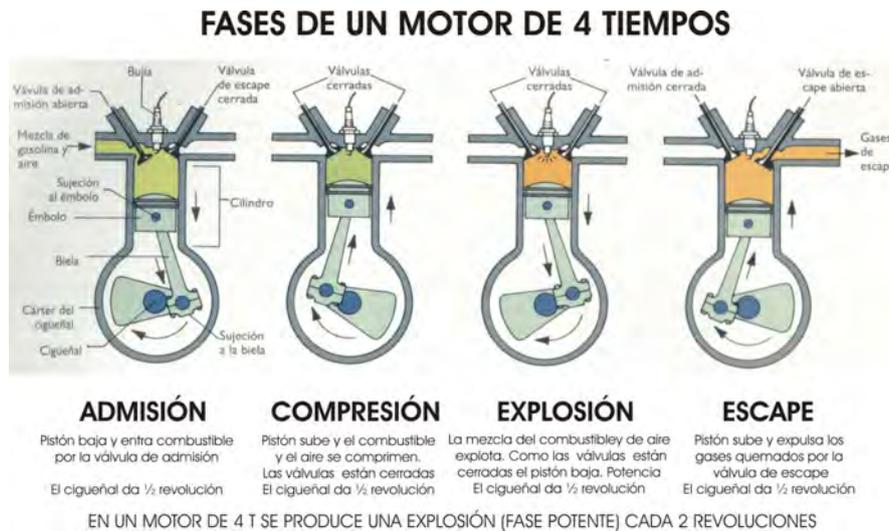


Figura 2.2. Ciclo de otto y partes de un cilindro de un MCI de 4 tiempos.

## 2.2. El motor recíprocante magnético tipo monocilíndrico

La contaminación atmosférica es uno de los problemas de sostenibilidad global más desafiantes del mundo donde la quema de combustibles fósiles mediante el uso de vehículos también aporta a la contaminación del aire. En la búsqueda de mitigar la contaminación del aire, la industria automotriz ha desarrollado diferentes tipos de vehículos como alternativas para mitigar y mejorar la calidad del aire [García-Burgos et al., 2022].

Por ello ha sido de gran importancia la necesidad de buscar otras alternativas que permitan aprovechar la infraestructura desarrollada para los MCI y al mismo tiempo reducir la contaminación atmosférica [Bakar et al., 2007]. Han surgido investigaciones sobre el uso de combustibles renovables que tienen un impacto positivo en la emisión de gases contaminantes, algunos ejemplos de ellos son los trabajos de [Karpanai Selvan et al., 2022], [Vijayanand et al., 2022], [Bae and Kim, 2017], de igual manera hay investigaciones que informan sobre el uso de campos magnéticos en motores monocilíndricos (denominados motores magnéticos alternativos) el cual sustituyen la quema de combustibles fósiles y los remplazan con campos magnéticos [Butler, 2015].

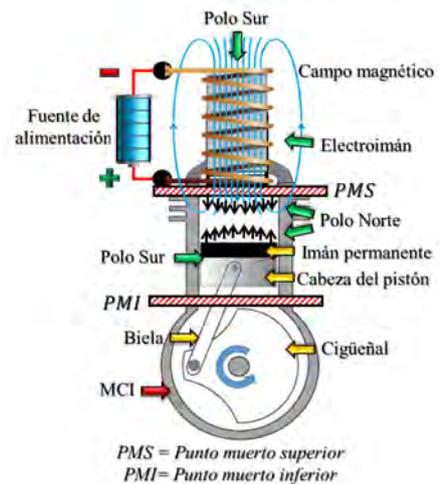


Figura 2.3. Estructura del motor recíprocante magnético.

En la Figura 2.3 se presenta la estructura de un motor recíprocante magnético (MRM); el motor hace uso de la infraestructura de un MCI donde sustituye los componentes utilizados para la quema del combustible y lo sustituye por el uso de campos magnéticos generados por un electroimán y un imán permanente de neodimio, por consiguiente, la polaridad y la intensidad del campo magnético generado por el electroimán determina la fuerza de atracción o repulsión magnética con respecto al imán permanente para generar el movimiento del pistón. Un MRM comparte una similitud con un MCI ya que requiere un control de flujo de corriente eléctrica y un controlador para determinar el ángulo adecuado de energización del actuador electromagnético permitiéndole obtener el mejor aprovechamiento energético [Lokhande et al., 2017].

### 2.3. Mecanismo manivela-biela-corredera

El mecanismo manivela corredera es un mecanismo que permite obtener un movimiento lineal alternativo a partir de uno rotatorio y viceversa. Este mecanismo es muy utilizado en la industria automotriz, en donde su corredera es sustituida por un pistón, y se puede encontrar aplicado en el motor de combustión interna de un automóvil y a su vez siendo utilizado en los motores recíprocantes magnéticos.

El pistón es uno de los elementos básicos del motor de combustión interna. Su función principal es la de construir una pared móvil de la cámara de combustión, transmitiendo la energía de los gases de combustión a la biela mediante un movimiento alternativo dentro del cilindro. Dicho movimiento se copia al pie de la biela, pero se transforma a lo largo de la biela hasta llegar a su cabeza apretada al muñón del cigüeñal, en donde dicha energía se ve utilizada para movilizar dicho cigüeñal. De esta forma el pistón hace de guía al pie de biela en su movimiento alternativo [Norton and Salas, 2009].

La geometría simple del pistón permite tener una inversión particular del mecanismo de manivela-corredera el cual permite una aproximación directa al análisis exacto de la posición, velocidad y aceleración de su corredera, con sólo ecuaciones de trigonometría plana y escalares. De acuerdo a la Figura 2.4, sea  $R$  el radio de la manivela y “ $\ell$ ” la longitud de la biela. El ángulo de la manivela es “ $\theta$ ” y el ángulo que forma la biela con el eje Y es “ $\beta$ ”. Cuando se considera una velocidad angular constante; la velocidad angular de la manivela es  $\omega$ , la posición angular es  $\theta = \omega t$ . La posición instantánea del pistón es “ $y$ ” [Crolla and Mashadi, 2011].

Las posiciones geométricas de los centros de gravedad del cigüeñal y de la biela son los siguientes:

- Cigüeñal:

$$x_m = -hR \text{sen}(\theta), \quad (2.1)$$

$$y_m = -hR \text{cos}(\theta). \quad (2.2)$$

- Biela:

$$x_b = Rk \text{sen}(\theta), \quad (2.3)$$

$$y_b = R \text{cos}(\theta) + j\ell \text{cos}(\beta), \quad (2.4)$$

$$k = 1 - j.$$

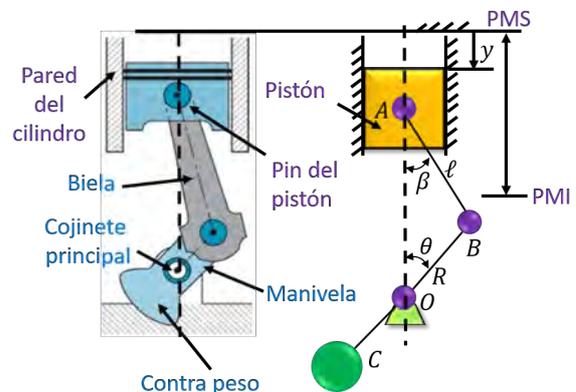


Figura 2.4. Componentes de un motor tipo monocilíndrico.

- Pistón:

$$y = L_m - R \cos(\theta) - \ell \cos(\beta), \quad (2.5)$$

$$y_p = R \cos(\theta) + \ell \cos(\beta). \quad (2.6)$$

Para el pistón, se consideran dos puntos de observación para conocer el desplazamiento del pistón: uno desde el punto muerto superior (PMS) “ $y$ ” (ecuación 2.5) y el otro desde el movimiento mecánico designado por la variable “ $y_p$ ” (ecuación 2.6). La distancia total recorrida entre el PMS y el punto muerto inferior (PMI) se denota por “ $L_m$ ” y se puede escribir como:

$$L_m = R + \ell. \quad (2.7)$$

El sistema puede analizarse con una sola variable angular gracias a la geometría del mecanismo. Con la relación entre los ángulos internos de  $\theta$  y  $\beta$ , es posible obtener la siguiente expresión:

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\ell} \sin(\theta)\right)^2}. \quad (2.8)$$

El mecanismo tiene la siguiente condición restringida:

$$\ell \sin(\beta) = R \sin(\theta). \quad (2.9)$$

El ángulo  $\beta$  se puede hallar a partir de la ecuación (2.9):

$$\beta = \sin^{-1} \left( \frac{R}{\ell} \sin(\theta) \right). \quad (2.10)$$

## 2.4. Análisis mecánico del MRM

El MRM utiliza la estructura fabricada para los MCI, en donde su representación matemática, en su parte mecánica, empieza desarrollandose desde el mecanismo manivela-biela-corredera y su geometría de diseño que fueron presentados en la sección anterior. Para esta sección, se muestra la formulación del modelo matemático del MRM en su parte mecánica.

### 2.4.1. Análisis cinemático de un motor monocilíndrico

En el análisis cinemático [Guzzomi et al., 2008], tomando la primera y la segunda derivada del desplazamiento del pistón (ecuación (2.6)) respecto al tiempo, la velocidad y la aceleración del pistón son las siguientes:

$$\dot{y}_p = -R\dot{\theta} \left( \sin(\theta) + \frac{R \sin(2\theta)}{2\ell \cos(\beta)} \right), \quad (2.11)$$

$$\ddot{y}_p = -R\ddot{\theta} \left( \sin(\theta) + \frac{R \sin(2\theta)}{2\ell \cos(\beta)} \right) - R\dot{\theta}^2 \left( \cos(\theta) + \frac{R}{2\ell} \left[ \frac{2 \cos(2\theta)}{\cos(\beta)} + \frac{R^2 \sin^3(2\theta)}{2\ell^2 \cos^3(\beta)} \right] \right). \quad (2.12)$$

La velocidad y aceleración de la biela, basado en su centro de gravedad (ecuaciones (2.3) y (2.4)), son las siguientes:

$$\dot{x}_b = Rk \cos(\theta) \dot{\theta}, \quad (2.13)$$

$$\dot{y}_b = -R\dot{\theta} \left( \sin(\theta) + \frac{jR \sin(2\theta)}{2\ell \cos(\beta)} \right), \quad (2.14)$$

$$\ddot{x}_b = Rk \cos(\theta)\ddot{\theta} - Rk \sin(\theta)\dot{\theta}^2, \quad (2.15)$$

$$\ddot{y}_b = -R\ddot{\theta} \left( \sin(\theta) + \frac{jR \sin(2\theta)}{2\ell \cos(\beta)} \right) - R\dot{\theta}^2 \left( \cos(\theta) + \frac{jR}{2\ell} \left[ \frac{2 \cos(2\theta)}{\cos(\beta)} + \frac{R^2 \sin^3(2\theta)}{2\ell^2 \cos^3(\beta)} \right] \right). \quad (2.16)$$

La velocidad y aceleración del cigüeñal, basado en su centro de gravedad (ecuaciones (2.1) y (2.2)), son las siguientes:

$$\dot{x}_m = -hR \cos(\theta)\dot{\theta}, \quad (2.17)$$

$$\dot{y}_m = hR \sin(\theta)\dot{\theta}, \quad (2.18)$$

$$\ddot{x}_m = -hR \cos(\theta)\ddot{\theta} + hR \sin(\theta)\dot{\theta}^2, \quad (2.19)$$

$$\ddot{y}_m = hR \sin(\theta)\ddot{\theta} + hR \cos(\theta)\dot{\theta}^2. \quad (2.20)$$

Del mismo modo, la velocidad angular de  $\dot{\beta}$  y la aceleración de  $\ddot{\beta}$  se obtienen mediante las ecuaciones (2.21) y (2.22):

$$\dot{\beta} = \frac{R \cos(\theta)}{\ell \cos(\beta)} \dot{\theta}, \quad (2.21)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{R \cos(\theta)}{\ell \cos(\beta)} \ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 \left[ \frac{R^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)}{\ell^3 \cos(\beta)^3} - \frac{R \sin(\theta)}{\ell \cos(\beta)} \right]. \quad (2.22)$$

### 2.4.2. El par del motor

El mecanismo simplificado de manivela-biela-corredera convierte el movimiento de traslación del pistón en un movimiento de rotación del cigüeñal. El efecto impulsor en el mecanismo es generado por una fuerza de repulsión magnética proveniente al entrar en contacto dos campos magnéticos con el mismo polo, en este caso generado por el actuador magnético y el imán permanente [Balko and Rosinová, 2017]. La fuerza magnética hace que el pistón se mueva a lo largo del eje vertical provocando que esta acción se transmita al cigüeñal a través de la biela.

El par motor se produce en el cigüeñal por la fuerza magnética que empuja al pistón. El par generado en el mecanismo se obtiene por las fuerzas que actúan en el pistón, la biela y el cigüeñal [Crolla and Mashadi, 2011, Guzzomi et al., 2008]. La representación de estas fuerzas se obtiene mediante el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la Figura 2.5.

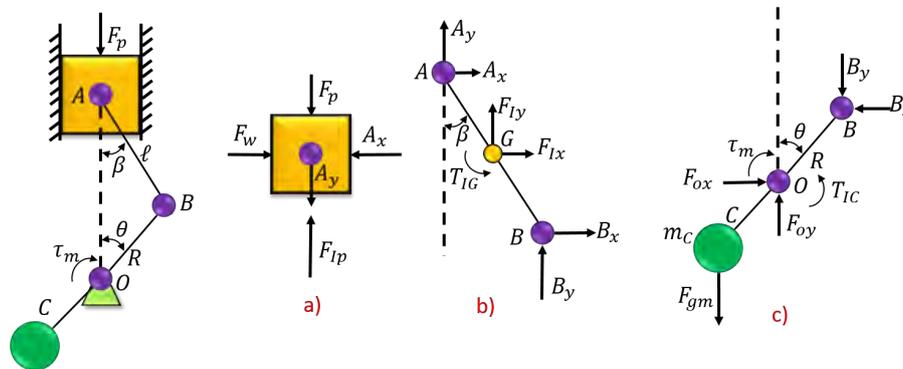


Figura 2.5. Diagramas de cuerpo libre de los componentes del motor: a) Pistón, b) Biela y c) Cigüeñal.

Basándose en la leyes de Newton, el par motor viene dado por:

$$\tau_m = R(B_y \sin(\theta) - B_x \cos(\theta)) - T_{IC} - hR(F_{ox} \cos(\theta) - F_{oy} \sin(\theta)), \quad (2.23)$$

donde

$$B_x = (F_{IP} - (F_p + F_{gp}) + \frac{\ell_B}{\ell} F_{Iy}) \tan(\beta) - \frac{\ell_A}{\ell} F_{Ix} - \frac{T_{IG}}{\ell \cos(\beta)}, \quad (2.24)$$

$$B_y = F_p - F_{IP} - F_{Iy} + F_{gp} + F_{atracción}, \quad (2.25)$$

$$F_{ox} = B_x - F_{Cx}, \quad (2.26) \quad F_{gp} = m_p g, \quad (2.32)$$

$$F_{oy} = B_y + F_{gm} - F_{Cy}, \quad (2.27) \quad F_{gm} = m_c g, \quad (2.33)$$

$$F_{IP} = -m_P \ddot{y}_p, \quad (2.28) \quad F_{Cx} = m_c \ddot{x}_m, \quad (2.34)$$

$$F_p = \vec{F}_{mag}, \quad (2.29) \quad F_{Cy} = m_c \ddot{y}_m, \quad (2.35)$$

$$F_{Ix} = m_b \ddot{x}_b, \quad (2.30) \quad T_{IG} = I_B \ddot{\beta}, \quad (2.36)$$

$$F_{Iy} = m_b \ddot{y}_b, \quad (2.31) \quad T_{IC} = I_C \ddot{\theta}. \quad (2.37)$$

La ecuación (2.29) representa la fuerza de repulsión magnética que se genera entre el campo magnético del electroimán y el imán de neodimio utilizados en el MRM. Esta fuerza magnética es representada por la ecuación (2.38) y forma parte del bloque del *esquema electromagnético* mostrado en la Figura 1.2. Dado la relación que existe entre la estructura mecánica y la estructura electromagnética para obtener esta fuerza magnética, el análisis requerido para poder formularlo y aplicarlo en el MRM será explicado en el Capítulo 3 de la Sección 3.3.

$$\vec{F}_{mag} = \int_V \rho_m \vec{B}_{ext} dV + \oint_S \sigma_m \vec{B}_{ext} dS. \quad (2.38)$$

### 2.4.3. Formulación de Euler-Lagrange para el modelado dinámico de un motor monocilíndrico

Para desarrollar el modelo dinámico del mecanismo, se utiliza el método de Euler-Lagrange. Sea  $T - U = \mathcal{L}$ , donde T y U son la energía cinética y potencial del sistema, respectivamente,  $\mathcal{L}$  es el lagrangiano [Myklebust et al., 1984, Wellstead, 1979]. Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i, \quad (2.39)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

donde  $\mathcal{G}$  es la disipación lagrangiana que representa la fricción viscosa,  $\tau_i$  es el par generado por el sistema,  $q_i$  son las coordenadas generalizadas, e  $i$  es el número de coordenadas generalizadas. La relación entre  $\theta$  y  $\beta$  permite que el mecanismo tenga una única coordenada generalizada y un único par de salida. Así que la ecuación lagrangiana viene dada por la ecuación (2.40).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{\theta}} = \tau_m. \quad (2.40)$$

La energía cinética del sistema se obtiene mediante la ecuación (2.41).

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2}(I_C + I_V)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_c h^2 R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_B \left( \frac{R^2 \cos^2(\theta)}{\ell^2 \cos^2(\beta)} \right) \dot{\theta}^2 + \\
 & \frac{1}{2}m_b R^2 \dot{\theta}^2 \left( k^2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \frac{jR \sin(\theta) \sin(2\theta)}{\ell \cos(\beta)} + \left( \frac{jR}{2\ell} \right)^2 \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos^2(\beta)} \right) + \\
 & \frac{1}{2}m_p R^2 \dot{\theta}^2 \left( \sin^2(\theta) + \frac{R \sin(\theta) \sin(2\theta)}{\ell \cos(\beta)} + \left( \frac{R}{2\ell} \right)^2 \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos^2(\beta)} \right).
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

La energía potencial del mecanismo viene dada por la ecuación (2.42).

$$U = -m_c g h R \cos(\theta) + m_b g \left( R \cos(\theta) + j\ell \cos(\beta) \right) + m_p g \left( R \cos(\theta) + \ell \cos(\beta) \right). \tag{2.42}$$

Y la disipación se calcula mediante la ecuación (2.43):

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left( \mu_1 + \mu_2 \frac{R \cos(\theta)}{\ell \cos(\beta)} \right). \tag{2.43}$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (2.41), (2.42), (2.43) y resolviendo las derivadas lagrangianas y de fricción de la ecuación (2.40), se obtiene la ecuación dinámica de la parte mecánica del MRE y se expresa mediante la ecuación (2.44).

$$\begin{aligned}
 \tau_m = & \ddot{\theta} \left[ (I_C + I_V + m_c h^2 R^2) + I_B \left( \frac{R^2 \cos^2(\theta)}{\ell^2 \cos^2(\beta)} \right) + \right. \\
 & m_b R^2 \left( k^2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \frac{jR \sin(\theta) \sin(2\theta)}{\ell \cos(\beta)} + \left( \frac{jR}{2\ell} \right)^2 \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos^2(\beta)} \right) + \\
 & \left. m_p R^2 \left( \sin^2(\theta) + \frac{R \sin(\theta) \sin(2\theta)}{\ell \cos(\beta)} + \left( \frac{R}{2\ell} \right)^2 \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos^2(\beta)} \right) \right] + \\
 & \dot{\theta}^2 \left\{ \frac{1}{2} I_B \frac{R^2}{\ell^2} \left( -\frac{\sin(2\theta)}{\cos^2(\beta)} + \frac{\cos^2(\theta) R^2}{\cos^4(\beta) \ell^2} \sin(2\theta) \right) + \right. \\
 & \frac{1}{2} R^2 m_b \left[ \frac{jR}{\ell} \left( \frac{2 \sin(\theta) \cos(2\theta) + \sin(2\theta) \cos(\theta)}{\cos(\beta)} + \frac{\sin(\theta) \sin^2(2\theta) R^2}{\cos^3(\beta) 2\ell^2} \right) + \right. \\
 & \left. \left( \frac{jR}{2\ell} \right)^2 \left( \frac{4 \sin(2\theta) \cos(2\theta)}{\cos^2(\beta)} + \frac{\sin^3(2\theta) R^2}{\cos^4(\beta) \ell^2} \right) - k^2 \sin(2\theta) + \sin(2\theta) \right] + \\
 & \frac{1}{2} R^2 m_p \left[ \sin(2\theta) + \frac{R}{\ell} \left( \frac{2 \sin(\theta) \cos(2\theta) + \sin(2\theta) \cos(\theta)}{\cos(\beta)} + \frac{\sin(\theta) \sin^2(2\theta) R^2}{\cos^3(\beta) 2\ell^2} \right) + \right. \\
 & \left. \left( \frac{R}{2\ell} \right)^2 \left( \frac{4 \sin(2\theta) \cos(2\theta)}{\cos^2(\beta)} + \frac{\sin^3(2\theta) R^2}{\cos^4(\beta) \ell^2} \right) \right] \left. \right\} + \dot{\theta} \left( \mu_1 + \mu_2 \frac{R \cos(\theta)}{\ell \cos(\beta)} \right) - \\
 & m_c g h r \sin(\theta) + m_b g \left( R \sin(\theta) + \frac{jR^2 \sin(2\theta)}{2\ell \cos(\beta)} \right) + m_p g \left( R \sin(\theta) + \frac{R^2 \sin(2\theta)}{2\ell \cos(\beta)} \right).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Conociendo la fuerza magnética, el par motor y las condiciones iniciales de la posición angular ( $\theta_0$ ) y la velocidad angular ( $\dot{\theta}_0$ ) del cigüeñal es posible resolver la aceleración angular ( $\ddot{\theta}$ ) del cigüeñal a partir de la ecuación (2.44) y obtener su dinámica. Luego se integra para obtener el comportamiento dinámico de la velocidad angular ( $\dot{\theta}$ ) y la posición angular ( $\theta$ ) del cigüeñal.

Con el análisis realizado utilizando la formulación de Euler-Lagrange, ahora es posible obtener y analizar la dinámica del MRE, especialmente en la velocidad angular y el par del motor. La Tabla 2.1 muestra los parámetros utilizados para el modelado dinámico del MRM y los valores utilizados para la simulación.

El valor de la fricción viscosa generalizada del cigüeñal,  $\mu_1$ , no se presenta en la Tabla 2.1 dado que es un valor que influye en el MRM y es determinado durante las pruebas experimentales que se mostrarán en los resultados del Capítulo 4 en la Sección 4.3 en la Tabla 4.2.

Tabla 2.1. Parámetros utilizados en el modelo matemático de la parte mecánica del MRM.

Parámetro	Descripción	Valor
$\ell$	Longitud de la biela	0.06272 m
$R$	Longitud del cigüeñal	0.012 m
$j$	Proporción entre la longitud de la biela entre BG y BA ( $0 < j < 1$ , Figura 2.5)	0.5 unidades
$h$	Proporción entre la longitud del cigüeñal entre OC a OB ( $0 < h < 1$ , Figura 2.5)	0.1 unidades
$m_p$	Masa del pistón	0.025 kg
$m_b$	Masa de la biela	0.023 kg
$m_c$	Masa del cigüeñal	0.015 kg
$I_B$	Momento de inercia de la biela	$3.0159 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$I_C$	Momento de inercia del cigüeñal	$6.6707 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$I_V$	Momento de inercia del volante	$3.0782 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$\mu_2$	Fricción viscosa generalizada de la biela	0.009 N·m·s/rad
$g$	Aceleración gravitacional	9.81 m/s <sup>2</sup>

## 2.5. Sumario

Se presentó información sobre el funcionamiento de los MCI y la como la configuración del MRM comparte muchas similitudes en la forma de operar a pesar de usar diferentes fuentes de energía para su funcionamiento.

En este capítulo, se mostró la formulación del modelo matemático del MRM, en su parte mecánica, partiendo desde la estructura del sistema manivela-biela-corredera y como los ángulos internos se encuentran relacionados para representar el modelo matemático con una sola variable. También, se mostró el análisis de cuerpo libre del motor para conocer las fuerzas que interactúan en la estructura del motor y como la fuerza de repulsión magnética es relacionada en este diagrama e interactúa como efecto impulsor en el mecanismo del motor.

En el siguiente capítulo se presenta la parte más importante del MRM que es la interacción de los campos magnéticos entre un electroimán y un imán de neodimio para la formulación de la fuerza magnética que completa el modelo matemático del MRM.

# Capítulo 3

## La operación magnética en el MRM

El magnetismo es una fuerza que ejercen los imanes cuando ellos se atraen o se repelen entre ellos. Al igual que los imanes, un electroimán tiene la misma capacidad de generar esta fuerza magnética cuando se encuentra presente una corriente eléctrica, donde su intensidad dependerá de la cantidad de corriente eléctrica suministrada y el diseño del electroimán. El MRM opera con el principio magnético utilizando la repulsión y la atracción magnética generado por un electroimán tipo solenoide multicapa y un imán permanente de neodimio asimilando el funcionamiento de un motor de dos tiempos como se ilustra en la Figura 3.1.

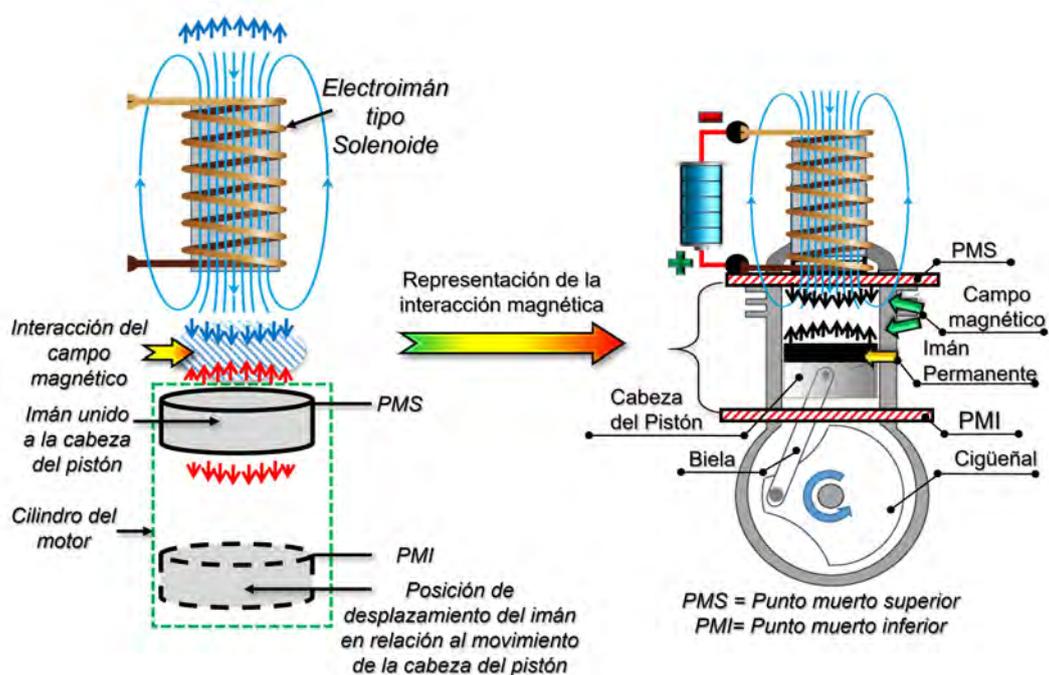


Figura 3.1. Interacción del campo magnético en el motor recíprocante magnético.

El funcionamiento del MRM depende totalmente de la intensidad del campo magnético generado por el electroimán como actuador electromagnético. Es indispensable conocer la fuerza ya sea de repulsión o atracción magnética para determinar el diseño del electroimán. En este capítulo se presenta la determinación de la fuerza magnética para el MRM que será utilizada en la ecuación (2.29) para completar el modelo matemático y poder diseñar el controlador.

### 3.1. Estudios sobre el campo magnético en un MRM

Dentro del funcionamiento del MRM, la fuerza de atracción y repulsión magnética es importante porque está relacionada con la levitación magnética. Los trabajos presentados en esta área se muestran en la Tabla 3.1, donde se presenta una comparativa del tipo de sistema, el tipo de modelado matemático utilizado junto al controlador, además se presenta si realizaron un análisis mecánico, electromagnético, simulación y si realizaron pruebas experimentales.

Table 3.1. Artículos de sistemas relacionados con la operación magnética del MRM.

Artículo	A.M	A.E.	S.	P.E.	T.C.	E.M.	Sistema
[Carneiro et al., 2020]	✓	✓	✓	✓	✗	✗	Review de CEE
[Kwon et al., 2020]	✗	✓	✓	✓	✗	✗	Fuerza Magnética
[Hu et al., 2020]	✓	✓	✓	✗	Proporcional-Derivativo (PD)	Linealización y estabilidad	TLM
[Dutta and Das, 2020]	✗	✓	✓	✓	PID, MPC	Linealización, discretización	SLM
[Yang et al., 2020]	✗	✓	✓	✗	Control por pasividad	No lineal	SLM
[Jibril and Alemayehu, 2020]	✗	✓	✓	✗	NARMA-L2, Referencia y Modelo predictivo	No lineaa	TLM
[Sun et al., 2020]	✓	✓	✓	✓	Amplitud saturada con una RNA	No lineal	TLM
[Bidikli, 2020]	✗	✓	✓	✓	PD y PID con Lyapunov	No lineal	SLM
[Plavec et al., 2019]	✗	✓	✓	✗	✗	✗	Fuerza electromagnética
[Ding et al., 2018]	✗	✓	✓	✓	Estado retroalimentado	✓	TLM
[Balko and Rosinová, 2017]	✗	✓	✓	✓	PID	No lineal y linealización	SLM
[Babic and Akyel, 2017]	✗	✓	✗	✗	✗	✗	Bobinas Bitter
[Sun et al., 2017]	✗	✓	✓	✓	Modos deslizantes y neurodifusos con Lyapunov	Euler-Lagrange	SLM

Nomenclatura:

A.M.= Análisis Mecánico, A.E. = Análisis Electromagnético, S- Simulación, P.E.= Prueba Experimental, T.C. = Tipo de Controlador. E.M.= Estrategia de modelado matemático, TLM= Tren de levitación magnética, CEE = Cosechador de energía electromagnética, SLM = Sistema de levitación magnética, PID = Control Proporcional Integral Derivativo, MPC = Control Predictivo por Modelo (Model Predictive Control).

Se ha observado que, entre los controladores utilizados en levitación magnética, el PID es el más utilizado porque el control de la fuerza magnética juega un papel muy importante. Sin embargo, para los casos en los que existe dinámica en la parte magnética del electroimán, se recomienda el uso de controladores neuronales, MPC o no lineales [Sun et al., 2017, Dutta and Das, 2020]. Esto se debe a que se pueden encontrar en el electroimán corrientes de Eddy. Esta condición sucede cuando hay un campo magnético que tiene una traslación dinámica y puede provocar una inducción magnética hacia el solenoide [Ding et al., 2018].

La fuerza magnética es el punto fuerte de los sistemas de levitación magnética, de los artículos presentados en la Tabla 3.1, la mayoría de ellos utilizan la relación de la ecuación de trabajo para obtener la fuerza magnética. También es posible obtener la fuerza magnética utilizando el análisis del dipolo magnético, sin embargo, son sólo aproximaciones y sólo se aplican a imanes permanentes. Los artículos [Kwon et al., 2020, Plavec et al., 2019, Babic and Akyel, 2017, Carneiro et al., 2020] recomiendan que si se busca la fuerza magnética exacta entre un electroimán y un imán, se puede obtener de 2 formas: utilizando la ley de Bio-Savart utilizando potenciales magnéticos o por la fuerza de un diferencial de corriente. Ambas formas de obtención deben relacionarse en función de la dimensión

física del electroimán y el tipo de imán utilizado. A continuación, se presenta el marco teórico para obtener la fuerza magnética.

