



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Supervisión basada en observador de un proceso de destilación por  
arrastre de vapor

presentada por

**Ing. Elías Ramos Hernández**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica**

Director de tesis

**Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza**

Codirector de tesis

**Dr. Juan Reyes Reyes**

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2024.

Cuernavaca, Mor.,  
No. de Oficio:  
Asunto:

10/junio/2024

DIE/067/2024

Aceptación de documentos de tesis

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZÁRAGOZA  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO  
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. ELÍAS RAMOS HERNÁNDEZ**, con número de control **M22CE023** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Supervisión Basada en Observador de un Proceso de Destilación por Arrastre de Vapor"**, y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS



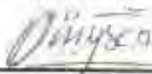
Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza  
Doctor en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5505019

CODIRECTOR DE TESIS



Dr. Juan Reyes Reyes  
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control  
Automático  
Cédula profesional 4214833

REVISOR 1



Dr. Enrique Quintero Marmol Marquez  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química  
Cédula profesional 10259407

REVISOR 2



Dr. Manuel Adam Medina  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5992003

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres, Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Estudiante  
JGM/kmg

Cuernavaca, Mor.,  
No. De Oficio:  
Asunto:

11/junio/2024  
SAC/190/2024  
Autorización de  
impresión de tesis

**ELÍAS RAMOS HERNÁNDEZ  
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"Supervisión Basada en Observador de un Proceso de Destilación por Arrastre de Vapor"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®  
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*



**CARLOS MANUEL ASTORGA ZÁRAGOZA  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica  
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



# Dedicatoria

“Esta tesis está dedicada a mi madre y a mi hermana, mis abuelos, a todo el resto de mi familia y mis amigos por su gran apoyo en todo momento, por motivarme a ser mejor persona cada día, por sus consejos, compañía y amistad”

# Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por acompañarme siempre, por brindarme su protección y por ver sus maravillas a lo largo de estos dos años de maestría.

Agradezco a mi madre Dora Hernández Morales y así mismo a mi hermana Azucena Ramos Hernández, por su amor incondicional y su apoyo en los momentos más difíciles, por sus oraciones y siempre tener una palabra de aliento, han sido un ejemplo de amor, paciencia y dedicación. También, agradezco enormemente a mis abuelos Alicia Morales Gómez, Antonio Hernández Reyes y a mi bisabuela Adelaida Gómez Sánchez, quienes me han apoyado en mis sueños y metas como si fueran mi amado padre Elías Ramos Sánchez y mis amados abuelos Juan Ramos Pavón y Guadalupe Sánchez Sánchez a quienes llevo en mi corazón todo el tiempo.

A mis asesores, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y el Dr. Juan Reyes Reyes, por su paciencia, amabilidad, comprensión y disponibilidad para consultar cualquier duda, muchas gracias por cada consejo, sugerencia y desafío, todo ello fue de gran ayuda para superar cada obstáculo. Los aprecio y respeto muchísimo.

A mis tías y tíos. A todos mis primos y primas a quienes amo mucho.

A los integrantes del comité revisor: Dr. Enrique Quintero Mármol Márquez y el Dr. Manuel Adam Medina, gracias por enriquecer este trabajo con sus observaciones, comentarios y sugerencias. Les agradezco por su disponibilidad y amabilidad en todo momento.

A mis profesores de la maestría Dr. Carlos Astorga, Dr. Juan Reyes, Dra. Gloria Osorio, Dr. Manuel Adam , Dr. Enrique Quintero, Dr Gerardo Guerrero, Dr. Carlos Daniel y Dr. Ricardo Fabricio, a quienes agradezco su paciencia y dedicación para transmitirme sus conocimientos y habilidades en el área de control automático.

A mis amigos de la maestría Elías, Daniel, Roci, Dulce, Óscar, Alberto, Yare, Berny, Jhonatán e Ireti y todos los demás, les agradezco muchísimo por su amistad, amabilidad y compañerismo.

Quiero expresar mi especial agradecimiento a Alejandro Pineda, quien no solo fue mi compañero de clases y trabajos académicos, sino que se convirtió en un gran amigo para mí, motivándome a ser cada día mejor. Más que a un amigo, Alejandro se convirtió en un hermano para mí.

Especialmente agradezco a Isaac Zetina, Ángel Guadarrama, Felipe Ramírez y Eusebio Alvarado quienes ayudaron a este servidor aportando de sus conocimientos, tiempo y esfuerzo en el desarrollo de esta tesis, estoy enormemente agradecido.

A mis amigos y hermanos en la fe: Virgilio, Ana, Alondra, Alberto, Esmeralda, Cecilia, Rosalía, Bonifacia, en quienes encontré una familia lejos de casa.

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo económico brindado para la realización y culminación de mis estudios de posgrado.

Finalmente, agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por haberme brindado la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado y ser parte de su comunidad académica, es sin duda un excelente centro de estudios.

# Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el diseño, análisis y simulación de dos observadores, los cuales conforman un esquema de supervisión que tiene como objetivo estimar las variables de estado que son difíciles de medir físicamente en un proceso de destilación por arrastre de vapor. El esquema también es capaz de estimar fallas en la etapa de obtención del producto final, que para el caso de este trabajo es aceite esencial de plantas aromáticas.

En este trabajo, el modelo matemático se basa en los fenómenos y las fases involucradas en el proceso de destilación por arrastre de vapor, tales como la exudación, la difusión y la evaporación. En cuanto a las fases, se considera la acumulación de aceite en los tricomas de la planta, la formación de una capa de agua-aceite en la superficie de las hojas y el aceite libre en fase de vapor. El modelo matemático se representa como un sistema de ecuaciones diferenciales, que describe el comportamiento del aceite a lo largo de la destilación por arrastre de vapor. Parte fundamental de este trabajo es analizar el modelo desde la perspectiva de control, considerándolo como un sistema no lineal. Por tanto, al adoptar esta perspectiva y aprovechando la estructura matemática del modelo, se realiza el diseño de los observadores.

El primer observador diseñado es un observador no lineal, cuya particularidad es la capacidad de estimar dos variables importantes en el proceso de destilación por arrastre de vapor: la masa de aceite esencial en el interior de los tricomas y la masa de aceite en la capa acuosa. El segundo observador diseñado, es un observador que deriva de la estructura del observador dinámico generalizado, la particularidad de este segundo observador es que además de estimar todos los estados del sistema, sea capaz de estimar fallas en etapas importantes del proceso.

Existen pocos trabajos que abordan el diseño de observadores en relación a los procesos de extracción de aceites esenciales cómo la destilación por arrastre de vapor. Por lo tanto, este trabajo busca aportar al estado del arte con el diseño de dos observadores, uno para la estimación de estados y el otro para estimar fallas en una de las etapas del proceso de destilación por arrastre de vapor. Es importante resaltar que en este trabajo se conservan las no linealidades del modelo matemático a diferencia de algunos trabajos que emplean métodos de linealización para simplificar la metodología de diseño de los observadores.

Finalmente, se presentan los resultados de simulación del modelo matemático del proceso de destilación por arrastre de vapor, así como las estimaciones de ambos observadores. Estos resultados permiten validar la capacidad de los observadores para estimar las variables de estado y también las fallas. Es relevante mencionar que se realizan experimentos en los que fue posible obtener aceites esenciales de tres materiales vegetales diferentes *eucalipto*, *romero* y *salvia*.



# Abstract

This thesis work presents the design, analysis and simulation of two observers, which form a monitoring scheme that aims to estimate the state variables that are difficult to measure physically in a steam distillation process. The scheme is also capable of estimating failures in the stage of obtaining the final product, which in the case of this work is essential oil from aromatic plants.

In this work, the mathematical model is based on the phenomena and phases involved in the steam distillation process, such as exudation, diffusion and evaporation. As for the phases, the accumulation of oil in the trichomes of the plant, the formation of an oil-water layer on the surface of the leaves and the free oil in vapor phase are considered. The mathematical model is represented as a system of differential equations, which describes the behavior of the oil throughout the steam distillation process. A fundamental part of this work is to analyze the model from the control perspective, considering it as a nonlinear system. Therefore, adopting this perspective and taking advantage of the mathematical structure of the model, the design of the observers is carried out.

The first observer designed is a non-linear observer, whose particularity is the ability to estimate two important variables in the steam distillation process: the mass of essential oil inside the trichomes and the mass of oil in the aqueous layer. The second observer designed is an observer based on the structure of a generalized dynamic observer, the particularity of this second observer is that in addition to estimating all the states of the system, it is capable of estimating failures in important stages of the process.

There are few works that address the design of observers in relation to essential oil extraction processes such as steam distillation. Therefore, this work seeks to contribute to the state of the art

with the design of two observers, one for state estimation and the other to estimate failures in one of the stages of the steam distillation process. It is important to emphasize that in this work the nonlinearities of the mathematical model are preserved, unlike some works that use linearization methods to simplify the design methodology of the observers.

Finally, the simulation results of the mathematical model of the steam entrainment distillation process are presented, as well as the estimates of both observers. These results allow validating the capacity of the observers to estimate the state variables and also the failures. It is relevant to mention that experiments are carried out in which it was possible to obtain essential oils from three different vegetable materials: eucalyptus, rosemary and sage.

# Índice general

Índice general	VIII
Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XV
Nomenclatura	XVII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes . . . . .	1
1.2 Planteamiento del problema . . . . .	2
1.3 Hipótesis . . . . .	3
1.4 Objetivos . . . . .	3
1.4.1 Objetivo general . . . . .	3
1.4.2 Objetivos particulares . . . . .	3
1.5 Estado del arte . . . . .	4
1.5.1 Modelos matemáticos para la extracción de aceites esenciales . . . . .	4
1.5.2 Técnicas para la estimación, supervisión y diagnóstico de fallas . . . . .	5
1.6 Propuesta de solución . . . . .	8
1.7 Alcances . . . . .	9
1.8 Aportaciones . . . . .	9
1.9 Marco Teórico . . . . .	10
1.9.1 Destilación por arrastre de vapor . . . . .	10
1.9.2 Esquema básico de la destilación por arrastre de vapor . . . . .	10
1.9.3 Fenómenos fundamentales del proceso . . . . .	12

1.9.4	Teoría básica sobre velocidad de reacción (cinética química).	14
1.9.5	Conceptos básicos sobre supervisión y diagnóstico de fallas	17
1.9.6	Observabilidad y observadores de estado	19
1.10	Organización del documento	27
<b>2</b>	<b>El proceso de destilación por arrastre de vapor</b>	<b>28</b>
2.1	Hipótesis generales para el modelo del proceso	29
2.2	Modelo matemático de la transferencia de aceite en la destilación por arrastre de vapor	35
2.2.1	Representaciones del modelo matemático	38
2.3	Simulación 1. Comportamiento de los estados del sistema	39
2.4	Simulación 2. Disminución del flujo de vapor	42
2.5	Simulación 3. Incremento del flujo de vapor	45
2.6	Actividades experimentales	48
2.6.1	Equipo experimental	48
2.6.2	Instrucciones para el montaje y habilitación del destilador.	49
2.6.3	Experimento 1. Destilación de aceite esencial de eucalipto.	55
2.6.4	Experimento 2. Destilación de aceite esencial de romero.	60
2.6.5	Experimento 3. Extracción de aceite esencial de salvia.	67
2.6.6	Cálculo del rendimiento	71
2.6.7	Subproductos	72
2.7	Conclusiones del capítulo	73
<b>3</b>	<b>Diseño de observadores</b>	<b>74</b>
3.1	Diseño de un observador para la estimación de variables de estado de un sistema no lineal	75
3.1.1	Estudio de la dinámica del error	76
3.1.2	Análisis de estabilidad	76
3.2	Diseño del observador para la estimación de fallas	78
3.2.1	Estudio de la dinámica del error	79
3.2.2	Parametrización de las matrices del observador	81
3.2.3	Análisis de estabilidad	83

3.3	Conclusiones del capítulo . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Resultados de simulación</b>	<b>87</b>
4.1	Diagrama de bloques del esquema de estimación de estados y fallas . . . . .	88
4.2	Observador para la estimación de estados del sistema de destilación por arrastre de vapor . . . . .	89
4.3	Simulación 4. Observador para la estimación de estados del proceso de destilación por arrastre de vapor. . . . .	93
4.4	Simulación 5. Prueba de convergencia del observador para la destilación de romero.	96
4.5	Simulación 6. Casos de falla en el proceso de destilación por arrastre de vapor. . . .	99
4.5.1	Primer caso de falla. . . . .	100
4.5.2	Segundo caso de falla. . . . .	102
4.5.3	Tercer caso de falla. . . . .	104
4.6	Simulación 7. Estimación de los casos de fallas . . . . .	107
4.6.1	Estimación de los estados para el primer caso de fallas. . . . .	109
4.6.2	Estimación del segundo escenario de fallas. . . . .	111
4.6.3	Estimación del tercer caso de fallas. . . . .	114
4.7	Conclusiones del capítulo. . . . .	118
<b>5</b>	<b>Conclusiones y aportaciones</b>	<b>119</b>
5.1	Alcance . . . . .	119
5.2	Conclusiones . . . . .	119
5.2.1	Del modelo matemático: . . . . .	120
5.2.2	De los observadores: . . . . .	120
5.2.3	De las actividades experimentales: . . . . .	122
5.3	Aportaciones y trabajos futuros . . . . .	122
5.3.1	Aportaciones . . . . .	122
5.3.2	Trabajos futuros . . . . .	123
5.3.3	Artículos publicados . . . . .	123
	<b>Bibliografía</b>	<b>124</b>
<b>A</b>	<b>Análisis de dimensionalidad</b>	<b>131</b>

<b>B Código para el cálculo de la observabilidad del sistema de DAV</b>	<b>133</b>
<b>C Cálculo de la constante de Lipschitz del sistema de DAV</b>	<b>136</b>

# Índice de figuras

1.1	Metodología propuesta . . . . .	8
1.2	Esquema básico de la destilación por arrastre de vapor . . . . .	12
1.3	Fenómeno de exudación . . . . .	13
1.4	Curva típica concentración-tiempo para el reactivo A . . . . .	14
1.5	Representación gráfica de los tipos de fallas . . . . .	18
1.6	Estimación de concentraciones en un reactor químico . . . . .	20
1.7	Esquema a bloques del observador Luenberger . . . . .	22
1.8	Esquema a bloques del observador proporcional . . . . .	23
1.9	Esquema a bloques del observador proporcional integral . . . . .	24
1.10	Esquema a bloques del observador dinámico generalizado . . . . .	25
2.1	Ruta de transferencia del aceite del tricoma a la corriente de vapor. . . . .	30
2.2	Interacción de flujos máxicos del aceite libre. . . . .	32
2.3	Proceso de destilación por arrastre de vapor. . . . .	35
2.4	Simulación 1. Masa de aceite esencial dentro de los tricomas . . . . .	40
2.5	Simulación 1. Masa de aceite esencial en la capa acuosa . . . . .	41
2.6	Simulación 1. Masa de aceite esencial recolectado . . . . .	41
2.7	Simulación 2. Disminución del flujo de vapor . . . . .	43
2.8	Simulación 2. Masa de aceite esencial dentro de los tricomas . . . . .	43
2.9	Simulación 2. Masa de aceite esencial en la capa acuosa . . . . .	44
2.10	Simulación 2. Masa de aceite esencial recolectado . . . . .	44
2.11	Simulación 3. Incremento del flujo de vapor . . . . .	45
2.12	Simulación 3. Masa de aceite esencial en los tricomas. . . . .	46
2.13	Simulación 3. Masa de aceite esencial en la capa acuosa . . . . .	46