### 3.2. El campo magnético

Un campo magnético es un campo vectorial que describe la influencia magnética sobre cargas eléctricas en movimiento, corrientes eléctricas y materiales magnéticos. Una carga en movimiento en un campo magnético experimenta una fuerza perpendicular a su propia velocidad y también afectando al campo magnético, dicha fuerza se denomina “fuerza de Lorentz” (ecuación (3.1)) [Purcell and Morin, 2013].

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{3.1}$$

En electromagnetismo, el término “campo magnético” se utiliza para dos campos vectoriales distintos pero estrechamente relacionados denotados como la densidad de flujo magnético ( $\vec{B}$ ) y la intensidad de campo magnético ( $\vec{H}$ ) en presencia de una “corriente eléctrica”. En el vacío, los dos campos están relacionados a través de la permeabilidad al vacío, “ $\mu_0$ ” (ecuación (3.2)); pero en un material magnetizado, los términos difieren por la magnetización en cada punto del material utilizado [Purcell and Morin, 2013, Ulaby, 2015].

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}. \tag{3.2}$$

La ley de Biot-Savart (ecuación (3.3)) describe el campo magnético generado por una corriente eléctrica constante ( $I$ ) relacionando el campo magnético con la magnitud, dirección, longitud y proximidad de la corriente eléctrica (Figura 3.2). La ley establece que la intensidad del campo magnético dependerá de un punto P que se rige por una distancia  $\vec{R}$ , por lo que nos dice que la intensidad del campo magnético diferencial será mayor si está más cerca del punto P y más débil si se encuentra lejos del punto P [Ulaby, 2015].

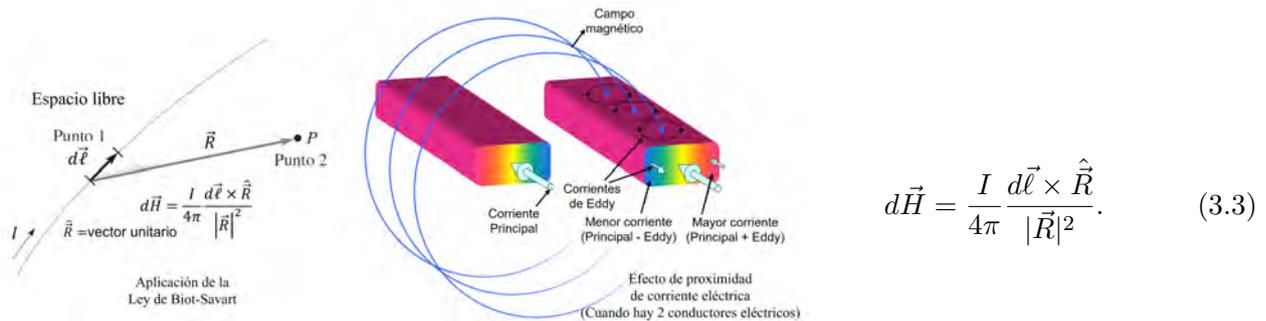


Figura 3.2. Ley de Biot-Savart y efecto de proximidad en corriente eléctrica.

Un enfoque diferente del campo magnético también se puede hacer mediante el desarrollo del “potencial magnético vectorial” (ecuación (3.4)) que proporciona el cálculo del campo magnético debido a los conductores de corriente, en complemento con los métodos sugeridos por las leyes de Biot-Savart y Ampère [Ulaby, 2015]. El potencial vectorial magnético ( $\vec{A}$ ) representa un campo vectorial como un potencial para el campo magnético. El espiral o rotación del potencial vectorial magnético es denominado como el campo magnético.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{3.4}$$

En el caso de calcular el campo magnético para imanes permanentes, la densidad de flujo magnético tiene que ser analizada a partir de la ecuación (3.4) pero en la forma del *modelo de corriente*. Esta

forma hace una representación de la existencia de la corriente en relación de la magnetización del material dada por ecuaciones (3.5) a (3.9) [Furlani, 2001]

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (3.5)$$

$$\mu = \mu_0(\chi_m + 1), \quad (3.8)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (3.6)$$

$$\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1, \quad (3.9)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (3.7)$$

$\vec{J}$  es la densidad de corriente,  $\chi_m$  es la susceptibilidad del material y  $\vec{M}$  es la magnetización que representa el momento dipolar magnético neto por unidad de volumen de un material. Sustituyendo la ecuación (3.4) en la ecuación (3.5) y teniendo en cuenta la relación constitutiva de la ecuación (3.6) se obtiene la ecuación (3.10) [Furlani, 2001].

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \mu_0(\vec{J} + \nabla \times \vec{M}). \quad (3.10)$$

A continuación, imponemos la condición recalibradora (gauge) de Coulomb  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  y se obtiene la ecuación (3.11)

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0(\vec{J} + \nabla \times \vec{M}). \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) sugiere la definición de una densidad de corriente de volumen magnético equivalente  $\vec{J}_m \equiv \nabla \times \vec{M}$ . Puesto que la ecuación (3.11) es lineal, el potencial  $\vec{A}$  (y por tanto  $\vec{B}$ ) puede obtenerse como una superposición de soluciones para  $\vec{J}$  y  $\vec{J}_m$  por separado [Furlani, 2001]. Ahora bien, si no hay corriente libre ( $\vec{J} = 0$ ), y si suponemos un material homogéneo infinito (sin fronteras), entonces, la solución de la ecuación (3.11) puede escribirse en forma integral utilizando la función de Green del espacio libre (ecuación (3.12)) para el operador  $\nabla^2$ , específicamente, permitiendo encontrar la ecuación (3.13)

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (3.12)$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')_m}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV. \quad (3.13)$$

Si la magnetización  $\vec{M}$  está confinada en un volumen “ $V$ ” (de permeabilidad  $\mu_0$ ), y cae bruscamente a cero fuera de  $V$ , entonces el vector magnético potencial y la densidad magnética están dadas por las ecuaciones (3.14) y (3.15)

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_m(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{j}_m(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS, \quad (3.14)$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}_m(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \vec{j}_m(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dS, \quad (3.15)$$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}, \quad (3.16)$$

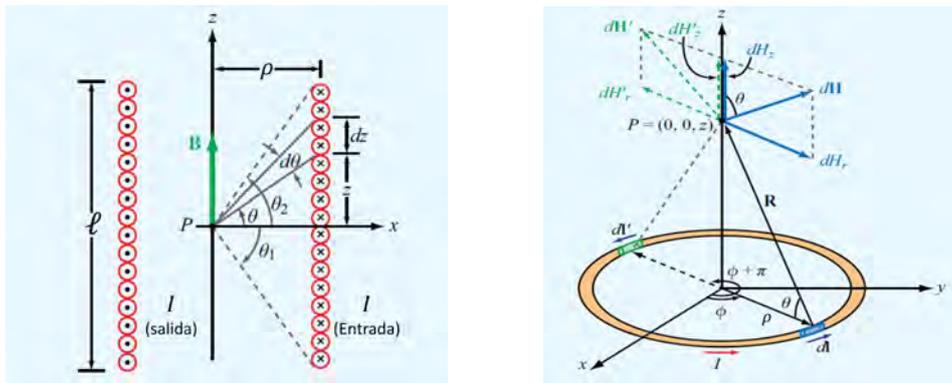
$$\vec{j}_m = \vec{M} \times \hat{n}, \quad (3.17)$$

donde  $\vec{J}_m$  es el volumen de la densidad de corriente en  $\frac{A}{m^2}$  y  $\vec{j}_m$  es la densidad de corriente de superficie en  $\frac{A}{m}$ .

### 3.2.1. Formulación de un campo magnético en un solenoide sobre el eje Z

Cuando una corriente eléctrica circula por un cable, se desarrolla un campo magnético alrededor del cable y puede utilizarse para crear un electroimán. Para obtener el valor del campo magnético de un electroimán, especialmente uno de la forma de un solenoide, es necesario determinar primero la intensidad magnética con respecto a un cable. Para el uso práctico, la intensidad magnética se analiza principalmente a una cierta altura ( $z$ ) sobre el eje “Z” a partir de la ley de Bio-Savart [Ulaby, 2015, Hayt et al., 2006, Purcell and Morin, 2013, Edminister and Edminister, 1992]. Usando la Figura 3.3b como referencia, se resuelve la ecuación (3.3) y se obtiene la ecuación (3.18).

$$H_z = \frac{1}{2} \frac{I\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.18)$$



(a) Formación del solenoide a lo largo del eje Z [Ulaby, 2015].

(b) Análisis de la intensidad magnética en un cable [Ulaby, 2015].

Figura 3.3. Análisis del campo magnético de un solenoide en el eje Z.

Para poder formar un solenoide, se incrementa la altura con respecto al cable ( $dz$ ) tomando forma de espiras ilustrado en la Figura 3.3a. El análisis del campo magnético se mantiene dentro del mismo eje Z y partiendo del análisis de la ecuación (3.18) en relación con la densidad de campo magnético, se obtiene la ecuación (3.19) [Ulaby, 2015]. Cuando no se conocen los ángulos internos del solenoide se utiliza la ecuación (3.20) [Yang et al., 2021].

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n_a I}{2} (\sen \theta_2 - \sen \theta_1) \vec{a}_z, \quad n_a = \frac{N_t}{\ell_E}, \quad (3.19)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n_a I}{2} \left( \frac{z + b}{\sqrt{\rho^2 + (z + b)^2}} - \frac{z - b}{\sqrt{\rho^2 + (z - b)^2}} \right) \vec{a}_z, \quad b = \frac{\ell_E}{2}, \quad (3.20)$$

donde  $N_t$  es el número de vueltas,  $\rho$  es el radio y  $\ell_E$  es la altura del solenoide desde la base hasta su cara superior. Hay otra condición, si la altura del solenoide es mucho mayor que el radio del solenoide,  $\ell \gg \rho$ , entonces los puntos entre los ángulos quedan en  $\theta_1 \approx -90^\circ$  y  $\theta_2 \approx 90^\circ$ , donde estos valores obtenidos reducen la ecuación (3.20) a la ecuación (3.21)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_t I}{\ell_E} \vec{a}_z. \quad (3.21)$$

Si se añade un “núcleo magnético” al solenoide, entonces la permeabilidad relativa ( $\mu_r$ ) del material seleccionado es añadido provocando que la densidad del campo magnético cambie a la ecuación (3.22)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r. \quad (3.22)$$

### 3.2.2. Análisis del campo magnético de un imán permanente sobre el eje Z

Partiendo de la ecuación (3.13) del vector de potencial magnético basado en el modelo de corriente, la formulación del dipolo magnético queda representado en la ecuación (3.23) [Camacho and Sosa, 2013]

$$\Phi_{dipolo}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{n}}{|\vec{x}|^2}, \quad (3.23)$$

donde  $\vec{m}$  es el momento del dipolo magnético y  $\hat{n}$  es el vector unitario de  $\vec{x}$ . Ahora obteniendo el potencial en el eje Z debido a cada dipolo infinitesimal dentro de un volumen cilíndrico como se ilustra en la Figura 3.5, la ecuación queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d\Phi_{eje}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} dm \frac{\cos\theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} M dV \frac{z - z'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &= \frac{M}{4\pi} \frac{z - z'}{[(z - z')^2 + \rho'^2]^{3/2}} \rho' d\rho' dz' \phi'. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Realizando la integración de la ecuación (3.24), el potencial escalar en el eje Z queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi_{eje}(z) &= \frac{M}{4\pi} \int_{cilindro} \frac{z - z'}{[(z - z')^2 + \rho'^2]^{3/2}} \rho' d\rho' dz' \phi' \\ &= \frac{M}{2} \int_0^{\ell_m} (z - z') dz' \int_0^{R_m} \frac{\rho' d\rho'}{[(z - z')^2 + \rho'^2]^{3/2}} \\ &= \frac{M}{2} \int_0^{\ell_m} (z - z') dz' \left( -\frac{1}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho'^2}} \Big|_{\rho'=0}^{\rho'=R_m} \right) \\ &= \frac{M}{2} \sqrt{(z - z')^2 + \rho'^2} \Big|_{z'=0}^{z'=\ell_m} \Big|_{\rho'=0}^{\rho'=R_m}, \end{aligned}$$

donde la altura  $z$  se representa como  $z_h$  acorde a la Figura 3.6 e ignorando las constantes aditivas, el potencial escalar queda representado por la ecuación (3.25)

$$\Phi_{eje}(z) = \frac{M}{2} \left( \sqrt{R_m^2 + (z_h - \ell_m)^2} - \sqrt{R_m^2 + z_h^2} \right). \quad (3.25)$$

Finalmente, el campo en el eje Z viene dado por la ecuación (3.26)

$$\vec{B}(z) = \mu_0 \frac{M}{2} \left( \frac{z_h}{\sqrt{R_m^2 + z_h^2}} - \frac{z_h - \ell_m}{\sqrt{R_m^2 + (z_h - \ell_m)^2}} \right), \quad (3.26)$$

donde

$$M = \frac{B_r}{\mu_0} \text{ si } B_r \text{ esta en Teslas,} \quad (3.27)$$

donde,  $B_r$  es la remanencia magnética del imán que es proporcionado por el fabricante y los otros términos se muestran en la Figura 3.6.

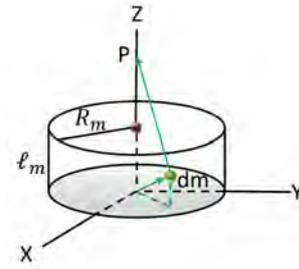


Figura 3.4. Esquemático del imán en forma cilíndrica.

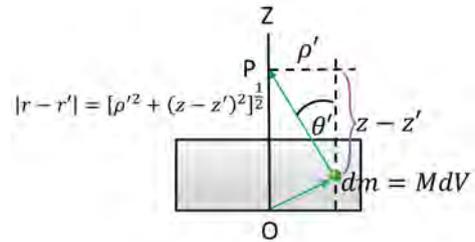


Figura 3.5. Esquema para el cálculo del campo magnético producido por un imán.

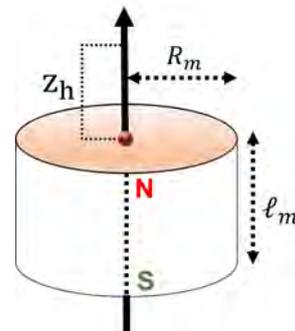


Figura 3.6. Imán permanente.

### 3.2.3. La fuerza magnética entre imanes

El modelo de carga es otro método útil para analizar los imanes permanentes. En este modelo, un imán se reduce a una distribución equivalente de “carga magnética”. La distribución de la carga se utiliza como término principal en las ecuaciones del campo magnetostático y los campos se obtienen utilizando métodos estándar [Furlani, 2001].

La derivación del modelo de carga es de la siguiente manera de acuerdo a Furnali: Se empieza con las ecuaciones del campo magnetostático para las regiones libres de corriente  $\nabla \times \vec{H} = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Luego, se aplica la proposición de la forma potencial  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  al campo rotacional  $\vec{H}$  e introducir un potencial escalar como se muestra en la ecuación (3.28)

$$\vec{H} = -\nabla\varphi_m. \quad (3.28)$$

Finalmente, se sustituye la ecuación (3.28) y la ecuación de relación constitutiva (3.6) en  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  y se obtiene la ecuación (3.29)

$$\nabla^2\varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}. \quad (3.29)$$

En ausencia de límites de superficie se puede representar la solución de la ecuación (3.29) en forma integral utilizando la función de Green del espacio libre  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  para  $\nabla^2$ . En particular, encontramos que

$$\begin{aligned} \varphi_m(\vec{x}) &= \int G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}') dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $\vec{x}$  es el punto de observación,  $\vec{x}'$  es el punto de origen,  $\nabla'$  opera sobre las coordenadas primas y la integración se realiza sobre el volumen para el cual existe una magnetización. Si  $\vec{M}$  está confinada en un volumen “ $V$ ” (de permeabilidad  $\mu_0$ ), y cae bruscamente a cero fuera de  $V$ , entonces la ecuación (3.30) se vuelve la ecuación (3.31)

$$\varphi_m(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{x}') \cdot \hat{n}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS, \quad (3.31)$$

donde  $S$  es la superficie que limita a  $V$  y  $\hat{n}$  es el vector normal unitario exterior a  $S$ . Si el imán está en el espacio libre entonces  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  y de la ecuación (3.28) y (3.31) se obtiene la ecuación (3.32)

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dS, \quad (3.32)$$

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}, \quad (3.33)$$

$$\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n}, \quad (3.34)$$

donde,  $\rho_m$  es el volumen de la densidad de carga en  $A/m^2$  y  $\sigma_m$  es la superficie de la densidad de carga en  $A/m$ . El modelo de carga también es útil para determinar la fuerza y el par en un imán generado por un campo externo. Donde la fuerza viene dada por la ecuación (3.35)

$$\vec{F}_{mag} = \int_V \rho_m \vec{B}_{ext} dV + \oint_S \sigma_m \vec{B}_{ext} dS. \quad (3.35)$$

### 3.3. La Formulación de la fuerza magnética

La ecuación de la fuerza magnética trabaja bajo las siguientes condiciones:

- De acuerdo a la estructura del MRM, la interacción entre los campos magnéticos generados por el electroimán y el imán permanente de neodimio estarán basados sobre el eje Z. Se considera el análisis de esta forma debido a que el imán se encuentra unido a la cabeza del pistón dentro del cilindro del motor como se ilustró en la Figura 3.1, indicando que el imán no se puede mover y que el imán y el electroimán se consideran que se encuentran alineados en el eje Z.
- De acuerdo con [Lemarquand et al., 2009], el imán permanente de forma cilíndrica con una polarización axial uniforme,  $M$ , crea el mismo campo magnético que un solenoide de pared delgada de igual diámetro y altura que un imán cuando las corrientes fluyen en él con una densidad lineal. Indicando también que el electroimán al mismo tiempo también puede representar a un imán permanente.
- Se asume que el imán permanente está polarizado a lo largo de su eje Z con una magnetización uniforme [Furlani, 2001], bajo dicha condición se impone la ley de Coulomb,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , en la carga volumétrica  $\rho_m$  dejando  $\nabla \cdot \vec{M} = 0$  en la ecuación (3.35), obteniendo la aplicación de la fuerza sobre las caras planas del imán (en este caso es de forma cilíndrica) como se presenta en la ecuación (3.36).

$$\vec{F}_{mag} = \oint_S \sigma_m \vec{B}_{ext} dS. \quad (3.36)$$

- Dado que el campo magnético externo será generado por el solenoide multicapa, este permitirá el desarrollo de la fuerza magnética, del cual la densidad de carga superficial ( $\sigma_m$ ) está relacionada con el imán permanente. Puesto que se requiere conocer  $\vec{M}$  en todo el campo tridimensional, usamos la relación que se muestra en la ecuación (3.37) dada por [Zhao and Kim, 2020]:

$$\sigma_m = -\hat{n} \cdot (\vec{H}^a - \vec{H}^b). \quad (3.37)$$

De acuerdo a [Zhao and Kim, 2020], se requiere conocer los valores de las intensidades de los campos magnéticos en las caras planas del imán en la dirección en la que este evaluado la magnetización, como el análisis se encuentra en el eje Z (componente axial), se requiere conocer los componentes  $\vec{H}^a$  y  $\vec{H}^b$  del campo tridimensional del imán de neodimio en cada cara.

Por consiguiente, en las siguientes secciones se presentan los análisis de los componentes del MRM para generar la fuerza magnética.

#### 3.3.1. El electroimán del MRM, el solenoide multicapa

El electroimán del MRM es utilizado como actuador principal para hacer funcionar el motor y replicar la operación de un MCI en un ciclo de dos tiempos. En la Figura 3.7, se representan todas las interacciones que hay con el electroimán para la formulación de la fuerza magnética.

Como el análisis del campo magnético del electroimán tiene como punto de referencia la cara del imán permanente y este se encuentra unido a la cabeza del pistón, las variables de posición están relacionadas con el campo magnético al igual que el circuito RL utilizado para el funcionamiento del electroimán en el prototipo del MRM.

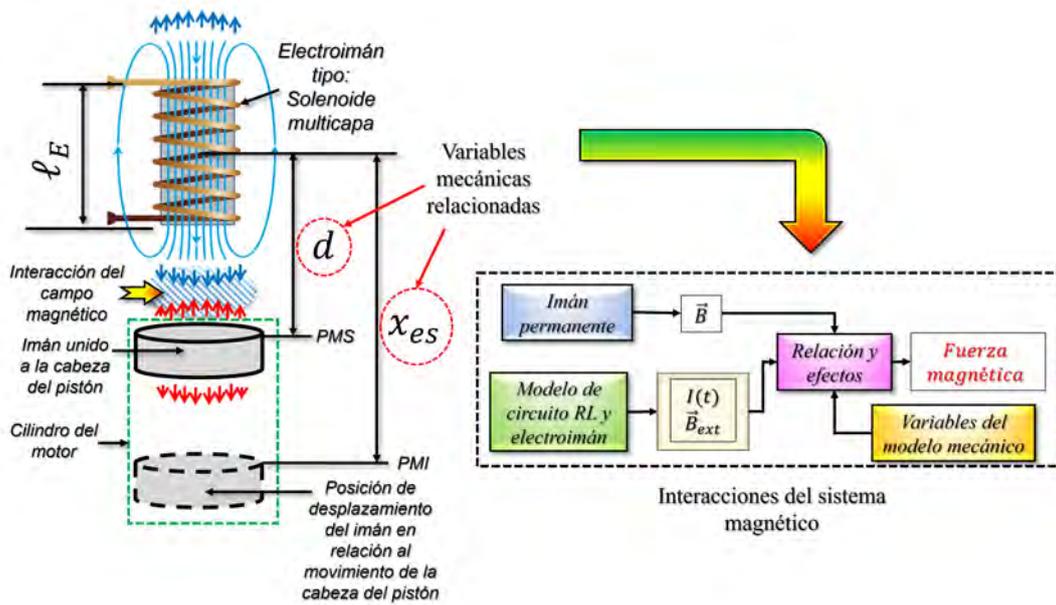


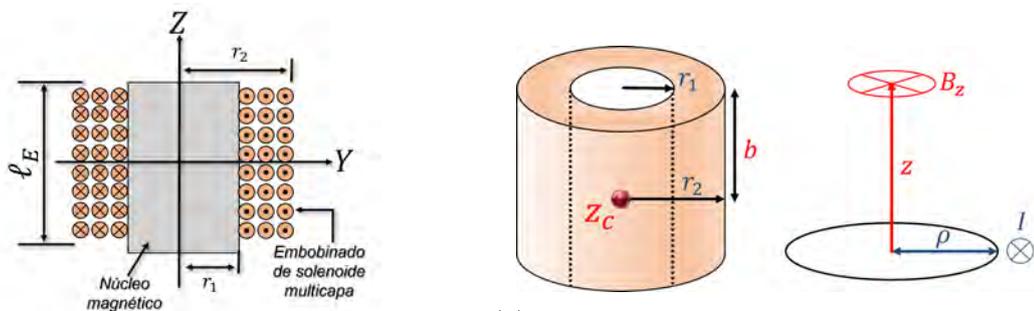
Figura 3.7. Relaciones existentes entre el electroimán y la formulación de la fuerza magnética.

Para conocer el comportamiento de la corriente en el electroimán, este se modela como un circuito RL. La intensidad del campo magnético del actuador electromagnético dependerá de la cantidad de corriente que se le suministre. Las ecuaciones (3.38) y (3.39), presentan la dinámica de la corriente de carga y descarga del circuito RL.

$$I(t) = \frac{V_{in}}{R_{elec} + R_{inductor}} \left( 1 - e^{-\frac{R_{elec} + R_{inductor}}{L_{elec}} t} \right) \quad (\text{etapa de carga}), \quad (3.38)$$

$$I(t) = \frac{V_{in}}{R_{elec} + R_{inductor}} e^{-\frac{R_{elec} + R_{inductor}}{L_{elec}} t} \quad (\text{etapa de descarga}). \quad (3.39)$$

El electroimán utilizado en el MRM experimental es un solenoide tipo multicapa (Figura 3.8a), la formulación de su campo magnético sobre el eje Z y de acuerdo a [Duffy and Netterfield, 1984, Ulaby, 2015, Labinac et al., 2006, Hayt et al., 2006, Purcell and Morin, 2013, Basharat et al., 2017], su ecuación de análisis se inicia desde la ecuación (3.18). Dado que el solenoide tiene una forma cilíndrica hueca, como se ilustra en la Figura 3.8b, para calcular el campo magnético se inicia desde la ecuación (3.40)



(a) Estructura del solenoide tipo multicapa.

(b) Esquema para el cálculo del campo magnético producido por un solenoide multicapa.

Figura 3.8. Análisis del campo magnético de un solenoide tipo multicapa en el eje Z.

$$dB_z = \frac{\mu_0 n_a I}{2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz d\rho. \quad (3.40)$$

Realizando la integración de la ecuación (3.40), se obtiene la densidad del campo magnético del solenoide tipo multicapa que está representado en la ecuación (3.41)

$$B_z = \frac{\mu_0 I n_a}{2} \left[ (z + b) \ln \left( \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + (z + b)^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + (z + b)^2}} \right) - (z - b) \ln \left( \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + (z - b)^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + (z - b)^2}} \right) \right], \quad (3.41)$$

donde  $r_1$  es el radio interior,  $r_2$  el radio exterior del solenoide multicapa. La ecuación (3.41) del campo magnético del solenoide multicapa se encuentra relacionado con la variable “ $x_{es}$ ” y con las ecuaciones (3.38) y (3.39). Como se muestra en la Figura 3.7, la variable  $x_{es}$  representa el desplazamiento del pistón desde el punto de vista del PMS considerando la distancia entre el actuador electromagnético y la cabeza del pistón, representándolo como “ $d$ ” y se muestra en la ecuación (3.42)

$$x_{es} = (R + \ell + d) - R \cos(\theta) - \ell \cos(\beta). \quad (3.42)$$

Con las ecuaciones (3.38), (3.39) y (3.42), la ecuación (3.41) del campo magnético del electroimán con núcleo magnético para ser utilizado en la fuerza magnética se representa en la ecuación (3.43)

$$\vec{B}_{ext}(z) = \frac{\mu I(t) n_a}{2} \left[ (x_{es} + b) \ln \left( \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + (x_{es} + b)^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + (x_{es} + b)^2}} \right) - (x_{es} - b) \ln \left( \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + (x_{es} - b)^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + (x_{es} - b)^2}} \right) \right], \quad (3.43)$$

donde

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad b = \frac{\ell_E}{2}, \quad n_a = \frac{N_t}{\ell_E}.$$

Para el diseño del solenoide tipo multicapa, los parámetros se muestran en la Figura 3.8a donde se utiliza la ecuación (3.44) para determinar el número de vueltas  $N_t$  a utilizar [Basharat et al., 2017]

$$N_t = \frac{\ell_E (r_2 - r_1)}{k_a d_E^2}, \quad (3.44)$$

donde  $\ell_E$  es la dimensión de la bobina (largo) en metros,  $d_E$  es el diámetro del cable magnético de la bobina en metros y  $k_a$  es el factor del empaque de la bobina que tiene un rango de 0.2 a 0.9, para bobinas ajustadas tiene un valor de “0.8”. Para poder determinar el valor de la “inductancia” del solenoide tipo multicapa en base a diseño [Wheeler, 1928], se utiliza la ecuación (3.45)

$$L_{elec} = \frac{4}{5} \frac{r_m^2 N_t^2}{6r_m + 9\ell_E + 10D}, \quad (3.45)$$

donde

$$r_m = r_1 + \frac{r_2}{2}, \quad D = D_2 - D_1,$$

del cual  $L_{elec}$  es la inductancia en  $\mu\text{H}$ ,  $r_m$  es el radio del solenoide multicapa en pulgadas (in),  $\ell$  es la altura del solenoide donde se encuentra el cable embobinado en pulgadas,  $N_t$  es el número de vueltas y  $D$  es la profundidad del embobinado del solenoide multicapa en pulgadas donde  $D_1$  es el diámetro interior y  $D_2$  es el diámetro exterior del solenoide.

### 3.3.2. El imán permanente, el comportamiento tridimensional

Para la formulación de la densidad de carga superficial ( $\sigma_m$ ) del campo magnético del imán permanente desde el punto de vista tridimensional, se utilizará el “*modelo de carga*” y utilizamos como variable la *intensidad del campo magnético* para analizarlo como se presenta en los trabajos de [Lu et al., 2018, Lu et al., 2019, Nguyen et al., 2019, Zhang et al., 2020, Bermingham et al., 2021]. Del cual la ecuación del modelo de carga solo queda en análisis del diferencial de superficie ( $d\vec{S}$ ) como se presenta en la ecuación (3.46)

$$\vec{H}_k = \frac{1}{4\pi\mu_0} \oint \frac{\sigma_m(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d\vec{S}, \quad \rho_m = -\nabla \cdot \vec{M} = 0, \quad (3.46)$$

donde la densidad de carga superficial  $\sigma_m$  acorde a la ecuación (3.46) puede calcularse como sigue

$$\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n} = \begin{cases} M & \text{para la cara superior} \\ 0 & \text{para la superficie lateral cilíndrica} \\ -M & \text{para la cara inferior.} \end{cases} \quad (3.47)$$

Aquí  $\vec{n}$  es el vector unitario normal a la superficie, para las bases superior e inferior del cilindro, y  $\vec{n}$  es paralelo al vector  $\vec{M}$  y perpendicular a  $\vec{M}$  para la superficie cilíndrica. Por tanto, sólo las superficies superior e inferior del cilindro contribuyen al campo magnético. Aquí el valor de  $M$  esta dado en tesla, por consiguiente  $M = B_r$ . A partir de las ecuaciones (3.46) y (3.47), el campo magnético en un sistema de coordenadas cilíndricas ( $r, \alpha, z$ ) con coincidencia azimutal con respecto el eje X es

$$\begin{aligned} \vec{H}_{k(r,\alpha,z)} &= \vec{H}_{k(r,\alpha,z)}^+ + \vec{H}_{k(r,\alpha,z)}^- \\ &= \frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \int_{r_1=0}^{r_1=r_o} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')^+}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dr_1 d\theta + \frac{-M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \int_{r_1=0}^{r_1=r_o} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')^-}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dr_1 d\theta, \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde el signo “+” se refiere al campo magnético de la superficie superior, y “-” a la superficie inferior. Con la ecuación (3.48) se soluciona la intensidad del campo magnético del imán pero se tiene que dimensionar, además, *se tiene que definir si el imán permanente, en su forma cilíndrica, tiene caras circulares o elípticas*. Para esa consideración se analiza al imán con forma de elipse como se muestra en la Figura 3.9. Donde la intensidad del campo queda representada en la ecuación (3.52)

$$r_o = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}}, \quad (3.49)$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = r \sin(\alpha - \theta) \vec{a}_\alpha + (r - r_1 \cos(\alpha - \theta)) \vec{a}_r + (z - h) \vec{a}_z, \quad (3.50)$$

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^{\frac{3}{2}} = \left( r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos(\alpha - \theta) + (z - h)^2 \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.51)$$

$$\vec{H}_{k(r,\alpha,z)} = \frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \int_{r_1=0}^{r_1=r_o} \frac{r \sin(\alpha - \theta) \vec{a}_\alpha + (r - r_1 \cos(\alpha - \theta)) \vec{a}_r + (z - h) \vec{a}_z}{\left( r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos(\alpha - \theta) + (z - h)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} r_1 dr_1 d\theta. \quad (3.52)$$

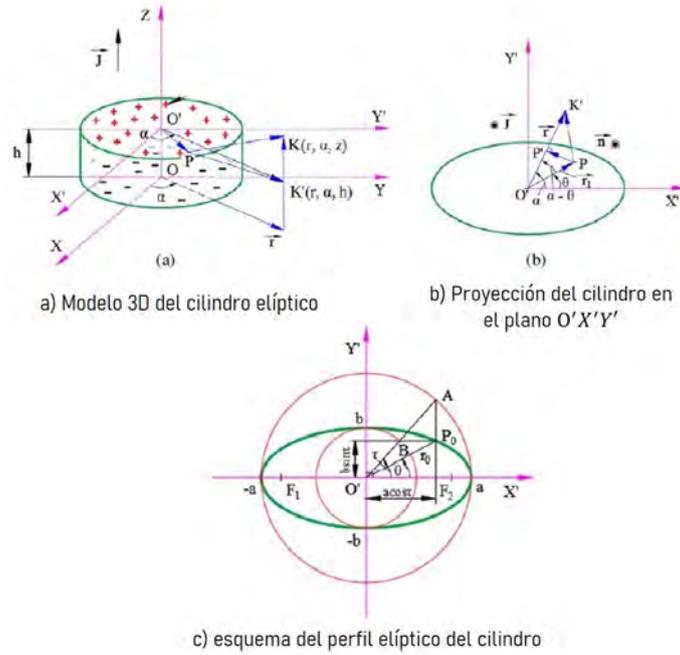


Figura 3.9. Dimensión, proyección y esquema del cilindro elíptico.

Y se resuelve la primera integral obteniendo las 3 coordenadas. De la cual se utilizan las siguientes abreviaciones

$$\delta = 2r \cos(\alpha - \theta), \quad \xi_+ = r^2 + (z - h)^2, \quad \xi_- = r^2 + z^2, \quad \Upsilon = \cos(\alpha - \theta).$$

Donde la *componente tangencial* (azimutal,  $\alpha$ ) queda representada por las ecuaciones (3.53), (3.54) y (3.55)

$$\vec{H}_{k(\alpha)}^{(3D)}(r, \alpha, z) = \vec{H}_{k(\alpha)}^{(3D)+}(r, \alpha, z) + \vec{H}_{k(\alpha)}^{(3D)-}(r, \alpha, z), \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{k(\alpha)}^{(3D)+}(r, \alpha, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \left( \ln \left( 2 \left( \sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_+ + r_o \right) - \delta \right) - \right. \\ \left. \frac{2(2\xi_+ - \delta^2)r_o + 2\delta\xi_+}{(4\xi_+ - \delta^2)\sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_+} - \ln(2\sqrt{\xi_+} - \delta) + \frac{2\delta\xi_+}{(4\xi_+ - \delta^2)\sqrt{\xi_+}} \right) \text{sen}(\alpha - \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{k(\alpha)}^{(3D)-}(r, \alpha, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \left( \ln \left( 2 \left( \sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_- + r_o \right) - \delta \right) - \right. \\ \left. \frac{2(2\xi_- - \delta^2)r_o + 2\delta\xi_-}{(4\xi_- - \delta^2)\sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_-} - \ln(2\sqrt{\xi_-} - \delta) + \frac{2\delta\xi_-}{(4\xi_- - \delta^2)\sqrt{\xi_-}} \right) \text{sen}(\alpha - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Donde la *componente axial* ( $Z$ ) queda representada por las ecuaciones (3.56), (3.57) y (3.58)

$$\vec{H}_{k(z)}^{(3D)}(r, \alpha, z) = \vec{H}_{k(z)}^{(3D)+}(r, \alpha, z) + \vec{H}_{k(z)}^{(3D)-}(r, \alpha, z), \quad (3.56)$$

$$\vec{H}_{k(z)}^{(3D)+}(r, \alpha, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \left( \frac{2(\delta r_o - 2\xi_+)}{(4\xi_+ - \delta^2)\sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_+} + \frac{4\sqrt{\xi_+}}{4\xi_+ - \delta^2} \right) (z - h) d\theta, \quad (3.57)$$

$$\vec{H}_{k(z)}^{(3D)-}(r, \alpha, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \left( \frac{2(\delta r_o - 2\xi_-)}{(4\xi_- - \delta^2)\sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_-} + \frac{4\sqrt{\xi_-}}{4\xi_- - \delta^2} \right) (z) d\theta. \quad (3.58)$$

Donde la *componente radial* ( $r$ ) queda representada por las ecuaciones (3.59), (3.60) y (3.61)

$$\vec{H}_{k(r)}^{(3D)}(r, \alpha, z) = \vec{H}_{k(r)}^{(3D)+}(r, \alpha, z) + \vec{H}_{k(r)}^{(3D)-}(r, \alpha, z), \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{k(r)}^{(3D)+}(r, \alpha, z) = & \frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \left( \frac{2(\delta r + 2\xi_+ \Upsilon - \delta^2 \Upsilon)r_o - 4\xi_+ r + 2\delta\xi_+ \Upsilon}{(4\xi_+ - \delta^2)\sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_+} \right. \\ & \left. - \Upsilon \ln \left( 2 \left( \sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_+ + r_o \right) - \delta \right) - \frac{-4\xi_+ r + 2\delta\xi_+ \Upsilon}{(4\xi_+ - \delta^2)\sqrt{\xi_+}} + \Upsilon \ln(2\sqrt{\xi_+} - \delta) \right) d\theta, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{k(r)}^{(3D)-}(r, \alpha, z) = & -\frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \left( \frac{2(\delta r + 2\xi_- \Upsilon - \delta^2 \Upsilon)r_o - 4\xi_- r + 2\delta\xi_- \Upsilon}{(4\xi_- - \delta^2)\sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_-} \right. \\ & \left. - \Upsilon \ln \left( 2 \left( \sqrt{r_o(r_o - \delta)} + \xi_- + r_o \right) - \delta \right) - \frac{-4\xi_- r + 2\delta\xi_- \Upsilon}{(4\xi_- - \delta^2)\sqrt{\xi_-}} + \Upsilon \ln(2\sqrt{\xi_-} - \delta) \right) d\theta. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para finalizar realizamos el cambio de intensidad del campo magnético a densidad del campo magnético;  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

### 3.3.3. El imán permanente, relación entre el comportamiento tridimensional y análisis sobre el eje Z

Con sus 3 componentes podemos conocer como se comporta el campo magnético del imán permanente en su parte “*axial, radial y azimutal*”. Como punto de análisis, se busca conocer la diferencia que hay entre la ecuación (3.56) en el eje axial del campo tridimensional del imán y la ecuación (3.26) del análisis en el eje Z cuando se determina un punto específico de análisis, debido a que la operación del MRM está basado en el análisis sobre el eje Z. Como usamos un imán de forma cilíndrica, se puede realizar esta comparativa, donde los datos utilizados para esta prueba de simulación son: radio=1.25 cm,  $\ell_m=1$  cm,  $B_r=1.32$  T.

Para evaluar las ecuaciones (3.53), (3.56) y (3.59) del campo magnético tridimensional del imán, se utiliza el método numérico de la Regla de Simpson como se muestra en la ecuación (3.62)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right], \quad (3.62)$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n_a}, \quad n_a = \text{número de intervalos.}$$

Para la ecuación (3.56), se considera hacer variar el radio del punto a analizar con una “altura constante” de  $z = 0.1$  cm con respecto a la cara superior del imán permanente y con la ecuación (3.26) se varia solamente la altura ( $z$ ) de análisis. En la Figura 3.10, se muestra el comportamiento de la densidad del campo magnético sobre el eje Z de la ecuación (3.26) y en las Figuras 3.11 y 3.12 se muestran los comportamientos de la densidad del campo magnético en la parte axial, radial y azimutal. Haciendo énfasis en la Figura 3.10 y la Figura 3.11, *si extraemos el valor de la densidad del campo magnético  $B_z$  cuando  $r = 0$ , el valor de  $B_z$  será el mismo cuando  $z = 0.1$  cm con un valor de  $B_z = 0.3834$  T.*

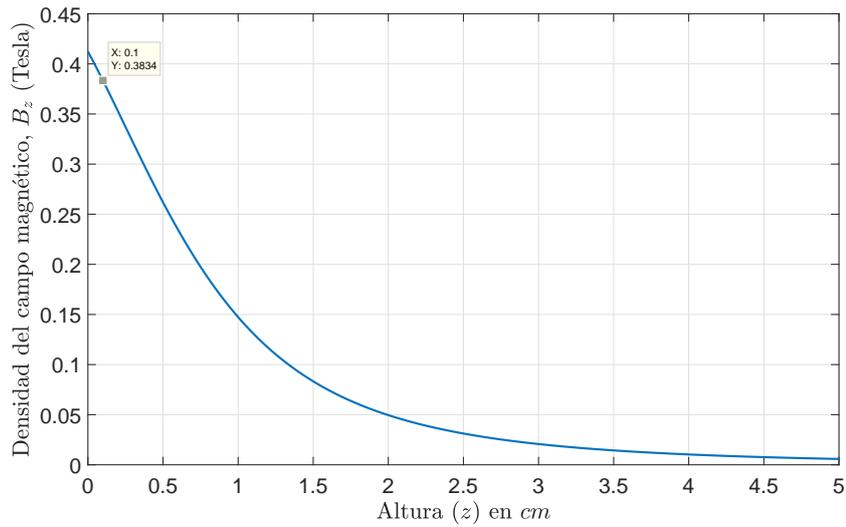


Figura 3.10. Densidad del campo magnético del imán permanente en el eje Z ecuación (3.26).

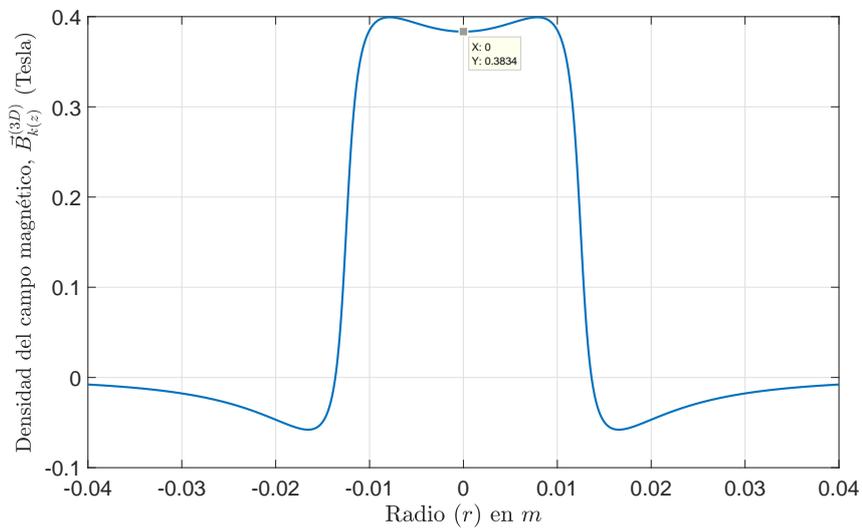


Figura 3.11. Densidad del campo magnético del imán permanente en  $\vec{B}_k^{(3D)}$  a lo largo de  $r$ , ecuación (3.56).

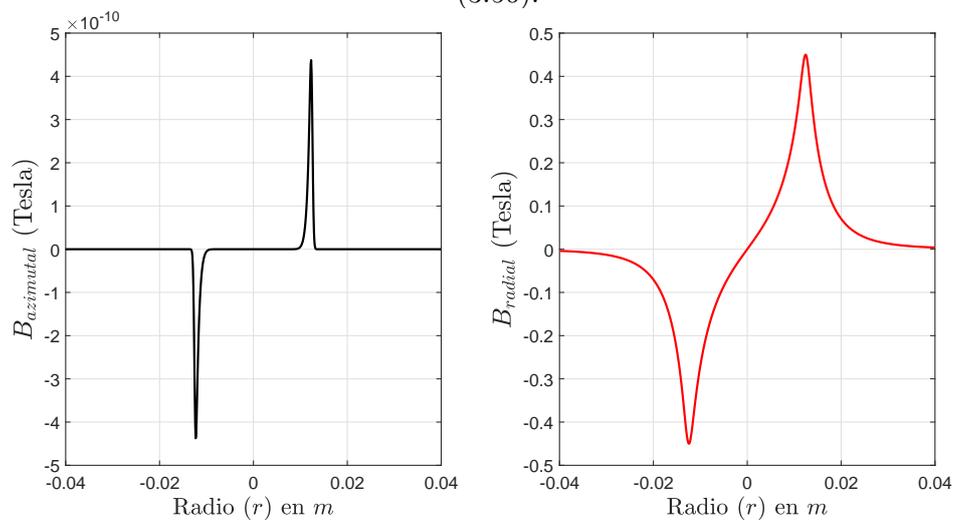


Figura 3.12. Densidad del campo magnético tridimensional del imán permanente en  $B_r$  y  $B_{azimutal}$  a lo largo de  $r$ , ecuaciones (3.53) y (3.59).

Ahora, asumiendo que el imán de neodimio tiene una magnetización uniforme a lo largo del eje Z donde las normales de superficie unitarias quedan

$$\hat{n} = \begin{cases} \hat{z} & z = 0 \\ \hat{r} & r = R_m \\ -\hat{z} & z = -1. \end{cases} \quad (3.63)$$

Con esta comparativa y las normales de superficie unitarias de (3.63), el análisis de la ecuación (3.37) puede ser representada de dos maneras de intensidad magnética

$$\begin{aligned} \sigma_m &= -\hat{n} \cdot (\vec{H}^a - \vec{H}^b) \\ &= (\vec{H}_{k(z)}^{(3D)+}(r, \alpha, z) + \vec{H}_{k(z)}^{(3D)-}(r, \alpha, z)), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m &= -\hat{n} \cdot (\vec{H}^a - \vec{H}^b) \\ &= \frac{M}{2} \left( \frac{z_h}{\sqrt{R_m^2 + z_h^2}} - \frac{z_h - \ell_m}{\sqrt{R_m^2 + (z_h - \ell_m)^2}} \right) \vec{a}_z, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde la ecuación (3.64) puede ser utilizada cuando se considera que se tiene un imán permanente con forma “*elíptica*” y la ecuación (3.65) cuando el imán permanente tiene forma cilíndrica. Para la formulación de la fuerza magnética se utilizará la ecuación (3.65).

La Tabla 3.2 muestra los parámetros y valores utilizados para la simulación de la sección magnética que completa el modelado dinámico del MRM formulando la fuerza de repulsión magnética.

Tabla 3.2. Parámetros utilizados para la formulación magnética.

Parámetro	Descripción	Valor
$N_t$	Número de vueltas	714 vueltas
$R_s$	Radio de análisis para la fuerza magnética	0.0125 m
$d$	Distancia entre el electroimán y el pistón	0.06 m
$R_{mag}$	Radio del imán	0.0125 m
$z_h$	Punto de altura para el análisis del imán	0.0001 m
$\ell_{mag}$	Altura del imán	0.01 m
$B_r$	Remanencia magnética	1.32 T
$\vec{B}_{mag}(z)_{max}$	Máximo valor de la densidad magnética del imán	0.4123 T
$\ell_E$	Altura del solenoide	0.09 m
$r_1$	Radio interno del solenoide	0.0075 m
$r_2$	Radio externo del solenoide	0.026 m
$\mu_0$	Permeabilidad magnética del vacío	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
$R_{elec}$	Resistencia de 300W (experimental)	1.2 $\Omega$
$R_{inductor}$	Resistencia interna de la bobina (experimental)	1.3 $\Omega$
$L_{elec}$	Inductancia del solenoide	31 mH

### 3.4. Sumario

Se presentó información sobre el funcionamiento de la parte magnética del MRM y como están interactuando los campos magnéticos generados por un imán de neodimio y un electroimán con estructura de solenoide multicapa.

En el capítulo se presentó un resumen del estado del arte referente a investigaciones que utilicen un comportamiento magnético similar a la operación magnética generada del MRM para poder determinar cómo desarrollar el análisis para poder formular la fuerza magnética utilizada en el MRM y representar completamente el modelo matemático.

En el capítulo se presentaron conceptos, teorías y la formulación de los campos magnéticos del electroimán y del imán de neodimio a partir de la ley de Bio-Savart y el potencial magnético. Dentro del capítulo se desarrollaron los siguientes aspectos:

- La formulación de la fuerza magnética a partir del modelo de carga y como se relaciona en la configuración del MRM.
- La relación entre la ecuación de posición del pistón, el modelo del circuito RL y la ecuación del campo magnético del electroimán tipo solenoide multicapa.
- La relación entre el campo magnético tridimensional en su componente axial y el análisis sobre el eje Z del campo magnético del imán de neodimio para poder representar la densidad de carga superficial y ser utilizada en la fuerza magnética.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados para validar la fuerza magnética y el modelo matemático desarrollado en comparación con los datos experimentales del prototipo del MRM. Además, se presenta la determinación de los ángulos de energización para operar el MRM.

---

# Capítulo 4

## El prototipo experimental, la validación del modelo matemático

Con la formulación de la fuerza magnética (ecuaciones (3.36) y (3.65)) se completa la ecuación (2.23) usada en la ecuación (2.44) para representar el modelo matemático el motor recíprocante magnético. En la Figura 4.1, se presenta el modelo matemático del funcionamiento del prototipo; las líneas de color indican el nivel de importancia de las variables, el color rojo se maneja como variable más importante del sistema, la línea de color verde indica como está relacionada la determinación de la fuerza magnética y como se refleja en el prototipo experimental. Las líneas de color negro indican las variables de cada sección del motor y donde se relacionan con la parte magnética.

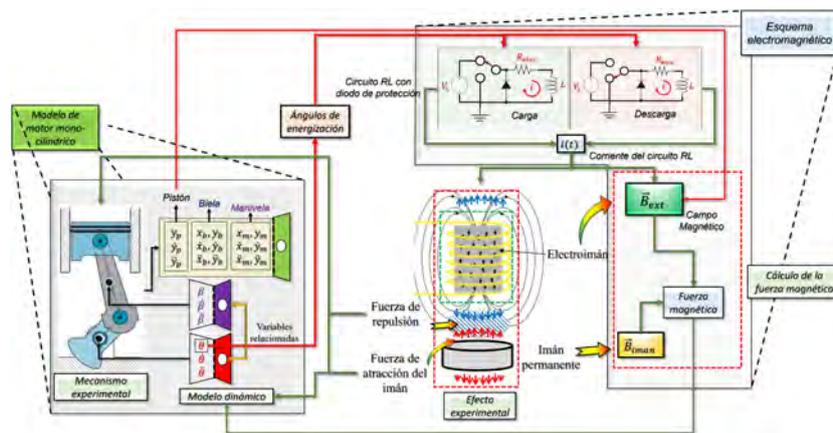


Figura 4.1. Funcionamiento del prototipo experimental y estructura del modelo matemático.



Figura 4.2. Momentos de generación de chispa para la operación del MCI.

En el funcionamiento de los MCI es importante tener el ángulo de generación de chispa para generar la explosión dentro de la cámara de combustión para poder incrementar o reducir la velocidad del motor ilustrado en la Figura 4.2. De manera similar, en el MRM es necesario determinar la posición del pistón en relación a la posición angular del cigüeñal para determinar cuándo se debe de encender y apagar el actuador electromagnético para acelerar o desacelerar el motor. En este capítulo se presenta

la determinación de los ángulos de energización para accionar el motor y la validación de la fuerza magnética y el modelo matemático del MRM.

### 4.1. Diseño del motor magnético y programación

Para poder validar el modelo matemático del MRM tipo monocilíndrico es necesario contar con un prototipo experimental para poder validar experimental los resultados que se obtengan con el modelo matemático. En la Figura 4.3, se presentan las etapas que se realizaron para la construcción del MRM junto a su sistema de monitoreo y pruebas realizadas.

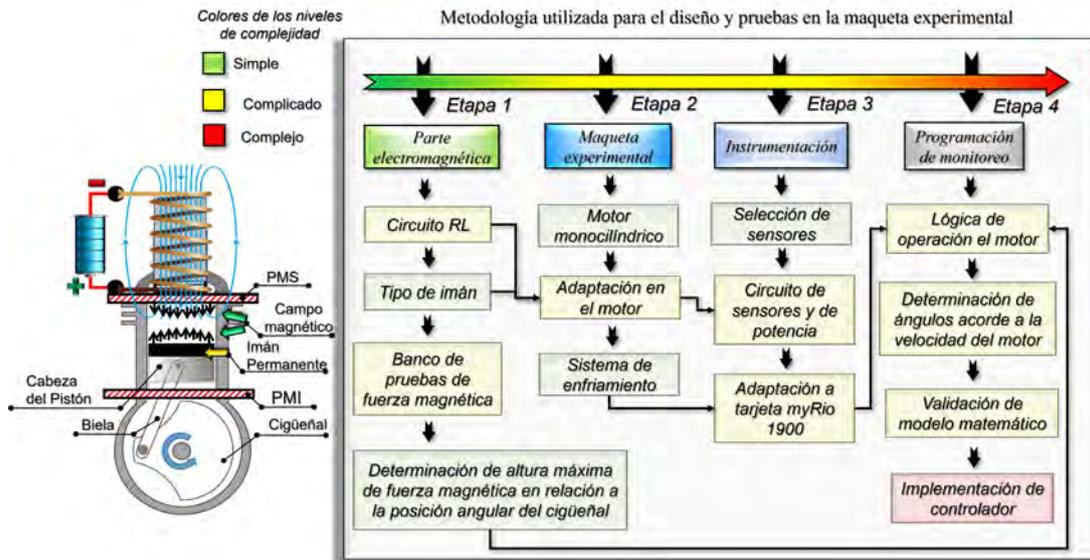


Figura 4.3. Metodología utilizada para la construcción y prueba del prototipo experimental del MRM tipo monocilíndrico.

En la Figura 4.4, se muestra el prototipo experimental del MRM construido en CENIDET. La adquisición de datos se realiza mediante un módulo de estudiante *myRIO-1900*. El módulo adquiere las señales analógicas y genera una señal ON-OFF para activar el actuador electromagnético en función de la posición angular del cigüeñal medida por el encoder LPD3806-360BM. El codificador también permite medir la velocidad angular del motor. Se utilizó un transistor de potencia MOSFET IRF3205 para construir el sistema de alimentación del actuador electromagnético dado por la activación de la señal ON-OFF. El actuador utiliza una fuente de alimentación de 30V “HP 6653A” con una corriente variable a 15 A.

En el montaje experimental de la Figura 4.4 se muestran diferentes componentes utilizados en el motor que funcionan de la siguiente manera: se utiliza un sensor de efecto hall CSLA1CF para medir la corriente consumida por el actuador electromagnético. También se utiliza una placa Arduino para generar la señal analógica a partir del sensor digital de temperatura, donde su señal es operada por el módulo *myRio* así como el sensor de tensión y el sistema de refrigeración se activa de manera automática.

Para el monitoreo del motor magnético, se desarrolló una plataforma en LabVIEW como se ilustra en la Figura 4.5. En esta plataforma se puede monitorear la velocidad del motor, el par generado en el sistema, el voltaje utilizado, la corriente consumida, el conteo de pulsos, las temperaturas del electroimán, del circuito de potencia y de la resistencia. Además, en el programa se puede manipular los ángulos de operación, el tipo de estrategia de control a utilizar y grabar datos.

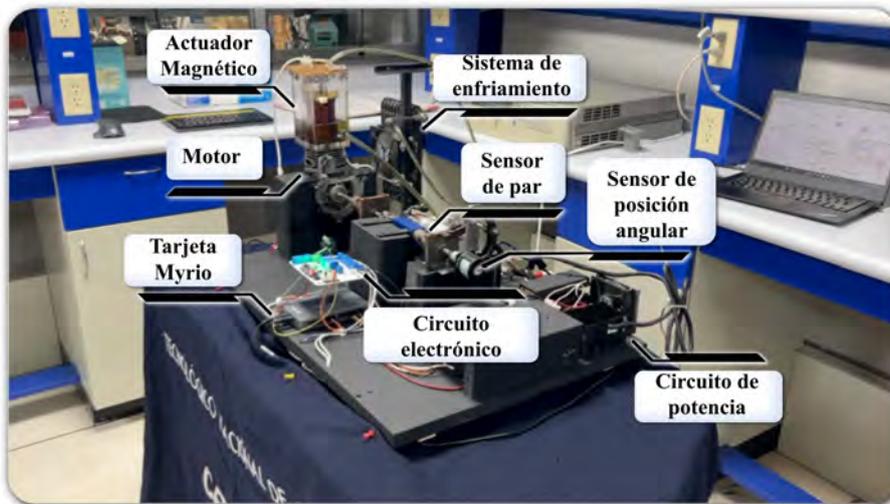


Figura 4.4. Prototipo experimental del MRM.

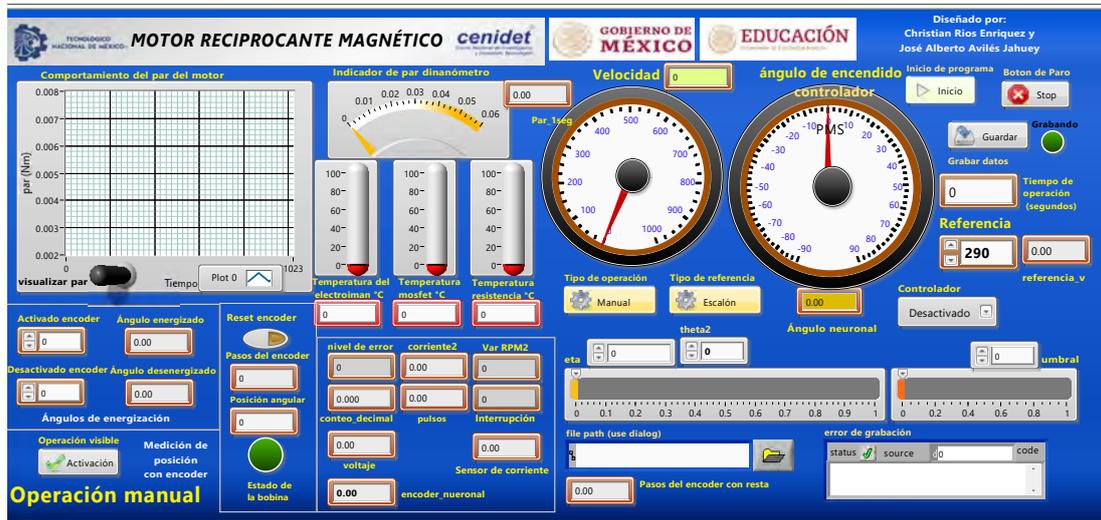


Figura 4.5. Plataforma de monitoreo y operación del MRM en LabVIEW.

En la Figura 4.6, se presenta la programación orientada a objetos de LabVIEW para poder hacer funcionar la plataforma de monitoreo y en la Figura 4.7 se muestran los diagramas a bloques de como funciona el programa de la plataforma de monitoreo. La programación está dividida en 3 partes:

- Parte superior: En esta sección se realiza la lógica de monitoreo que se encuentran dividida en cuadros pequeños. En los cuadros más grandes se realiza la lógica de la manipulación del ángulo de energización.
- Parte intermedia: En esta sección se presenta un cuadro donde se agregan todos los datos que se pueden monitorear y manipular en el entorno de LabVIEW. Estos datos son transformados y grabados en un archivo de texto y después son tratados con Python para transformarlos en archivos numéricos para poder realizar las validaciones experimentales utilizando Matlab.
- Parte inferior: En esta sección se presenta la lógica de operación del controlador utilizado junto con la estructura para cambiar el tipo de operación de referencia sea *tipo escalón o tipo rampa o viceversa*.

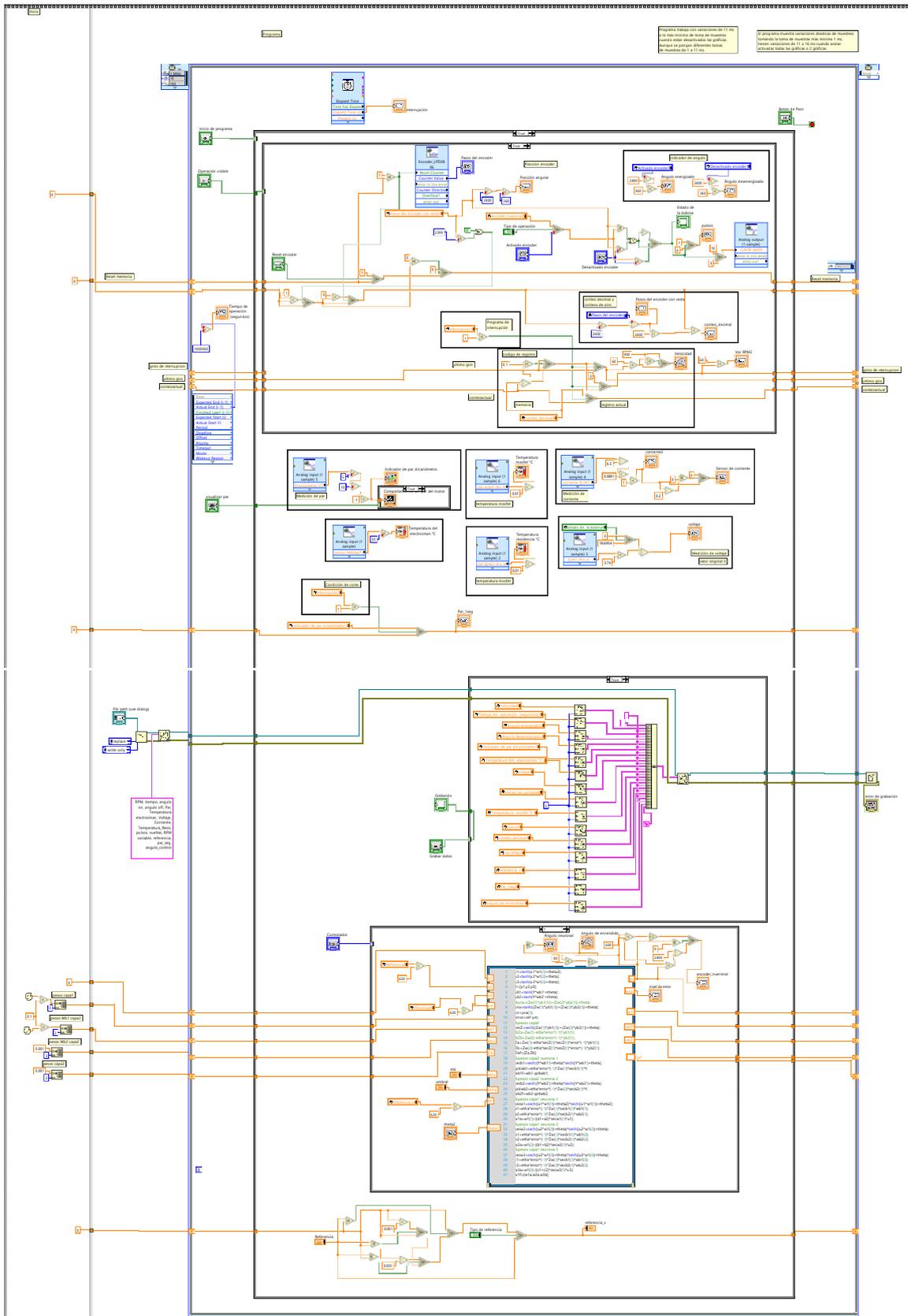


Figura 4.6. Programación de la plataforma de operación en LabVIEW.