2.14 Simulación 3. Masa de aceite esencial recolectado . . . . .	47
2.15 Elementos de un destilador. . . . .	48
2.16 Configuración del barril. . . . .	50
2.17 Tratamiento de las hojas de eucalipto. . . . .	51
2.18 Formas de acomodación del lecho. . . . .	51
2.19 Montaje del condensador. . . . .	52
2.20 Instalación del sensor de temperatura. . . . .	52
2.21 Sistema de enfriamiento. . . . .	53
2.22 Generación de vapor. . . . .	54
2.23 Partes de la fuente de calor. . . . .	54
2.24 Recolección del destilado. . . . .	55
2.25 Montaje completo del equipo. . . . .	56
2.26 Evolución de la temperatura del agua fría en la destilación de eucalipto. . . . .	57
2.27 Evolución de la temperatura del vapor en la destilación de eucalipto. . . . .	58
2.28 Aceite esencial de eucalipto. . . . .	59
2.29 Medida del peso del barril. . . . .	61
2.30 Lavado de hojas de romero. . . . .	61
2.31 Barril cargado de hojas de romero. . . . .	62
2.32 Evolución de la temperatura del agua fría en la destilación de romero . . . . .	63
2.33 Evolución de la temperatura del vapor en la destilación de romero . . . . .	63
2.34 Extracción del aceite esencial de romero. . . . .	65
2.35 Cantidad de aceite esencial en el recipiente. . . . .	66
2.36 Aceite esencial de romero. . . . .	66
2.37 Evolución de la temperatura del agua fría en la destilación de salvia . . . . .	68
2.38 Evolución de la temperatura del vapor en la destilación de salvia . . . . .	68
2.39 Volumen de agua sobrante. . . . .	70
2.40 Aceite esencial de salvia. . . . .	70
2.41 Mezcla bifásica (aceite-agua de perfume) . . . . .	72
2.42 Productos y subproductos . . . . .	73
4.1 Estructura del esquema de estimación. . . . .	88



---

4.2	Simulación 4. Variación de la entrada $u(t)$ . . . . .	94
4.3	Simulación 4. Estimación de la masa de aceite en los tricomas $x_1(t)$ . . . . .	94
4.4	Simulación 4. Estimación de la masa de aceite en la capa acuosa $x_2(t)$ . . . . .	95
4.5	Simulación 4. Estimación de la masa de aceite esencial recolectado $x_3(t)$ . . . . .	95
4.6	Simulación 5. $\hat{x}_1(t)$ vs $x_1(t)$ . . . . .	97
4.7	Simulación 5. $\hat{x}_2(t)$ vs $x_2(t)$ . . . . .	98
4.8	Simulación 5. $\hat{x}_3(t)$ vs $x_3(t)$ . . . . .	98
4.9	Fuga en el tubo de salida del producto destilado. . . . .	100
4.10	Falla con respecto al tiempo. . . . .	101
4.11	Estados del sistema. . . . .	101
4.12	Falla abrupta con respecto al tiempo. . . . .	103
4.13	Efecto de la falla en los estados del sistema. . . . .	103
4.14	$\delta_{f_s}(t)$ . . . . .	105
4.15	Comportamiento de la falla con respecto al tiempo. . . . .	105
4.16	Efecto del tercer caso de falla en los estados del sistema. . . . .	106
4.17	$x_1(t)$ vs $\hat{x}_1(t)$ . . . . .	109
4.18	$x_2(t)$ vs $\hat{x}_2(t)$ . . . . .	109
4.19	$x_3(t)$ vs $\hat{x}_3(t)$ . . . . .	110
4.20	$f_s(t)$ vs $\hat{f}_s(t)$ . . . . .	110
4.21	$x_1(t)$ vs $\hat{x}_1(t)$ . . . . .	113
4.22	$x_2(t)$ vs $\hat{x}_2(t)$ . . . . .	114
4.23	$x_1(t)$ vs $\hat{x}_1(t)$ . . . . .	116
4.24	$f_s(t)$ vs $\hat{f}_s(t)$ . . . . .	117

# Índice de tablas

Tabla 2.1	Definición de parámetros para una flor de lavanda . . . . .	37
Tabla 2.2	Obtención de la primera gota del destilado de eucalipto. . . . .	58
Tabla 2.3	Volumen de agua en la destilación de eucalipto. . . . .	59
Tabla 2.4	Obtención de la primera gota de destilado de romero. . . . .	64
Tabla 2.5	Volumen del agua de perfume en la destilación de romero. . . . .	64
Tabla 2.6	Obtención de la primera gota de destilado de salvia. . . . .	69
Tabla 2.7	Volumen del agua de perfume en la destilación de salvia. . . . .	69
Tabla 2.8	Porcentaje de rendimiento de los aceites esenciales . . . . .	71
Tabla 4.1	Definición de parámetros para una flor de romero . . . . .	96
Tabla A.1	Unidades de las variables y parámetros . . . . .	131

# Nomenclaturas

## Conjuntos

$\mathbb{R}$	Conjunto de todos los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vector de números reales de dimensión $n$ ,
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjunto de matrices de números reales de dimensión $n \times n$ .

## Notación referente a vectores y matrices

$A > 0$	Matriz real $A$ positiva definida.
$A < 0$	Matriz real $A$ negativa definida.
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$ .
$A^T$	Transpuesta de la matriz $A$ .
$\det(A)$	Determinante de la matriz $A$ .
$\text{rank}(A)$	Rango de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

## Notación referente al modelo matemático

Parámetros	Descripción	Unidades
$k_{tr}$	Constante de velocidad de exudación.	$1/min$
$h$	Espesor de las manchas de aceite.	$cm$
$\rho_{eo}$	Densidad del aceite esencial.	$g/cm^3$
$C^*$	Concentración de masa del vapor de aceite esencial en la interfase.	$g/cm^3$
$k_g$	Coefficiente de transferencia de masa.	$cm/min$
Variables	Descripción.	
$G$	Aceite esencial retenido en los tricomas por masa vegetal fresca.	$g/g$
$W$	Masa vegetal fresca.	$g$
$M^{os}$	Masa en la capa acuosa.	$g$
$M^{sd}$	Masa de aceite esencial recolectado.	$g$
$Q$	Flujo volumétrico de vapor.	$cm^3/min$

## Notación referente a los observadores

### Variables

$\hat{x}(t)$

$u(t) = Q$

$\hat{y}(t)$

$f(\cdot), g(\cdot)$

$\zeta(t)$

$\varepsilon(t)$

$e_f(t)$

$\beta(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}$

### Descripción

Vector de variables de estado estimadas.

Variable de entrada.

Vector de variables de salida estimadas.

Funciones vectoriales de variable vectorial

Vector de estado del observador.

Vector de error transformado de estimación.

Vector de error de estimación de la falla  $f_a(t)$ .

Vector aumentado de la dinámica del error de estimación.

### Acrónimos

LMI

Desigualdad Matricial Lineal.

DAV

Destilación por Arrastre de Vapor.

GC

Cromatografía de gases

MS

Espectrometría de masas

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

La destilación por arrastre de vapor sigue siendo uno de los procesos importantes en las industrias de extracción de aceites esenciales. Estos aceites tienen una amplia gama de aplicaciones en diversos sectores, como en la fabricación de perfumes, la aromaterapia, la elaboración de productos de belleza y cuidado personal, entre otros.

El proceso de la destilación fue introducido por los alquimistas egipcios, quienes emplearon una gran cantidad de aparatos diseñados para vaporizar sustancias volátiles y tratar los metales con ellas. Por su parte, los alquimistas griegos, en el siglo I de nuestra era, inventaron el alambique para destilar sustancias (Valiente Barderas, 1996). Un alambique o destilador es el equipo más usado para la destilación por arrastre de vapor y está formado por un barril en el que se calienta el material vegetal, una parte fría para condensar el vapor producido y un recipiente para recogerlo. La primera destilación por arrastre de vapor fue hecha probablemente por Claude Darius (1533-1594), quien calentó la parte del recipiente entre la base y la cabeza (Kockmann, 2014).

Se cree también que la destilación directa con vapor se hizo en épocas tempranas por químicos chinos a partir del siglo VII D.C, los cuales empleaban un baño de agua y dirigían el vapor a través de una rejilla de bambú que transportaba los productos destilados. El vapor arrastraba fracciones más ligeras y se condensaban en un recipiente frío que contenía el material disuelto (Needham, 1974).

En los procesos de destilación por arrastre de vapor, es esencial medir variables importantes a través de sensores. No obstante, en algunos casos, resulta difícil lograr la medición de todas las variables mediante el uso de sensores físicos debido a razones como el alto costo de los instrumentos, sensores intrusivos o la inexistencia de un sensor para la variable de interés. En estos escenarios, las técnicas del área de control automático, como el modelado de sistemas y el diseño de observadores de estado, resultan de gran utilidad.

Una parte fundamental del proceso de destilación por arrastre de vapor, es la recuperación de los aceites esenciales de plantas. La transferencia del aceite esencial implica tres etapas: *i*) la expulsión del aceite de los tricomas del material vegetal, *ii*) la formación de una capa bifásica (aceite-agua) en la superficie del material vegetal y *iii*) el aceite esencial recolectado por la corriente de vapor.

## 1.2. Planteamiento del problema

Los procesos de extracción de aceites esenciales pueden presentar fallas asociadas a diversos factores, como por ejemplo: la exposición a vibraciones que puede provocar daños en el dispositivo de recolección, la existencia de fugas en el tubo de salida del producto destilado, la disminución de la corriente de vapor debido a la pérdida de la flama, entre otros. Todos estos escenarios impactan negativamente el desempeño del sistema.

La destilación por arrastre de vapor, técnica fundamental en la obtención de aceites esenciales, enfrenta desafíos en su supervisión. La carencia de un esquema de supervisión limita la detección oportuna de fallas, comprometiendo la calidad y eficiencia del proceso. En ese contexto, esta investigación abordará un modelo matemático que represente la transferencia de aceite en un proceso de destilación por arrastre de vapor, manteniendo las no linealidades entre la entrada y los estados. Con base en este modelo, se hará la propuesta de un esquema de supervisión basado en observador, dando énfasis al diseño de dos observadores: uno para la estimación de variables de estado y otro para la estimación simultánea de estados y fallas.

## 1.3. Hipótesis

El diseño y aplicación de los observadores de estado podría ofrecer beneficios significativos para el proceso de destilación por arrastre de vapor, al permitir la supervisión y estimación de variables internas del proceso, así como la estimación de fallas en etapas críticas e importantes de la destilación por arrastre de vapor.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Proponer un esquema de supervisión basado en el observador en un proceso de destilación por arrastre de vapor para la extracción de aceites esenciales. La finalidad del esquema de supervisión es estimar las variables de estado que son difíciles de medir físicamente en el proceso y además estimar fallas en la etapa de recolección del aceite.

### 1.4.2. Objetivos particulares

- Analizar y simular un modelo matemático que represente a un sistema de destilación por arrastre de vapor.
- Parametrizar el modelo matemático de acuerdo con un sistema real, para el diseño de observadores.
- Diseñar un observador para la estimación de variables de estado.
- Proponer un algoritmo de estimación de fallas en el proceso de destilación por arrastre de vapor.

## 1.5. Estado del arte

### 1.5.1. Modelos matemáticos para la extracción de aceites esenciales

Existen diversas técnicas y modelos matemáticos que abordan la extracción de aceites esenciales, los cuales pueden ser sencillos o complejos dependiendo de la técnica de extracción y las consideraciones del modelado. Por ejemplo, en el trabajo de Cerpa *y col.* (2008) se propone un modelo de tipo fenomenológico que describe la transferencia de aceite desde el interior del material vegetal hasta la corriente de vapor. En Sartor *y col.* (2011), los autores presentan una simulación de la dinámica de extracción de aceite esencial de romero, con propósitos de estimar parámetros del modelo.

En Stamenić y Zizovic (2013), se desarrolló un modelo a microescala del proceso de extracción de fluidos supercríticos mediante ecuaciones diferenciales. Algunos modelos se centran en la cinética de extracción del aceite, como son: *i*) Modelo de pseudo primer orden (modelo logarítmico), *ii*) modelo de lavado instantáneo (difusión), y *iii*) modelo basado en el lavado y difusión simultáneos; estos se encuentran en el trabajo de Milojević *y col.* (2013), donde se realiza una comparación para determinar cual de los tres modelos presenta una mejor cinética de recuperación del aceite esencial.

En Almeida *y col.* (2018), se emplea un modelado termodinámico para la predicción de las propiedades termofísicas del proceso de extracción, en Valderrama y Ruiz (2018) se presenta una metodología para la obtención de una trayectoria óptima del flujo de vapor en un proceso de destilación por arrastre de vapor, con la finalidad de mejorar el rendimiento de la extracción y reducir el consumo de energía.

En acorde con la mejora del rendimiento de los procesos de extracción de aceites, el trabajo de Cedeño *y col.* (2019), realiza una comparación entre dos métodos de extracción: la destilación por arrastre de vapor y la destilación utilizando solventes orgánicos, donde se destaca más la destilación por arrastre de vapor, debido a que se obtiene un producto con menos impurezas respecto al otro método. Es importante mencionar que en el trabajo de Meziane *y col.* (2019), se exploraron diversos modelos matemáticos aplicados al proceso de extracción de aceites esenciales con el objetivo de identificar posibles generalizaciones de los modelos que describen la cinética de extracción.



En los trabajos de Arias *y col.* (2020) y Maharaj y McGaw (2020), se desarrollan modelos matemáticos dinámicos, para la destilación por lotes y la destilación por arrastre de vapor, uno basado en el balance de masas y energía y otro de tipo fenomenológico, respectivamente. En Souza Junior *y col.* (2020) se emplearon tres técnicas para la extracción de aceite esencial de jengibre: extracción por fluido supercrítico (EFS), destilación por arrastre de vapor (DAV) e hidrodestilación (HD), con el propósito de determinar las condiciones óptimas para la extracción. En trabajos más recientes como en Lainez-Cerón *y col.* (2021) analizan el efecto de las variables en el proceso de extracción de aceite mediante dos modelos matemáticos. En Hodel *y col.* (2021) se propone un modelo dinámico no aleatorio de dos líquidos, el cual describe la interacción entre los disolventes y los terpenos en un proceso de destilación. En De Andrade *y col.* (2021) se propone una metodología para la creación de gemelos digitales que funcionan como réplicas virtuales imitando las características y comportamientos del proceso, para mejorar su rendimiento.

### **1.5.2. Técnicas para la estimación, supervisión y diagnóstico de fallas**

Existen trabajos que han abordado diferentes aspectos relacionados con la supervisión y diagnóstico de fallas en columnas de destilación. Por ejemplo, Gonzalez (2008) realiza el diseño e implementación de un observador continuo-discreto en una columna de destilación de doce platos para estimar las fracciones molares del componente más volátil de la mezcla, por su parte Téllez (2010) diseña un sistema de supervisión electrónica en línea basado en un banco de observadores dedicados (DOS) para el monitoreo, detección y diagnóstico de fallas. En Montiel (2012) se propone una estrategia para simplificar el modelo no lineal de una columna de destilación binaria, facilitando su aplicación en la estimación de variables y diagnóstico de fallas. En Téllez-Anguiano *y col.* (2016), se desarrolla un sistema de detección y aislamiento de fallas para los sensores de una columna de destilación, basado en un observador de alta ganancia continuo-discreto.

Otros métodos y esquemas de diagnóstico en procesos de destilación, son los sistemas de control tolerante a fallas Ortiz Torres *y col.* (2016), diagnóstico de fallas con soporte de máquinas de vectores Taqvi *y col.* (2018), modelos híbridos basados en redes neuronales Li *y col.* (2019), detección de suciedad en membranas de contacto directo Karam y Laleg-Kirati (2019), y mecanismos de detección y aislamiento de fallas en sistemas de tanques Almaya *y col.* (2020), por mencionar algunos.

En Sun *y col.* (2020) se desarrolla un modelo de regresión de mínimos cuadrados parciales para predecir fallas en un destilador del proceso de Tennessee Eastman, utilizando señales de entrada/salida y ajustando parámetros durante el funcionamiento anormal.

En el trabajo de Tarcsay *y col.* (2021), se presenta un enfoque híbrido que combina una relación de paridad y un sistema difuso para gestionar la detección y clasificación de fallas aditivas y multiplicativas en una unidad de destilación. En Ge *y col.* (2021) se muestra un modelo basado en una red neuronal convolucional para el diagnóstico de fallas en un proceso complejo de destilación reactiva. Wang *y col.* (2022) propusieron una metodología que utiliza procesamiento de señales acústicas y un algoritmo para la detección y clasificación de fallas en el funcionamiento de una torre de destilación de placas, permitiendo el monitoreo efectivo en condiciones normales y de inundación.