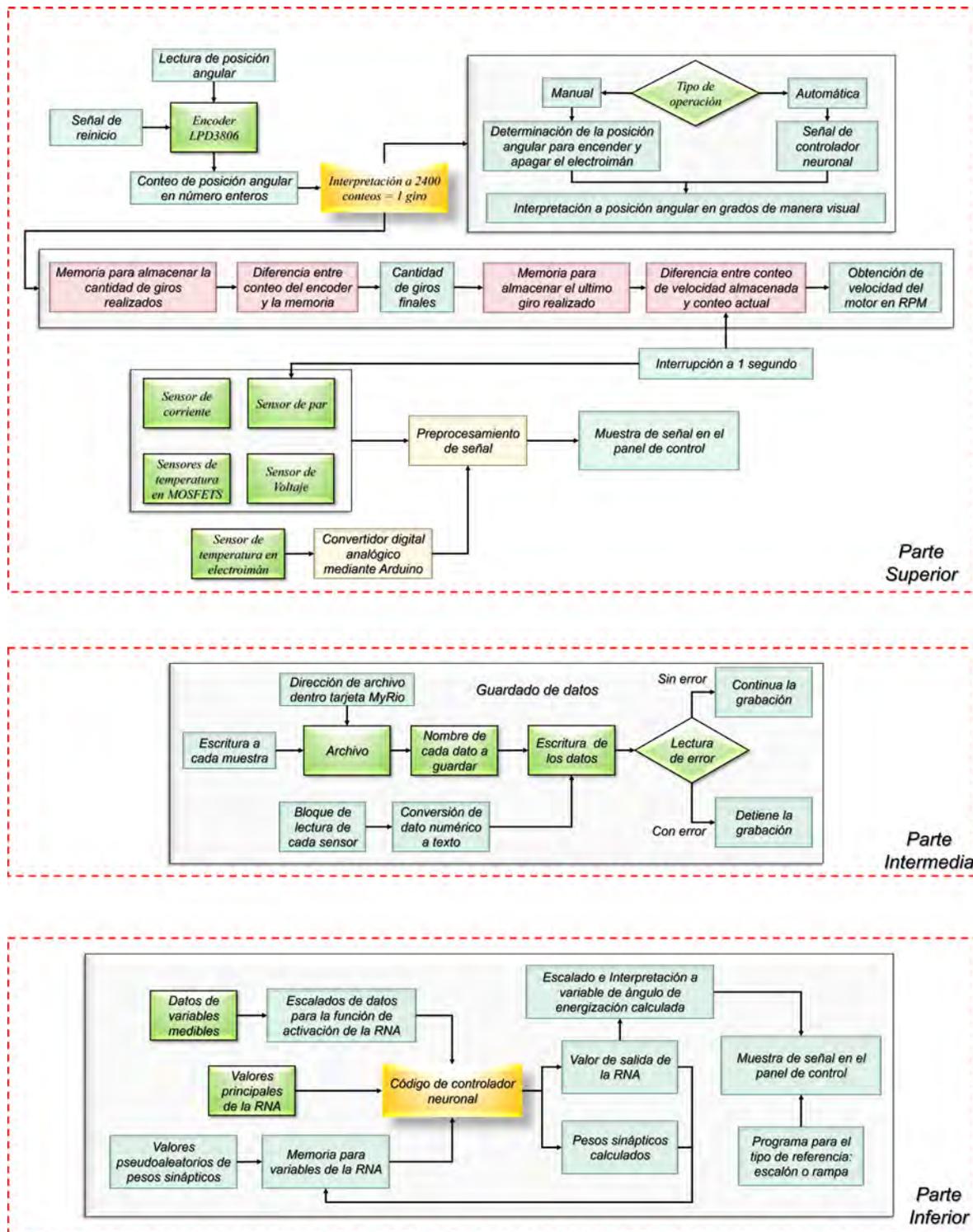


Figura 4.7. Diagrama a bloques de cada parte del programa de LabVIEW del MRM.

### 4.2. Determinación de la fuerza magnética entre el electroimán y el imán de neodimio

Para determinar la fuerza magnética que se está generando entre el electroimán y el imán permanente de neodimio, se diseñó una estructura en forma de soporte que permita variar la altura del electroimán y utilizando una báscula se coloca el imán de neodimio y se posiciona debajo del electroimán; una vez posicionado el imán de neodimio se energiza el electroimán y se mide la cantidad de peso generado por la fuerza de repulsión magnética hacia el imán de neodimio ilustrado en la Figura 4.8.



Figura 4.8. Estructura para pruebas de fuerza.

El electroimán (Figura 4.8) utiliza una estructura cerrada de acrílico para almacenar un aceite dieléctrico el cual es utilizado como sistema refrigerante. El utilizar esta estructura incrementa la distancia entre el electroimán y el imán de neodimio a un valor de 1.5 cm tomando como punto de referencia la altura del electroimán “ $\frac{\ell_E}{2}$ ”. Para operar el electroimán, este trabaja como circuito RL ilustrado en la Figura 4.9. El circuito RL utiliza una resistencia eléctrica de potencia con un valor de  $1.2 \Omega$  de 300W conectado en serie con el electroimán y utiliza un diodo de potencia MUR1510 de 15 A en anti-paralelo, para ser usado como diodo de descarga libre de la bobina y utilizarse como circuito de protección. Además, el valor de la inductancia del electroimán es de 31 mH.

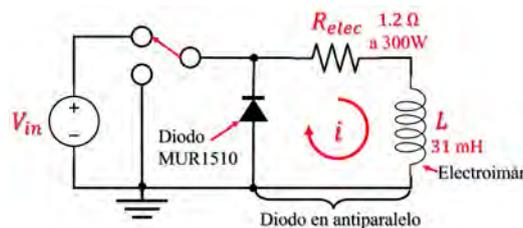


Figura 4.9. Circuito RL del MRM.

Para poder validar la ecuación (3.36), se realizaron diferentes comparativas de fuerzas de repulsión entre el electroimán y el imán de neodimio a diferentes niveles de corriente utilizando 3 tipos de voltaje que son presentados en la Tabla 4.1. Los 12 V simbolizan el uso de una batería de vehículo, mientras que los 24 V representan un escenario donde se utilizan 2 baterías como fuente de alimentación y los 30 V indican un límite de operación generado por la fuente HP 6653A.

Como el electroimán utiliza un núcleo magnético y tiene adherido piezas ferromagnéticas para la sujeción de la estructura cerrada de acrílico, al acercarse el imán de neodimio al electroimán este genera una atracción magnética con una fuerza dentro de un rango de 19.345 N a 20.797 N a una distancia aproximada entre 1 mm y 2 mm. Este valor de atracción tiene que ser superado por la

repulsión magnética en el PMS considerando una distancia de 1mm. Se tiene que considerar también que la distancia entre el imán y el electroimán es un poco mayor, por lo que la fuerza de atracción tiende a reducirse.

En la Tabla 4.1 se presentan los diferentes niveles de corriente de 6 a 15 amperes utilizados en las pruebas de 30 V, 24 V y 12 V. Del cual, la prueba de 30 V a 15 A logra superar la fuerza de atracción a 1 mm, mientras que la prueba de 24 V a 15 A apenas se encuentra dentro del límite para superar la fuerza de repulsión, sin embargo, la prueba a 12 V a 15 A no logra superar la fuerza de repulsión, indicando que requiere de una mayor cantidad de voltaje para poder superar la fuerza de atracción magnética. Estos 3 resultados nos indican lo siguiente:

- El valor del voltaje y de la corriente suministrada para energizar el electroimán son condiciones importantes para operar el MRM y no puede funcionar con bajos valores de voltaje y corriente mostrados en la Tabla 4.1 con color amarillo y requiere operar en las zonas de color verde para garantizar que pueda superar la fuerza de atracción magnética.
- Si se implementa el uso de baterías de vehículos comerciales para operar el MRM, el prototipo requiere al menos el uso de 2 baterías de 12 V y deseable utilizar 3 baterías para entregar 36 V dado que la prueba indica que el MRM requiere utilizar 30 V en 15 A para operar correctamente y superar la fuerza de atracción magnética sin ningún problema en el motor.

Tabla 4.1. Pruebas de comportamiento de la fuerza de repulsión magnética entre un electroimán y un imán de neodimio a diferentes niveles de voltaje y corriente.

Prueba a 30 V									
Condiciones de Pruebas		Valores en la Fuente HP 6653A		Voltaje medido en el circuito RL		Peso (kg) generado por la fuerza de repulsión magnética		Conversión del peso (kg) medido a fuerza (N)	
Vt.	Ct.	Vt.	Ct.	Elt.	Elt.+Res.	PMS a 1mm	Con distancia	PMS a 1mm	Con distancia
30 V	15 A	30 V	11.89 A	15.633 V	28.360 V	2.134 kg	1.921 kg a 5mm	20.9345 N	18.845 N a 5mm
30 V	10 A	29.53 V	10 A	12 V	26.432 V	2.060 kg	1.780 kg a 5mm	20.2090 N	17.562 N a 5mm
30 V	8 A	18.22 V	8 A	9.720 V	17.560 V	1.038 kg	1.128 kg a 5mm	10.1828 N	11.066 N a 5mm
30 V	6 A	13.81 V	6 A	7.202 V	13.122 V	0.218 kg	0.706 kg a 8mm	2.13858 N	6.926 N a 8mm
Prueba a 24 V. Escenario de 2 baterías de vehículo									
Condiciones de Pruebas		Valores en la Fuente HP 6653A		Voltaje medido en el circuito RL		Peso (kg) generado por la fuerza de repulsión magnética		Conversión del peso (kg) medido a fuerza (N)	
Vt.	Ct.	Vt.	Ct.	Elt.	Elt.+Res.	PMS a 1mm	Con distancia	PMS a 1mm	Con distancia
24 V	15 A	24 V	10.66 A	12.12 V	22.64 V	1.544 kg	1.022 kg a 3mm	15.1466 N	10.026 N a 3mm
24 V	10 A	22.77 V	10 A	12.17 V	21.61 V	1.233 kg	1.314 kg a 3mm	12.0957 N	12.890 N a 3mm
24 V	8 A	19 V	8 A	10.12 V	17.92 V	0.766 kg	1.078 kg a 4mm	7.5144 N	10.575 N a 4mm
24 V	6 A	13.94 V	6V	7.212 V	13.127 V	0.130 kg	0.652 kg a 8mm	1.2753 N	6.396 N a 8mm
Prueba a 12 V. Escenario de 1 batería de vehículo									
Condiciones de Pruebas		Valores en la Fuente HP 6653A		Voltaje medido en el circuito RL		Peso (kg) generado por la fuerza de repulsión magnética		Conversión del peso (kg) medido a fuerza (N)	
Vt.	Ct.	Vt.	Ct.	Elt.	Elt.+Res.	PMS a 1mm	Con distancia	PMS a 1mm	Con distancia
12 V	15 A	12 V	5.24 A	6.036 V	11.230 V	0.010 kg	0.706 kg a 8mm	0.0981 N	6.926 N a 8mm

Vt.=Voltaje, Ct.=Corriente, Res.=Resistencia, Elt.= Electroimán.

	Operación máxima		Límite de operación
--	------------------	--	---------------------

Los resultados de la Tabla 4.1 muestran que el voltaje ofrecido por la fuente HP 6653A siempre se encuentra reducido alrededor de la mitad al medirse en el electroimán, por consiguiente, el electroimán está trabajando junto a la resistencia como un divisor de voltaje y haciendo el cálculo con la ecuación (4.1), el electroimán presenta un valor de resistencia interna de 1.3 Ω para ser considerado en la ecuación (3.38) y (3.39).

$$V_2 = \frac{V_{in}R_{elec}}{R_{elec} + R_{inductor}}. \tag{4.1}$$

Con los resultados de la Tabla 4.1 se observa que cuando el imán de neodimio se acerca a la cara inferior del electroimán, asimilando que fuera el PMS a 1 mm de distancia, su fuerza de atracción por material ferromagnético va incrementando y al irse separando, dicha fuerza se reduce de manera significativa reflejándose en las fuerzas de repulsión magnética con distancias de las pruebas de 30, 24 y 12 volts. Esto nos permite indicar que cuando el imán se va acercando al electroimán la fuerza de repulsión se va reduciendo y vuelve a incrementarse dando efecto a mayor fuerza al brazo de palanca que se genera pasando el PMS.

Sin embargo, ante este efecto se tiene que recordar lo siguiente: los valores indican que cuando hay presente un fuerte campo magnético generado por un imán de neodimio y se encuentre un material ferromagnético, este generará una fuerza de atracción grande que puede provocar que la fuerza de repulsión magnética entre el campo del imán de neodimio y el electroimán sea afectada y reduzca su efectividad.

Para validar la fuerza de repulsión magnética usaremos los valores de fuerza representados en la Tabla 4.1 en donde usaremos como referencia su máxima operación. Además, el electroimán utiliza laines de hierro dulce como núcleo magnético y estos presentan un cierto nivel de oxidación en donde se considera el valor para  $\mu_r$  de **430**, tomando un rango de operación entre 400 y 500 unidades. Adicionalmente, se utilizará el valor de 0.4123 T de la ecuación (3.65) con dimensiones de  $R=2.5\text{cm}$  y  $\ell_m=1\text{cm}$ .

El valor de  $\mu_r$  fue calculado de manera heurística, dado que se desconoce el tipo de material que se utilizó y tiene un cierto grado de oxidación en las laines del núcleo magnético, se consideró que las laines son de hierro. Este material tiene una  $\mu_r$  dentro del rango de operación posible de 200 a 5000 unidades [Lyman and international Handbook committee, 1961]. Para determinar el valor de  $\mu_r$  del núcleo magnético del electroimán, se consideró un rango de operación entre 400 y 500 unidades y se determinó mediante ensayo y error acorde a los resultados de la fuerza de la Tabla 4.1 para aproximar los resultados de la fuerza de repulsión magnética.

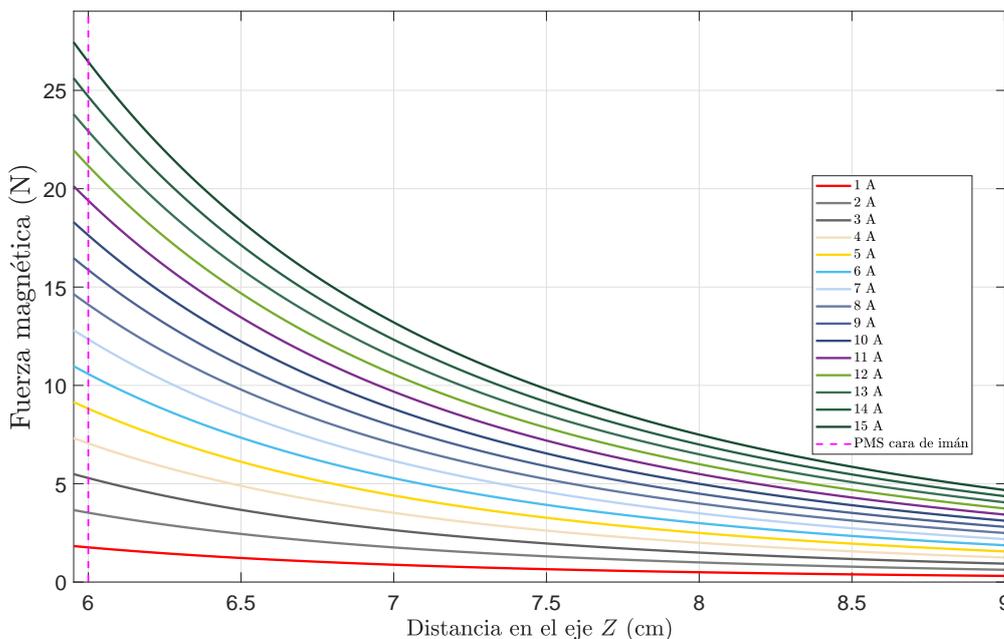


Figura 4.10. Fuerza magnética ecuación (3.36).

En la Figura 4.10, se presenta el comportamiento de la fuerza magnética utilizando la ecuación (3.36) a diferentes niveles de corriente. En la figura se muestra una línea punteada, esta indica el límite de la posición del PMS entre el imán y el electroimán. Esta posición toma en cuenta como punto de referencia  $\vec{B}_{ext}(z)$  la altura media del electroimán que es de 4.5 cm más 1.5 cm de la estructura acrílica dando una altura de 6 cm considerando 1 mm de separación entre el electroimán y el imán de neodimio en el prototipo experimental (use como referencia las Figuras 3.7 y 4.8).

La fuerza de repulsión magnética a 12 A de la Figura 4.10 presenta un valor muy cercano a los 20.9345 N de la fuerza magnética experimental de la prueba 30 V a 11.89 A mostrado en la Tabla 4.1. Pero, si se compara con las otras pruebas de corriente a 30 V con la gráfica, se observa mucha diferencia entre estos valores indicando que el efecto de atracción magnética por material ferromagnético si afecta en las condiciones de operación caso que no se considera en la formulación magnética.

Con los resultados obtenidos, se indica que para poder generar la mayor fuerza de repulsión magnética entre el electroimán y el imán de neodimio, *bajo la condición de estar totalmente cargado el electroimán*, el ángulo de energización ( $\theta$ ) debería de estar entre 1 y 5 grados pasando el PMS para generar el mayor brazo de palanca posible en el motor.

Tomando en cuenta los valores de los componentes del solenoide multicapa y la resistencia disipadora usados en el prototipo experimental junto al voltaje de 30 V a 15 A utilizado en la Tabla 4.1, el circuito RL presenta una tiempo de carga  $\tau$  de 12.4 ms, como el circuito representa a un sistema de primer orden, cuando se cumple el primer tiempo de carga,  $\tau_1$ , el solenoide se encuentra cargado en un 63% de su capacidad total, por el cual se considera que la fuerza de repulsión magnética sea generado entre su segundo tiempo de carga ( $\tau_2$ ) cuando se encuentre entre un 85% de su capacidad.

Usando como suposición que el MRM opera a 793 RPM, cada revolución es realizada cada 77 ms aproximadamente, por consiguiente, *el electroimán deberá energizarse en la posición angular del cigüeñal de 55 grados antes del PMS* para cumplir la primer carga del solenoide como se ilustra en la Figura 4.11. Tomando como referencia los resultados de la Tabla 4.1, se considera que para evaluación del modelo matemático durante la prueba experimental no se deberá de superar  $\tau_1$  del circuito RL antes de llegar al PMS, dado que prodría generar una fuerza de repulsión magnética no deseada al imán antes de llegar al PMS provocando pérdidas de velocidad.

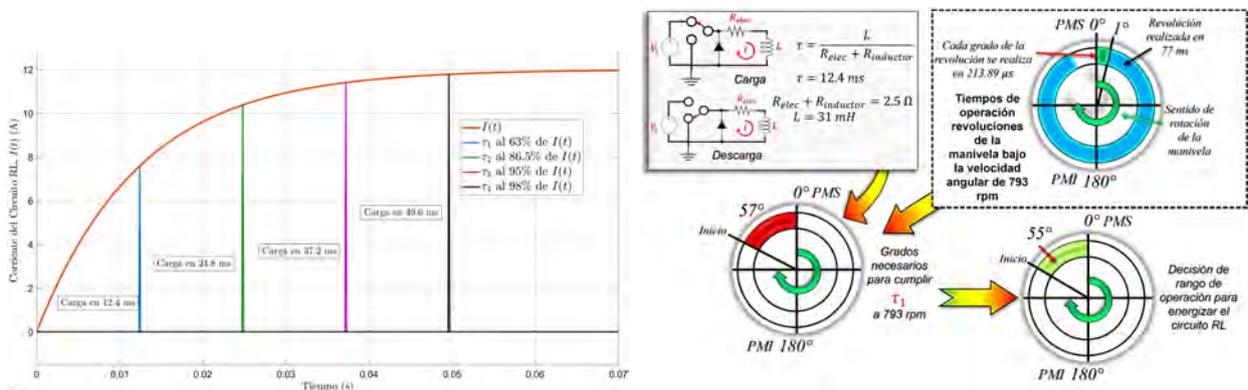


Figura 4.11. Operación del circuito RL.

El efecto de atracción magnética generado por el material ferromagnético también se toma en consideración para la formulación en el modelo matemático, específicamente en la ecuación (2.25) en  $F_{atracción}$ , de acuerdo a la prueba experimental, se considerará que tendrá un valor fijo a -20N y

durante las simulaciones será activado cuando la posición angular,  $\theta$ , se encuentre en un valor de  $35^\circ$  antes del PMS y cuando  $\theta$  sea igual a cero,  $F_{atracción}$  será igual a cero.

### 4.3. Validación del modelado matemático del MRM con pruebas experimentales y el efecto de la fricción

En esta etapa se realizaron 15 pruebas diferentes para poder determinar si el modelado matemático es capaz de representar la dinámica del MRM. De las 15 pruebas, se utilizará la prueba 1 para explicar los resultados obtenidos dado que las demás pruebas presentan comportamientos similares.

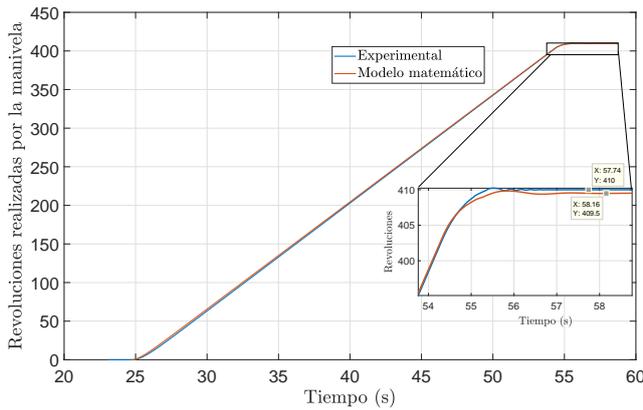


Figura 4.12. Cantidad de giros realizados por el cigüeñal del motor vs simulación.

Condiciones de la simulación:

$$R_{elec} + R_{inductor} = 2.5 \Omega.$$

$L = 31$  mH (Valor de medidor de inductancia).

$$\mu_1 = 0.0004195 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}.$$

$$\mu_2 = 0.000382 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}.$$

$$\mu_r = 430.$$

Encendido de actuador:

$55^\circ$  ( $305^\circ$ ) antes del PMS.

Apagado de actuador:  $90^\circ$  después del PMS.

Muestreo en simulación: 0.56 ms.

Método numérico de simulación:

ODE3 (Bogacki–Shampine) de paso fijo.

Media de muestreo (Tarjeta myRio):

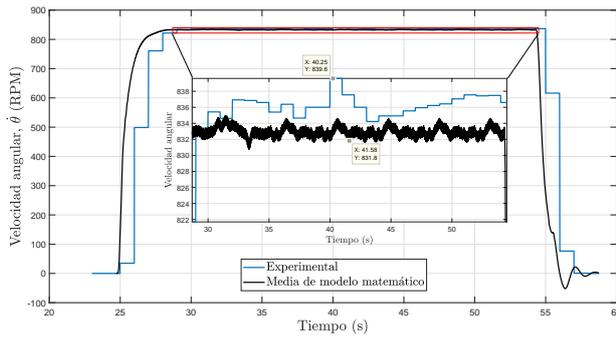
0.56628 ms.

Dentro de las capacidades del modelado matemático, la Figura 4.12 muestra una comparativa entre la cantidad de revoluciones realizada por el modelado del motor y el prototipo experimental. Las revoluciones calculadas por el modelo matemático son muy cercanas a las 410 revoluciones contadas por el encoder y solo se presenta una diferencia de media revolución entre el modelo matemático y la prueba experimental.

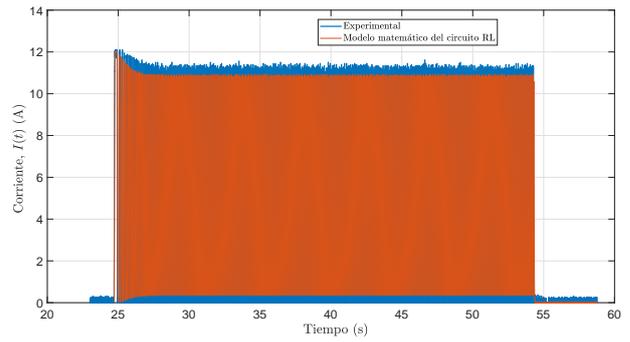
En la Figura 4.13a, se muestra una comparativa entre la velocidad angular del prototipo experimental del MRM y la media de la velocidad angular del modelado matemático ( $\bar{\theta}$ ). Para obtener la dinámica  $\bar{\theta}$  se utiliza un filtro promediador dado por la ecuación (4.2) [Smith, 2003]. Se observa que la velocidad determinada por el modelo matemático se muestra en un rango aceptable de operación mostrando una pequeña diferencia de 5 a 9 RPM en comparación a la velocidad del prototipo experimental. Esta diferencia está relacionada con el comportamiento de la corriente en la Figura 4.13b.

$$\bar{\theta}(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \dot{\theta}(k+m). \quad (4.2)$$

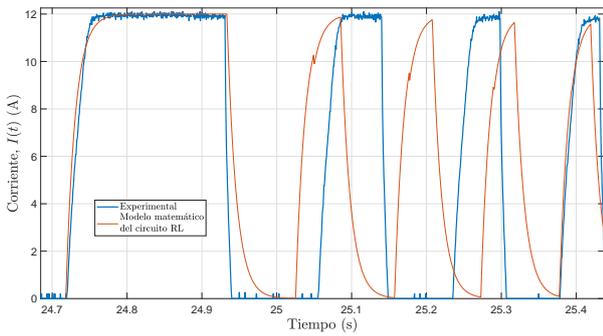
En la Figura 4.13b, se muestra una comparación de la corriente del circuito RL entre el prototipo experimental y el modelo matemático presentando una diferencia de entre 0.5 A en los picos de la corriente almacenada por el solenoide a lo largo de toda la operación del motor. La Figura 4.13c muestra un acercamiento para apreciar mejor el comportamiento de la corriente donde se observa como el modelo matemático puede seguir la dinámica de la corriente experimental en los momentos exactos cuando el motor comienza a operar. Dado que el modelo matemático del circuito RL es lineal, se observa durante la prueba del motor cómo el modelo matemático comienza a desfasarse con respecto a la corriente experimental y esta converge cíclicamente cada tres revoluciones.



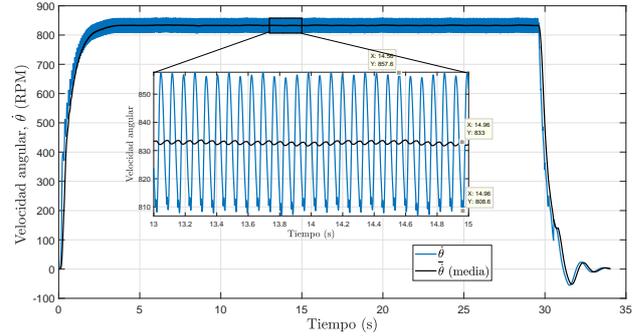
(a) Comparación de Velocidad angular experimental y del modelo matemático.



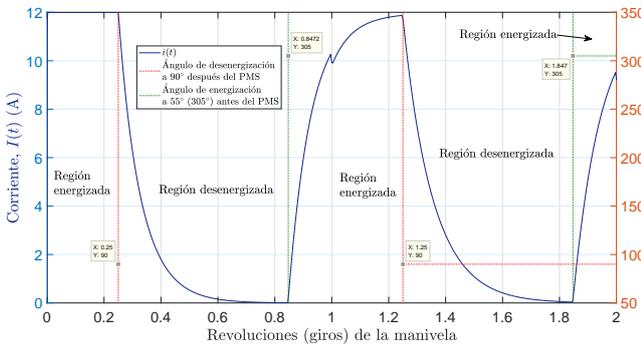
(b) Comparación de comportamiento de corriente experimental y modelo matemático del circuito RL.



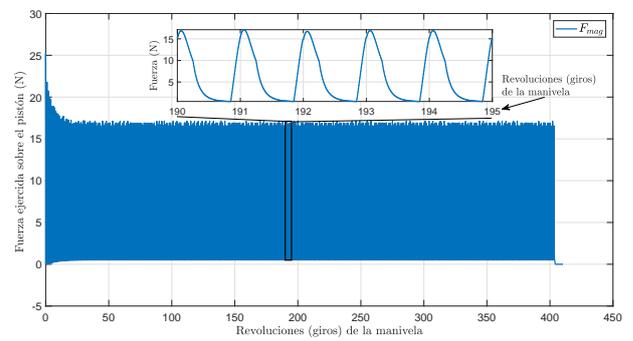
(c) Acercamiento en una sección de comparación de la Figura 4.13b.



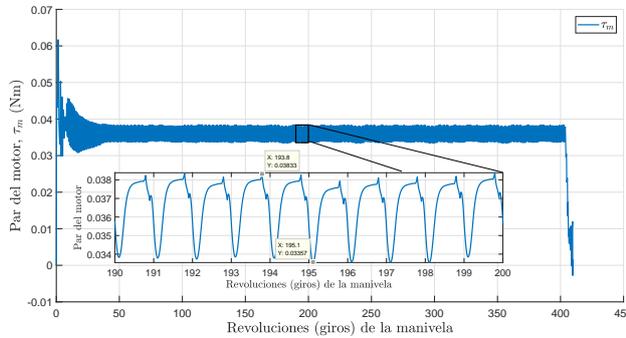
(d) Velocidad del modelo matemático y modelo promediado.



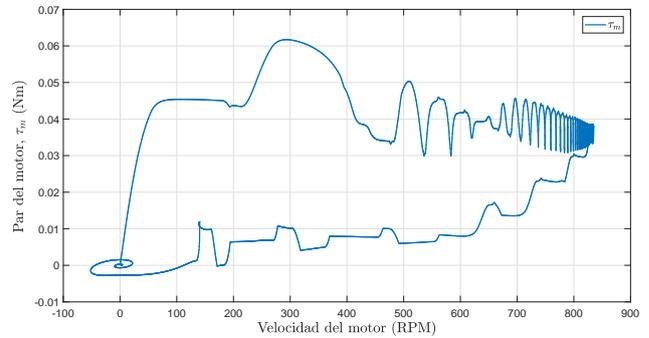
(e) Funcionamiento de los ángulos de energización en relación con el modelo del circuito RL.



(f) Dinámica de la fuerza magnética.



(g) Par del motor.



(h) Par del motor en relación a la velocidad del motor.

Figura 4.13. Comparativa principal de operación entre el prototipo experimental y el modelo matemático.

Con el fin de conocer toda la dinámica de la velocidad que no puede mostrar la adquisición de datos de la tarjeta myRio, la Figura 4.13d muestra la diferencia entre la velocidad del filtro promediador y el modelo dinámico del MRM. Considerando el modelo promediado como referencia, el zoom muestra que el modelo presenta cambios de aproximadamente 25 RPM. Estas oscilaciones muestran cómo se comporta el motor al funcionar en un ciclo de 2 tiempos con campos magnéticos efectuándose solamente la repulsión magnética entre el electroimán y el imán de neodimio.

La Figura 4.13e, ilustra la dinámica del modelo de corriente del circuito RL y cómo se comporta ante las regiones de carga y descarga que representan los ángulos de energización. Cuando  $\theta$  se encuentra en  $305^\circ$  ( $55^\circ$  antes del TDC), el electroimán comienza a energizarse y en  $90^\circ$  después del TDC comienza a desenergizarse. Este proceso se repite cíclicamente en cada revolución y está relacionado con la fuerza magnética que se muestra en la Figura 4.13f. La fuerza magnética comienza en 25 N cuando el motor comienza a funcionar, y cuando la velocidad del motor alcanza un estado estacionario, la fuerza de repulsión magnética se reduce entre 17 N y se repite cíclicamente.

Las Figuras 4.13g y 4.13h, muestran el comportamiento del par en relación a las revoluciones realizadas por el cigüeñal y las RPM del motor del modelo matemático cuando no hay una carga. Estas figuras nos permiten conocer si el motor está presentando algún tipo de cambio en el par donde, se podría decir, que se estuviera frenando. La Figura 4.13h es utilizada como referencia para poder corroborar si se cumple el comportamiento dinámico del Par-Velocidad de los MCI que se presentan en la literatura, como base utilizamos el libro de [Crolla and Mashadi, 2011].

Otras de las capacidades del modelado matemático es el poder mostrar cómo se está comportando el efecto del tiempo de carga de la corriente del circuito RL en relación a la posición del imán del neodimio que es ilustrado en la Figura 4.14. En esta gráfica se muestran las regiones de los tiempos de carga de  $\tau$  del circuito RL, donde se cumple la condición de tener  $\tau_1$  exactamente en el PMS.

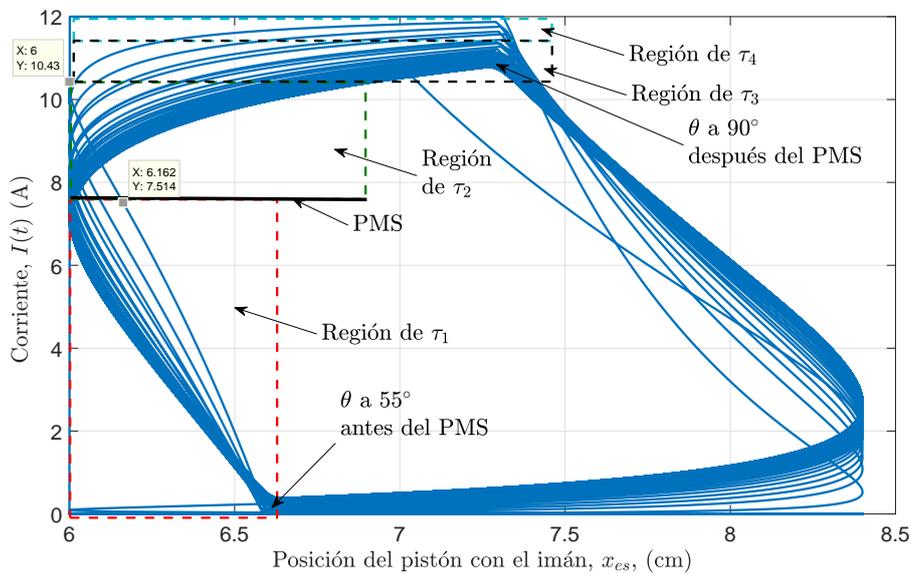


Figura 4.14. Operación de la corriente relación posición lineal del pistón (P.V. del solenoide).

La Figura 4.14 se encuentra relacionado con la velocidad del motor mostrado en la Figura 4.13a y el comportamiento de la fuerza magnética de la Figura 4.13f. Tomando en cuenta estas tres figuras, se observa que cuando el motor empieza a operar y se activan los ángulos de energización de  $55^\circ$  antes

del PMS y apagado en 90° después del PMS, la corriente llega a un valor 12 A cumpliendo la carga máxima del electroimán. Conforme empieza a ganar velocidad el motor, la cantidad de corriente que puede almacenar el electroimán se reduce pasando de  $\tau_4$  a  $\tau_3$  cuando el motor presenta una velocidad casi constante. Esto nos indica que la mayor fuerza de repulsión magnética se está generando entre la región de  $\tau_2$  y  $\tau_3$ . Si se toma en consideración esa diferencia de 0.5 A que hay entre la corriente experimental y la corriente del modelo matemático de la Figura 4.13b, se puede afirmar que el electroimán estaría operando en la región de  $\tau_4$  a 11.4 A generando una fuerza cercana a 24 N.

También la Figura 4.13b muestra como la corriente experimental inicia en 12 A y esta se reduce a 11.5 A pico y se repite de manera cíclica al aumentar la velocidad del motor, indicando que el electroimán le da tiempo de descargarse y no muestra que haya una saturación en el solenoide, en caso de que se presentara una saturación, el circuito RL presentaría una reducción de su almacenamiento de corriente entre 10 % o el 20 %.

Para obtener el *valor de ajuste* (FIT) del modelo matemático con la prueba experimental, utilizamos la ecuación (4.5) iniciando por la media del error cuadrático (RMSE) y la media normal del error cuadrático (NRMSE) de las ecuaciones (4.3) y (4.4):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{exp} - \bar{\theta})^2}, \quad (4.3)$$

$$NRMSE = \frac{RMSE}{\text{máx}(y_{exp}) - \text{mín}(y_{exp})}, \quad (4.4)$$

$$FIT = 100 \% (1 - NRSME), \quad (4.5)$$

donde  $y_{exp}$  representa la velocidad experimental del motor. Para comparar el ajuste del modelo matemático del MRM propuesto con los datos experimentales, los valores de NRMSE deben ser cercanos a cero, lo que indicará la aceptabilidad del modelo propuesto y la capacidad para representar la dinámica del motor experimental. Calculando el NRMSE y utilizando (4.5), el modelo matemático muestra un “FIT de 82.5560 %”, indicando un valor aceptable donde el modelo puede representar el estado transitorio y el estado estacionario de la velocidad del motor experimental.

En la Figura 4.13a, se observa que existe un desfase de señal entre la velocidad del motor experimental y el modelo matemático. Este desfase se genera debido a la operación de arranque del motor, ya que todo el proceso se basa en el momento de energización de la corriente que se muestra en la Figura 4.13c y los tiempos de muestreo son diferentes respecto a la prueba experimental y el modelo matemático en la velocidad del motor.

La Tabla 4.2 muestra los resultados de ajuste obtenidos del modelo matemático variando los ángulos de energización y sus respectivos valores de fricción. La Tabla 4.2 muestra siete columnas; la primera columna indica el número de prueba realizada; la segunda columna muestra el valor de la fricción  $\mu_1$  utilizada para cada prueba; la tercera columna muestra el ángulo de energización para encender el electroimán en cada prueba; la cuarta columna muestra el ángulo de energización para apagar el electroimán en cada prueba; la quinta y sexta columna indican las velocidades del motor obtenidas del prototipo experimental y del modelo matemático en cada prueba; y la séptima columna muestra el FIT del modelo matemático a partir de cada prueba realizada.

Tabla 4.2. Fricciones, ángulos de encendido y apagado, velocidades angulares experimentales y promediadas del modelo y FIT de las pruebas experimentales.

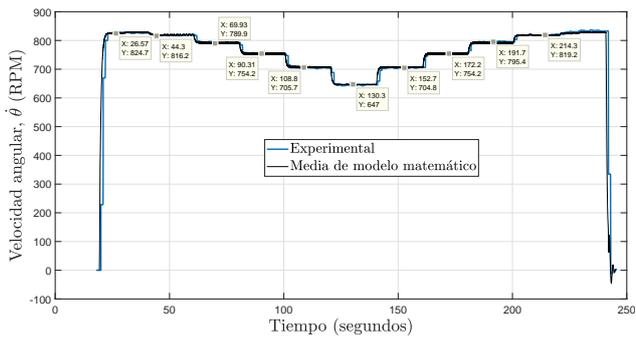
Prueba	Fricción $\mu_1$ (N·m·s/rad)	Ángulo de encendido	Ángulo de apagado	Velocidad experimental (RPM)	Velocidad de modelo promediado (RPM)	FIT
1	0.0004195	55° antes del PMS	90° después del PMS	entre 840 y 835	entre 835 y 831	82.55 %
2	0.0004275	45° antes del PMS	90° después del PMS	entre 836 y 832	entre 834.4 y 833.1	84.43 %
3	0.0004495	35° antes del PMS	90° después del PMS	entre 809 y 806.5	entre 806.5 y 804	84.57 %
4	0.0004725	25° antes del PMS	90° después del PMS	entre 770.5 y 766.5	entre 767.2 y 763.5	83.72 %
5	0.0004965	15° antes del PMS	90° después del PMS	entre 720.2 y 716	entre 716 y 712	75.70 %
6	0.0005385	5° antes del PMS	90° después del PMS	entre 650.6 y 644	entre 647.2 y 646	84.00 %
7	0.0002935	35° antes del PMS	45° después del PMS	entre 519 y 508	entre 517 y 509	74.98 %
8	0.0003205	25° antes del PMS	45° después del PMS	entre 508.8 y 491.7	entre 496.6 y 489.5	83.72 %
9	0.0003515	15° antes del PMS	45° después del PMS	entre 456 y 446.3	entre 455.3 y 448.9	77.07 %
10	0.0003945	5° antes del PMS	45° después del PMS	entre 390.1 y 381.1	entre 395 y 390.1	81.85 %
11	0.0002045	5° después del PMS	45° después del PMS	entre 302 y 292.7	entre 331 y 263	37.23 %
12	0.0002245	15° después del PMS	45° después del PMS	entre 201 y 194.1	entre 272.9 y 233.4	16.75 %
13	Pruebas 1 a 6 y 6 a 1	Pruebas 1 a 6 y 6 a 1	Pruebas 1 a 6 y 6 a 1	-	-	91.19 %
14	Pruebas 1 a 6 en orden variado	Pruebas 1 a 6 en orden variado	Pruebas 1 a 6	-	-	78.75 %
15	Pruebas 6 a 1 en orden variado	Pruebas 6 a 1 en orden variado	Pruebas 1 a 6	-	-	85.79 %

De las quince pruebas mostradas en la Tabla 4.2, las primeras doce utilizaron diferentes ángulos de encendido y dos ángulos diferentes de apagado. La prueba 13 utiliza los ángulos de encendido de las pruebas 1 a 6 en una secuencia escalonada, y las pruebas 14 y 15 utilizan los ángulos de encendido y las fricciones de las pruebas 1 a 6 en una secuencia mixta.

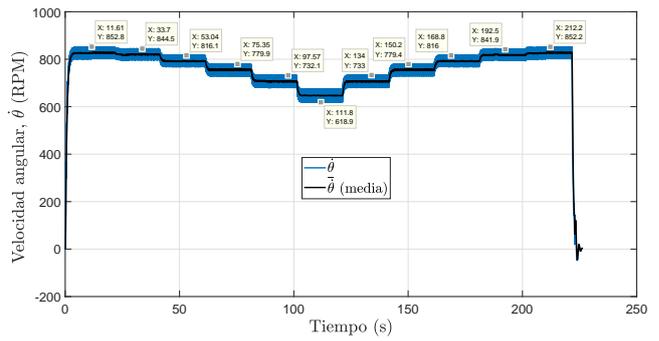
De las pruebas 1 a 12, la fricción “ $\mu_1$ ” aumenta a medida que se reduce la velocidad del motor. Los ángulos de energización indican que el motor alcanza su velocidad más alta cuando se energiza a 55° antes de PMS y se desenergiza a 90° después del PMS. El modelo matemático muestra un buen ajuste para todas las pruebas excepto para las pruebas 11 y 12, que muestra que no puede seguir la velocidad experimental del motor, lo que indica que el modelo matemático no puede reproducir velocidades bajas.

La Figura 4.15 compara la velocidad del modelo matemático con la velocidad del motor experimental de las pruebas 13 a 15. El modelo matemático puede reproducir toda la dinámica del motor de estas tres pruebas, mostrando una gran capacidad de ajuste con un valor medio del 85.2452 % cuando se producen variaciones del ángulo de energización.

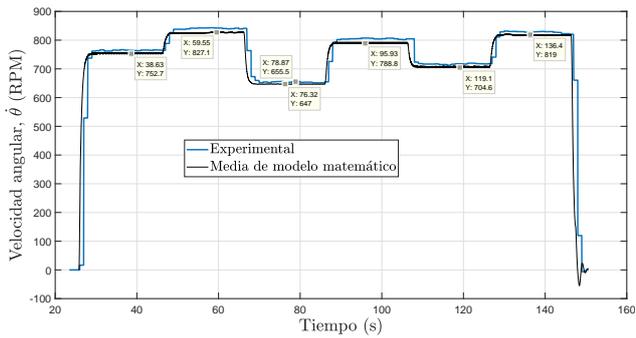
Para las simulaciones del sistema se utiliza una fricción generalizada que es representada por  $\mu_1$  y  $\mu_2$  con el fin de simplificar el sistema y comparar el modelado y las pruebas experimentales debido a que la formulación de Euler-Lagrange genera modelos con un diseño ideal.



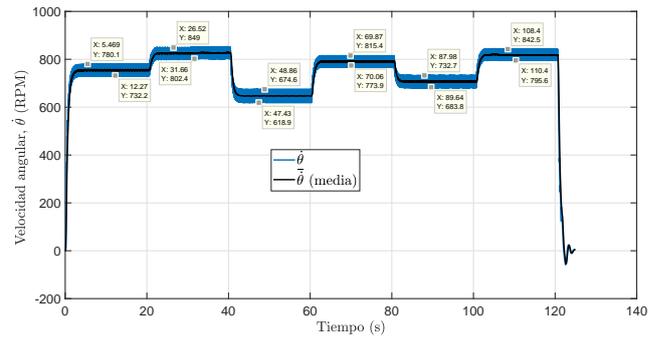
(a) Comparación de velocidad experimental y del modelo promediado Prueba 13.



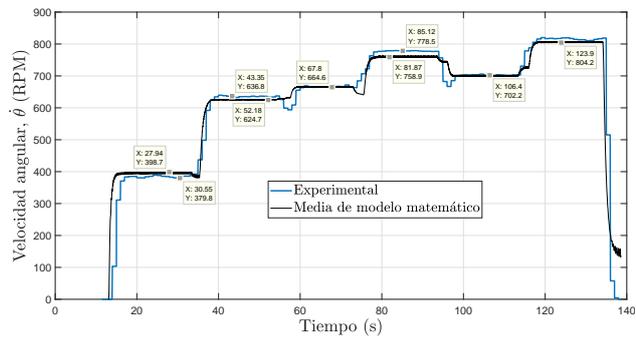
(b) Velocidad del modelo matemático y modelo promediado Prueba 13.



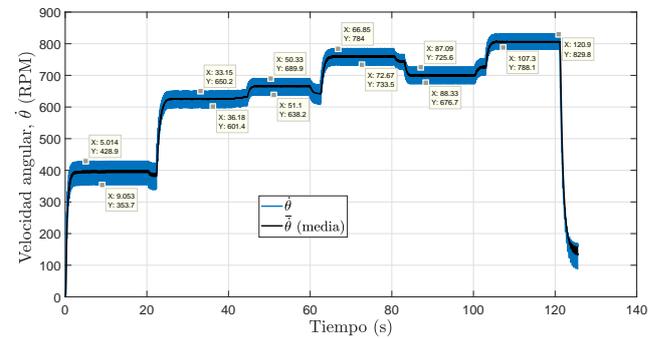
(c) Comparación de velocidad experimental y del modelo promediado Prueba 14.



(d) Velocidad del modelo matemático y modelo promediado Prueba 14.



(e) Comparación de velocidad experimental y del modelo promediado Prueba 15.



(f) Velocidad del modelo matemático y modelo promediado Prueba 15.

Figura 4.15. Comparativa principal de operación entre el prototipo experimental y el modelo matemático de las pruebas 13, 14 y 15.

Los valores utilizados para  $\mu_1$  y  $\mu_2$  fueron calculados de manera heurística. Se definieron rangos con valores entre 0.0001001 a 0.01 Nms/rad y se estuvieron ajustando los valores por ensayo y error hasta poder llegar a las velocidades obtenidas en la prueba experimental mostradas en la Tabla 4.2. Se observaron variaciones de velocidad del motor experimental durante las quince pruebas. Esta variación provocaba que el motor utilizara más corriente para operar correctamente afectando a la dinámica del circuito RL y haciendo que el motor perdiera velocidad. Se concluyó que la fricción del motor afecta a todas las operaciones del prototipo MRE. Tomando en consideración tal efecto en el modelo, el valor de la fricción en el modelo matemático toma mucha importancia porque aumentando el valor de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  puede generar un aumento en la cantidad de corriente necesaria al sistema, resultando en el aumento del valor de la fuerza magnética, y afectando los tiempos de carga y descarga del circuito RL en relación a la posición angular  $\theta$ .

#### 4.4. Sumario

Se mostró información sobre las etapas realizadas para el diseño, construcción y programación del MRM. Además, se muestra cómo se encuentra constituido el prototipo experimental y la forma en la que se encuentra programado el sistema de monitoreo y control basado en el Software de LabVIEW.

Dentro del capítulo se mostraron los procedimientos para poder validar el modelo matemático del MRM. Esto se dividió en dos secciones: Demostración de fuerza magnética y validación del modelo matemático con las pruebas experimentales. Primero, se inició con demostrar de manera experimental el valor de la fuerza magnética que se genera entre el electroimán y el imán de neodimio para poder validar la ecuación (3.36) utilizando una estructura de pruebas de fuerza ilustrado en la Figura 4.8. Una vez demostrado el valor de la fuerza magnética, se determinaron los ángulos de operación tomando en cuenta el tiempo de carga  $\tau$  del circuito RL utilizado para el MRM indicando que debe activarse el electroimán en  $55^\circ$  antes del PMS.

Una vez obtenido la validación de la fuerza magnética y el ángulo de energización base, se procedió con la segunda sección para validar el modelo matemático. Para validar, se realizaron 15 pruebas, donde las primeras 12 pruebas utilizan variaciones de  $10^\circ$  en los ángulos de energización y utilizan 2 ángulos de apagado que son  $45^\circ$  y  $90^\circ$  después del PMS y las últimas pruebas utilizan los ángulos de energización de las primeras 6 pruebas. Para la validación se tomó la velocidad angular como variable principal para comparar los comportamientos dinámicos del modelo matemático y el prototipo experimental. Además, también se mostró como el valor de la fricción afecta al modelo matemático.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados del controlador utilizado en el prototipo experimental del MRM utilizando como variable controlada el ángulo de energización del electroimán. Además, también se muestra el par y la eficiencia energética del MRM.

---

# Capítulo 5

## El controlador del MRM

La aplicación de controladores en la gran mayoría de los MCI significa en regular la entrada de combustible y aire, así como la sincronización de la chispa para lograr el rendimiento deseado en forma de par o potencia de salida. Hasta finales de la década de 1960, el control del par de salida del motor y las RPM se lograba mediante alguna combinación de sistemas mecánicos, neumáticos o hidráulicos. Después, en la década de 1970, se introdujeron los sistemas de control electrónico [Isermann, 2014].

En el caso del MRM, al ser sustituido el uso de combustible fósil por campos magnéticos, el motor depende totalmente de la intensidad de la fuerza de repulsión magnética entre el electroimán y el imán de neodimio y de la determinación del momento para energizar el electroimán. Del cual se presentan dos posibles vertientes en donde aplicar la ley de control, sea en el circuito RL o en el ángulo de energización o inclusive, en ambas secciones como se ilustra en la Figura 5.1.

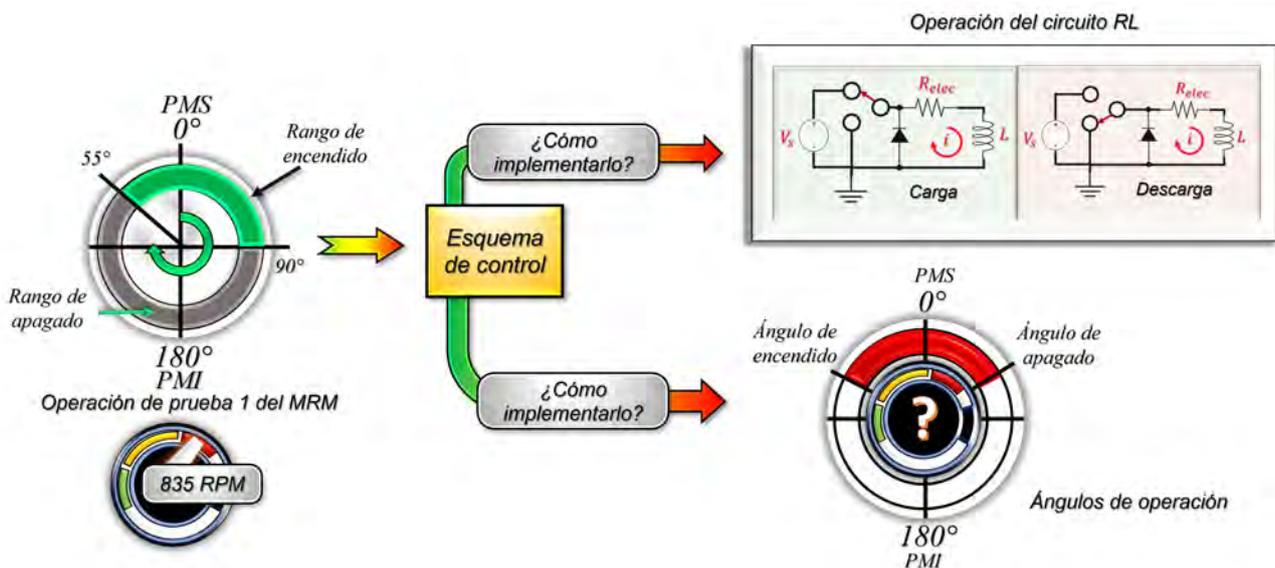


Figura 5.1. Posibilidades de aplicación de una ley de control en el MRM.

En este capítulo se presenta el desarrollo del controlador utilizado para el MRM junto con su aplicación experimental y los valores de par y eficiencia energética obtenidos de las pruebas experimentales.

### 5.1. Planteamiento del problema para el control del MRM

En el capítulo 4 se presentaron los ángulos máximos de operación que puede tener el motor antes que la fuerza de repulsión magnética entre el electroimán y el imán de neodimio sean afectadas y reduzcan la velocidad del motor antes de que llegue al PMS. En la Sección 3.1 se presentaron diferentes técnicas de control utilizados en sistemas magnéticos donde se indicaba que el control PID es el más utilizado, pero para casos donde exista dinámica en la parte magnética, controladores tipo neuronales, MPC o no lineales eran recomendados.

Los resultados del capítulo 4 indican que un cambio en ángulo de energización es un factor sensible en el comportamiento del motor reduciendo o aumentado su velocidad al igual que puede provocar que el motor se detenga. Bajo la condición de que el voltaje alimentado al circuito RL y la capacidad de corriente de la fuente se mantienen constantes y que solo el ángulo de energización puede ser modificado, el controlador tiene que ser capaz de modificar el ángulo de energización de manera rápida y sin realizar un cambio muy brusco.

Primero se propuso el utilizar un controlador tipo PID donde sus resultados se muestran en el Anexo A.1, sin embargo, durante las pruebas se mostró que el controlador tiene la capacidad de poder ajustar el ángulo de energización de manera suave pero presenta oscilaciones para ajustar la velocidad del motor una vez empieza a trabajar, además, el controlador PID resulta ser demasiado lento para poder llegar a las velocidades deseadas. Por consiguiente, se tuvo que replantear como analizar el nivel de error (Figura 5.2) para utilizarlo en otro tipo de controlador.

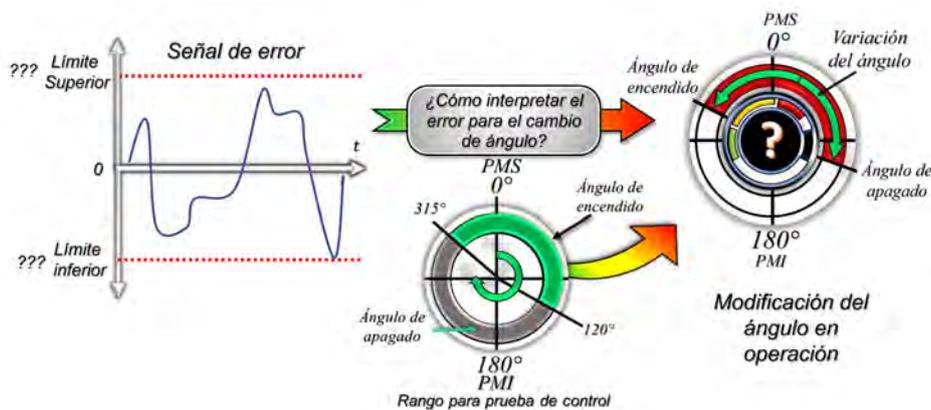


Figura 5.2. Interpretación del error.

Con los resultados obtenidos del controlador PID, se optó por trabajar con controladores tipo inteligentes. La razón de dicha decisión se debe a tres factores:

- Capacidad de adaptación ante el cambio de referencia.
- Ajuste del ángulo de energización en caso de mala lectura por el sensor de posición angular, y
- Ajuste suave hacia la referencia deseada.

Para la aplicación de este controlador se decidió manipular el ángulo de encendido y dejar el ángulo de apagado con un valor constante de “120°” *pasando el PMS*. Con dichas condiciones establecidas, se propone utilizar un controlador neuronal tipo especializado con estructura de *modelo neuronal inverso* [Wilamowski and Irwin, 2018], donde actualizará sus pesos sinápticos cada vez que las muestras de entrada sean actualizadas. A continuación, se presenta el marco teórico para formular el controlador neuronal.

## 5.2. La neurona artificial

Una red neuronal artificial (RNA), también llamadas sistemas neuronales artificiales, computadoras neuronales o modelos conexionistas son intentos de imitar (simular) al menos la estructura y funciones de sistemas nerviosos y cerebros de criaturas vivas. De forma general se puede decir que una RNA está diseñada para el procesamiento de información o señales.

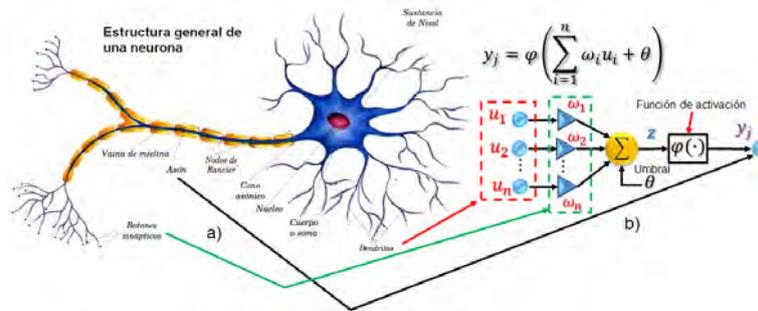


Figura 5.3. a) Neurona Biológica b) Neurona artificial.

Una neurona es la unidad fundamental para la operación de una red neuronal donde sus tres componentes principales son: *las dendritas, el cuerpo de la célula o soma, y el axón*. De acuerdo a [Cichocki and Unbehauen, 1993, Poznyak et al., 2001, Sarangapani, 2006] los componentes principales de una neurona biológica trabajan de la siguiente manera: el axón se utiliza para enviar impulsos a otras células nerviosas, cuando el axón está cerca de sus células destino, se divide en muchas ramificaciones que forman sinapsis con las dendritas de otras células. La sinapsis es un pequeño espacio donde se intercambian impulsos entre neuronas. En la Figura 5.3, se observa cómo se relaciona una neurona artificial con la neurona biológica.

Existen distintos modelos de neuronas con arquitecturas simples hasta arquitecturas complejas, los modelos de las neuronas artificiales representan una aproximación al comportamiento de las neuronas biológicas, esta representación es algo difícil de lograr, ya que no se tiene un conocimiento completo sobre el funcionamiento del sistema nervioso. A continuación, se presenta información de algunos modelos neuronales.

### 5.2.1. Modelo neuronal básico (formal) - Modelo McCulloch-Pitts

La neurona artificial básica más utilizada lleva la estructura de la neurona McCulloch-Pitts, dicha estructura se muestra en la Figura 5.3 b). La neurona puede ser modelada como un equipo de entradas múltiples no lineales interconectadas con  $\omega_i$ , llamados pesos sinápticos. El cuerpo celular (soma) es representado por una limitante no lineal o función de activación  $\varphi(z)$ . De la cual la neurona suma las “ $n$  entradas” que pasan por los pesos sinápticos y el resultado pasa a través de la no linealidad de acuerdo a la ecuación (5.1)

$$y_j = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \omega_i u_i + \theta\right), \quad (5.1)$$

donde  $\varphi$  es la función de activación,  $\theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) es el umbral,  $\omega_i$  son los pesos sinápticos,  $u_i$  son las entradas ( $i = .1, 2, \dots, n$ ),  $n$  es el número de entradas,  $y_j$  representa la salida y  $j$  representa la señal de la  $j$ -ésima neurona [Cichocki and Unbehauen, 1993].

### 5.2.2. Modelo neuronal discreto

En este tipo de modelos, las señales de entrada y salida son adquiridas de manera síncrona con una frecuencia de muestreo constante, por lo tanto, sus valores son calculados en el mismo instante de tiempo discreto  $t_k = k\tau = k/f_c$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ); donde  $\tau$  es el periodo de muestreo y  $f_c$  es la frecuencia de muestreo. La neurona artificial en tiempo discreto mostrada en la Figura 5.4 está descrita por la ecuación (5.2)

$$x_j(k\tau + \tau) = \varphi \left( \sum_{i=1}^n \omega_{ji} x_i(k\tau) + \theta_j \right),$$

donde

$$x_j(k\tau) = x_j(k),$$

entonces

$$x_j(k+1) = \varphi \left( \sum_{i=1}^n \omega_{ji} x_i(k) + \theta_j \right), \quad (5.2)$$

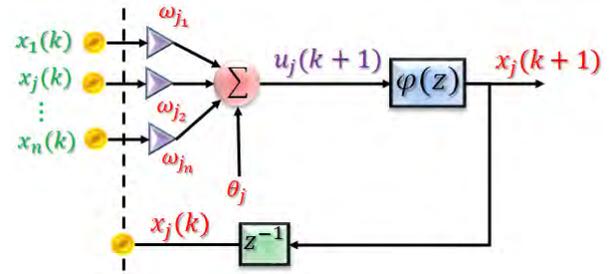


Figura 5.4. Estructura de modelo neuronal discreto.

donde  $n$  representa el número de neuronas,  $z^{-1}$  es un retardo,  $x_j$  el número de entradas,  $\varphi(\cdot)$  representa la función de activación no lineal la cual es comúnmente la función sigmoidea.

### 5.2.3. Capacidad de aprendizaje - El modelo perceptrón

Unos de los aspectos más importantes de las neuronas biológicas y artificiales es la capacidad de aprendizaje donde los pesos sinápticos se modifican de acuerdo al algoritmo de adaptación.

La Figura 5.5 presenta una neurona artificial tipo **perceptrón**, donde su estructura es similar a la neurona *Adaline*. El primer algoritmo de aprendizaje del perceptrón fue desarrollado por *Frank Rosenblatt* [Cichocki and Unbehauen, 1993], en donde el algoritmo de aprendizaje actual es el algoritmo de retropropagación descrito por la ecuación (5.3)

$$\omega_{ji}(k+1) = \omega_{ji}(k) + \eta \hat{e}_j(k) \varphi'(u_j(k)) x_j(k), \quad (5.3)$$

$\eta$  regula la velocidad de convergencia y la estabilidad del proceso iterativo de adaptación. Este algoritmo se obtiene definiendo una función de desempeño dada por

$$E = \frac{1}{2} \hat{e}_j^2(k) = \frac{1}{2} (\hat{d}_j(k) - y_j(k))^2, \quad (5.4)$$

donde

$$y_j = \varphi(u_j(k)), \quad u_j(k) = \sum_{i=0}^n \omega_{ji}(k) x_i(k).$$

La minimización del algoritmo de gradiente descendente para los pesos sinápticos,  $\omega_{ji}$ , queda expresado en la ecuación (5.5)

$$\omega_{ji}(k+1) = \omega_{ji}(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial \omega_{ji}(k)}, \quad (5.5)$$

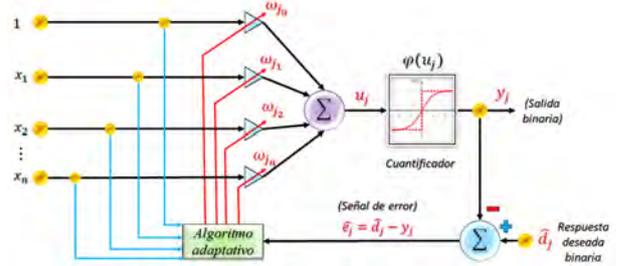


Figura 5.5. Modelo neuronal tipo perceptrón.

donde

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{j_i}(k)} = \frac{\partial E}{\partial \hat{e}_j(k)} \frac{\partial \hat{e}_j(k)}{\partial y_j(k)} \frac{\partial y_j(k)}{\partial u_j(k)} \frac{\partial u_j(k)}{\partial \omega_{j_i}(k)}, \quad (5.6)$$

resolviendo cada parte derivativa

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \hat{e}_j(k)} &= \hat{e}_j(k), & \frac{\partial \hat{e}_j(k)}{\partial y_j(k)} &= -1, \\ \frac{\partial y_j(k)}{\partial u_j(k)} &= \varphi'(u_j(k)), & \frac{\partial u_j(k)}{\partial \omega_{j_i}(k)} &= x_i(k), \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{j_i}(k)} = -\hat{e}_j(k) \varphi'(u_j(k)) x_i(k). \quad (5.7)$$

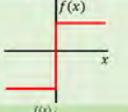
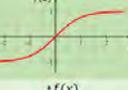
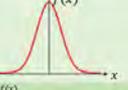
	Función	Rango	Gráfica
Identidad	$y = x$	$[-\infty, \infty+]$	
Escalón	$y = \text{sign}(x)$ $y = H(x)$	$\{-1, +1\}$ $\{0, +1\}$	
Sigmoide	$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ $y = \text{tgh}(x)$	$[0, +1]$ $[-1, +1]$	
Gaussiana	$y = Ae^{-Bx^2}$	$[0, +1]$	
Sinusoidal	$y = A \text{sen}(\omega x + \varphi)$	$[-1, +1]$	

Figura 5.6. Funciones de activación tradicionales.