En trabajos más recientes como en Ortiz-Torres *y col.* (2023) se presenta un enfoque que combina control y diagnóstico de fallas para una columna de destilación de nueve platos. Se emplea linealización para controlar la composición molar en platos específicos. Además, se implementa un observador de modo deslizante para detectar fallas en sensores y actuadores. En Verde (2023) presentaron un algoritmo de detección y diagnóstico de fallas en la sección de calentamiento del hervidor de una columna de destilación. Su enfoque incluye un convertidor buck-boost y observadores difusos de modos deslizantes para evaluar síntomas de fallas.

## Aspectos relevantes del estado del arte.

- En la primera sección del estado del arte, la cual aborda los modelos matemáticos para la extracción de aceites esenciales, se mencionan diversas metodologías y modelos matemáticos desde distintos puntos de vista, como por ejemplo: Modelos termodinámicos (Almeida *y col.*, 2018), modelos a microescala (Stamenic y Zizovic, 2013), modelos fenomenológicos (Cerpa *y col.*, 2008), comparaciones entre modelos (Cedeño *y col.*, 2019), simulaciones de la dinámica de extracción (Sartor *y col.*, 2011). En este trabajo de tesis, se presenta una metodología desde el punto de vista del control automático, donde el modelo matemático se representa como un sistema no lineal con entradas, salidas y variables de estado, con la finalidad de aplicar técnicas de control automático como el diseño de observadores para sistemas no lineales.

- Existen pocos trabajos de investigación como los de Cerpa *y col.* (2008), Valderrama y Ruiz (2018) que abordan la destilación por arrastre de vapor con ecuaciones dinámicas y que además consideran los fenómenos físicos involucrados en el proceso de destilación por arrastre de vapor. Por lo cual, es relevante estudiar, comprender y proponer nuevas metodologías para abordar los modelos dinámicos de este tipo de procesos. En este trabajo de tesis, se emplea el diseño de observadores no lineales para estimar las variables de estado no medibles en el proceso de destilación por arrastre de vapor y con esto proponer un esquema de supervisión.
- En la segunda sección del estado del arte, se presentan diversos trabajos que aplican técnicas de estimación, supervisión y diagnóstico de fallas en procesos de destilación. Por ejemplo, se ha investigado el diseño de observadores continuos-discretos (Gonzalez, 2008), bancos de observadores (Téllez, 2010), observadores de alta ganancia (Téllez-Anguiano *y col.*, 2016) y sistemas tolerantes a fallas (Ovares, 2016) etc. Mayormente estos algoritmos han sido aplicados con éxito en columnas de destilación. A diferencia de estos trabajos, esta tesis se centra en la transferencia del aceite de un proceso de destilación por arrastre de vapor, se mantienen las no linealidades del modelo. Además, se realizará un esquema de estimación de estados y fallas que no ha sido presentado en ninguno de los trabajos mencionados en el estado del arte.

### **Conclusión del estado del arte**

En esta revisión bibliográfica se percibe un significativo interés en los modelos que abordan el proceso de extracción de aceites esenciales, destacando entre ellos la destilación por arrastre de vapor. Asimismo, se observa que diversas técnicas de estimación, supervisión y diagnóstico de fallas han sido aplicadas con éxito en columnas de destilación. No obstante, es importante señalar que en la mayoría de los trabajos presentados en el estado del arte, se han empleado métodos de linealización para reducir la complejidad de la metodología. La relación entre modelos y técnicas aplicadas en la destilación convencional sugiere la posibilidad de extender estas estrategias específicamente al proceso de destilación por arrastre de vapor. En este trabajo de investigación, se abordará el modelo matemático que representa la transferencia de aceite en el proceso de DAV, manteniendo las no linealidades del sistema. Adicionalmente, se realizarán representaciones del modelo con el objetivo de proponer un esquema de supervisión y estimación de fallas específicamente adaptado para el proceso de destilación por arrastre de vapor.

## 1.6. Propuesta de solución

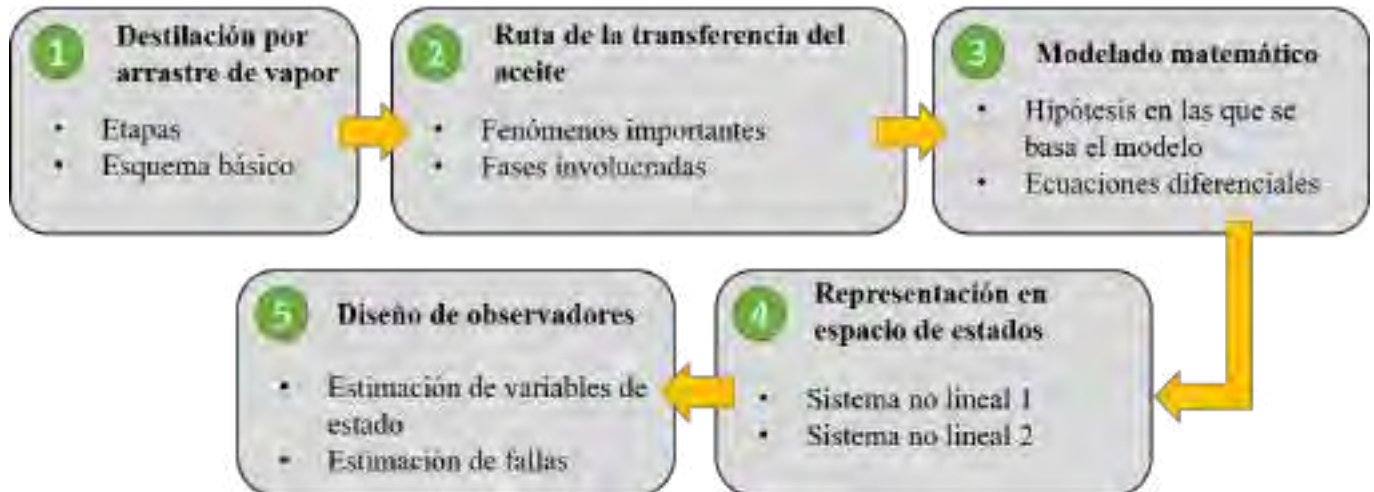


Fig. 1.1. Metodología propuesta

- Fase 1. Estudio de la destilación por arrastre de vapor. En esta fase se investiga de manera general las etapas del proceso de destilación por arrastre de vapor, su funcionamiento, así como su esquema básico.
- Fase 2. Ruta de transferencia del aceite esencial. En esta fase se describen las fases y fenómenos involucrados en la trayectoria que recorre el aceite esencial a lo largo de la destilación.
- Fase 3. Modelado matemático. En esta fase se formulan las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento dinámico del aceite esencial en las diferentes etapas de la destilación por arrastre de vapor.
- Fase 4. Representación en espacio de estados. En esta fase se llevan a cabo dos representaciones en espacio de estados para el modelo matemático del proceso de destilación por arrastre de vapor.
- Fase 5. Diseño de observadores. En esta fase se aborda el diseño, análisis y simulación de los observadores para la estimación de variables de estado internas del sistema, así como la estimación de fallas.

## 1.7. Alcances

- En este trabajo se analiza un modelo matemático que describe la transferencia de aceite esencial en la destilación por arrastre de vapor, se seleccionó este modelo porque mediante ecuaciones diferenciales no lineales, es capaz de representar la dinámica del aceite esencial en las etapas del proceso.
- Para la propuesta del esquema de supervisión se considera el diseño de dos observadores no lineales, uno para la estimación de las variables no medibles del proceso y otro para la estimación de fallas en la etapa de recolección del producto destilado.
- Los resultados de convergencia de los observadores se realizarán mediante simulaciones en base al programa de MATLAB en la versión 2021a.
- Se realizan experimentos para extraer aceite esencial de tres plantas aromáticas: eucalipto, romero y salvia.

## 1.8. Aportaciones

- Análisis y simulación del modelo matemático del proceso de destilación por arrastre de vapor y sus representaciones para favorecer el diseño de los observadores.
- Diseño de un observador no lineal, para la estimación de estados no medibles en el proceso de destilación por arrastre de vapor.
- Diseño de un observador adaptable para la estimación de fallas en la etapa de recolección de aceite en el proceso de destilación por arrastre de vapor.
- En este trabajo se presenta el diseño de un esquema de supervisión con una estructura particular que incluye los dos observadores diseñados, la cual no ha sido reportada en la literatura.

## 1.9. Marco Teórico

Esta sección proporciona algunas definiciones generales sobre la destilación por arrastre de vapor, se hace una descripción detallada del esquema básico y se mencionan algunos conceptos de los fenómenos fundamentales del proceso. Además, se aborda brevemente la teoría básica sobre la velocidad en las reacciones químicas, ya que tiene relación con una de las ecuaciones del modelo matemático. También se describen conceptos esenciales relacionados con la supervisión y el diagnóstico de fallas, seguido de una clasificación de los tipos de observadores. Finalmente se presenta el diseño de un observador para un sistema no lineal.

### 1.9.1. Destilación por arrastre de vapor

En el trabajo de Bandoni (2003), se señalan que: *“Esta técnica consiste en una mezcla de dos sustancias inmiscibles, donde principalmente se da una vaporización a temperaturas inferiores a las de ebullición de cada uno de los componentes volátiles por efecto de una corriente directa de vapor de agua” (p.144).*

Es un proceso de separación que utiliza el calentamiento del agua para generar una corriente de vapor, la cual atraviesa el material vegetal (pétalos, hojas y/o tallos) de manera que arrastre consigo los aceites esenciales de dicho material. Posteriormente el vapor que contiene los componentes aromáticos se dirige hacia un intercambiador de calor, donde se condensa, finalmente se obtiene una mezcla líquida de aceite-agua donde se puede extraer el aceite esencial de manera sencilla por decantación (Casado Villaverde, 2018).

La destilación por arrastre de vapor es una de las técnicas mayormente utilizadas desde tiempos remotos hasta la actualidad, debido a que los productos destilados son de buena calidad y los costos de implementación se pueden considerar relativamente bajos, por lo menos a escala de laboratorio (Mora Moscoso, 2014).

### 1.9.2. Esquema básico de la destilación por arrastre de vapor

En términos generales, el esquema básico del proceso de destilación por arrastre de vapor se puede describir como sigue: El material vegetal (hojas, flores, tallos) se carga en un barril destilador, formando un lecho fijo que está compactado. El material vegetal puede estar entero, molido o cortado.

Se introduce vapor de agua a través de un distribuidor interno ubicado cerca de la base. La producción de vapor puede ser local (a través de un hervidor), a distancia (con una caldera) o interna (en la base del destilador). A medida que el vapor atraviesa el lecho, el material vegetal se calienta, liberando los compuestos volátiles que componen el aceite esencial, el cual, gracias a su elevada volatilidad, se evapora. Dado que el aceite es soluble en el vapor circundante, se transporta hacia la parte superior del destilador.

La mezcla de vapor saturado y aceite esencial fluye hacia el condensador a través de un conducto de salida curvado conocido como “cuello de cisne”. La mezcla es condensada y enfriada, hasta alcanzar la temperatura ambiente. Después de pasar por el condensador, se obtiene una mezcla líquida inestable, que posteriormente se separa en un decantador dinámico o florentino. Dicho dispositivo se llena con agua fría al comienzo de la operación, permitiendo que el aceite esencial se acumule en la parte superior debido a su inmiscibilidad con el agua y las diferencias de densidad y viscosidad entre ambos. El dispositivo cuenta con un brazo lateral mediante el cual se desplaza el agua para facilitar la acumulación del aceite esencial.

El vapor condensado, que acompaña al aceite esencial y que se obtiene también en el florentino, es llamado “agua floral”, también es conocido comúnmente como “hidrolato” o “agua perfumada”. Contiene una pequeña concentración de los compuestos químicos solubles presentes en el aceite esencial, lo que le confiere un sutil aroma similar al aceite obtenido. Cuando se utiliza un hervidor para la generación de vapor saturado, el agua perfumada puede reciclarse de manera continua. En caso contrario, se almacena como un subproducto.

El proceso se finaliza cuando el volumen del aceite esencial acumulado en el dispositivo de recolección se mantiene constante a lo largo del tiempo. Posteriormente, se extrae el aceite del florentino y se almacena en un recipiente adecuado, preferentemente bien sellado y protegido de la luz del sol. Finalmente se procede a vaciar y llenar el destilador con la siguiente carga de material vegetal para dar inicio a una nueva operación, (Guenther, 2014), (Parry, 1921), (Heath y Reineccius, 1986).

Según la geometría del recipiente destilador, se emplea un plato perforado o rejilla para el aislamiento de la carga del distribuidor, en ocasiones se utiliza también una cesta donde se coloca el material vegetal y se extrae de manera más fácil y rápida al concluir el proceso.

En la Fig. 1.2 se muestra una representación básica del proceso, donde el destilador es cargado por lotes y opera en modo semi-continuo.

El condensador, opera en modo continuo, con un flujo de agua fría a contracorriente al flujo de vapor saturado. El generador de vapor de agua, recibe como alimentación agua fría y además agua perfumada en caso de existir recirculación (Cerpa y Palomino, 2007).

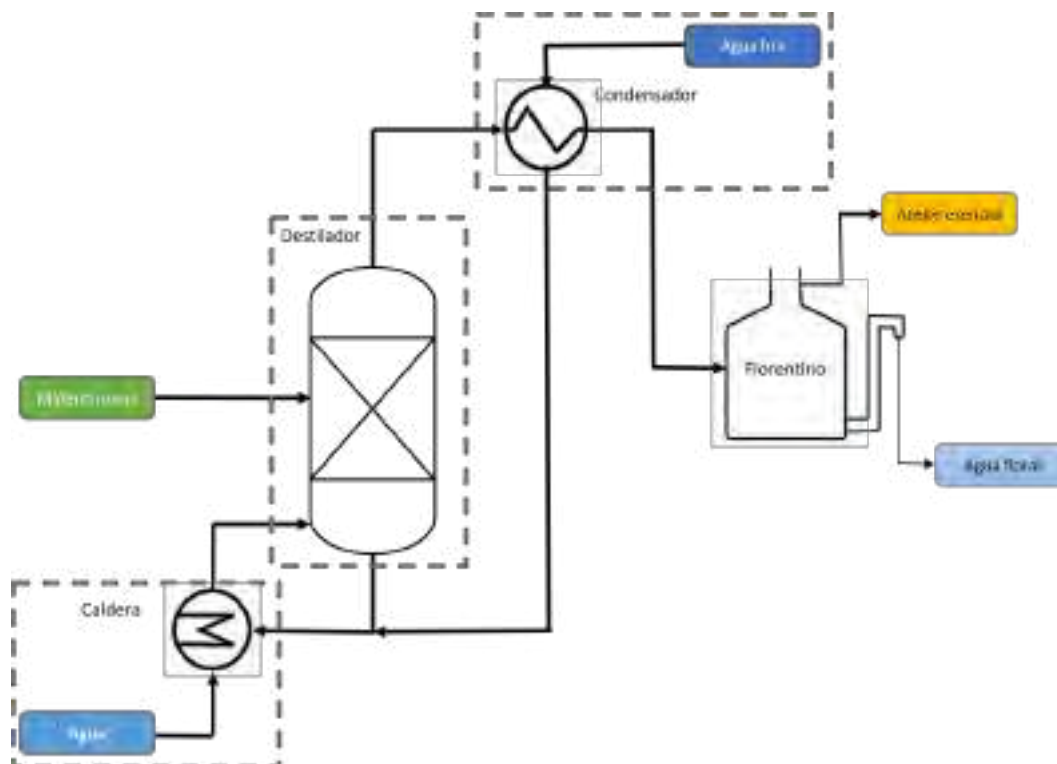


Fig. 1.2. Esquema básico de la destilación por arrastre de vapor

### 1.9.3. Fenómenos fundamentales del proceso

De acuerdo con Cerpa y Palomino (2007), existen al menos tres fenómenos influyentes en el proceso de destilación por arrastre de vapor. El primero es una exudación del aceite esencial, el segundo es una evaporación instantánea del aceite, en la interfase de la capa acuosa y el tercero es una difusión del aceite en su fase de vapor al seno de la corriente de vapor de agua.