Con lo realizado, se obtiene el algoritmo de retropropagación general, aplicado a la neurona artificial tipo perceptrón donde al sustituir la ecuación (5.7) en la ecuación (5.5) se obtiene la expresión (5.3). Existen diferentes tipos de funciones de activación, entre las más comunes se pueden observar en la Figura 5.6.

### 5.2.4. Arquitecturas y clasificación de redes neuronales

Para que las neuronas artificiales puedan alcanzar su verdadero potencial, estas deben conectarse a otras neuronas artificiales [Cichocki and Unbehauen, 1993], [Poznyak et al., 2001], formando distintas arquitecturas de RNA. Las arquitecturas de las redes neuronales están determinadas por la manera en que se interconectan entre si las neuronas. Existen distintas arquitecturas de redes neuronales, nadie sabe exactamente cuántas existen en la actualidad, ya que se crean nuevas arquitecturas o se modifican las existentes de acuerdo a la aplicación requerida. En la Figura 5.7, se presentan 3 diferentes tipos de arquitecturas de RNA que son: *redes neuronales estáticas*, *redes neuronales recurrentes* y *redes neuronales celulares*.

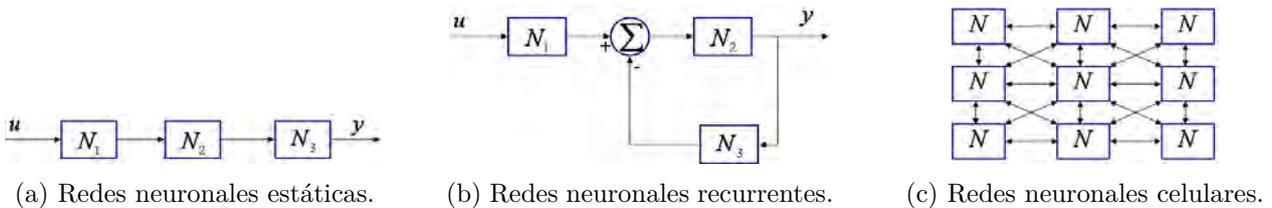


Figure 5.7. Arquitecturas de redes neuronales.

En las *redes neuronales estáticas* (Figura 5.7a), las conexiones entre las neuronas están en línea directa, lo cual no forman lazos de retroalimentación. En este tipo de redes neuronales, usualmente se produce una respuesta a una entrada rápidamente. Muchas de las arquitecturas neuronales estáticas pueden ser entrenadas utilizando una amplia clase de métodos numéricos convencionales, además, de algoritmos inventados por investigadores de redes neuronales.

Las *redes neuronales recurrentes* (Figura 5.7b), es un tipo de red neuronal artificial que utiliza datos secuenciales o datos de series temporales donde su arquitectura se basa en retroalimentar la información entre las neuronas. En algunas redes neuronales recurrentes, cada entrada se presenta en un tiempo, la red neuronal debe hacer iteraciones durante un determinado tiempo antes de producir

una respuesta. Las redes neuronales recurrentes son usualmente más difíciles de entrenar que las redes neuronales estáticas.

Las *redes neuronales celulares* (Figura 5.7c), consisten en la conexión de varias neuronas especialmente acomodadas llamadas células, donde cada célula está conectada solamente a las células más cercanas, sin embargo, una célula puede afectar a otra a la que no se encuentra conectada directamente, mediante la propagación de la señal durante la dinámica de la red neuronal celular. Existen diversas maneras de conectar redes neuronales celulares, las más comunes son: rectangular, triangular, hexagonal y rectangular cuadriculada.

Las aplicaciones de redes neuronales en sistemas de control se han vuelto cada vez más importantes. El procesamiento masivo paralelo, el mapeo no lineal y la habilidad de auto aprendizaje de las redes neuronales han sido factores de motivación para el desarrollo de sistemas de control inteligente. Existe una gran cantidad de formas de estructuras de controladores, de acuerdo con [Poznyak et al., 2001] las estructuras más utilizadas son las siguientes:

- *Control supervisado.*
- *Control directo inverso.*
- *Control por modelo de referencia.*
- *Control de modelo interno (IMC).*
- *Control predictivo y previsión.*
- *Especializado o control directo.*

### 5.3. Estructura del controlador neuronal del MRM

El diseñado del controlador está basado en una RNA inversa que utiliza una estructura de 3 capas con una señal trabajando de manera recurrente de forma externa. La Figura 5.8 muestra las señales que alimentan a la RNA propuesta, las cuales son: la salida del proceso ( $y(k)$ ), la salida de la RNA retroalimentada ( $u_{ne}(k)$ ) con sus respectivos retardos y la referencia ( $ref(k)$ ). La estructura de la RNA implementada en la planta se muestra en la Figura 5.9.

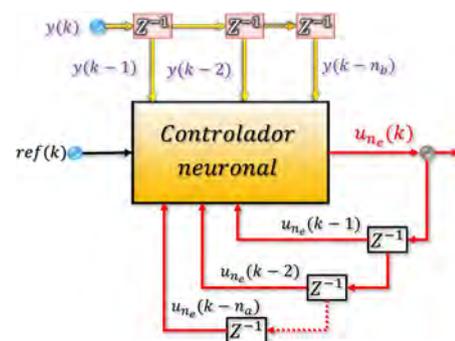


Figura 5.8. Conexión de señales del controlador neuronal.

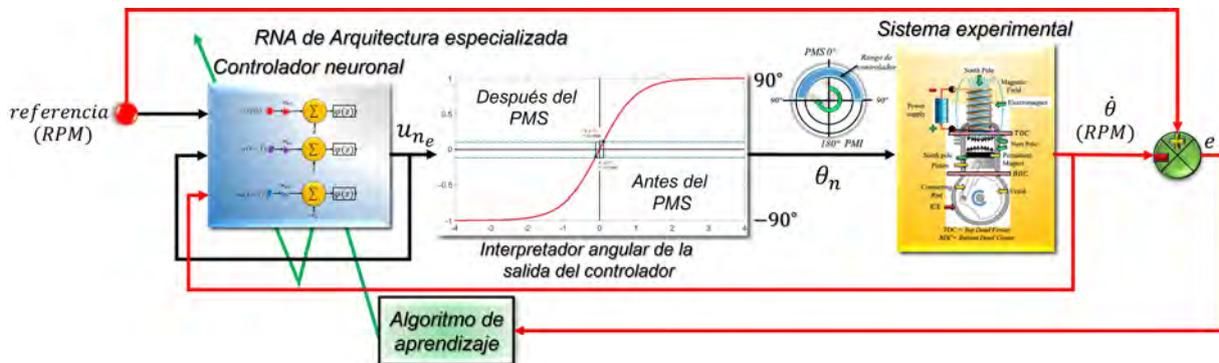


Figura 5.9. Propuesta de controlador con estructura tipo RNA.

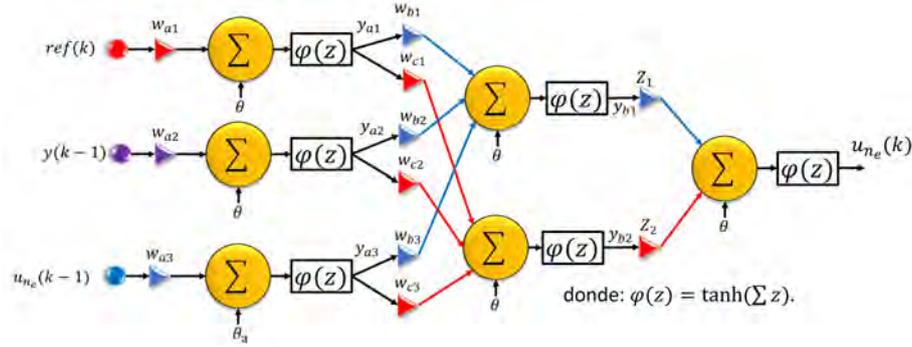


Figura 5.10. Estructura interna de la RNA utilizada como controlador.

En la Figura 5.10, se muestra la estructura de RNA tipo 3-2-1 utilizada como controlador que utiliza la *función de activación sigmoide* y su representación matemática de la RNA se muestra en la ecuación (5.8)

$$\begin{aligned}
 u_{ne}(k) = \tanh \left( Z_1 \tanh \left( w_{b1} \tanh (ref(k)w_{a1} + \theta) + w_{b2} \tanh (y(k-1)w_{a2} + \theta) + \right. \right. \\
 w_{b3} \tanh (u_{ne}(k-1)w_{a3} + \theta_a) + \theta) + \\
 \left. \left. Z_2 \tanh \left( w_{c1} \tanh (ref(k)w_{a1} + \theta) + w_{c2} \tanh (y(k-1)w_{a2} + \theta) + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. w_{c3} \tanh (u_{ne}(k-1)w_{a3} + \theta_a) + \theta) + \theta \right) \right). \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

Entonces, el algoritmo de aprendizaje, para el controlador neuronal recurrente de la ecuación (5.8), se rige por la siguiente función costo mostrada en la ecuación (5.9)

$$E(Z_1, Z_2, w_{a1}, w_{a2}, w_{a3}, w_{b1}, w_{b2}, w_{b3}, w_{c1}, w_{c2}, w_{c3}) = \frac{1}{2}e^2(k), \tag{5.9}$$

donde

$$e(k) = ref(k) - y(k). \tag{5.10}$$

Del cual, la minimización del algoritmo del gradiente descendente discreto para los pesos sinápticos de la Figura 5.10 queda representado de la ecuación (5.11) hasta (5.14)

$$Z_m(k+1) = Z_m(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial Z_m}, \tag{5.11} \qquad w_{bi}(k+1) = w_{bi}(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{bi}}, \tag{5.13}$$

$$w_{ai}(k+1) = w_{ai}(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{ai}}, \tag{5.12} \qquad w_{ci}(k+1) = w_{ci}(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{ci}}, \tag{5.14}$$

donde

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Las ecuaciones (5.8), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) y (5.14) están representadas en la Figura 4.6 para su aplicación directa en el prototipo experimental.

5.4. Pruebas del controlador neuronal

Para comprobar la capacidad del controlador se realizaron dos tipos de pruebas a la referencia del motor: *operación tipo rampa y cambios tipo escalón*.

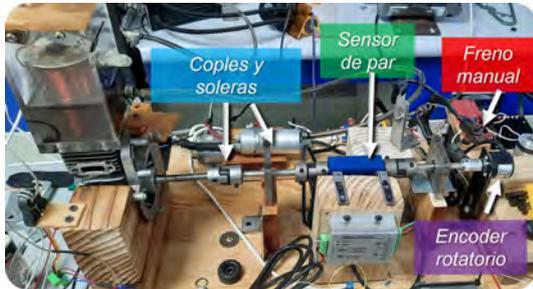


Figura 5.11. Prototipo experimental con sensor de par aplicado para las pruebas de par y controlador.

Condiciones de inicio de pruebas para el controlador:

*Encendido de actuador:*

45°(315°) antes del PMS.

*Apagado de actuador:*

120° después del PMS.

*Pesos sinápticos iniciales:*

Aleatorios en un rango de [-1,1].

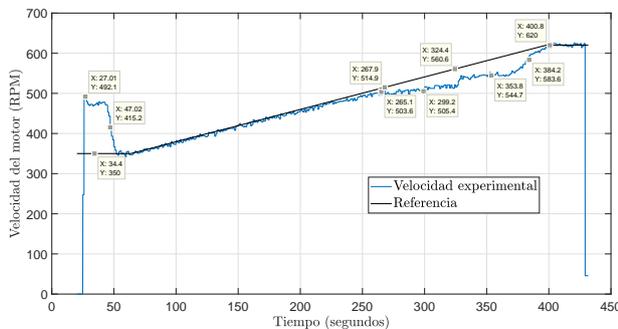
Umbrales:  $\theta_a = 0.5$  y  $\theta = 0$ .

*Velocidad de convergencia:*  $\eta = 0.0028962$ .

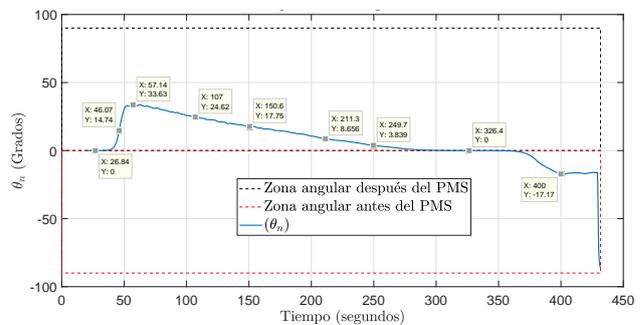
*Media de muestreo (Tarjeta myRio):*

0.56628 ms.

En la Figura 5.12a, se presenta la operación tipo rampa; al iniciar la prueba dejamos que el motor arranque y se activa el controlador llevándolo a una velocidad deseada inicial de 350 RPM el cual le toma 23 segundos en lograrlo; una vez llegada a la referencia se activa la rampa y observamos que el controlador tiene la capacidad de llevar al motor a lo largo de toda la prueba, sin embargo se observa como el motor no logra seguir la referencia en el tiempo de 300 a 400 segundos, pero una vez pasado los 400 segundos, el motor vuelve a seguir la referencia hasta llegar a las 620 RPM. En la Figura 5.12b, se refleja el ángulo de energización calculado por el controlador neuronal y se observa como el controlador tarda en poder salir del cálculo del ángulo cero y debido a este retraso en su cálculo es que se observa ese desfase en el tiempo de 300 a 400 segundos.



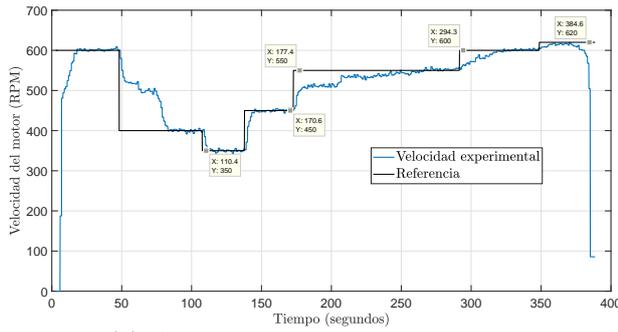
(a) Prueba de control tipo rampa.



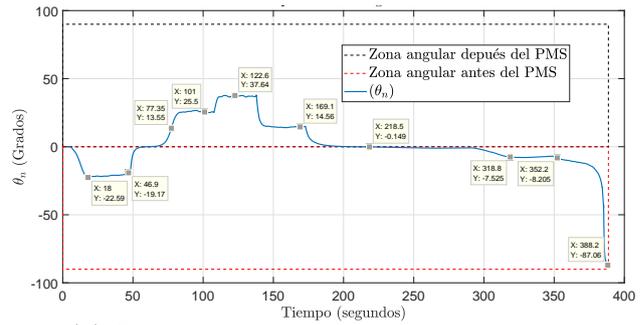
(b) Comportamiento del ángulo controlado.

Figura 5.12. Resultado de operación de controlador tipo neuronal aplicado en el prototipo experimental, prueba tipo rampa.

En la Figura 5.13a, se presenta la operación tipo escalón; al iniciar la prueba, el controlador es activado desde el inicio donde la referencia inicial es de 600 RPM y le toma 10 segundos en llegar al valor deseado una vez arrancado el motor. Después, se realiza un cambio a 400 RPM y se presenta la misma situación que en la prueba rampa, el controlador le toma un poco más de tiempo en poder llevar a la referencia deseada, sin embargo, en los siguientes cambios el controlador es veloz en seguir los escalos deseados y la Figura 5.13b se refleja el ángulo de energización calculado por el controlador neuronal.



(a) Prueba de control tipo escalón.



(b) Comportamiento del ángulo controlado.

Figura 5.13. Resultado de operación de controlador tipo neuronal aplicado en el prototipo experimental, prueba tipo escalón.

Observando los resultados de ambas pruebas, esto indica que el controlador neuronal tiene una gran capacidad de calcular el ángulo de energización para llevar al motor experimental al valor deseado, sin embargo, en las Figuras 5.12b y 5.13b se presenta un mismo comportamiento donde se observa que el ángulo de energización calculado por el controlador neuronal presenta una lentitud de cambio cuando se encuentra relativamente cerca del valor de cero grados que representa al PMS, este efecto se ve generado por la velocidad de convergencia  $\eta$ .

Al considerar un valor pequeño de  $\eta$ , la actualización del peso sináptico se vuelve lenta en ese rango angular de cero grados. Sin embargo, el valor definido de  $\eta$  es ideal para el ajuste suave del ángulo de energización debido a que el motor es muy sensible ante un cambio del ángulo de energización en donde si se realiza un cálculo veloz entonces el ángulo del controlador presentará cambios bruscos provocando que el motor no encuentre el ángulo ideal de energización y provoque que se detenga el motor magnético.

### 5.5. Pruebas de par del MRM

Para conocer el par del motor del motor y su eficiencia energética se utilizó un sensor de par como se ilustra en la Figura 5.11, en donde se usa un sistema de freno para meter una carga al prototipo experimental y poder conocer el par que puede generar el motor al tener conectado diferentes uniones en el eje. Estas uniones no están consideradas en el modelo matemático por el cual no se puede realizar una comparativa directa. La ecuaciones (5.15) a (5.21), son utilizadas para obtener la potencia eléctrica ( $P_{elec}$ ), la potencia mecánica ( $P_{mec}$ ), la media del par experimental ( $\bar{\tau}_{exp}$ ), la media de la velocidad experimental ( $\bar{\theta}_{exp}$ ) y la eficiencia del MRM experimental.

$$P_{elec} = VI, \quad (5.15)$$

$$\bar{\tau}_{exp}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tau_{exp}(k + m), \quad (5.16)$$

$$\bar{\theta}_{exp}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{\theta}_{exp}(k + m). \quad (5.17)$$

$$P_{mec} = \frac{2\pi\bar{\theta}_{exp}\bar{\tau}_{exp}}{60}, \quad (5.18)$$

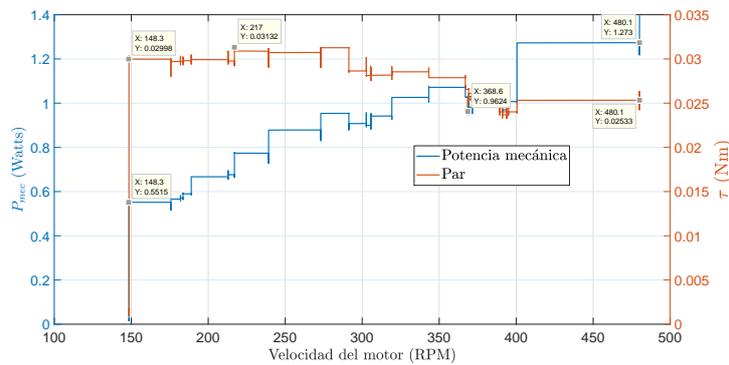
$$\bar{P}_{mec}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_{mec}(k + m), \quad (5.19)$$

$$\bar{P}_{elec}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_{elec}(k + m), \quad (5.20)$$

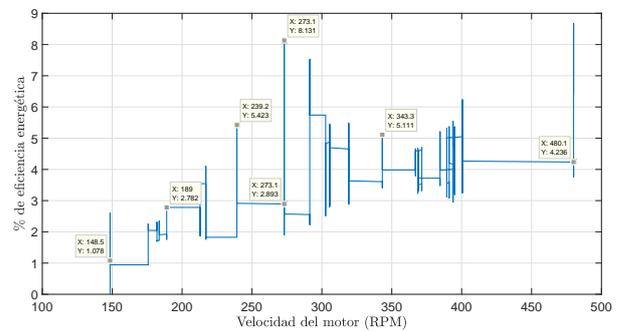
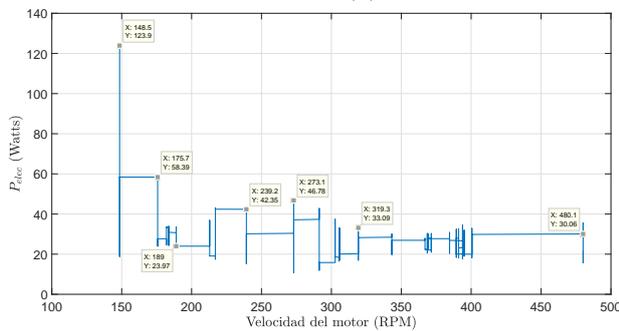
$$\%eficiencia = \frac{\bar{P}_{mec}}{\bar{P}_{elec}}. \quad (5.21)$$

En la Figura 5.14a, se muestra una comparativa entre el par y la potencia mecánica generada por el prototipo experimental en relación con su velocidad de operación. Cuando al motor se le aplica una carga su velocidad se reduce a 150 RPM, donde genera un par constante de 0.029 Nm mientras que su potencia mecánica ronda los 0.5 W y cuando se encuentra operando a una velocidad media de 470 RPM presenta un par de 0.025 Nm y una potencia mecánica 1.27 watts, indicando que a menor velocidad hay mayor par y a mayor velocidad se encuentra una mayor potencia mecánica cumpliendo las mismas características que un motor de combustión interna.

La potencia mecánica media de la Figura 5.14a es de 0.8817 W; la potencia eléctrica durante la prueba de carga se ilustra en la Figura 5.14c, donde el consumo medio que se obtuvo a lo largo de toda la prueba es de 26.4969 W y en la Figura 5.14b se muestra como fue el comportamiento de la eficiencia energética a lo largo de la prueba donde presenta una eficiencia media de 3.58 %.



(a) Comportamiento de par y potencia mecánica.



(b) Comportamiento de potencia eléctrica en el MRM. (c) Comportamiento de eficiencia energética del MRM.

Figura 5.14. Resultados de operación usando un filtro promediador del par, de la potencia y de la eficiencia del motor experimental con el sensor de par implementado.

## 5.6. Sumario

Se presentó información sobre como plantear el problema de control del MRM. Dentro del planteamiento se propuso utilizar un control tipo PID, sin embargo, los resultados mostrados en el Anexo A.1 indicaron no ser apropiados para poder manipular el ángulo de energización del MRM. Por consiguiente, se propuso utilizar un controlador tipo neuronal.

En el capítulo se presentaron conceptos, teorías y la formulación de redes neuronales artificiales. Con la información de las redes neuronales se desarrolló el controlador neuronal que utiliza la estructura de control directo basado en una RNA recurrente inversa de 3 capas tipo 3-2-1, donde uti-

---

liza como función de activación sigmoide y usa como algoritmo de aprendizaje el gradiente descendente.

En el capítulo se presentó los resultados del controlador neuronal propuesto utilizando dos tipos de referencia: tipo rampa y cambios tipo escalón. Los resultados indican que el controlador presenta gran capacidad de poder llevar al motor a la velocidad deseada. Sin embargo, cuando el controlador calcula el ángulo de  $\theta_n$  y se encuentra dentro de la zona de  $0^\circ$ , este presenta una tardanza para poder salir de esa zona y llevar el motor a la velocidad deseada. Este efecto se presenta debido al pequeño valor de  $\eta$  con el fin de evitar variaciones en el cálculo del ángulo de energización.

En el capítulo también se presentaron las pruebas realizadas para la obtención del par y de la eficiencia energética del MRM. Los resultados mostraron que al aplicar el sistema de freno en el prototipo experimental, el MRM mostró una par de constante de 0.029 Nm junto a una potencia mecánica de 0.5 W indicando que el motor no puede resistir cargas muy altas. Además, el prototipo experimental muestra una eficiencia energética media del 3.58 %.

En el siguiente capítulo se muestran las conclusiones sobre todo el trabajo de tesis.

---

# Capítulo 6

---

## Conclusión general y aportaciones

---

La investigación presentada en esta tesis integra diversas fases de un proyecto para la formulación y validación de un modelado matemático que pueda representar a un MRM tipo monocilíndrico donde integra la formulación de la fuerza de repulsión magnética entre un electroimán tipo solenoide multicapa y un imán de neodimio. Además de presentarse la formulación y uso de un controlador basado en redes neuronales aplicado en el prototipo experimental para manipular su velocidad a partir de los ángulos de energización del motor.

### 6.1. Discusión de resultados

El objetivo de esta tesis es el desarrollar un modelo matemático que represente la dinámica del MRM y proponer una estrategia de control que permita mantener la velocidad del motor a partir de la variación de los ángulos de energización del motor para diferentes puntos de operación con el fin de obtener la mejor velocidad angular y par del motor.

Para lograr dicho objetivo se tuvo que pasar por diferentes etapas para diseñar y se construir un motor reciprocante magnético tipo monocilíndrico el cual utiliza la estructura de un motor de combustión interna de desbrozadora donde se sustituye el combustible fósil y opera utilizando los campos magnéticos generados por un electroimán tipo solenoide multicapa y un imán de neodimio. Durante la construcción del prototipo experimental se modificó la primera estructura que se tenía y se reconstruyó todo el soporte bajo la perspectiva de poder ser un prototipo desarmable para poder realizar futuras configuraciones a la estructura del prototipo.

Sin embargo, al considerar utilizar una estructura armable esto también incrementa en el costo y tiempo de su construcción, por consiguiente, se decidió el utilizar materiales que no son de acabado profesional. Al no construir el prototipo con un acabado no profesional, puede llevar a presentarse variaciones en la toma de muestras de datos experimentales. Estas variaciones estuvieron presentes durante las últimas pruebas del prototipo y fueron ajustadas para poder realizar las pruebas de validación del modelo matemático.

El formular la fuerza de repulsión magnética entre un electroimán tipo solenoide multicapa y un imán de neodimio presenta una complejidad en formularlo debido que se deben de realizar diferentes consideraciones, dado que la ecuación (3.36) está diseñada específicamente para imanes con su componente tridimensional. Por consiguiente, al combinar un electroimán y un imán se debe de calcular  $\sigma_m$ , ya que el imán será quien reciba el campo magnético externo  $\vec{B}_{ext}(z)$ . Además, el valor de  $\sigma_m$  está relacionado con el comportamiento de las caras del imán por lo que es necesario tener representado el campo magnético tridimensional del imán de neodimio y el punto de referencia a utilizar, las ecuaciones (3.53), (3.56) y (3.59) representan al campo tridimensional del imán de neodimio con la propiedad de poder calcular el campo magnético si el imán de neodimio tiene *forma cilíndrica con*

*caras circulares o elípticas.*

Durante su formulación, se consideró en enfocar todo el análisis sobre el eje Z debido a la complejidad de poder formular el análisis tridimensional del campo magnético del electroimán con configuración de solenoide tipo multicapa. Del cual, se realizó una comprobación de la densidad el campo magnético del imán de neodimio en un punto en concreto sobre el eje Z usando la ecuación (3.26) (específicamente para imanes forma cilíndrica con cara circular) y la ecuación (3.56) en el eje axial del campo tridimensional. Donde el resultado indica que presentan el mismo valor, por lo que el valor de  $\sigma_m$  puede estar representado por valor obtenido de la ecuación (3.26) en un punto sobre el eje Z.

Los resultados presentados en el capítulo 4 indican que el ángulo de energización del MRM es un punto sensible, dado que al modificarse cuando energizar y tomando en cuenta la velocidad que lleva el motor, el tiempo de carga que tiene el electroimán se vuelve fundamental. Dado que el electroimán utiliza una configuración de circuito RL y a este le toma 12.4 ms cumplir 1 etapa de carga, toma bastante importancia el cumplir vencer la fuerza de atracción magnética generada por el imán de neodimio debido al material ferromagnético utilizado, por consiguiente, se debe cumplir la región de carga entre  $\tau_2$  y  $\tau_3$  como se ilustra en la Figura 4.14 cuando pase el PMS para asegurar altas velocidades.

El ángulo de energización determinado de  $55^\circ$  antes del PMS permite cumplir un  $\tau_1$  de carga del electroimán para generar mayores revoluciones tomando en consideración que no supera la fuerza de atracción generada por el imán de neodimio. Sin embargo, tomando en cuenta que mayor distancia la fuerza de atracción magnética es débil y se procede a energizar a ángulos superiores de  $55^\circ$  antes del PMS, esto provoca que el motor empiece a perder velocidad ya que la fuerza de repulsión magnética es superior y puede provocar un contra giro y detener el motor. Por consiguiente, es esencial tener consideración de los tiempos de carga del circuito RL y de la construcción y diseño del tipo del electroimán a utilizar.

El modelo matemático desarrollado utiliza  $\mu_1$  y  $\mu_2$  para representar la fricción en el motor de una manera generalizada para poder simplificar el modelo matemático. Dado que el modelo matemático está basado en el enfoque energético Euler-Lagrange, esto representa modelos ideales y requieren de una disipación o fricción para poder representar al sistema real. Los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  fueron determinados de manera heurística en cada prueba realizada y se muestran en las Tablas 2.1 y 4.2.

Con las pruebas experimentales desarrolladas y la comparativa con el modelo matemático desarrollado; se observó que el modelo matemático propuesto tiene la capacidad de poder reproducir la dinámica del sistema experimental aun con las restricciones que lleva el modelo matemático.

Con los resultados obtenidos sobre el modelo matemático y con el estado del arte sobre la operación magnética presentada en la sección 3.1, se planteó primero utilizar un controlador tipo PID utilizando la identificación de sistemas que se encuentra en el Anexo A.1. La idea de utilizar este controlador era para poder comprender como implementar el controlador en el prototipo del MRM. Aunque el controlador tipo PID cumplía los requerimientos de cambios suaves en el cálculo del ángulo de energización, este controlador presentaba pequeñas oscilaciones y era demasiado lento para llegar a la referencia, por consiguiente, se optó por desarrollar otro controlador utilizando redes neuronales.

En el capítulo 5 se definieron conceptos básicos sobre las redes neuronales. Se mostraron ilustraciones sobre tipos de estructuras neuronales, los tipos de algoritmos de aprendizaje usados en las redes neuronales y las funciones de activación más utilizadas. Con las pruebas experimentales desarrolladas se observó que la estructura neuronal propuesta tiene la capacidad de poder llevar al motor hacia las

velocidades deseadas y mantenerse en la referencia especificada, demostrando que el controlador neuronal tiene la capacidad de trabajar en objetivos de control como seguimiento de trayectoria o regulación.

Sin embargo, dentro de las pruebas realizadas se observó que el controlador neuronal presenta una dificultad para poder determinar el ángulo de energización cuando se encuentra dentro de la *zona angular de cero grados*. Este efecto debe a que el valor de  $\eta$  es pequeño para asegurar que el controlador pueda dar cambios de los ángulos de energización de manera suave debido a la sensibilidad en el cambio del ángulo de energización en el cual puede provocar que el motor se detenga si se presentan cambios bruscos.

Los resultados de las pruebas de par muestran que el motor presenta un valor de par de 0.029 Nm al utilizar el sistema de freno reduciendo la velocidad hasta 150 RPM antes que se detenga el motor y tiene un valor 0.025 Nm cuando no se presenta una carga. Este valor no puede comparado con el modelo matemático debido a que dentro del modelo no se consideraron las uniones y la estructura del sensor de par ilustrado en la Figura 5.11.

Unos de los problemas observados para obtener los datos experimentales del par del motor y poder calcular la eficiencia del motor era que las uniones junto al sensor de par y la última unión donde se conecta el encoder rotatorio (Figura 5.11), estos generaban cierto esfuerzo al eje del cigüeñal provocando que la velocidad se redujera a una velocidad entre 600 RPM a 650 RPM.

Observando los resultados de la media de potencia mecánica y de eficiencia energética obtenidos y si se realiza una comparación directa con un producto comercial de desbrozadora de 25 cc, nuestro MRM presenta un par de 0.025 Nm y la desbrozadora un par de 0.712 Nm a 8000 RPM, esto indica que nuestro motor se encuentra por debajo del 10% en relación al par. Comparando las eficiencias energéticas de los trabajos reportados en la Tabla 1.1, el MRM presentado en esta tesis muestra una eficiencia del 3.58% indicando que se encuentra por debajo de los valores superiores del 21% de eficiencia reportada. Los resultados de eficiencia y par del motor indican que la estructura propuesta y los materiales utilizados para la construcción del actuador magnético no son los adecuados, debido a que se obtiene una eficiencia energética muy baja y un par del motor muy bajo, mostrando que se usa demasiada energía para la operación del equipo y hay demasiadas fugas magnéticas y se requiere replantear el diseño de como deberá interactuar el electroimán y el imán de neodimio para mejorar el aprovechamiento energético en el motor.

## 6.2. Conclusiones

Los objetivos específicos del tema de investigación se han cumplido satisfactoriamente. Las aportaciones son:

- Tener un modelado matemático representativo del motor reciprocante experimental.
- Desarrollo e implementación de un controlador neuronal tipo recurrente basado en estructura especializada.
- El diseño propuesto y la selección de materiales para el MRM no es el adecuado, los resultados indicaron que la eficiencia energética es muy baja y no se puede obtener un mayor valor de par del motor. Por consiguiente, se recomienda rediseñar la estructura entre el electroimán y el imán de neodimio.

El objetivo general del tema de investigación se ha cumplido satisfactoriamente. Se han demostrado los puntos de energización del MRM a partir del modelo matemático, en donde se ha obtenido la mejor

---

velocidad del motor en el prototipo experimental cuando el ángulo de energización se encuentra en 55 grados antes del PMS obteniendo una velocidad entre 835 y 840 RPM.

### 6.3. Trabajos Futuros

Con las actividades realizadas con este tema de investigación existe una gran cantidad de trabajos que se pueden realizar, como las que mencionan a continuación:

- Con la consideración de rediseñar la estructura en el MRM, se recomienda el construir un electroimán tipo bitter. Estos tipos de bobinas presentan una capacidad de generar de 10 a 20 Teslas a diferencia de los electroimanes convencionales que se saturan en un valor de 2 Teslas. Para la configuración podría utilizarse 2 electroimanes tipo bitter o usar la configuración electroimán bitter e imán de neodimio en el MRM.
- Bajo la consideración de mejorar la estructura entre el electroimán y el imán de neodimio utilizada en esta tesis, se propone el desarrollar algún tipo de cámara magnética en el cual se pueda aprovechar mejor el campo magnético reduciendo las fugas magnéticas. El desarrollar esta cámara magnética requiere que se pueda representar el campo magnético tridimensional del electroimán tipo multicapa, debido a que la representación de campo magnético de la ecuación (3.43) está representada *sobre el eje Z*. Como base, en el Anexo B se muestra el principio para formular el campo magnético fuera del eje *Z* partiendo desde un hilo conductor.
- Dentro de las pruebas de controladores, solo se limitó en esta tesis el uso de la repulsión magnética. Se propone el utilizar el efecto de la repulsión y la atracción magnética entre el electroimán y el imán de neodimio utilizando un convertidor reductor-elevador aislado (isolated Buck-Boost) [Wu et al., 2015]. Este tipo de convertidor permitirá realizar pruebas de control variando el voltaje y la corriente que alimente al electroimán utilizando como fuente una batería comercial de vehículo de 12 V. Además, con el fin de poder generar la atracción y la repulsión magnética, se considera el uso dos convertidores reductor-elevador aislado conectados en serie.
- Para completar el modelo matemático del MRM, se puede considerar el desarrollar el modelo de fricción del MRM y realizar una comparativa de pruebas entre las ecuaciones que representan la fuerza magnética en la literatura considerando que se desarrolla el campo magnético tridimensional del electroimán.
- Con mayores avances con el tema del MRM, se propone el llevar este concepto de motor magnético a ser aplicado, como primera instancia, en una motocicleta donde se tendrán que dimensionar el electroimán y el imán de neodimio para ser implementados en el motor. A partir de las pruebas que se realicen con esta implementación de MRM, se llevarán a cabo análisis que evalúen la viabilidad de llevar esta tecnología hacia vehículos que utilicen MCI para el sector de la población que no tenga las posibilidades del poder adquirir un vehículo eléctrico.

### 6.4. Logros durante la tesis

#### 6.4.1. Artículos de Revista

De los resultados obtenidos en esta investigación se realizó la publicación en una revista indizada tipo Acceso Abierto (Figura 6.1a) presentando los resultados del modelo matemático:

- C. Rios-Enriquez, M. Adam-Medina, J. García-Morales, G. V. Guerrero-Ramírez and M. Cervantes-Bobadilla, "Modeling and Simulation of a Magnetic Reciprocating Engine," in *IEEE Access*, vol. 12, pp. 34863-34876, 2024, doi: 10.1109/ACCESS.2024.3372014.

6.4.2. Extra actividades

Dentro de otras actividades realizadas durante la investigación, se participó en la 8va Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada (JCyTA) con el poster del MRM ilustrado en la Figura 6.1b. Durante la 8va Jornada se presentó los avances sobre el desarrollo del modelo matemático, la determinación de la fuerza de repulsión magnética y el comportamiento de la velocidad angular del MRM en comparación a los datos experimentales.

También se participó como colaborador en los proyectos TecNM, los proyectos son los siguientes:

- Prototipo de un motor recíprocante magnético para determinar la eficiencia energética del sistema (Participación como estudiante líder).
- Diseño de un Motor Recíprocante Magnético de un Pistón.

Dentro del tiempo en el que se estuvo desarrollando esta investigación, se llevó el concepto de MRM a participar en la cumbre nacional de desarrollo tecnológico, innovación e innovación 2023 (InnovaTecNM 2023). El proyecto llevó como nombre clave “Motor Magnético” en la categoría de “Cambio climático” nivel posgrado. Dentro de los resultados de la etapa nacional realizado en Puebla, nuestro prototipo del MRM quedó en los siguientes lugares:

- Primer lugar en la etapa de cambio climático (Figura 6.2a).
- Segundo lugar en Pitch (Figura 6.2b).

IEEE VEHICULAR TECHNOLOGY SOCIETY SECTION

Received 28 January 2024, accepted 23 February 2024, date of publication 1 March 2024, date of current version 8 March 2024.  
Digital Object Identifier 10.1109/ACCESS.2024.3372044

**RESEARCH ARTICLE**

### Modeling and Simulation of a Magnetic Reciprocating Engine

CHRISTIAN RIOS-ENRIQUEZ<sup>1</sup>, MANUEL ADAM-MEDINA<sup>1</sup>, JARNIEL GARCÍA-MORALES<sup>1</sup>, AND MARISOL CERVANTES-BOBADILLA<sup>2</sup>  
GERARDO VICENTE GUERRERO-RAMÍREZ<sup>3</sup>, (Senior Member, IEEE)

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, Instituto Tecnológico de Puebla, TecNM/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Puebla, México, México 72490, México  
<sup>2</sup>Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIC-ICA)/IBIA/IAEM, Chantla, Chantla, México, México 72300, México  
Corresponding author: Manuel Adam-Molina (manuel.am@cenidet.tecnm.mx)

The work of Christian Rios-Enriquez was supported in part by Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (National Council of Humanities, Sciences and Technologies), and in part by Tecnológico Nacional de México (TecNM)/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (TecNM/CENIDET).

**ABSTRACT** This research analyzes the dynamic response of a single-cylinder magnetic reciprocating engine (MRE) and the mathematical model formulation with experimental validation. In efforts to reduce the pollution generated by internal combustion engines (ICE), the MREs have emerged as an alternative to this problem. An MRE uses the ICE structure and replaces fossil fuels with magnetic fields to work with the principle of magnetic repulsion between an electromagnet and a permanent magnet. The work focuses on determining the correct angles of when to energize the electromagnet based on the angular position of the crankshaft concerning the top-dead center (TDC) of the engine to generate the magnetic repulsion and obtain the highest possible speed in the engine as in the ICE. The experimental results indicate that the energization angle should be between 45° and 55° before the TDC for generating the highest engine velocity. Using the energization angle of 55° before the TDC allows the engine's velocities to be between 836 RPM and 840 RPM, and the mathematical model shows a goodness of fit (FIT) of 81.21% throughout its dynamics with the experimental comparison. The present work demonstrates the mathematical model's ability to represent the MRE's experimental dynamics and how the magnetic force is formulated and integrated with the mechanical analysis of the engine.

**INDEX TERMS** Dynamic model, Euler-Lagrange, energizations angles, magnetic force, magnetic reciprocating engine.

**I. INTRODUCTION**  
Transportation is one of the economy's main sectors contributing to air pollution [1]. Sustainable mobility is a concept used to reduce the environmental and social effects caused by transportation, especially in the use of vehicles. Vehicles use an ICE powered by gasoline as the primary energy source and transform it into displacement energy, allowing the vehicle to move [2].  
Due to the environmental problems generated by gasoline use in vehicles, new sustainable energy paradigms have emerged focused on using electricity as an alternative energy source for transportation, known as electric vehicles. Likewise, in order to reduce air pollution and to continue using the ICE structure in vehicles, different strategies have been proposed, such as the use of alternative fuels like ethanol, hydrogen, gasoline-ethanol combinations, or the simple use of gasoline and allowing the combination of electric motors known as hybrid vehicles [3]. However, acquiring such vehicles can be costly, and their use may be limited due to the lack of refueling stations for these new types of alternative fuels or energies [4].  
Therefore, it has been of great importance to look for other alternatives that take advantage of the infrastructure

IEEE Access

Fig. 1. Diagrama de flujo de la metodología de investigación.

Fig. 2. Curvas de velocidad angular y posición del pistón.

Fig. 3. Gráfico de la fuerza magnética repulsiva.

Fig. 4. Gráfico de la velocidad angular experimental vs simulada.

Fig. 5. Gráfico de la fuerza magnética repulsiva experimental vs simulada.

(a) Artículo en la revista en IEEE Access.

### Aproximación al funcionamiento de un motor recíprocante magnético

Christian Rios Enriquez, Manuel Adam Medina, Jarniel García Morales  
Departamento de Ingeniería Electrónica - Tecnológico Nacional de México - CENIDET.

**INTRODUCCIÓN**

Los motores de combustión interna (MCI) son máquinas esenciales que son utilizadas en la industria automotriz. Estos motores generan que los vehículos puedan desplazarse y ser utilizados como transporte personal o público y para otros tipos de servicios. Los MCI utilizan la "quemadura" como combustible y la transformación en energía de desplazamiento (permitiendo que los vehículos puedan desplazarse, sin embargo, este procedimiento de quemadura de combustible provoca la generación de gases tóxicos que contribuyen a la contaminación del aire.

Otra línea de vehículos se han desarrollado por parte de la industria automotriz donde utilizan diferentes tipos de energías alternativas con el fin de reducir el impacto ambiental generado por los MCI. Sin embargo, la adquisición de estos nuevos vehículos se convierte debido a la falta de infraestructura y sus elevados costos.

Los motores impulsados por campos magnéticos son una nueva rama de investigación en la cual existe mucha investigación sobre "motores recíprocantes magnéticos" (MRM). Para este caso en particular se propone recopilar los avances del desarrollo del modelo matemático del MRE donde se muestra la estructura de un MCI tipo monocilíndrico desarrollado por investigadores del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.

**OBJETIVOS**

**Objetivo general:**  
Modelar un MRM tipo monocilíndrico basado en un enfoque energético de Euler-Lagrange y proponer un esquema de control que permita mantener el ángulo de energización del actuador magnético para diferentes puntos de operación del motor con el fin de obtener la mayor velocidad angular y par del motor.

**Objetivos específicos:**  
1. Desarrollar un modelo matemático representativo de un MRM monocilíndrico.  
2. Determinar las partes de energización durante a los diferentes momentos que pueda tener el pistón.  
3. Implementar una estrategia de control en un prototipo experimental de un MRM tipo monocilíndrico.

**PLANTEAMIENTO**

El objetivo de esta investigación es proponer un modelo matemático representativo (1) como el modelo dinámico de la parte mecánica del MRM monocilíndrico. La expresión en (1) nos permite calcular el comportamiento del eje generado por el MRM en relación con la fuerza magnética generada de la ecuación (14). La fuerza magnética depende de la corriente suministrada por el circuito RL de las ecuaciones (16) y (19), en relación a la posición en la que se encuentre el pistón de la ecuación (20)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F_m \cos(\theta) \quad (1)$$

$$F_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi r^2} \left( \frac{1}{2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right) \quad (2)$$

$$c = c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x}^2 + c_3 \dot{x}^3 \quad (3)$$

$$k = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 \quad (4)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t) \quad (5)$$

$$r = r_0 \cos(\theta) \quad (6)$$

$$F_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi r^2} \left( \frac{1}{2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right) \quad (7)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

$$r = r_0 \cos(\theta) \quad (9)$$

$$F_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi r^2} \left( \frac{1}{2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right) \quad (10)$$

$$c = c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x}^2 + c_3 \dot{x}^3 \quad (11)$$

$$k = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 \quad (12)$$

**CONCLUSIÓN**

Se ha formalizado el modelo matemático del MRM donde se interrelacionan la parte mecánica, eléctrica y electromagnética del sistema en donde por la parte mecánica utiliza un cruce variable independiente y en la parte eléctrica depende de la dinámica del circuito RL, todo que se encuentran relacionados los valores de las inductancias magnéticas generadas por el mismo inductor.

Las simulaciones presentadas una primera aproximación al comportamiento del prototipo experimental, sin embargo los resultados indican que hay necesidad de separar los tiempos de activación y restar la parte de fricción del modelo porque se considera la posibilidad que esta parte está afectando al modelo matemático en la parte mecánica debido a la combinación de usar una fricción viscosa constante y energética.

Para Efectos futuros se requiere comprobar los valores de fuerzas de repulsión que que también está puede afectar a los resultados del modelo matemático.

**AVANCES DE INVESTIGACIÓN**

La Fig. 1 muestra como se comporta la fuerza de repulsión magnética entre el electroimán y el imán permanente en diferentes condiciones en donde una referencia conoce como se comporta hacia entre los 4 y 6 cm ya que en la industria en la que se encuentra el pistón y entre los 3 y 4 cm se encuentran separados el imán y el electroimán ya que la fuerza está basada desde el punto de vista de campo del electroimán [4].

**BIBLIOGRAFÍA**

[1] Bhatia, S. (2018) Sustainable Mobility: A Review. *Journal of Sustainable Development*, 10(1), 1-10.

[2] Costa, D. and Morales, R. (2011) Vehicle powertrain systems. *John Wiley & Sons*.

[3] Liu, L., Song, C., Liu, H., and Chen, X. (2023) Design and simulation of a dual-track magnetic levitation system. *IEEE Access*, 11, 1039-1048.

[4] Zhang, Y., Song, C., Liu, H., Liu, S., Liu, C., and Chen, X. (2023) Comparative study on operating modes: laboratory magnetic levitation between permanent magnets. *Journal of Intelligent Manufacturing and Intelligent Equipment*.

[5] Zhou, L., and Wu, S. (2023) Analysis of Dual-Charge Coupled Magnets for Permanent Magnet and its Application in Magnetic Levitation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 59(5), 1-5.

[6] Jarniel, T. and Internationalization committee. A. (2002) Mexico City, D.F.

[7] Navarro, V. T., T. C., Rodríguez, M. A., Gómez, R. (2023) Impacto del desarrollo de un algoritmo de control para un sistema de levitación magnética. *Revista de Ingeniería y Tecnología*, 17, 28-42.

[8] Wang, S., Song, C., Liu, H., Liu, S., and Zhang, Y. (2023) Analysis of the principle of a self-excited magnetic field in the active magnetic levitation system. *Scientific Reports*, 13(1), 1-12.

(b) Poster presentado en la 8va JCyTA.

Figura 6.1. Resultados de investigación.



(a) Participación de Innovatec2023.



(b) Participación de Innovatec2023 pitch.



(c) Reconocimiento de Participación en Innovatec2023.

Figura 6.2. Resultados de participación en eventos académicos.

---

# Bibliografía

---

- [Abouel-Seoud et al., 2023] Abouel-Seoud, S. A., Shiba, M. S., and Abdallah, A. S. (2023). Real world evaluation and control of vehicle engine exhaust air pollution using adaptive neural fuzzy inference system. *International Journal of Engine Research*, 24(5):2233–2250.
- [Akyel et al., 2007] Akyel, C., Babic, S., Kincic, S., and Lagacé, P. J. (2007). Magnetic force calculation between thin circular coils and thin filamentary circular coil in air. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 21(9):1273–1283.
- [Alippi et al., 2003] Alippi, C., de Russis, C., and Piuri, V. (2003). A neural-network based control solution to air-fuel ratio control for automotive fuel-injection systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 33(2):259–268.
- [Ansari et al., 2022] Ansari, E., Haider, S. A., Shaikh, A. A., and Ibrahim, M. F. (2022). Design and fabrication of single cylinder solenoid engine. *Anveshana’s International Journal of Research in Engineering and Applied Sciences*, 7(2).
- [Babic and Akyel, 2017] Babic, S. and Akyel, C. (2017). Calculation of mutual inductance and magnetic force between two thick coaxial bitter coils of rectangular cross section. *IET Electric Power Applications*, 11(3):441–446.
- [Bae and Kim, 2017] Bae, C. and Kim, J. (2017). Alternative fuels for internal combustion engines. *Proceedings of the Combustion Institute*, 36(3):3389–3413.
- [Bakar et al., 2007] Bakar, R. A., Semin, S., and Ismail, A. (2007). The internal combustion engine diversification technology and fuel research for the future: A review. In *Proceeding of AEESEAP Regional Symposium*, pages 57–62.
- [Balko and Rosinová, 2017] Balko, P. and Rosinová, D. (2017). Modeling of magnetic levitation system. In *2017 21st International Conference on Process Control (PC)*, pages 252–257. IEEE.
- [Basharat et al., 2017] Basharat, M., Ding, M., Cai, H., Li, Y., and Fang, J. (2017). Design and analysis of multilayer solenoid coil for faraday modulator. In *MATEC Web of Conferences*, volume 114, page 04004. EDP Sciences.
- [Bermingham et al., 2021] Bermingham, M., Dargusch, M. S., et al. (2021). Data-driven modelling of the interaction force between permanent magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 532:167869.
- [Bernal and García, 2012] Bernal, A. A. and García, L. L. (2012). The modelling of an electromagnetic energy harvesting architecture. *Applied Mathematical Modelling*, 36(10):4728–4741.
- [Bidikli, 2020] Bidikli, B. (2020). An observer-based adaptive control design for the maglev system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 42(14):2771–2786.

- [Bird, 2003] Bird, J. (2003). *Electrical Circuit Theory and Technology*. Engineering and Technology. Elsevier Science.
- [Butler, 2015] Butler, K. (2015). Electromagnetic reciprocating engine white paper. *Innovative Energy Policies*, 4(118).
- [Camacho and Sosa, 2013] Camacho, J. M. and Sosa, V. (2013). Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista mexicana de física E*, 59(1):8–17.
- [Carneiro et al., 2020] Carneiro, P., dos Santos, M. P. S., Rodrigues, A., Ferreira, J. A., Simões, J. A., Marques, A. T., and Kholkin, A. L. (2020). Electromagnetic energy harvesting using magnetic levitation architectures: A review. *Applied Energy*, 260:114191.
- [Chan et al., 1993] Chan, H.-C., Chau, K., and Chan, C. (1993). A neural network controller for switching power converters. In *Proceedings of IEEE Power Electronics Specialist Conference-PESC'93*, pages 887–892. IEEE.
- [Cichocki and Unbehauen, 1993] Cichocki, A. and Unbehauen, R. (1993). *Neural networks for optimization and signal processing*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Crolla and Mashadi, 2011] Crolla, D. and Mashadi, B. (2011). *Vehicle powertrain systems*. John Wiley & Sons.
- [Daniel and Cavalca, 2011] Daniel, G. B. and Cavalca, K. L. (2011). Analysis of the dynamics of a slider–crank mechanism with hydrodynamic lubrication in the connecting rod–slider joint clearance. *Mechanism and Machine Theory*, 46(10):1434–1452.
- [Darken et al., 1992] Darken, C., Chang, J., and Moody, J. (1992). Learning rate schedules for faster stochastic gradient search. In *Neural Networks for Signal Processing II Proceedings of the 1992 IEEE Workshop*, pages 3–12. IEEE.
- [Darken and Moody, 1992] Darken, C. and Moody, J. (1992). Towards faster stochastic gradient search. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1009–1016.
- [Das, 2013] Das, S. (2013). An electromagnetic mechanism which works like an engine. *International Journal of Engineering Trends & Technology*, 6.
- [Derby and Olbert, 2010] Derby, N. and Olbert, S. (2010). Cylindrical magnets and ideal solenoids. *American Journal of Physics*, 78(3):229–235.
- [Dhangar et al., 2015] Dhangar, S., Korane, A., and Barve, D. (2015). Magnetic piston operated engine. *International Journal of Advanced Research in Science and Engineering*, 4(6):219–225.
- [Dhawale et al., 2020] Dhawale, R. S., Dasre, A. D., Bharate, S. F., Shelar, Y. D., Powar, R. P., and Gaikwad, P. V. (2020). Design & development of double cylinder reciprocating electromagnetic engine. *Studies in Indian Place Names*, 40(74):1337–1339.
- [Ding et al., 2018] Ding, J., Yang, X., Long, Z., and Dang, N. (2018). Three-dimensional numerical analysis and optimization of electromagnetic suspension system for 200 km/h maglev train considering eddy current effect. *IEEE Access*, 6:61547–61555.
- [Duffy and Netterfield, 1984] Duffy, R. and Netterfield, R. (1984). Design of faraday rotators and modulators. *Review of scientific instruments*, 55(5):743–746.
-

- [Dutta and Das, 2020] Dutta, L. and Das, D. K. (2020). A linear model predictive control design for magnetic levitation system. In *2020 International Conference on Computational Performance Evaluation (ComPE)*, pages 039–043. IEEE.
- [Eapen et al., 2014] Eapen, A. J., Varughese, A. E., Arun, T., and Athul, T. (2014). Electromagnetic engine. *International journal of research in engineering and technology (IJRET)*, ISSN, pages 2319–1163.
- [Ebrahimi et al., 2008] Ebrahimi, B., Khamesee, M. B., and Golnaraghi, M. F. (2008). Design and modeling of a magnetic shock absorber based on eddy current damping effect. *Journal of Sound and Vibration*, 315(4-5):875–889.
- [Edminister and Edminister, 1992] Edminister, J. A. and Edminister, J. A. (1992). *Electromagnetismo*. McGraw-Hill.
- [Ehsani et al., 2018] Ehsani, M., Gao, Y., Longo, S., and Ebrahimi, K. (2018). *Modern electric, hybrid electric, and fuel cell vehicles*. CRC press, 3rd edition edition.
- [Erkaya et al., 2007] Erkaya, S., Su, Ş., and Uzmay, I. (2007). Dynamic analysis of a slider–crank mechanism with eccentric connector and planetary gears. *Mechanism and machine theory*, 42(4):393–408.
- [Furlani, 2001] Furlani, E. P. (2001). *Permanent Magnet and Electromechanical Devices*. Electromagnetism. Academic Press, San Diego.
- [García-Burgos et al., 2022] García-Burgos, J., Miquelajauregui, Y., Vega, E., Namdeo, A., Ruíz-Olivares, A., Mejía-Arangure, J. M., Resendiz-Martinez, C. G., Hayes, L., Bramwell, L., Jaimes-Palomera, M., Entwistle, J., Núñez-Enríquez, J. C., Portas, A., and McNally, R. (2022). Exploring the spatial distribution of air pollution and its association with socioeconomic status indicators in Mexico city. *Sustainability*, 14(22).
- [Giles et al., 1998] Giles, C. L., Gori, M., Goos, G., Hartmanis, J., and Van Leeuwen, J. (1998). *Adaptive Processing of Sequences and Data Structures: International Summer School on Neural Networks, Caianiello*, Vietri Sul Mare, Salerno, Italy, September 6-13, 1997, Tutorial Lectures, volume 1387. Springer Science & Business Media.
- [Guzzomi et al., 2008] Guzzomi, A., Hesterman, D., and Stone, B. (2008). Variable inertia effects of an engine including piston friction and a crank or gudgeon pin offset. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 222(3):397–414.
- [Ha et al., 2006] Ha, J.-L., Fung, R.-F., Chen, K.-Y., and Hsien, S.-C. (2006). Dynamic modeling and identification of a slider-crank mechanism. *Journal of sound and vibration*, 289(4-5):1019–1044.
- [Hayat et al., 2013] Hayat, Q., Li-Yun, F., Bing-Qi, T., Yun, B., Ma, X. Z., et al. (2013). Mathematical modeling of fuel pressure inside high pressure fuel pipeline of combination electronic unit pump fuel injection system. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 6(14):2568–2575.
- [Hayt et al., 2006] Hayt, W. H., Buck, J. A., and Pedraza, C. R. C. (2006). *Teoría electromagnética*. McGraw-Hill.
- [Higueras-Castillo et al., 2019] Higueras-Castillo, E., Molinillo, S., Coca-Stefaniak, J. A., and Liébana-Cabanillas, F. (2019). Perceived value and customer adoption of electric and hybrid vehicles. *Sustainability*, 11(18).
-

- [Honc and Sanseverino, 2019] Honc, D. and Sanseverino, E. R. (2019). Magnetic levitation–modelling, identification and open loop verification. *Transactions on Electrical Engineering*, 8(1):13–16.
- [Hota et al., 2015] Hota, P., Rathore, M., and Shaikh, D. (2015). Magnetic repulsion piston engine. *International journal of science and research, ISSN*, 4(12):338–344.
- [Hu et al., 2020] Hu, J., Ma, W., Chen, X., and Luo, S. (2020). Levitation stability and hopf bifurcation of ems maglev trains. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020.
- [Isermann, 2014] Isermann, R. (2014). Engine modeling and control. *Berlin: Springer Berlin Heidelberg*, 1017.
- [Jibril and Alemayehu, 2020] Jibril, M. and Alemayehu, E. (2020). Comparison of neural network narma-l2 model reference and predictive controllers for nonlinear ems magnetic levitation train. *Report and Opinion Journal*, 12(5):21–25.
- [Karpanai Selvan et al., 2022] Karpanai Selvan, B., Das, S., Chandrasekar, M., Girija, R., John Venison, S., Jaya, N., Saravanan, P., Rajasimman, M., Vasseghian, Y., and Rajamohan, N. (2022). Utilization of biodiesel blended fuel in a diesel engine – combustion engine performance and emission characteristics study. *Fuel*, 311:122621.
- [Kumar et al., 2021] Kumar, V., Singh, A., and Jha, K. K. (2021). 8-stroke solenoid engine and its efficiency. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 8(06).
- [Kwon et al., 2020] Kwon, M., Jung, J., Jang, T., and Sohn, S. (2020). Magnetic forces between a magnet and a solenoid. *The Physics Teacher*, 58(5):330–334.
- [Labinac et al., 2006] Labinac, V., Erceg, N., and Kotnik-Karuza, D. (2006). Magnetic field of a cylindrical coil. *American journal of physics*, 74(7):621–627.
- [Lee and Son, 2007] Lee, K.-M. and Son, H. (2007). Distributed multipole model for design of permanent-magnet-based actuators. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(10):3904–3913.
- [Lemarquand et al., 2009] Lemarquand, G., Lemarquand, V., Babic, S., and Akyel, C. (2009). Magnetic field created by thin wall solenoids and axially magnetized cylindrical permanent magnets. In *Progress In Electromagnetics Research Symposium 2009 Moscow*, page 614.
- [Lokhande et al., 2017] Lokhande, N., Emche, V., and Khanke, V. (2017). Review of magnetic repulsion engine. *International Journal of Engineering Development and Research*, 5(01):413–416.
- [Lu et al., 2018] Lu, T.-F. et al. (2018). Analytical expression of the magnetic field created by a permanent magnet with diametrical magnetization. *Progress In Electromagnetics Research C*, 87.
- [Lu et al., 2019] Lu, T.-F. et al. (2019). Modelling of magnetic field distributions of elliptical cylinder permanent magnets with diametrical magnetization. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 491:165569.
- [Lyman and international Handbook committee, 1961] Lyman, T. and international Handbook committee, A. (1961). *Metals handbook. Vol. 1, Properties and selection of metals*. American Society for Metals, Metals Park, Ohio.
- [Morgado et al., 2022] Morgado, J. E., Enojas, M. J. B., Bongao, H. C., Bongao, H. L. C., Rufo, J. C., Arribas, R. G., Cruz, C. D. M., Gaza, M. D. S., and Icuspit, C. P. (2022). Design and fabrication of improved v-8 solenoid engine with splash lubrication system. In *2022 IEEE Symposium on Industrial Electronics & Applications (ISIEA)*, pages 1–4. IEEE.
-

- [Myklebust et al., 1984] Myklebust, A., Fernandez, E., and Choy, T. (1984). Dynamic response of slider-crank machines during startup. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 108(4).
- [Naeeni et al., 2019] Naeeni, I. P., Keshavarzi, A., and Fattahi, I. (2019). Parametric study on the geometric and kinetic aspects of the slider-crank mechanism. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 43(3):405–417.
- [Nguyen et al., 2019] Nguyen, V. T., Lu, T.-F., Robertson, W., Grimshaw, P., et al. (2019). Magnetic field distribution of an elliptical permanent magnet. *Progress In Electromagnetics Research*, 97:69–82.
- [Norton and Salas, 2009] Norton, R. L. and Salas, R. N. (2009). *Diseño de maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. Number TJ230. N67 2009. McGraw-Hill Interamericana, 5th edition edition.
- [Patil et al., 2020] Patil, P., Pandya, M., Anilkumar, A., Roy, R., and Singh, A. (2020). Design and modelling of electromagnetic engine. *Mukt Shabd Journal*, 9(5).
- [Perujo et al., 2011] Perujo, A., Thiel, C., and Nemry, F. (2011). *Electric vehicles in an urban context: environmental benefits and techno-economic barriers*. IntechOpen.
- [Plavec et al., 2019] Plavec, E., Ladisic, I., and Vidovic, M. (2019). The impact of coil winding angle on the force of dc solenoid electromagnetic actuator. *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, 17(3):244–250.
- [Pol et al., 2023] Pol, G. J., Jadhav, A. R., Shinde, J. G., Patil, Y., and Lokapure, R. (2023). Design, development and analysis of the electromagnetic engine. *National conference on Emerging Trends in Enineering & Technology (NCETET)*.
- [Poznyak et al., 2001] Poznyak, A. S., Sanchez, E. N., and Yu, W. (2001). *Differential neural networks for robust nonlinear control: identification, state estimation and trajectory tracking*. World Scientific.
- [Purcell and Morin, 2013] Purcell, E. M. and Morin, D. J. (2013). *Electricity and magnetism*. Cambridge University Press.
- [Rafay Hammad et al., 2018] Rafay Hammad, S., Umair, M., Latif, H., Hassan, Z., and Shahzad Aziz, M. (2018). Conversion of ic engine into magnetic engine with minor modifications. *Adv Automob Eng*, 7(189):2.
- [Rahman et al., 2017] Rahman, A., Rahman, M., and Karim, H. (2017). The theory of the development of an electromagnetic engine for automotive use. *International Journal of Advanced Robotics and Automation*, 2(1).
- [Rahman et al., 2014] Rahman, A., Sharif, S. B., Mohiuddin, A., Rashid, M., and Hossain, A. (2014). Energy efficient electromagnetic actuated cvt system. *Journal of mechanical Science and Technology*, 28(4):1153–1160.
- [Rajesh et al., 2014] Rajesh, M., Jancirani, J., and Aishwarya, V. (2014). Design of electromechanical engine for zero direct emission. In *Applied Mechanics and Materials*, volume 591, pages 23–26. Trans Tech Publ.
- [Ravaud et al., 2010] Ravaud, R., Lemarquand, G., Babic, S., Lemarquand, V., and Akyel, C. (2010). Cylindrical magnets and coils: Fields, forces, and inductances. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(9):3585–3590.
-