El conocimiento de la teoría de dichos fenómenos, favorece a la formulación de ecuaciones matemáticas que describen la dinámica del aceite esencial a lo largo de las etapas de la destilación por arrastre de vapor.



## Exudación

Se conoce como exudación al transporte del aceite a la parte superficial del material vegetal, (Cerpa y Palomino, 2007). Por su parte, Benyoussef *y col.* (2002) consideran al fenómeno de exudación como una desorción irreversible del aceite esencial en el agua penetrante en la matriz herbácea, con una velocidad de primer orden con respecto al aceite retenido.

En este trabajo se considera que la exudación en términos generales, se refiere a la liberación gradual de un líquido o sustancia (en este caso aceite esencial) a través de pequeñas aberturas o poros. Por tanto, esto se relaciona con el proceso mediante el cual los aceites esenciales se liberan o exudan de los tricomas debido a la influencia de la temperatura. La Fig. 1.3 ilustra este fenómeno.



Fig. 1.3. Fenómeno de exudación

## Evaporación instantánea

En el trabajo de Minaya Pinto (2008), se considera que la evaporación instantánea, es una operación de una sola etapa en la cual se evapora de forma parcial una mezcla líquida, debido a que se permite que el vapor alcance el equilibrio con el líquido y se separan.

En el contexto de la destilación de aceites esenciales, el fenómeno de “evaporación instantánea” se refiere a un proceso rápido en el cual se permite que la corriente de vapor y el líquido que se encuentran en la superficie del material vegetal alcancen rápidamente el equilibrio de fases. Esto de alguna manera describe la eficiencia y la rapidez con la que se separan los componentes volátiles durante el proceso de destilación.

## Difusión por convección

En el proceso de extracción de aceites esenciales, se considera la existencia de un fenómeno de “difusión por convección”, se denomina así por que la difusión del aceite vaporizado al seno de la corriente de vapor, ocurre debido a la convección que ejerce el vapor en el lecho (Obregon Mariano, 2018). La difusión por convección puede considerarse entonces como: un proceso de transporte de masa que implica el movimiento de partículas a través de un fluido (líquido o gas), debido a las corrientes del propio fluido.

### 1.9.4. Teoría básica sobre velocidad de reacción (cinética química).

#### Ecuación de velocidad

Si se considera una reacción química en la que un reactivo  $A$  se descompone para obtener dos productos,  $B$  y  $C$ .



Durante el transcurso de la reacción, la concentración de  $A$  tiende a decrecer mientras que las concentraciones de  $B$  y  $C$  aumentan. En la Fig. 1.4 se ilustra una curva típica (concentración-tiempo) para el reactivo  $A$ .

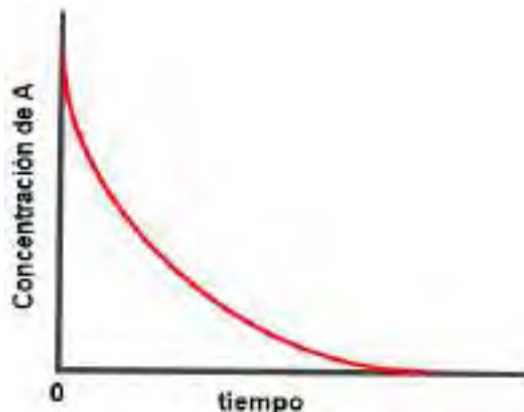


Fig. 1.4. Curva típica concentración-tiempo para el reactivo  $A$

La velocidad de esta reacción en cualquier instante de tiempo  $t$  está dada por la pendiente de la curva en dicho tiempo  $t$ .

$$vel = -\frac{d[A]}{dt} \quad (1.2)$$

En concreto, la velocidad de reacción es igual a la velocidad de disminución de la concentración de  $A$  con el tiempo. De manera alternativa, la velocidad ( $vel$ ) también está dada por la velocidad de aumento de la concentración de  $B$  o de  $C$  con el tiempo (Avery, 1982).

$$vel = \frac{d[B]}{dt} = \frac{d[C]}{dt} \quad (1.3)$$

Por tanto se establece que, la velocidad de una reacción química está así expresada como una velocidad de descomposición o desaparición de un reactivo o la velocidad de formación de un producto.

La Fig. 1.4 indica que la velocidad de reacción tiene cambios durante el transcurso de la reacción. La velocidad, que en un principio es máxima, tiende a decrecer a medida que transcurre la reacción. Se ha descubierto que la velocidad de una reacción depende de la concentración de los reactivos, de manera que así como la concentración  $A$  en esta reacción es decreciente, también lo hace la velocidad de reacción, de la siguiente manera:

$$vel = \alpha[A]^n \quad (1.4)$$

donde  $n$  es una constante conocida como *orden* de reacción. La relación que existe entre la velocidad y la concentración se conoce como ecuación de velocidad, y esta dada por:

$$-\frac{d[A]}{dt} = k_{vel}[A]^n \quad (1.5)$$

donde  $k_{vel}$  es una constante para cada reacción a cada temperatura y se denomina *constante de de velocidad*. La ecuación de velocidad permite establecer que, debido a que la velocidad de una reacción sufre variaciones con la concentración de los reactivos, la velocidad de una reacción no tiene dependencia de la concentración de los productos.

## Orden de una reacción

Si en la reacción considerada anteriormente, se descubre de manera experimental que la velocidad es directamente proporcional a la concentración de  $A$ , se establece que la reacción es de primer orden, como se muestra enseguida:

$$-\frac{d[A]}{dt} = k_{vel}[A] \quad (1.6)$$

Por otra parte, si se encuentra que la velocidad depende del cuadrado de la concentración de  $A$ , se considera que la reacción es de segundo orden, por lo cual:

$$-\frac{d[A]}{dt} = k_{vel}[A]^2 \quad (1.7)$$

Si se considera un proceso distinto, por ejemplo:

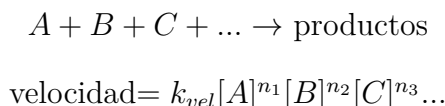


Si se logra encontrar que la ecuación de la velocidad es:

$$-\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k_{vel}[A][B] \quad (1.9)$$

la reacción se asume de segundo orden: primer orden con respecto al reactivo  $A$  y primer orden con respecto al reactivo  $B$ .

De manera general para una reacción con la siguiente estructura:



El orden de la reacción es la suma de los exponentes  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots$ ; y se lee como: el orden con respecto al reactivo  $A$  es  $n_1$ , con respecto al reactivo  $B$  es  $n_2$  y con respecto al reactivo  $C$  es  $n_3$ , etc.

## Constante de velocidad

La constante de velocidad puede proporcionar una medida útil de la velocidad de una reacción química a cierta temperatura determinada. Es relevante hacer notorio que las unidades de dicha constante dependen del orden de la reacción.

Tomando como ejemplo, la ecuación de velocidad de primer orden:

$$-\frac{d[A]}{dt} = k_{vel}[A] \quad (1.10)$$

Considerando las unidades de la Ec. (1.10), se tiene:

$$\frac{\text{concentración}}{\text{tiempo}} = k_{vel}(\text{concentración})$$

De esta manera, para cualquier proceso de primer orden, la constante de velocidad  $k_{vel}$  tiene unidades de  $(1/\text{tiempo})$ .

### 1.9.5. Conceptos básicos sobre supervisión y diagnóstico de fallas

De acuerdo a lo establecido por Verde *y col.* (2013), una **falla** consiste en una desviación de una propiedad característica de un sistema con respecto a las condiciones usuales y estándar de operación. En consecuencia, la falla en un solo componente puede alterar el rendimiento del sistema en general. La **avería** se refiere a una interrupción permanente de la capacidad de un sistema para realizar una función requerida en condiciones operativas específicas.

El concepto de **disfunción** se hace presente cuando el sistema es incapaz de cumplir con alguna de las funciones para las que fue diseñado, de manera intermitente.

Se le llama **detección de fallas**, a la determinación de la presencia de fallas en el sistema, así como el instante de su aparición. Por su parte, la **estimación de la falla**, se refiere a la determinación del tamaño y comportamiento de la falla a lo largo del tiempo.

#### Tipos de fallas

Existen diversas formas en las que se pueden presentar las fallas en un sistema o proceso, enseguida, se mencionan las que se presentan frecuentemente.

1. **Falla abrupta.** La falla se manifiesta con un cambio repentino y puede ser modelada mediante una función de tipo escalón donde se desconoce el tiempo de ocurrencia y suele desaparecer de la misma forma (Verde *y col.*, 2013).
2. **Falla incipiente.** Este tipo de falla se manifiesta como un cambio en la magnitud de las variables del sistema que va aumentando paulatinamente con respecto al tiempo y puede modelarse mediante una función de tipo rampa con un tiempo de ocurrencia desconocido (Verde *y col.*, 2013).
3. **Falla intermitente.** Este tipo de falla se considera que no tiene evolución determinada en el tiempo y frecuentemente se presenta solamente en ciclos de trabajo de manera aleatoria y desaparece también de la misma forma (Verde *y col.*, 2013).

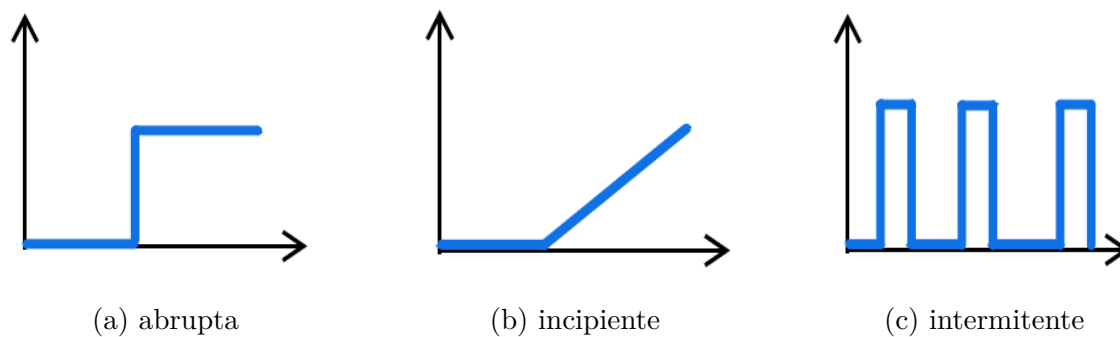


Fig. 1.5. Representación gráfica de los tipos de fallas

## Clasificación de fallas

Las fallas también se pueden clasificar dependiendo de la parte del sistema en la que aparezcan.

- **Fallas en sensor:** Son los errores de medición causados por defectos en los sensores, tales como: offset, bias, cortes de energía, mediciones “congeladas”, error de escala, histéresis, etc (Unbehauen, 2009).
- **Falla en actuador:** Son los errores causados por defectos en actuadores, tales como daños de rodamientos, pérdida de impulso en el sistema de velocidad de un automóvil, defectos en engranajes, efectos de envejecimiento, etc (Unbehauen, 2009).
- **Falla en componente:** Son los cambios no deseados en la operación del sistema causados por defectos en los elementos de la planta, tales como, grietas, rupturas, fracturas, fugas, cortes de energía, pérdida de partes, variaciones anormales de parámetros, debido a cambios repentinos de las condiciones, u obstáculos externos, tales como, colisiones, obstrucción de las tuberías de salida, etc (Unbehauen, 2009).

## Supervisión y diagnóstico de fallas

De acuerdo con Verde *y col.* (2013), existen términos distintos en torno a la “supervisión”, por ejemplo, cuando se habla de *supervisión de planta*, se entiende como la actividad cuyo objetivo es asegurar que las trayectorias de las variables importantes de un proceso sigan las trayectorias de referencia en forma adecuada. Por su parte, la *supervisión*, es una actividad de alto nivel que abarca el monitoreo o vigilancia, la detección y diagnóstico de fallas y el control supervisor o de planta.

También, es necesario mencionar a la entidad humana o artificial que realiza las tareas de supervisión de un proceso mediante el diagnóstico de fallas, determinación y ejecución de las acciones correctoras en presencia de fallas, a esto se le conoce como *supervisor*.

Una señal importante y ampliamente utilizada en el diagnóstico de fallas es el *residuo*. Este término se refiere a la señal que contiene información de la falla basada en la desviación entre las medidas de las entradas y salidas del sistema y estimaciones obtenidas mediante el modelo del mismo. El residuo describe el grado de consistencia entre el comportamiento real y el modelado. La *generación del residuo*, se logra mediante la determinación de este último a partir del modelo, entradas y salidas del sistema.

Es fundamental realizar una *evaluación del residuo*, que implica el análisis detallado del residuo con el objetivo de detectar, aislar e identificar la falla. Para ello, es necesario definir un *umbral*, que es un valor del residuo a partir del cual se considera la existencia de una falla. Si por alguna razón existe un valor que sobrepase el umbral, generalmente se debe activar una alarma, para informar al usuario de la existencia de una falla en el sistema.

### 1.9.6. Observabilidad y observadores de estado

#### Propiedad de observabilidad

La observabilidad es una propiedad que está fuertemente asociada a la salida de un sistema y a la matriz que contiene su dinámica, se define según Ogata (2003) como la capacidad para estimar los estados del sistema mediante la utilización de mediciones tanto de entrada como de salida. La matriz de observabilidad para un sistema lineal esta dada por:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = n \quad (1.11)$$

#### Observadores

Como se mencionó en la parte introductoria, no siempre es posible medir todas las variables de un sistema. En estos casos resulta necesario realizar estimaciones de dichas variables, proceso que se denomina observación. En acorde a Dorf y col. (2005) “Un observador es un sistema dinámico utilizado para estimar el estado de otro sistema dinámico dado un conocimiento sobre las entradas al sistema y las salidas medidas del sistema.”

Un observador de estados hace posible conocer las variables internas de un sistema real, sean estas conocidas o no, a través de las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento dinámico a lo largo de la trayectoria de funcionamiento. El observador emplea exclusivamente la información proveniente de las entradas y salidas del sistema original con el fin de lograr la estimación de los estados deseados.

En la Fig. 1.6 se muestra un observador aplicado a un reactor químico, en donde a partir de las temperaturas de entrada, los flujos de alimentación y la concentración de alimentación, es posible estimar las concentraciones de ambos compuestos de la reacción mediante el observador, las cuales son variables internas del proceso.

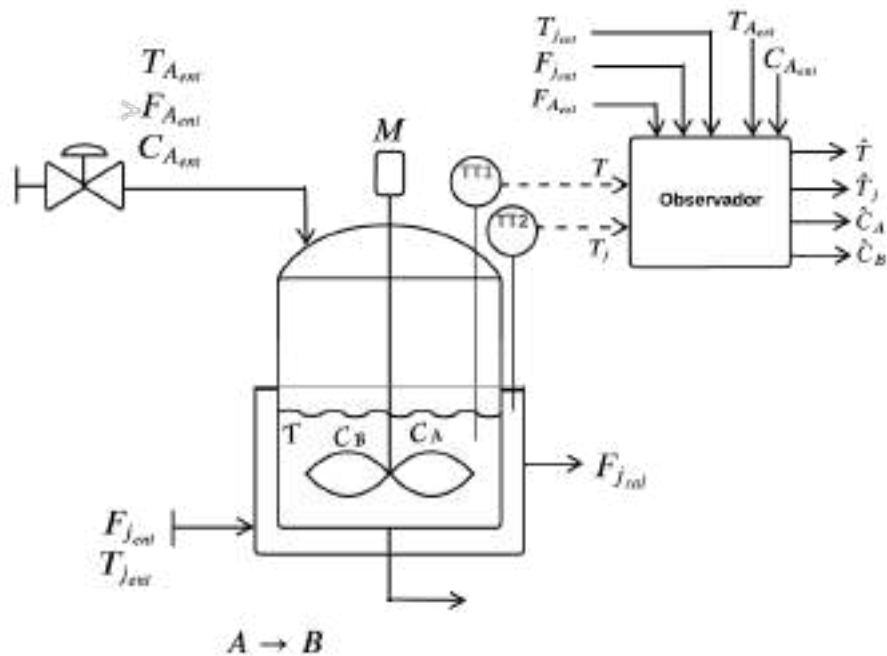


Fig. 1.6. Estimación de concentraciones en un reactor químico

## Clasificación de los observadores

### ■ Por orden

#### • Observador de orden completo

Este observador en particular, realiza estimaciones de todas las variables del sistema, incluso cuando algunas de ellas no están disponibles para una medición directa.