- [Rawal et al., 2020] Rawal, A., Parmar, D. S., and Pawar, M. (2020). A review on: Working & fabrication of electromagnetic reciprocating engine. *SSRN*.
- [Reis et al., 2014] Reis, V. L., Daniel, G. B., and Cavalca, K. L. (2014). Dynamic analysis of a lubricated planar slider–crank mechanism considering friction and hertz contact effects. *Mechanism and Machine Theory*, 74:257–273.
- [Ripka, 2021] Ripka, P. (2021). *Magnetic sensors and magnetometers*. Artech house.
- [Rithula et al., 2013] Rithula, J., Jeyashruthi, J., and Anandhi, Y. (2013). Electric vehicle with zero-fuel electromagnetic automobile engine. *International Journal of Engineering Research and Technology*. ISSN, 6(5):483–485.
- [Roshan et al., 2019] Roshan, A., Sarode, K., Badukale, P., and Rajpurohit, R. (2019). Design of magnetic reciprocating engine. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 6(5).
- [Sarangapani, 2006] Sarangapani, J. (2006). *Neural network control of nonlinear discrete-time systems*. CRC press.
- [Singh et al., 2022] Singh, N., Abdul Khadeer, A. S. S., and Sameer Baig, M. (2022). Rpm variable solenoid engine. *Mediterranean Journal of Basic and Applied Sciences (MJBAS)*, 5(4).
- [Sivakumar et al., 2014] Sivakumar, K., Rajesh, S., and Jeyanthi, S. (2014). An approach in harvesting energy from permanent magnet as a engine (magnetic engine). In *2014 International Conference on Science Engineering and Management Research (ICSEMR)*, pages 1–3. IEEE.
- [Smith, 2003] Smith, S. W. (2003). Chapter 15 - moving average filters. In Smith, S. W., editor, *Digital Signal Processing*, pages 277–284. Newnes, Boston.
- [Sun et al., 2017] Sun, Y., Li, W., Xu, J., Qiang, H., and Chen, C. (2017). 2321. nonlinear dynamic modeling and fuzzy sliding-mode controlling of electromagnetic levitation system of low-speed maglev train. *Journal of Vibroengineering*, 19(1).
- [Sun et al., 2020] Sun, Y., Xu, J., Lin, G., Ji, W., and Wang, L. (2020). Rbf neural network-based supervisor control for maglev vehicles on an elastic track with network time-delay. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*.
- [Tiwari et al., 2019] Tiwari, A., Singh, A., Agarwal, D., and Verma, A. K. (2019). Design and fabrication of 4-stroke solenoid engine. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 6(12).
- [Ulaby, 2015] Ulaby, F. T. (2015). *Fundamentals of applied electromagnetics*. Prentice-Hall, Inc.
- [Vaddepalli et al., 2020] Vaddepalli, S., Preetham, N., and Karanth, A. B. (2020). Design and fabrication of an electromagnetic piston engine. *International Research Journal of Modernization in Engineering Technology and Science*, 2(9).
- [Vigneshwaran, 2018] Vigneshwaran, B. (2018). Magnetic repulsion engine. *International Journal of Emerging Technology in Computer Science and Electronics (IJETCSE)*, 25(5).
- [Vijayanand et al., 2022] Vijayanand, G., Augustine, A., Natarajan, V. A., Raman, V. S., Mohanavel, V., and Christopher, D. (2022). Emission reduction technique on existing diesel engines using renewable fuels. *International Journal of Ambient Energy*, 43(1):1187–1191.
-

- [Wang et al., 2006] Wang, S., Yu, D., Gomm, J., Page, G., and Douglas, S. (2006). Adaptive neural network model based predictive control for air–fuel ratio of si engines. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 19(2):189–200.
- [Wang et al., 2018] Wang, X., Chen, F., Zhu, R., Yang, G., and Zhang, C. (2018). A review of the design and control of free-piston linear generator. *Energies*, 11(8):2179.
- [Wellstead, 1979] Wellstead, P. E. (1979). *Introduction to physical system modelling*, volume 4. Academic Press Ltd.
- [Wheeler, 1928] Wheeler, H. A. (1928). Simple inductance formulas for radio coils. *Proceedings of the institute of Radio Engineers*, 16(10):1398–1400.
- [White and Sintov, 2017] White, L. V. and Sintov, N. D. (2017). You are what you drive: Environmentalist and social innovator symbolism drives electric vehicle adoption intentions. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 99:94–113.
- [Wilamowski and Irwin, 2018] Wilamowski, B. M. and Irwin, J. D. (2018). *Intelligent systems*. CRC press.
- [Wu et al., 2015] Wu, H., Mu, T., Ge, H., and Xing, Y. (2015). Full-range soft-switching-isolated buck-boost converters with integrated interleaved boost converter and phase-shifted control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 31(2):987–999.
- [Yadav et al., 2018] Yadav, R., Solanki, H. B., Thakkar, S., Sheth, K. V., and Sheth, H. V. (2018). Fabrication of electromagnetic engine using pull force. *International Journal of Approximate Reasoning*, 6:152–159.
- [Yang et al., 2020] Yang, W., Meng, F., Sun, M., and Liu, K. (2020). Passivity-based control design for magnetic levitation system. *Applied Sciences*, 10(7):2392.
- [Yang et al., 2021] Yang, Z., Song, J., Cai, W., Lu, G., and Zhang, Z. (2021). Analysis of the influence of a solenoid magnetic field in the azimuth transmission system. *Scientific Reports*, 11(1):1–11.
- [Zaidi et al., 2019] Zaidi, I., Chtourou, M., and Djemel, M. (2019). Robust neural control of discrete time uncertain nonlinear systems using sliding mode backpropagation training algorithm. *International Journal of Automation and Computing*, 16(2):213–225.
- [Zhang et al., 2018] Zhang, R., Zhao, H., and Li, J. (2018). Electromagnetic mechanism design and analysis of electromagnetic engine. In *Proceedings of the 2018 International Conference on Mechanical, Electronic, Control and Automation Engineering (MECAE 2018)*, pages 83–86. Atlantis Press.
- [Zhang et al., 2020] Zhang, Y., Leng, Y., Zhang, H., Su, X., Sun, S., Chen, X., and Xu, J. (2020). Comparative study on equivalent models calculating magnetic force between permanent magnets. *Journal of Intelligent Manufacturing and Special Equipment*.
- [Zhang et al., 2009] Zhang, Z., Xie, Y., Zhang, X., and Meng, X. (2009). Analysis of piston secondary motion considering the variation in the system inertia. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 223(4):549–563.
- [Zhao et al., 2018] Zhao, J., Han, B., and Bei, S. (2018). Electromagnetic properties analysis on hybrid-driven system of electromagnetic motor. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 108(5).
-

- [Zhao and Kim, 2020] Zhao, L. and Kim, E. S. (2020). Analytical dual-charged surface model for permanent magnet and its application in magnetic spring. *IEEE Transactions on Magnetics*, 56(9):1–7.
-

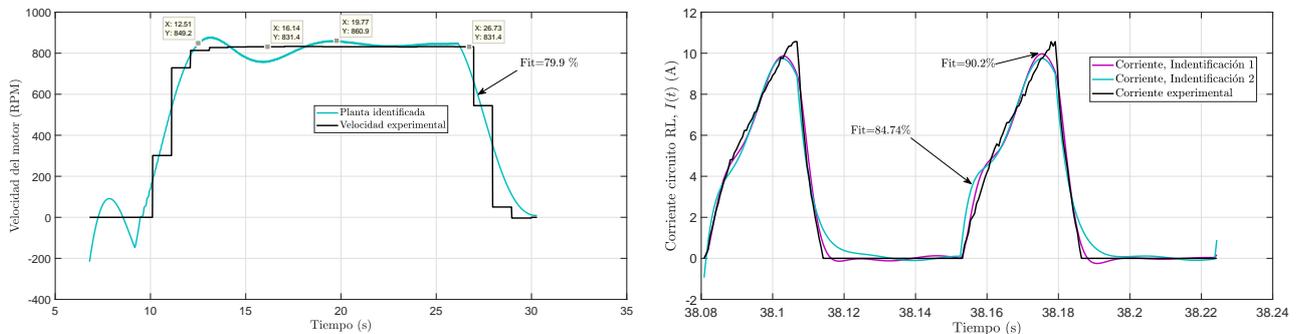
# Anexos

# Anexo A

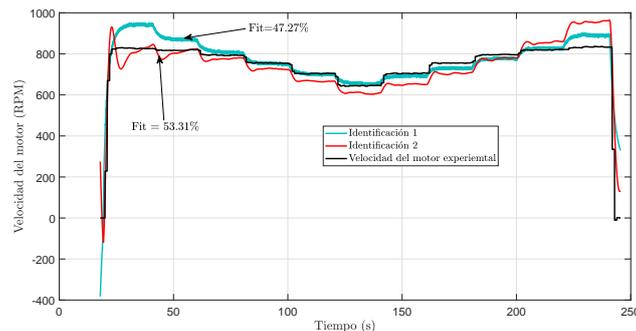
## El controlador PID

### A.1. Comprensión de aplicación de una ley de control en el MRM

Para comprender como implementar un controlador en el MRM y junto al estado del arte presentado en la sección 3.1, se propuso primero utilizar un PID clásico empleando la identificación de sistemas para obtener las dinámicas del circuito RL y la velocidad del motor MRM con los datos obtenidos del prototipo experimental como se ilustran en las Figuras A.1a, A.1b y A.1c.



(a) Identificación mediante función de transferencia para la velocidad de la prueba 1. (b) Identificación mediante función de transferencia de la corriente experimental.



(c) Identificación mediante la función de transferencia de la velocidad de la prueba 13.

Figura A.1. Identificaciones utilizando el toolbox de Matlab

Para obtener representadas las dinámicas del circuito RL y la velocidad del motor MRM, se utilizó la identificación de sistemas a través del toolbox de Matlab mediante funciones de transferencia. La identificación funciona en dos etapas:

- Primero se identifica la velocidad del MRM utilizando los datos experimentales de corriente del circuito RL como entrada y como salida la velocidad del motor.

- Después, se identifica la corriente del circuito RL con los pulsos de encendido y apagado de 30 V generados por los MOSFETS del circuito de potencia como entrada y su salida es el comportamiento de corriente del circuito RL.

Utilizando la prueba 1 presentada en la Tabla 4.2 como base para aplicar un controlador tipo PID, su identificación presenta un FIT del 79.9% ilustrado en la Figura A.1a y el sistema queda representado por la ecuación (A.1).

$$T_p(s) = \frac{53.01s^2 + 127.5s + 109.4}{s^3 + 0.9619s^2 + 1.169s + 0.3745}. \quad (\text{A.1})$$

Para identificar el comportamiento de la corriente del MRM, solo se tomó una pequeña muestra de todos los datos, en este caso seleccionamos 38 segundos y se buscó en tener representado la forma triangular que presenta el circuito RL en la Figura A.1b, dado que utiliza pulsos cuadrados de 30 V que indican los momentos de energización del sistema experimental. La ecuación (A.2) representa la corriente 1 identificada que presenta un FIT del 90.2% y la ecuación (A.3) la corriente identificada 2 que presenta un FIT del 84.7%. La ecuación (A.2) será utilizada para representar la dinámica del circuito RL.

$$Tf_{corr1}(s) = \frac{47.2832s^2 - 610.341s + 2457802.47}{s^3 + 173.27543s^2 + 51874.68s + 8988606.785}, \quad (\text{A.2})$$

$$Tf_{corr2}(s) = \frac{158.6s^2 - 1.371 \times 10^4s + 9.399 \times 10^6}{s^3 + 241.3s^2 + 5.611 \times 10^4s + 1.354 \times 10^7}. \quad (\text{A.3})$$

En el caso de la Figura A.1c, se realizó una identificación a la Prueba 13 mostrada en la Tabla 4.2 para comprobar si se puede identificar la prueba en toda su operación. El resultado indica que se logra reproducir pero no de manera idéntica, donde la identificación presenta FITs alrededor del 50%, donde la ecuación (A.4) es el modelo identificado 1 y la ecuación (A.5) es el modelo identificado 2.

$$Tf_1(s) = \frac{92.61s + 0.05464}{s^2 + 0.4599s + 0.0003159}, \quad (\text{A.4})$$

$$Tf_2(s) = \frac{155.7203s + 6.718}{s^3 + 0.8586s^2 + 0.7242s + 0.02107}. \quad (\text{A.5})$$

Para la aplicación del controlador tipo PID, se propone la estructura de lazo cerrado de la Figura A.2. En donde se realiza una reconstrucción de la entrada del sistema que son un tren de pulsos trabajando a un ciclo de trabajo del 35% donde manda pulsos de 30 V representando las energizaciones del prototipo experimental para poder ser manipuladas por el controlador.

Antes de probar la aplicación del controlador, primero se realiza una prueba con la señal reconstruida para observar que si se sigue cumpliendo la señal identificada. En la Figura A.3a se observa el comportamiento de la velocidad del motor en lazo abierto llegando a un valor de 836 RPM que se encuentra dentro del rango de velocidad de la prueba 1 de la Tabla 4.2 y muestra el mismo comportamiento de la señal identificada de la Figura A.1a.

Los valores utilizados para el controlador PID para una referencia de 700 RPM son:  $K_p = 0.2$ ,  $K_i = 0.01$  y  $K_d = 0.01$ . El controlador se activará después de 1.48 segundos. Dicho valor de error modificará el valor del ciclo de trabajo donde buscará llegar a la referencia deseada, donde si manda una señal de ajuste negativa, esta estará restringida a cero, debido a que el ciclo de trabajo solo funciona de 0% al 100%.

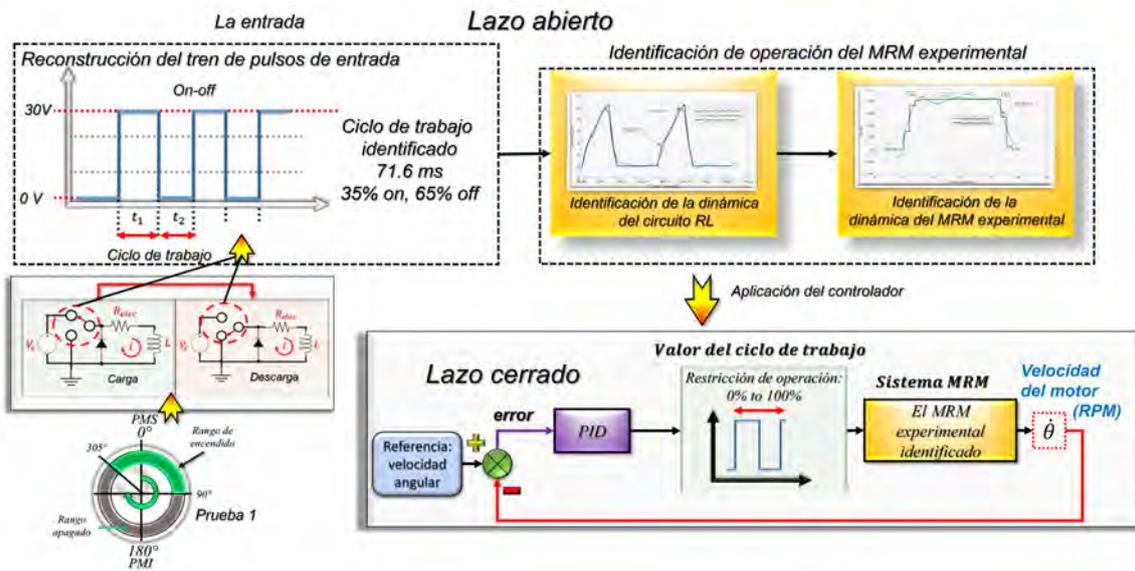
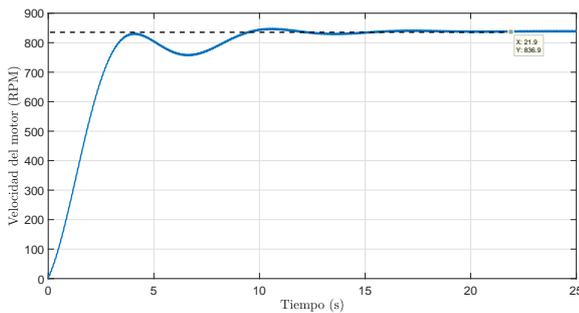
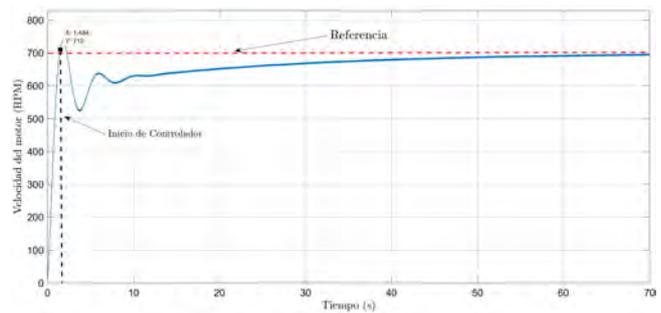


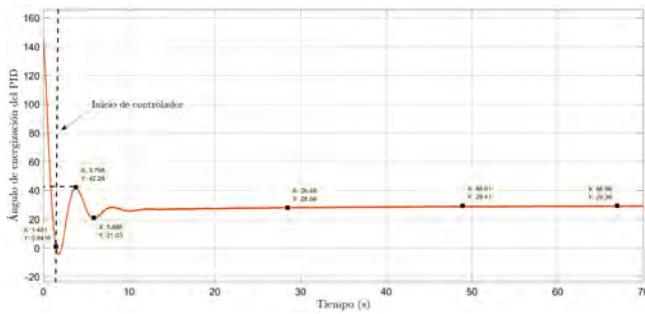
Figura A.2. Estructura de control PID utilizada.



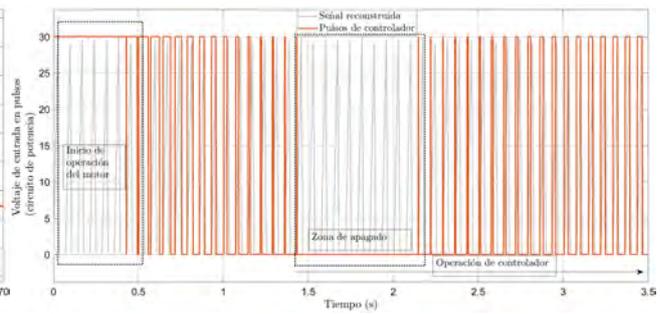
(a) Comportamiento del sistema identificado en lazo abierto.



(b) Respuesta del modelo identificado utilizando un control PID.



(c) Comportamiento del ángulo de energización con el control PID.



(d) Comportamiento del voltaje de entrada con el controlador PID activado.

Figura A.3. Aplicación de control PID

En la Figura A.3b se muestra el comportamiento del sistema cuando se activa el controlador PID presentando un cambio oscilatorio de 730 RPM a 525 RPM y después a 625 RPM donde empieza ajustarse hasta el valor de las 700 RPM tomándole un tiempo de 70 segundos. Mostrando los cambios del cálculo del ángulo de energización, la Figura A.3c muestra como el ángulo de energización se va ajustando hasta llegar al ángulo de que es de 29° antes del PMS.

La Figura A.3d presenta el comportamiento de la señal de encendido acorde al ajuste del control PID, en donde la primera etapa antes de los 1.5 s se comporta acorde a la prueba experimental. Una vez que se activa el controlador, el sistema manda un apagado dado que el nivel de error es negativo acorde a la condición propuesta y una vez que el nivel de error deja de ser negativo, este empieza a ajustar los tiempos de entrada del sistema hasta que lleve a la velocidad de referencia de 700 RPM, este efecto se visualiza en la Figura A.3b.

Los resultados de estas simulaciones muestran que el controlador PID tiene la capacidad de poder llevar al MRM a la velocidad deseada de una manera suave. Este comportamiento se muestra en la Figura A.3c, cuando el controlador es activado se observa como el ángulo de energización empieza a tener una pequeña oscilación variando el ángulo desde  $0^\circ$  a  $42^\circ$  y después a  $21^\circ$  en un tiempo de 5 segundos, posteriormente, el ángulo de energización calculado por el controlador continua variando sin presentar oscilaciones hasta  $29^\circ$  tomándole un tiempo demasiado largo seguir ajustado la velocidad deseada del motor ilustrado en la Figura A.3b. Sin embargo, si observamos la Figura A.3b en relación a la Figura A.3c cuando se cumple el ángulo de  $42^\circ$ , el motor no presenta una subida de velocidad de acuerdo a las pruebas de la Tabla 4.2, sino todo lo contrario, se reduce su velocidad y esto se observa en la Figura A.3d donde una vez que el controlador empieza a ajustar el ángulo de energización, este ajuste empieza a reducir el tiempo de la señal de alta del pulso cuadrado de 30 V indicando que no llega a energizarse correctamente la bobina y genera pérdidas de velocidad.

El efecto generado en la pérdida de velocidad es crucial en el MRM, esto se debe a que a las pruebas realizadas en la Tabla 4.2 indican que el cambio del ángulo de energización es sensible y este efecto de reducción de velocidad podría provocar que el motor se detenga. Además, el presentar un cambio oscilatorio en la velocidad del motor y que tarde demasiado para llegar hacia la referencia indicada provoca que no sea seguro utilizar este tipo de controlador en caso de ser implementado en el prototipo experimental, por consiguiente, es requerido utilizar otro tipo de controlador que pueda cumplir los siguientes requerimientos:

- No presentar cambios oscilatorios en la velocidad del motor.
- Llevar a la velocidad deseada en el menor tiempo posible.
- Que pueda realizar ajustes suaves en el cambio del ángulo de energización.

# Anexo B

## Análisis de campos magnéticos fuera del eje Z

### B.1. El solenoide, su comportamiento tridimensional

Para analizar al solenoide fuera del eje Z, se formula primero mediante un lazo de cable de corriente como se ilustra en la Figura B.1. Usando como referencia a [Lee and Son, 2007, Derby and Olbert, 2010, Ravaud et al., 2010], la densidad del campo magnético queda representado por la ecuación (B.1).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{-z \sin(\phi) \vec{a}_x + (z \sin(\phi)) \vec{a}_y + (a - \rho \sin(\phi)) \vec{a}_z}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi) + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi. \quad (\text{B.1})$$

Partiendo de la ecuación (B.1), la densidad del campo magnético de un solenoide esta dada por la ecuación (B.2)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n_a I a}{2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \int_{\zeta=-b}^{\zeta=b} \frac{((z - \zeta) \cos(\phi)) \vec{a}_\rho - (a - \rho \cos(\phi)) \vec{a}_z}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi) + (z - \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}} d\zeta d\phi, \quad (\text{B.2})$$

donde  $\rho$  es el radio con respecto al punto a analizar,  $\zeta$  es la altura del solenoide ( $b = \ell_E/2$ ) donde utiliza como punto de referencia el origen O,  $a$  es el radio del solenoide,  $z$  es la altura con respecto al punto a analizar. La integración de la ecuación (B.2) respecto a  $d\phi$  se vuelve compleja, por consiguiente, se realiza un cambio de variable [Derby and Olbert, 2010] para quedar representada de forma de función elíptica para ser evaluada por método numérico como se muestra en las ecuaciones (B.3) y (B.4)

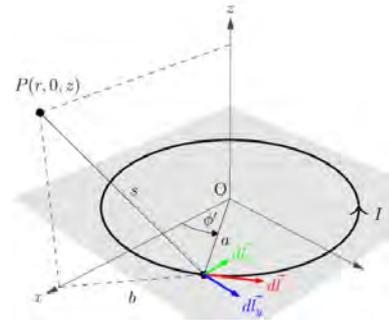


Figura B.1. Análisis fuera del eje Z.

$$B_\rho = \frac{\mu_0 n_a I a}{\pi} \int_0^{\pi/2} (A_0) \left[ \frac{\alpha_+}{\sqrt{\cos^2(\psi) + k_+^2 \sin^2(\psi)}} - \frac{\alpha_-}{\sqrt{\cos^2(\psi) + k_-^2 \sin^2(\psi)}} \right] d\psi, \quad (\text{B.3})$$

$$B_z = \frac{\mu_0 n_a I a}{\pi} \int_0^{\pi/2} (A_1) \left[ \frac{\beta_+}{\sqrt{\cos^2(\psi) + k_+^2 \sin^2(\psi)}} - \frac{\beta_-}{\sqrt{\cos^2(\psi) + k_-^2 \sin^2(\psi)}} \right] d\psi, \quad (\text{B.4})$$

donde

$$A_0 = \cos^2(\psi) - \sin^2(\psi), \quad A_1 = \frac{\cos^2(\psi) + \gamma \sin^2(\psi)}{\cos^2(\psi) + \gamma^2 \sin^2(\psi)}, \quad \alpha_- = \frac{a}{\sqrt{z_-^2 + (\rho + a)^2}},$$

$$z_+ = z + b, \quad z_- = z - b, \quad k_+^2 = \frac{z_+^2 + (a - \rho)^2}{z_+^2 + (a + \rho)^2}, \quad k_-^2 = \frac{z_-^2 + (a - \rho)^2}{z_-^2 + (a + \rho)^2}, \quad \alpha_+ = \frac{a}{\sqrt{z_+^2 + (\rho + a)^2}},$$

$$\beta_+ = \frac{z_+}{\sqrt{z_+^2 + (\rho + a)^2}}, \quad \beta_- = \frac{z_-}{\sqrt{z_-^2 + (\rho + a)^2}}, \quad \gamma = \frac{a - \rho}{a + \rho}.$$

Los métodos numéricos que pueden usarse son [Derby and Olbert, 2010]:

- Función elíptica generalizada (rápida pero con un nivel de error pequeño, no consume mucho gasto computacional)

$$C(k, p, c, s) = \int_0^{\pi/2} \frac{c \cdot \cos^2(\varphi) + s \cdot \sin^2(\varphi)}{(\cos^2(\varphi) + p \cdot \sin^2(\varphi) \sqrt{\cos^2(\varphi) + k^2 \sin^2(\varphi)})} d\varphi. \quad (\text{B.5})$$

- Regla de Simpson (más exacta pero demasiado lento, consume mucho gasto computacional)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right], \quad (\text{B.6})$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}, \quad n = \text{número de intervalos.}$$

Para evaluar las ecuaciones (B.3) y (B.4) utilizaremos el método numérico de la ecuación (B.5), quedando representadas por las ecuaciones (B.7) y (B.8)

$$B_z = \frac{\mu_0}{\pi} n_a I \left[ \alpha_+ C(k_+, 1, 1, -1) - \alpha_- C(k_-, 1, 1, -1) \right], \quad (\text{B.7})$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{\pi} n_a I \frac{a}{a + \rho} \left[ \beta_+ C(k_+, \gamma^2, 1, \gamma) - \beta_- C(k_-, \gamma^2, 1, \gamma) \right]. \quad (\text{B.8})$$

Para simular el campo magnético fuera del eje Z del solenoide utilizaremos las mismas dimensiones y condiciones utilizadas para el electroimán del MRM. La altura del electroimán es de 9 cm con un radio de 7 mm para el núcleo magnético, donde el núcleo tiene una permeabilidad relativa ( $\mu_r$ ) de 430 unidades y el solenoide será alimentado con 15 A. Dado que para esta simulación se está trabajando con un solenoide, este no puede ser un embobinado multicapa y se está considerando un alambre magneto de calibre 14 que presenta un diametro de 1.628 mm, con esta condición, el solenoide tendría solamente 55 vueltas. Para la prueba consideramos que nuestro punto de análisis sera fuere del eje Z en  $P(z, \rho)$ , donde  $\rho=0.007$  y se analizará lo largo el eje Z.

En La Figura B.2 se ilustra la forma que tiene el campo magnético del solenoide, en el cual este campo es obtenido mediante las ecuaciones (B.7) y (B.8). Dentro de la Figura B.2, se muestra en color azul la zona de análisis de la densidad del campo magnético del solenoide fuera del eje Z.

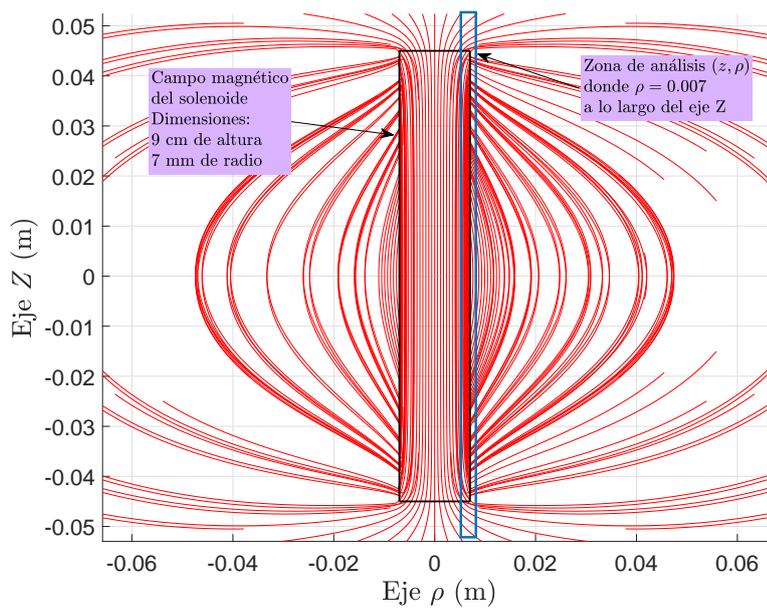


Figura B.2. Punto de análisis del campo magnético del solenoide fuera de su eje Z.

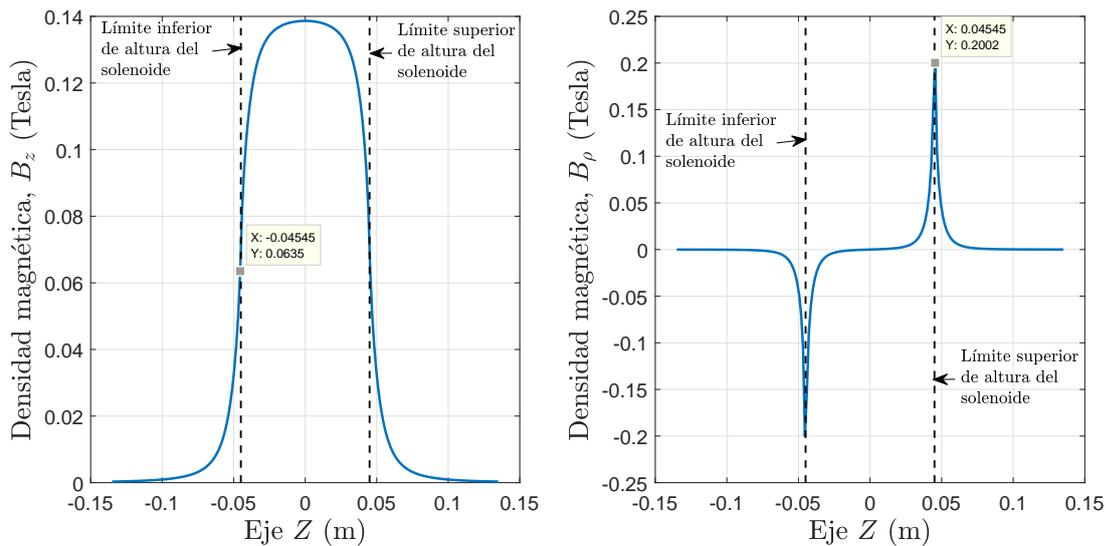


Figura B.3. Comportamiento de la densidad del campo magnético  $B_z$  y  $B_\rho$  fuera del eje Z del solenoide con núcleo magnético.

En la Figura B.3 se muestra el comportamiento de la densidad del campo magnético  $B_z$  y  $B_\rho$  en la zona de análisis mostrada en la Figura B.3. Cuando el punto de análisis de  $z=0$ , la densidad del campo magnético  $B_z$  se encuentra concentrada en su valor más alto y  $B_\rho$  se vuelve cero. Al empezar a moverse el punto de análisis hasta la esquina del solenoide, se observa como la densidad del campo magnético de  $B_z$  empieza a reducirse y  $B_\rho$  empieza a incrementarse hasta llegar a su valor más alto cuando  $z=\pm 0.045$ . Al igual que los imanes permanentes, las esquinas son una de las zonas con mayor concentración de campo magnético y esto se replica en los solenoides.

Las ecuaciones (B.3) y (B.4) permiten el poder representar el comportamiento de la densidad del campo magnético del solenoide de manera tridimensional. El tener esta representación permite el

tener la posibilidad de analizar las interacciones que podría haber entre un solenoide y un imán de neodio desde el comportamiento tridimensional utilizando la ecuación (3.36).

Cabe mencionar que solo esta sección abarca el como se desarrolla el análisis del campo magnético fuera del eje  $Z$  para un solenoide y que todavía se tiene que desarrollar y resolver el análisis para un solenoide tipo multicapa que es utilizado en el prototipo experimental del MRM. Esta sección la presentamos como una base guía para el poder desarrollar el campo magnético tridimensional del solenoide tipo multicapa.

---