- **Observador de orden reducido**

Este observador logra estimar menos de  $n$  variables de estado, en donde  $n$  es la dimensión del vector de estado.

- **Observador de orden mínimo**

Es un observador de orden reducido con el mínimo orden posible, es decir, si  $n$  es la dimensión del vector de estado y  $q$  es la dimensión del vector de salidas, el observador de orden mínimo observa  $n - q$  variables.

- **Por estructura**

- **Observador tipo Luenberger**

Es un algoritmo que hace posible la estimación de todos los estados del sistema dinámico, tomando información de las entradas y salidas de dicho sistema. Y tiene la siguiente estructura matemática (Alessandri y Coletta, 2001)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{1.12}$$

donde  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados estimados,  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  representa las salidas estimadas y  $L$  es la ganancia del observador.

La dinámica del error está dada por:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)\tag{1.13}$$

La finalidad del observador, es encontrar el valor de la matriz  $L$ , de forma que la dinámica del error tienda a cero, cuando en tiempo tiende a infinito.

Para mejorar la comprensión de la estructura del observador Luenberger se muestra su diagrama de bloques en la Fig. 1.7.

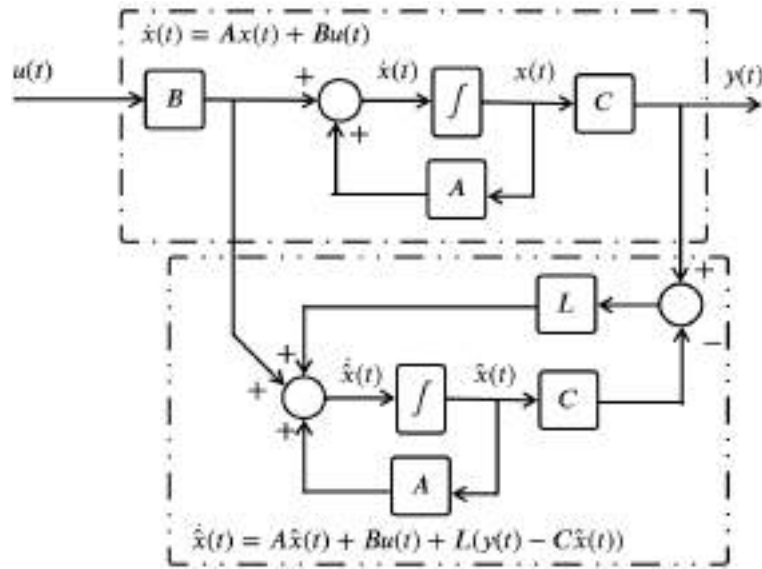


Fig. 1.7. Esquema a bloques del observador Luenberger

- **Observador Proporcional**

Esta clase de observador incorpora grados de libertad que pueden emplearse para incrementar la estabilidad del sistema, son sensibles a las incertidumbres en los parámetros y pueden generar un error estático en la estimación de estados. La estructura matemática del observador proporcional es la siguiente (Darouach y Boutayeb, 1995)

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (1.14)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (1.15)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$  se conoce como el vector de estados del observador,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es la estimación de  $x(t)$ .  $N, F, J$  y  $Q$  son matrices no conocidas de dimensiones apropiadas. Para encontrar las matrices del observador proporcional, es necesario estudiar la estabilidad de la dinámica del error, la cual está dada por:

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (NT + FC + TA)x(t) + (J - TB)u(t) \quad (1.16)$$

La Fig. 1.8 muestra un esquema a bloques de la estructura del observador proporcional.

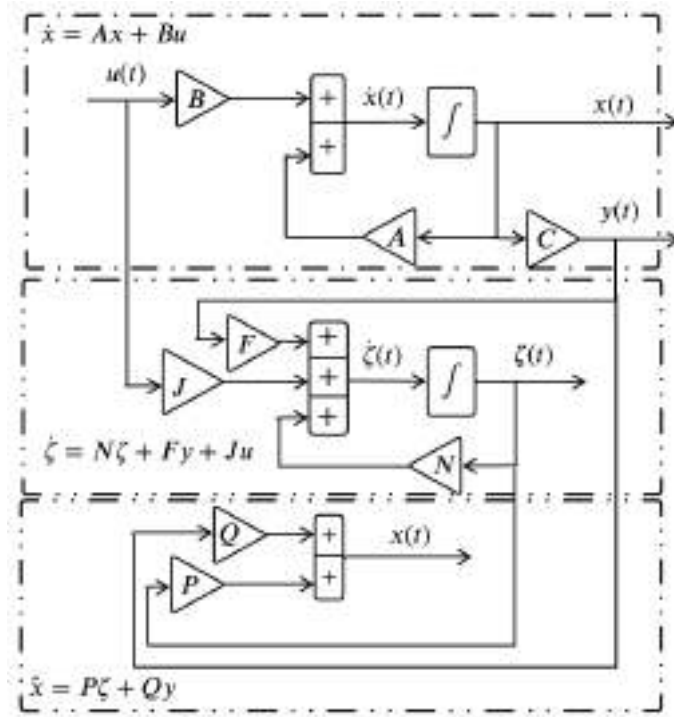


Fig. 1.8. Esquema a bloques del observador proporcional

- **Observador Proporcional Integral**

Para abordar la problemática de las incertidumbres en los parámetros presentes en los observadores proporcionales, se implementaron observadores proporcionales integrales. Estos observadores incorporan una ganancia adicional del error de salida en su diseño (Osorio-Gordillo *et al.*, 2016). La estructura matemática del observador proporcional integral es la siguiente:

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (1.17)$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (1.18)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (1.19)$$

La Fig. 1.9 muestra un esquema de bloques del observador, proporcional integral.

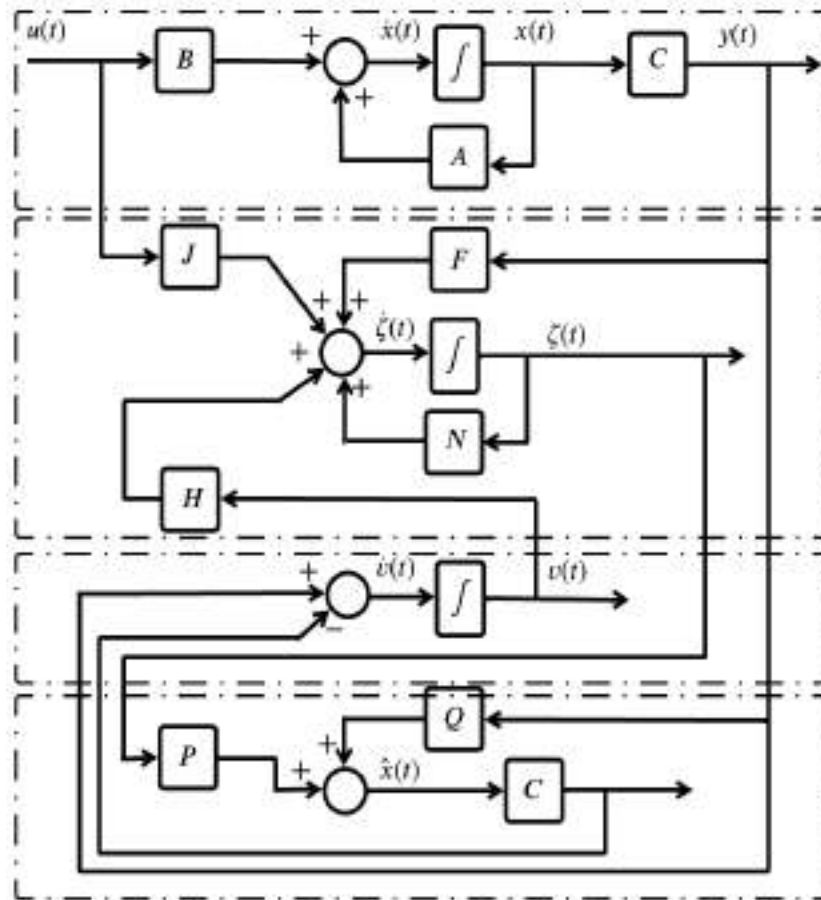


Fig. 1.9. Esquema a bloques del observador proporcional integral

- **Observador dinámico generalizado**

Esta clase de observador, puede aumentar la precisión del estado estacionario y hace mas robusta la estimación de errores de modelado. Además, ofrece grados de libertad adicionales en el diseño, ampliando así el margen de estabilidad Osorio-Gordillo *y col.* (2016). La estructura matemática del observador dinámico generalizado es la siguiente:

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (1.20)$$

$$\dot{v}(t) = S\zeta(t) + Lv(t) + My(t) \quad (1.21)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (1.22)$$

La Fig. 1.10 muestra un esquema de bloques del observador dinámico generalizado, en donde se pueden observar todas las ganancias que añaden grados de libertad al observador.

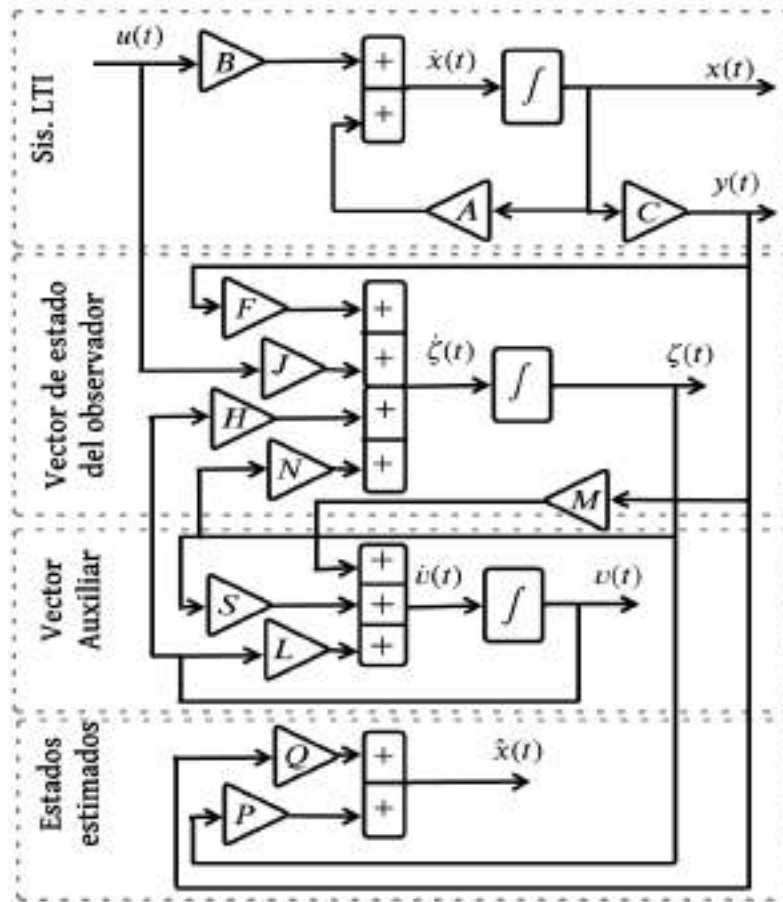


Fig. 1.10. Esquema a bloques del observador dinámico generalizado

## Diseño de un observador para un sistema no lineal

A continuación, se presenta el diseño de un observador para un sistema no lineal Lipschitz, que está dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(x, u) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1.23}$$

donde la función no lineal  $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$  y se asume que es Lipschitz en su primer argumento, con una constante Lipschitz  $\lambda$ , como sigue:

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|, \forall u\tag{1.24}$$

donde  $\lambda$  es un valor escalar real positivo y  $\|\cdot\|$  denota el símbolo de la norma.

Para el diseño del observador de orden completo para el sistema no lineal Lipschitz (1.23), se considera la siguiente estructura matemática.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + f(\hat{x}, u) + L(y(t) - C\hat{x}) \quad (1.25)$$

donde  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de ganancias del observador, que puede ser determinada de acuerdo a lo establecido en el Teorema 1:

**Teorema 1.** *Para el observador de estados propuesto en (1.25), la estimación  $\hat{x}(t)$  convergerá asintóticamente a  $x(t)$  siempre y cuando exista una matriz  $R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y una matriz  $H \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y un escalar positivo  $\delta$  tales que la siguiente LMI se cumpla.*

$$\begin{bmatrix} A^T R + RA - HC - C^T H^T + \gamma^2 \delta I_n & R \\ R & -\delta I_n \end{bmatrix} \leq 0 \quad (1.26)$$

donde la matriz de ganancia del observador está dada por  $L = R^{-1}H$ .

**Prueba:** *La dinámica del error de estimación está dada por la siguiente expresión:*

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)e(t) + (f(x, u) - f(\hat{x}, u)) \quad (1.27)$$

Considerando la siguiente función de Lyapunov

$$V(e) = e^T(t)Re(t) \quad (1.28)$$

donde  $R = R^T > 0$  es una matriz definida positiva. La derivada de la función de Lyapunov está dada por:

$$\dot{V}(e) = e^T(t)(A^T R + RA - RLC - C^T L^T R)e(t) + e^T(t)R\tilde{f} + \tilde{f}^T Re(t) \quad (1.29)$$

donde por simplicidad, el término  $(f(x, u) - f(\hat{x}, u))$  se refiere a  $\tilde{f}$ . Ahora, a partir de (1.24), se tiene  $\tilde{f}^T \tilde{f} \leq \lambda^2 e^T(t)e(t)$  y por tanto para cualquier escalar positivo  $\delta$ , siempre se cumple lo siguiente:

$$\delta \lambda^2 e^T(t)e(t) - \delta \tilde{f}^T \tilde{f} \geq 0 \quad (1.30)$$

Por tanto, a partir de las Ecs. (1.30) y (1.29), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq e^T(t)\tilde{A}e(t) + e^T(t)R\tilde{f} + \tilde{f}^T Re(t) + \delta \lambda^2 e^T(t)e(t) - \delta \tilde{f}^T \tilde{f} \\ &= \begin{bmatrix} e^T(t) & \tilde{f}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} + \lambda^2 \delta I_n & R \\ R & -\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde por simplicidad  $\tilde{A} = (A^T R + RA - RLC - C^T L^T R)$ . Para garantizar que el error converge asintóticamente a cero, basta que lo siguiente se cumpla:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} + \lambda^2 \delta I_n & R \\ R & -\delta I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (1.32)$$

Considerando a  $H = RL$ , la desigualdad matricial de la Ec. (1.32) toma la forma de la LMI (1.26) definida en el Teorema 1. Con esto se completa la demostración del Teorema 1.

El diseño del observador para el sistema no lineal Lipschitz, así como la demostración del Teorema, tiene sus bases en lo reportado por Trinh y Fernando (2011).

## 1.10. Organización del documento

En el **Capítulo 2** se aborda lo relacionado al proceso de destilación por arrastre de vapor, se estudia la ruta de transferencia del aceite esencial y se describen sus ecuaciones dinámicas. Se proponen dos representaciones matemáticas en espacio de estados. Se llevan a cabo simulaciones del modelo matemático. Finalmente, se detalla cada uno de los experimentos para la extracción de aceites esenciales.

En el **Capítulo 3** se lleva a cabo, el diseño y análisis de dos observadores, en donde se aborda el estudio de la dinámica del error y el análisis de estabilidad, para ambos observadores.

En el **Capítulo 4** se propone un esquema de supervisión basado en observadores para el proceso de destilación por arrastre de vapor y se muestran los resultados en simulación sobre las estimaciones de los estados y la falla.

En el **Capítulo 5** se dan a conocer las conclusiones del trabajo y se proponen algunos trabajos futuros.

## Capítulo 2

# El proceso de destilación por arrastre de vapor

La destilación por arrastre de vapor sigue siendo una de las técnicas principales para la extracción de aceites esenciales. Actualmente, existen innumerables productos a base de aceites esenciales, tales como perfumes, lociones, cremas, acondicionadores, aromatizantes, etc. Cada vez más, las industrias dedicadas a este campo lanzan nuevos productos al mercado con diversos fines de aplicación.

En este trabajo, se considera como caso de estudio al proceso de destilación por arrastre de vapor, representado por un modelo matemático que describe la transferencia del aceite en las diferentes fases y etapas del proceso. El presente capítulo, contiene las hipótesis generales y las consideraciones para el planteamiento del modelo matemático, basado principalmente en lo reportado por Cerpa y Palomino (2007), Valderrama y Ruiz (2018).

Para comprender mejor el proceso de destilación por arrastre de vapor, en la sección 2.1, se presentan las hipótesis y las fases que considera el sistema a modelar. En la sección 2.2, se presenta a detalle las ecuaciones del modelo matemático que describen la dinámica del aceite a lo largo de la destilación por arrastre de vapor. En la sección 2.3 se presentan las simulaciones del sistema, en donde se explica el comportamiento de las variables de estado con respecto al tiempo. En la sección 2.4 se presentan simulaciones con variaciones en la entrada del sistema. Finalmente, en la sección 2.5 se describen las actividades experimentales de la extracción de aceites esenciales.



## 2.1. Hipótesis generales para el modelo del proceso

Para el desarrollo de una representación matemática del proceso de destilación por arrastre de vapor, se considerarán las siguientes hipótesis:

- a) El lecho se considera fijo, formado por hojas y tallos, distribuido de manera aleatoria y heterogénea. No se consideró movimiento del lecho debido a la corriente de vapor.
- b) Se asume que cada flor u hoja se comporta como un material no poroso, con una geometría de tableta y no se producen cambios de forma durante el proceso.
- c) Se considera que el aceite esencial se localiza en los tricomas glandulares del material vegetal.
- d) El sistema tiene una temperatura y una presión constante.
- e) La fase de vapor de agua dentro del recipiente de destilación se considera perfectamente distribuida.
- f) Todo el aceite dentro del tricoma se extrae durante el proceso.
- g) El sistema considera cuatro fases (aceite dentro del tricoma, agua condensada, aceite libre fuera del tricoma, fase de vapor).
- h) El agua condensada y el aceite esencial son completamente inmiscibles. El aceite esencial se define como una mezcla ideal de 10 compuestos determinados por cromatografía de gases y espectrometría de masas (GC/MS). Se considera que la composición inicial del aceite fue la misma al obtenido al finalizar, es decir  $w_i^{tr} = w_i^{sd}$ .
- i) La corriente de vapor de agua inicialmente no contiene componentes del aceite.

Éstas hipótesis son acordes a las establecidas por Palomino y Cerpa (1999), Benyoussef *y col.* (2002) y Romdhane y Tizaoui (2005).

## Consideraciones para el transporte del aceite

Se toman en cuenta cuatro fases para el transporte de masa:

- I. Tricomas glandulares, es donde se encuentra localizado el aceite esencial. La cutícula del tricoma se comporta como una membrana permeable sólo al aceite. Por tanto, el aceite se transporta a la capa acuosa debido al fenómeno de exudación térmica.
- II. Capa acuosa en la superficie del material vegetal, recubre totalmente a los tricomas glandulares y es atravesada por las gotas del aceite que fluyen de la cutícula. Se asume totalmente inmisible con el aceite.
- III. El aceite libre, exudado por el tricoma, se acumula formando una capa, inmisible con el agua y para la que se ha asumido un espesor constante ( $h$ ).
- IV. Vapor, se considera como una mezcla multicomponente ideal.

La ruta de transferencia del aceite esencial, a lo largo de las fases establecidas, pueden visualizarse en la Fig. 2.1, acorde a lo reportado en Cerpa y Palomino (2007).

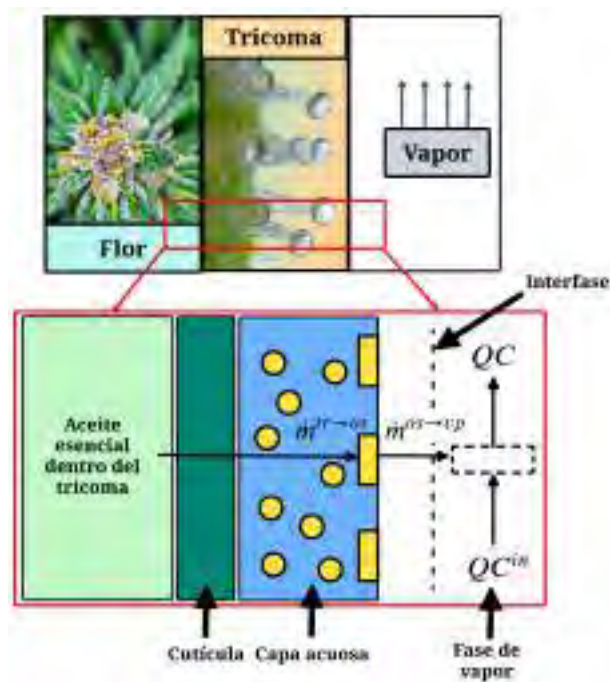


Fig. 2.1. Ruta de transferencia del aceite del tricoma a la corriente de vapor.

La interpretación de la Fig. 2.1 es la siguiente: En la parte superior se muestran tres bloques. El primero representa la flor aromática, el segundo representa los tricomas glandulares de la flor aromática, los cuales contienen aceite esencial. Finalmente, el tercer bloque representa la fase de vapor. En la parte inferior, se muestran cada una de las capas que interactúan entre si para lograr la transferencia del aceite desde la flor hasta la fase de vapor. Cuando circula una corriente de vapor por la flor aromática, el aceite esencial que se encuentra dentro de los tricomas se libera a través de la capa protectora de la superficie de la flor (cutícula). En la superficie de la flor, se forma una capa bifásica de aceite y agua denominada “capa acuosa”, que en la Fig. 2.1 se representa con un bloque de color azul con manchas amarillas, las cuales simbolizan las gotas de aceite esencial. Finalmente, la capa acuosa cambia a fase de vapor, en esta etapa, el vapor es una mezcla que tiene componentes aromáticos de la flor.

### **Interior de los tricomas glandulares (I)**

En esta fase, se considera que el aceite se encuentra al interior del material vegetal, en los tricomas, que son pelos glandulares que forman parte de la morfología de las plantas. Cuando la corriente de vapor atraviesa el lecho vegetal, ocurre un fenómeno de exudación el cual permite que los tricomas liberen el aceite que se encuentra dentro de ellos.

De acuerdo a los estudios realizados por Cerpa y Palomino (2007), Koul *y col.* (2004), la disminución de aceite esencial que sufren los tricomas, presenta una velocidad de exudación de primer orden de cada componente del aceite esencial con respecto a la cantidad remanente en los tricomas, con una constante  $k_{tr}$  única para todos los componentes. La ecuación que describe la dinámica del aceite en esta etapa, es la siguiente:

$$\dot{m}^{tr \rightarrow os} = k_{tr}GW = -W \left( \frac{dG}{dt} \right) \quad (2.1)$$

donde  $\dot{m}^{tr \rightarrow os}$  se refiere al flujo de aceite desde el interior del tricoma hasta la capa acuosa, el parámetro  $W$  se refiere a la masa del lecho,  $k_{tr}$  es la constante de velocidad debido al fenómeno de exudación y  $G$  es la masa del aceite esencial retenido en los tricomas por masa del lecho.

Considerando la ecuación de velocidad de reacción de primer orden (1.10), presentada en el marco teórico, es posible hacer una analogía con la Ec. (2.1), como se muestra a continuación:

$$\frac{-d[A]}{dt} = k_{vel}A \quad (2.2)$$

$$\frac{-d[GW]}{dt} = k_{tr}GW \quad (2.3)$$

donde el reactivo  $[GW]$  el cual se refiere a la masa total de aceite en el interior del material vegetal es análogo al reactivo  $[A]$ , y la constante de velocidad de exudación  $k_{tr}$  es análoga a la constante de velocidad  $k_{vel}$ .

### Capa de aceite esencial libre (II) y (III)

El balance de masa considera a los flujos máxicos de cada componente del aceite esencial desde el tricoma a la capa acuosa (fenómeno de exudación) y desde la capa acuosa a la corriente de vapor (difusión por convección), véase la Fig. 2.2.

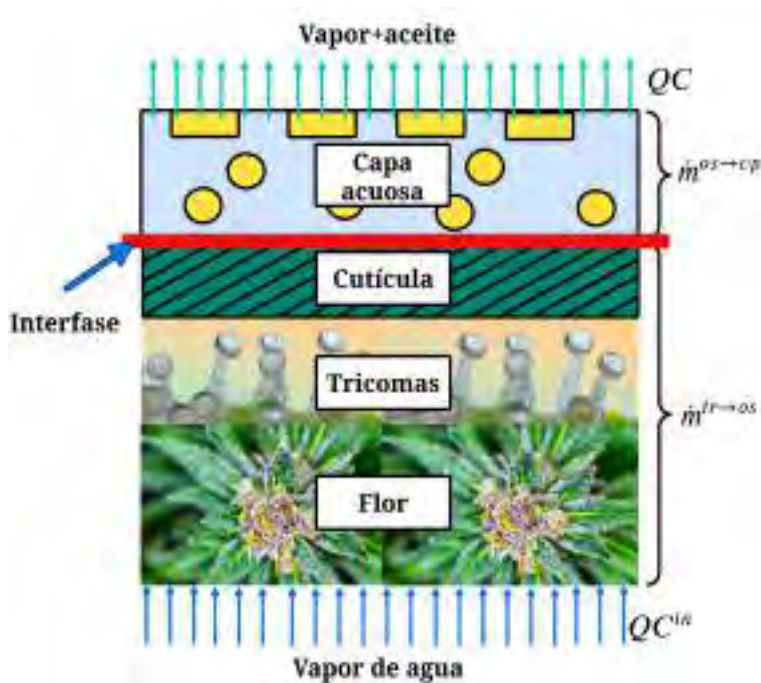


Fig. 2.2. Interacción de flujos máxicos del aceite libre.

La Fig. 2.2 muestra que el flujo másico  $\dot{m}^{tr \rightarrow os}$  considera el comportamiento del aceite desde el interior de la flor hasta la interfase. Es decir, engloba (flor, tricomas y cutícula). El flujo másico  $\dot{m}^{os \rightarrow vp}$  describe el comportamiento del aceite en la capa acuosa hasta la fase de vapor (mezcla de vapor de agua + vapor de aceite).

La dinámica del aceite en la capa acuosa se representa mediante la siguiente diferencia de flujos másicos:

$$\frac{dM^{os}}{dt} = \dot{m}^{tr \rightarrow os} - \dot{m}^{os \rightarrow vp} \quad (2.4)$$

donde el flujo másico desde el tricoma hasta la superficie del material vegetal, está dado por:

$$\dot{m}^{tr \rightarrow os} = k_{tr}GW \quad (2.5)$$

y el flujo másico desde la interfase hasta la corriente de vapor, por:

$$\dot{m}^{os \rightarrow vp} = k_g S^{os} (C^* - C) \quad (2.6)$$

donde  $k_g$  es un coeficiente de transferencia de masa desde la interfase del aceite “libre” con la fase de vapor,  $S^{os}$  es el área de transferencia de masa en la capa acuosa,  $C^*$  se refiere a la concentración del aceite en el vapor, junto a la interfase. Finalmente  $C$  también es una concentración del aceite esencial pero en este caso en la corriente de vapor.

Sustituyendo las Ecs (2.5) y (2.6) en la Ec. (2.4), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dM^{os}}{dt} = k_{tr}GW - k_g S^{os} (C^* - C) \quad (2.7)$$

La masa del aceite en la capa acuosa (agua-aceite) está dada por:

$$M^{os} = S^{os} h \rho_{eo} \quad (2.8)$$

donde es posible observar que se ven involucrados parámetros como  $h$  y  $\rho_{eo}$ , que son el espesor promedio de la capa de aceite en la capa acuosa y la densidad del aceite esencial líquido, respectivamente. De la Ec. (2.8) es posible despejar el área de transferencia de masa  $S^{os}$  obteniendo como resultado:

$$S^{os} = \frac{M^{os}}{h \rho_{eo}} \quad (2.9)$$


---

La concentración del aceite en la corriente de vapor, está dada por la siguiente expresión:

$$C = \frac{k_g M^{os} C^*}{Q h \rho_{eo} + k_g M^{os}} \quad (2.10)$$

donde  $Q$  es el caudal de vapor y se considera como la excitación del sistema. Sustituyendo las Ecs. (2.9) y (2.10) en la Ec. (2.7) es posible obtener la siguiente expresión:

$$\frac{dM^{os}}{dt} = k_{tr} GW - \frac{k_g M^{os} C^*}{h \rho_{eo}} \left( 1 - \frac{k_g M^{os}}{Q h \rho_{eo} + k_g M^{os}} \right) \quad (2.11)$$

La Ec. (2.11) representa la dinámica del aceite esencial en la capa acuosa.

### **Fase de vapor (IV)**

A medida que el tiempo transcurre, la corriente de vapor logra arrastrar la masa de aceite esencial que se encuentra en la capa acuosa, llevándose consigo los componentes del aceite esencial que posteriormente serán condensados y separados por decantación.

Para describir la transferencia del aceite a la corriente de vapor, se tiene:

$$\frac{dM^{sd}}{dt} = QC \quad (2.12)$$

sustituyendo la Ec. (2.10) en la Ec. (2.12), se obtiene:

$$\frac{dM^{sd}}{dt} = \frac{k_g QC^* M^{os}}{(Q h \rho_{eo} + k_g M^{os})} \quad (2.13)$$

La Ec. (2.13) describe el comportamiento dinámico de la masa de aceite esencial recolectado.

## 2.2. Modelo matemático de la transferencia de aceite en la destilación por arrastre de vapor

El análisis matemático realizado anteriormente sobre las fases involucradas en el proceso de destilación por arrastre de vapor, donde se analiza principalmente la ruta de transferencia del aceite esencial durante las etapas del proceso, como se muestra en la Fig. 2.3, tiene sus bases en lo reportado por Cerpa *y col.* (2008).

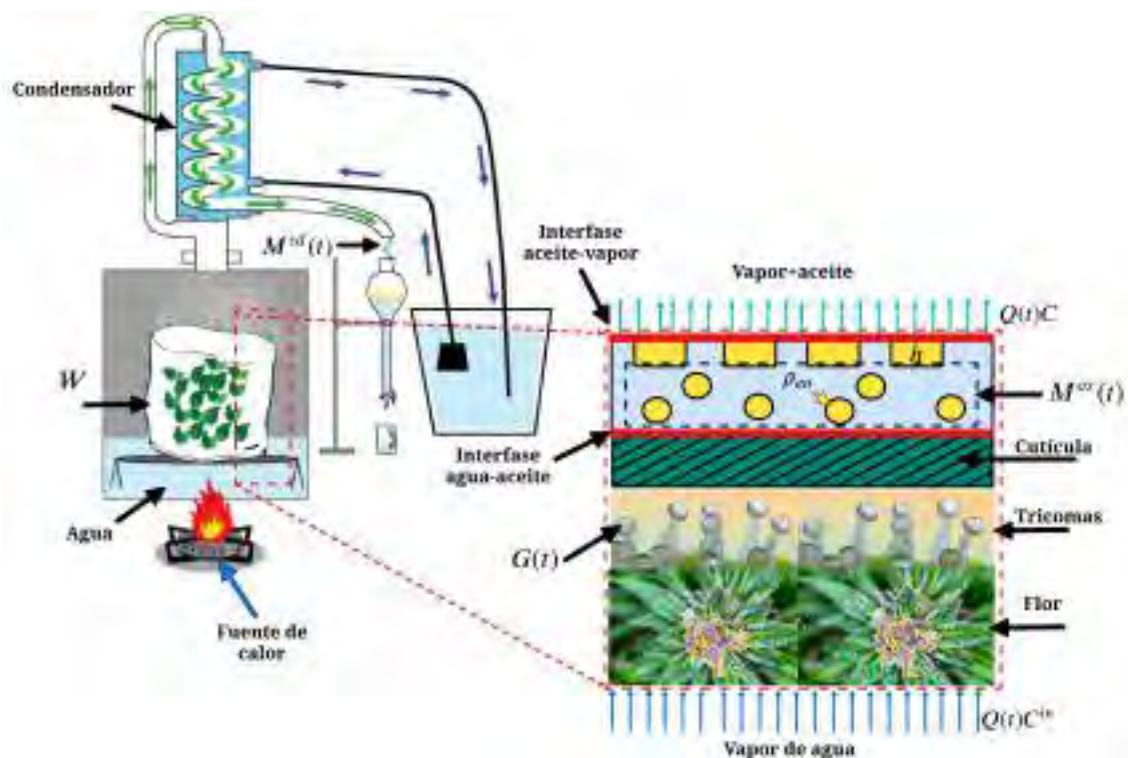


Fig. 2.3. Proceso de destilación por arrastre de vapor.

La Fig. 2.3 muestra el proceso completo de la destilación por arrastre de vapor a nivel laboratorio. En el interior del destilador se coloca una base perforada para separar el material vegetal del agua, el lecho de hojas tiene una masa  $W$ . Cuando se enciende la fuente de calor, el agua en el interior del barril destilador comenzará a calentarse y por tanto a generar una corriente de vapor  $Q(t)$ . La corriente de vapor  $Q(t)$  atraviesa el lecho de hojas y logra desprender los componentes aromáticos que se encuentran en el interior de los tricomas. La masa de aceite esencial  $G(t)$  que se libera de los tricomas por masa vegetal fresca y se concentra en capa acuosa, donde las gotas de aceite esencial tienen un espesor  $h$  y una densidad  $\rho_{eo}$ . La masa de aceite existente en la capa acuosa se representa

como  $M^{os}(t)$ . Cuando la temperatura de la corriente de vapor aumenta, la capa acuosa cambia de fase y se convierte en una mezcla de vapor (vapor de agua + vapor de aceite). La mezcla de vapor ingresa al condensador que se encuentra acoplado en la parte superior del barril destilador. El intercambio de calor se logra circulando la mezcla de vapor (flechas verdes) a contracorriente con el flujo de agua de enfriamiento (flechas azules), para finalmente obtener una mezcla bifásica líquida que se colecta en un embudo de decantación, la masa de aceite esencial en la etapa de recolección se representa por  $M^{sd}(t)$ .

El sistema de ecuaciones que representa la ruta completa de transferencia del aceite, desde el interior del material vegetal hasta la corriente de vapor, es el siguiente:

$$\frac{dM^w(t)}{dt} = -k_{tr}M^w(t), \quad M^w(t) = WG(t) \quad (2.14)$$

$$\frac{dM^{os}(t)}{dt} = k_{tr}M^w(t) - \frac{k_g C^* M^{os}(t)}{h\rho_{eo}} \left( 1 - \frac{k_g M^{os}(t)}{Q(t)h\rho_{eo} + k_g M^{os}(t)} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{dM^{sd}(t)}{dt} = \frac{Q(t)k_g M^{os}(t)C^*}{Q(t)h\rho_{eo} + k_g M^{os}(t)} \quad (2.16)$$

donde  $W$  es la masa vegetal fresca,  $G(t)$  es la masa del aceite en los tricomas por masa de lecho,  $M^w(t)$  es la masa de aceite esencial total dentro del material vegetal,  $M^{os}(t)$  es la masa de aceite esencial en la capa acuosa,  $M^{sd}(t)$  es la masa de aceite esencial recolectado,  $h$  es el espesor de las manchas de aceite,  $\rho_{eo}$  es la densidad del aceite esencial,  $C^*$  es la concentración de aceite en el vapor de la interfase,  $Q(t)$  es el flujo volumétrico de vapor (entrada),  $k_{tr}$  es la constante de velocidad de exudación y  $k_g$  es un coeficiente de transferencia de masa y se calcula con la siguiente expresión:

$$k_g = K_A Q(t) - K_B \quad (2.17)$$

donde  $K_A$  y  $K_B$  son coeficientes constantes de la ecuación de transferencia de masa de acuerdo a lo reportado en Valderrama y Ruiz (2018).



Se definen las variables del proceso como variables de estado en un vector del espacio vectorial tridimensional  $x(t) \in \mathbb{R}^3$ , de esta manera, el modelo representado en variables de estado es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -k_{tr}x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= k_{tr}x_1(t) - \frac{k_g C^* x_2(t)}{h\rho_{eo}} + \frac{k_g^2 C^* x_2^2(t)}{u(t)h^2\rho_{eo}^2 + k_g h\rho_{eo}x_2(t)} \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{k_g u(t) C^* x_2(t)}{u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $x_1(t)$  es la masa de aceite esencial en el interior del material vegetal  $M^w(t)$ ,  $x_2(t)$  es la masa de aceite esencial en la capa acuosa  $M^{os}(t)$ ,  $x_3(t)$  es la masa de aceite esencial recolectado  $M^{sd}(t)$ .  $u(t)$  es el flujo volumétrico de vapor  $Q(t)$ ,  $y(t)$  es la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$ . Los parámetros se pueden ver en la Tabla 2.1 (Valderrama y Ruiz, 2018).

En el apéndice A, se muestra un análisis dimensional de cada una de las ecuaciones del modelo matemático, mostrado en (2.18).

Tabla 2.1. Definición de parámetros para una flor de lavanda

Parámetro	Valor	Unidades	Definición
$k_{tr}$	0.0720	1/min	Constante cinética de exudación
$W$	2175	g	Masa vegetal fresca
$C^*$	0.0010	g/cm <sup>3</sup>	Concentración de aceite en el vapor, junto a la interfase
$h$	0.01150	cm	Espesor de la capa del aceite en la capa acuosa
$\rho_{eo}$	0.9900	g/cm <sup>3</sup>	Densidad del aceite esencial líquido
$k_A$	0.0047	—	Coefficiente constante de transferencia de masa
$k_B$	3.5670	—	Coefficiente constante de transferencia de masa

### 2.2.1. Representaciones del modelo matemático

En el sistema dinámico que describe la ruta completa de transferencia de aceite mostrado en la Ec. (2.18), se presentan no linealidades, como por ejemplo, en la segunda ecuación del sistema:

$$\dot{x}_2(t) = k_{tr}x_1(t) - \frac{k_g C^* x_2(t)}{h\rho_{eo}} + \frac{k_g^2 C^* x_2^2(t)}{u(t)h^2\rho_{eo}^2 + k_g h\rho_{eo}x_2(t)} \quad (2.19)$$

en el tercer término se tiene  $x_2^2(t)$  y en el denominador  $u(t)h^2\rho_{eo}^2 + k_g h\rho_{eo}x_2(t)$ .

En la tercer ecuación del sistema:

$$\dot{x}_3(t) = \frac{k_g u(t) C^* x_2(t)}{u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t)} \quad (2.20)$$

en el numerador  $k_g u(t) C^* x_2(t)$  y en el denominador  $u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t)$ .

Tomando en cuenta que el modelo presenta no linealidades, como las mencionadas anteriormente. Es posible representarlo de la siguiente forma matemática:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada del sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  representa las variables de salida medidas.  $C$  es una matriz conocida de dimensiones apropiadas.

El vector de funciones  $f(x(t), u(t))$ , contiene las tres ecuaciones, que representan la dinámica del modelo.

$$f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ f_3(x_2(t), u(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{tr}x_1(t) \\ k_{tr}x_1(t) - \frac{k_g C^* x_2(t)}{h\rho_{eo}} + \frac{k_g^2 C^* x_2^2(t)}{u(t)h^2\rho_{eo}^2 + k_g h\rho_{eo}x_2(t)} \\ \frac{k_g u(t) C^* x_2(t)}{u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t)} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La matriz de salida  $C$  se toma como:

$$C = [0 \ 0 \ 1] \quad (2.23)$$

dicha estructura es debido a que la variable que se considera medible es  $x_3(t)$ , es decir, la masa de aceite esencial recolectado.

Otra forma matemática de representar el sistema de la Ec. (2.18), es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -k_{tr} & 0 & 0 \\ k_{tr} & -\frac{k_g C^*}{h\rho_{eo}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_g^2 C^* x_2^2(t)}{u(t)h^2\rho_{eo} + k_g h\rho_{eo}x_2(t)} \\ \frac{k_g u(t)C^* x_2(t)}{u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t)} \end{bmatrix}}_{g(x(t),u(t))} \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $g(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^m$  es un vector que contiene las no linealidades del sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  representa las variables de salida medidas.  $A, D$  y  $C$  son matrices conocidas de dimensiones apropiadas.

### 2.3. Simulación 1. Comportamiento de los estados del sistema

El objetivo de esta simulación es describir el comportamiento de los estados del sistema y darles una interpretación coherente en relación a la transferencia del aceite desde el interior del material vegetal hasta la corriente de vapor de arrastre.

Se toman los valores de los parámetros de la tabla 2.1 para la simulación del sistema de la Ec. (2.18).

La simulación numérica se lleva a cabo en el software de MATLAB R2021a. Se emplea el método numérico de Euler hacia adelante con un paso de integración  $\Delta x = 0.01 \text{ min}$  y un tiempo de simulación  $T_{sim} = 100 \text{ min}$ . Las condiciones iniciales de las masas de aceite son  $x(t) = [152.25 \ 0 \ 0]^T$ . El sistema se considera libre de fallas y se asume una entrada  $u(t) = 25000 \text{ (cm}^3/\text{min)}$ .

La Fig. 2.4 muestra la dinámica del aceite que sale del interior del material vegetal  $x_1(t)$ , la cual tiene un comportamiento decreciente, pues físicamente representa la cantidad de masa de aceite que pierde el material vegetal.

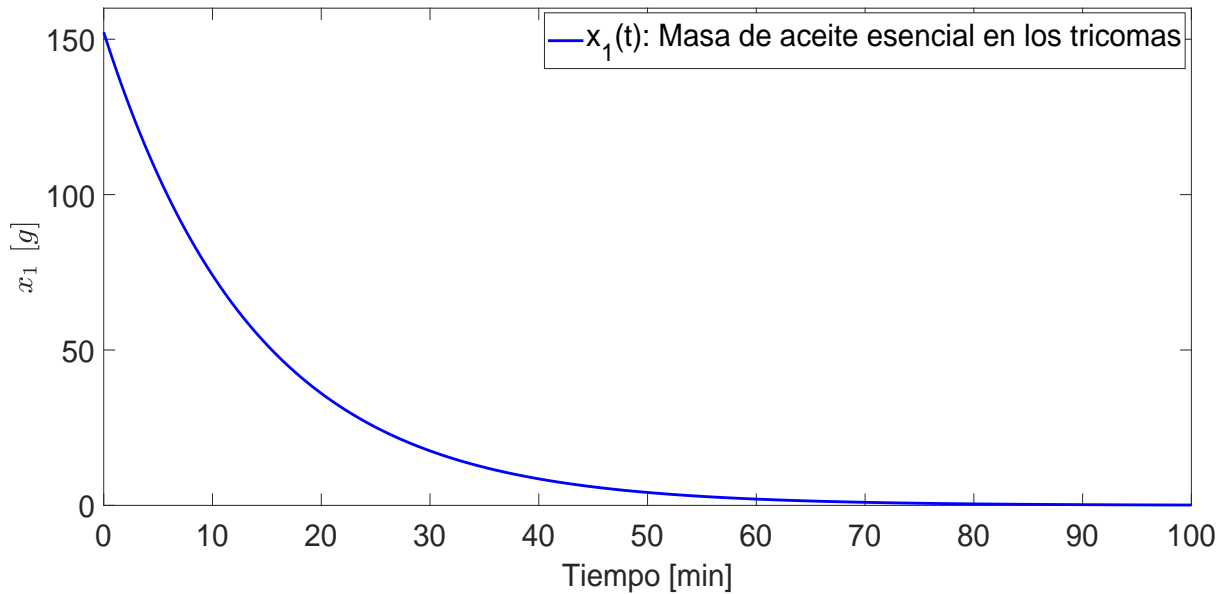


Fig. 2.4. Simulación 1. Masa de aceite esencial dentro de los tricomas

La Fig. 2.5 muestra la dinámica del estado  $x_2(t)$ , una de las más interesantes, debido a que en la capa acuosa se almacena una significativa parte del aceite, ya que actúa como un puente entre el aceite que se encuentra dentro de los tricomas y la corriente de vapor. Cuando la corriente de vapor comienza a liberar el aceite esencial este se concentra en la superficie de la flor aromática es por esa razón que el estado  $x_2(t)$  al inicio comienza a subir, por que la capa acuosa está ganando aceite. Sin embargo, a medida que la temperatura crece, el aceite que existe en la capa acuosa se evapora, por tanto, el aceite esencial de la capa acuosa decrece.

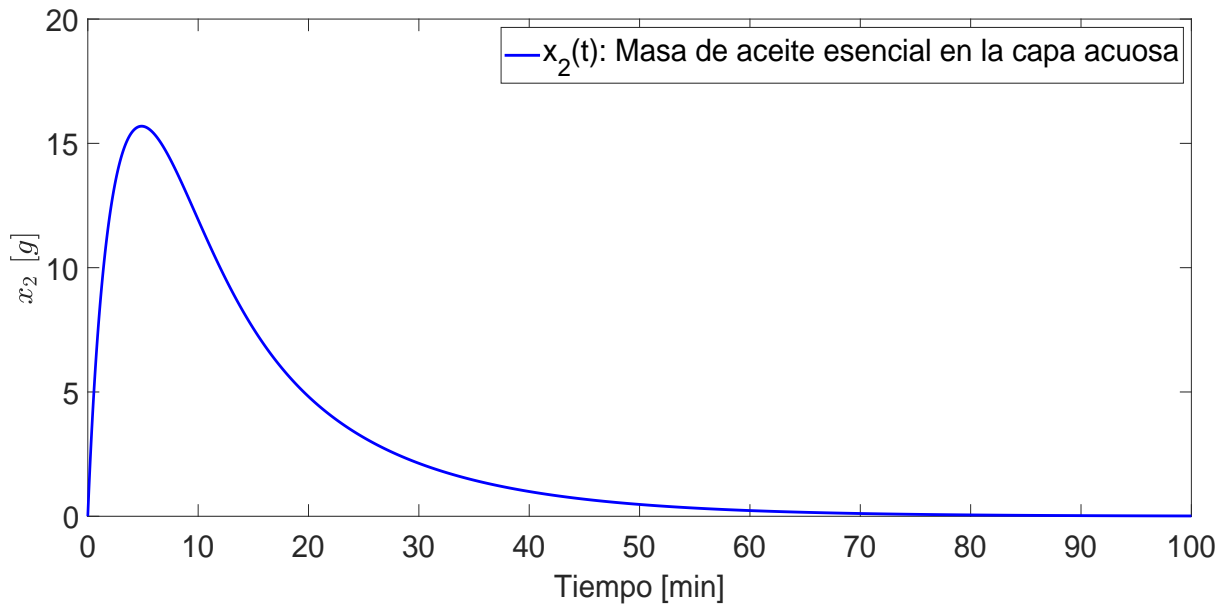


Fig. 2.5. Simulación 1. Masa de aceite esencial en la capa acuosa

La Fig. 2.6 muestra que el estado  $x_3(t)$  aumenta de forma rápida durante los primeros 40 *min*, pero a medida que transcurre el tiempo, aumenta de forma lenta hasta llegar a su estado estable. Por tanto, se considera que la mayor parte del aceite se recupera durante la primera hora.

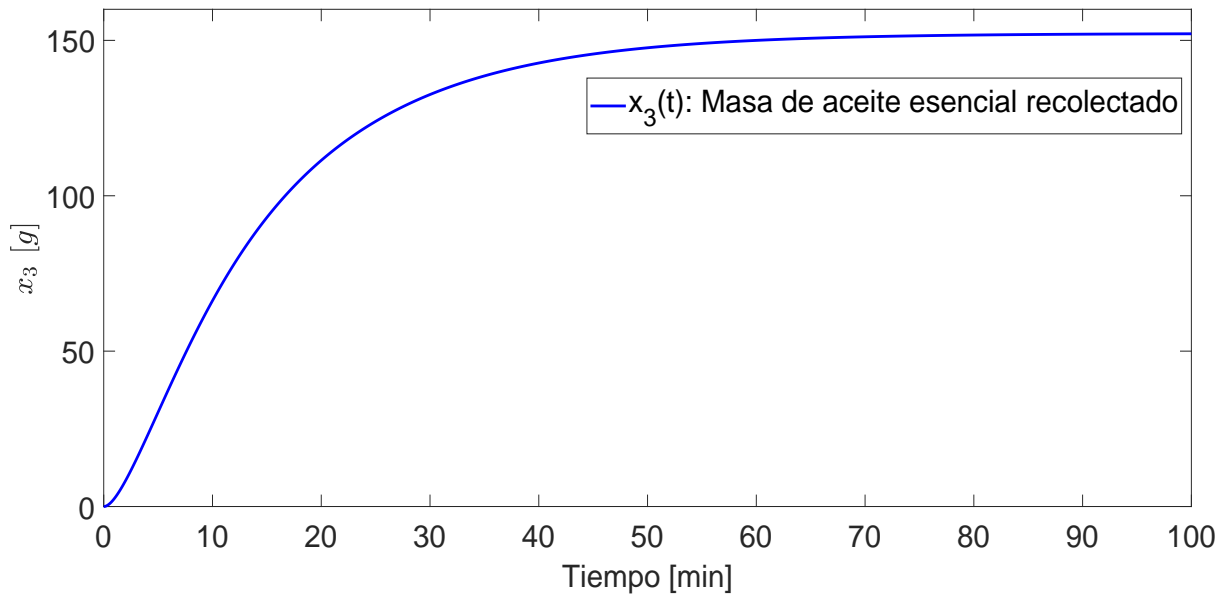


Fig. 2.6. Simulación 1. Masa de aceite esencial recolectado

## Conclusión de la simulación 1.

En esta simulación, se puede verificar que el comportamiento de los estados es congruente con la ruta de transferencia de masa del aceite esencial en cada etapa del proceso. Los datos fueron considerados para una flor de lavanda que posee una masa de aceite de 152 g la cual se pierde a lo largo del tiempo como se muestra en la Fig. (2.4). El modelo también considera una acumulación de aceite y agua en la superficie del material vegetal denominada (capa-acuosa) la cual alcanza un valor máximo de 15.6 g de aceite esencial, sin embargo, se pierde una vez que la corriente de vapor arrastra por completo los componentes del aceite esencial ver la Fig. 2.5. Finalmente en la Fig. 2.6 es posible notar una recuperación del aceite esencial de 152 g lo cual garantiza que se extrae todo el aceite que se encuentra dentro del material vegetal.

## 2.4. Simulación 2. Disminución del flujo de vapor

El objetivo de esta simulación, es disminuir el flujo de vapor  $u(t)$ , y observar de qué manera esta variación pueden afectar o favorecer la recuperación del aceite. Se toman en cuenta los valores de la Tabla 2.1 para la simulación.

La simulación numérica se lleva a cabo en el entorno de Matlab-Simulink R2021a. Se emplea la herramienta Matlab-function para representar el sistema no lineal. Para realizar la variación de la entrada se utiliza la herramienta Signal Builder. Se considera un tiempo de simulación  $T_{sim} = 140 \text{ min}$ . Las condiciones iniciales de las masas de aceite son  $x(t) = [152.25 \ 0 \ 0]^T$ . El sistema se considera libre de fallas y la entrada varía de la siguiente manera:

$$u(t) = \begin{cases} 25000 \text{ cm}^3/\text{min} , 0 \text{ min} \leq t < 5 \text{ min} \\ 20000 \text{ cm}^3/\text{min} , 5 \text{ min} \leq t < 10 \text{ min} \\ 15000 \text{ cm}^3/\text{min} , 10 \text{ min} \leq t < 15 \text{ min} \\ 10000 \text{ cm}^3/\text{min} , 15 \text{ min} \leq t \leq 140 \text{ min} \end{cases} \quad (2.25)$$

En la Fig. 2.7, se muestra una disminución en el flujo de vapor, de acuerdo con los valores de la Ec. (2.25).

En la Fig. 2.8, se muestra que el estado  $x_1(t)$  no se ve afectado por variaciones en la entrada, ya que la ecuación que describe a la masa de aceite esencial en el interior del material vegetal, no contiene términos que involucren a  $u(t)$ .

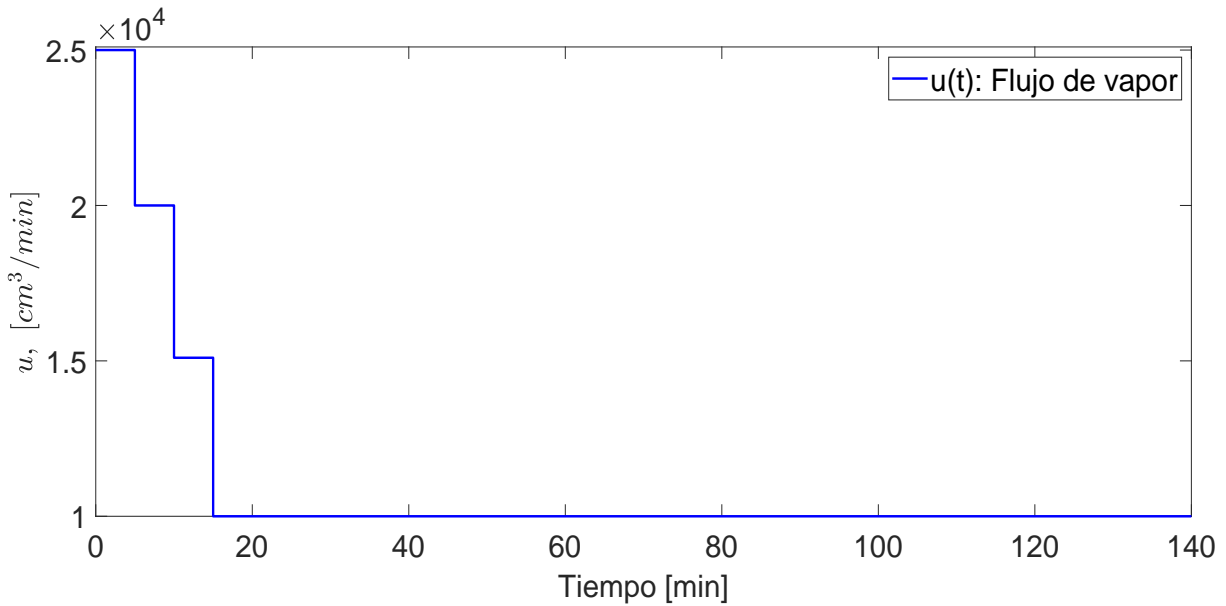


Fig. 2.7. Simulación 2. Disminución del flujo de vapor

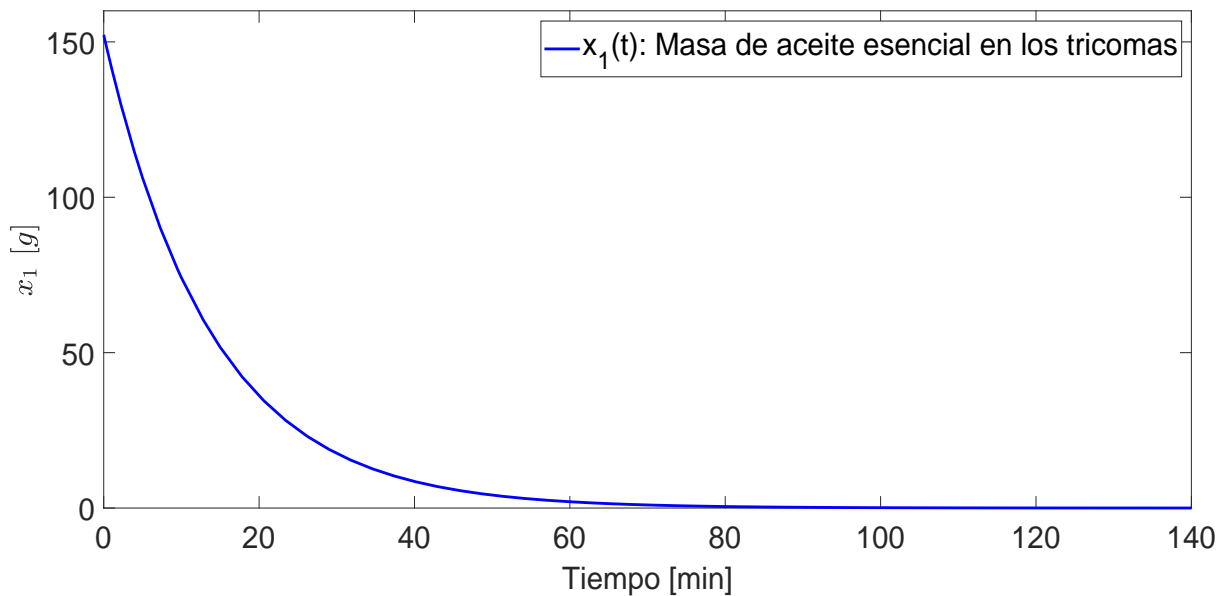


Fig. 2.8. Simulación 2. Masa de aceite esencial dentro de los tricomas

La Fig. 2.9, muestra que el estado  $x_2(t)$  se ve afectado por la disminución del flujo de vapor. En el intervalo de  $(0 - 22 \text{ min})$  de la simulación, se nota una acumulación de la masa de aceite esencial en la capa acuosa, alcanzando un valor máximo de  $26.09 \text{ g}$ , lo cual impide en cierta forma que el aceite se transporte de forma rápida a la corriente de vapor.

En la Fig. 2.10, es posible observar que al estado  $x_3(t)$  le toma más tiempo llegar a la parte estacionaria, aproximadamente 100 *min*, debido a que la acumulación del aceite en  $x_2(t)$  tarda en transportarse a la corriente de vapor.

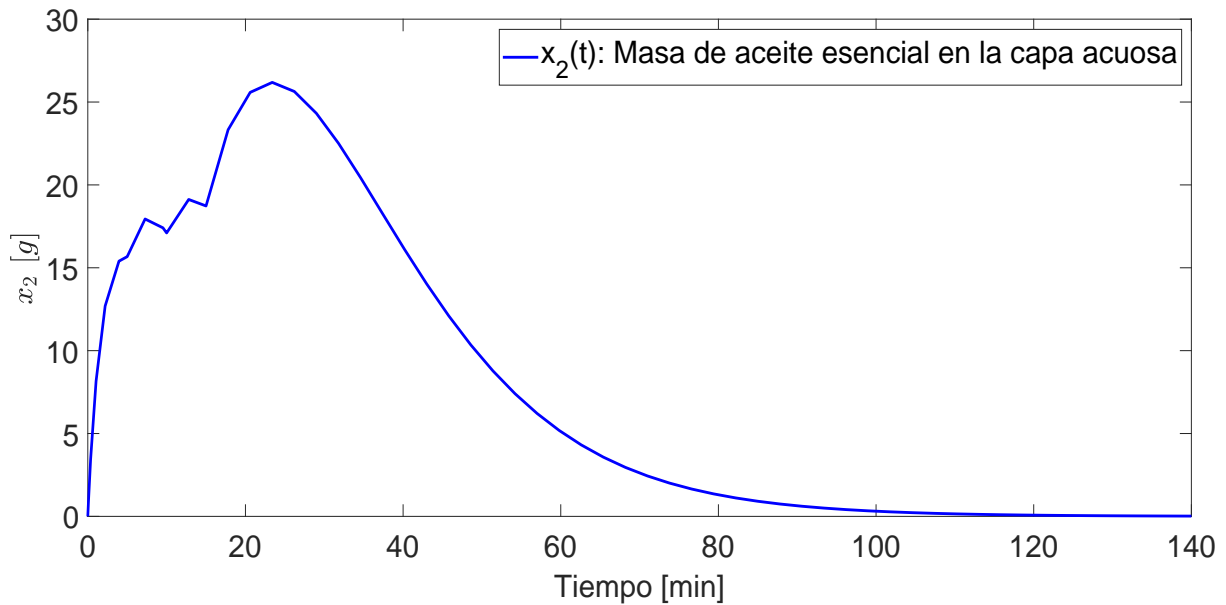


Fig. 2.9. Simulación 2. Masa de aceite esencial en la capa acuosa

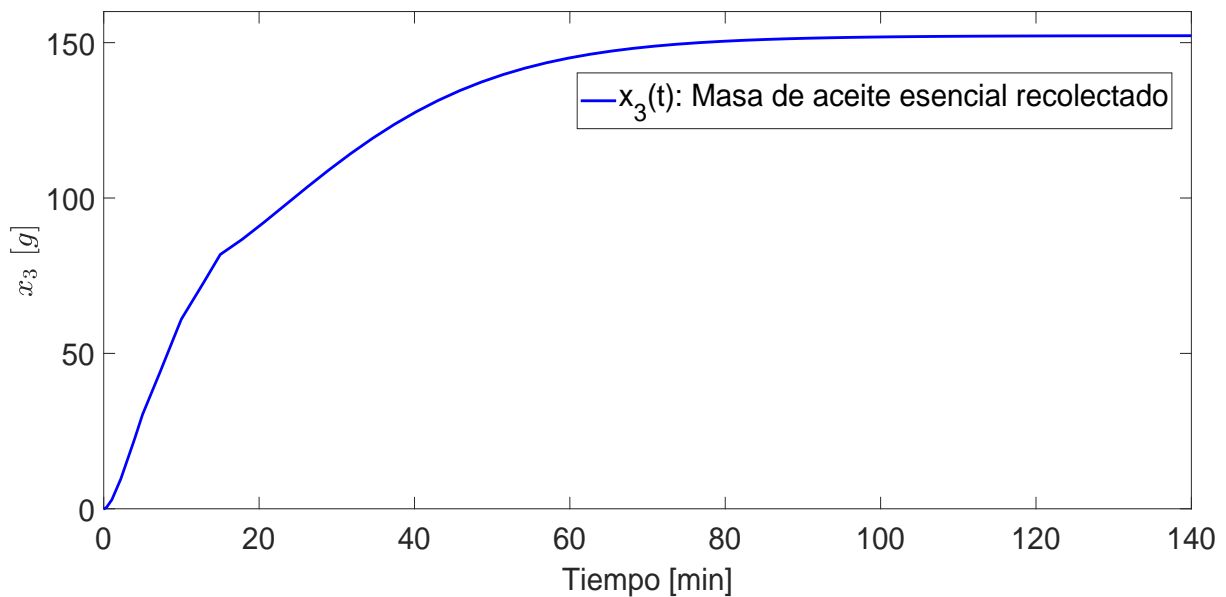


Fig. 2.10. Simulación 2. Masa de aceite esencial recolectado



## 2.5. Simulación 3. Incremento del flujo de vapor

El objetivo de esta simulación, es incrementar el flujo de vapor  $u(t)$ , y observar de qué manera este incremento pueden afectar o favorecer la recuperación del aceite. Se toman en cuenta los valores de la Tabla 2.1 para la simulación.

La simulación numérica se lleva a cabo en el entorno de Matlab-Simulink R2021a. Se emplea la herramienta Matlab-function para representar el sistema no lineal. Para realizar la variación de la entrada se utiliza la herramienta Signal Builder. Se considera un tiempo de simulación  $T_{sim} = 100 \text{ min}$ . Las condiciones iniciales de las masas de aceite son  $x(t) = [152.25 \ 0 \ 0]^T$ . El sistema se considera libre de fallas y la entrada varía de la siguiente manera:

$$u(t) = \begin{cases} 40000 \text{ cm}^3/\text{min} , 0 \text{ min} \leq t < 5 \text{ min} \\ 45000 \text{ cm}^3/\text{min} , 5 \text{ min} \leq t < 10 \text{ min} \\ 50000 \text{ cm}^3/\text{min} , 10 \text{ min} \leq t < 15 \text{ min} \\ 55000 \text{ cm}^3/\text{min} , 15 \text{ min} \leq t \leq 100 \text{ min} \end{cases} \quad (2.26)$$

En la Fig. 2.11, se puede observar un aumento del flujo de vapor, de acuerdo a los valores establecidos en la Ec. (2.26)

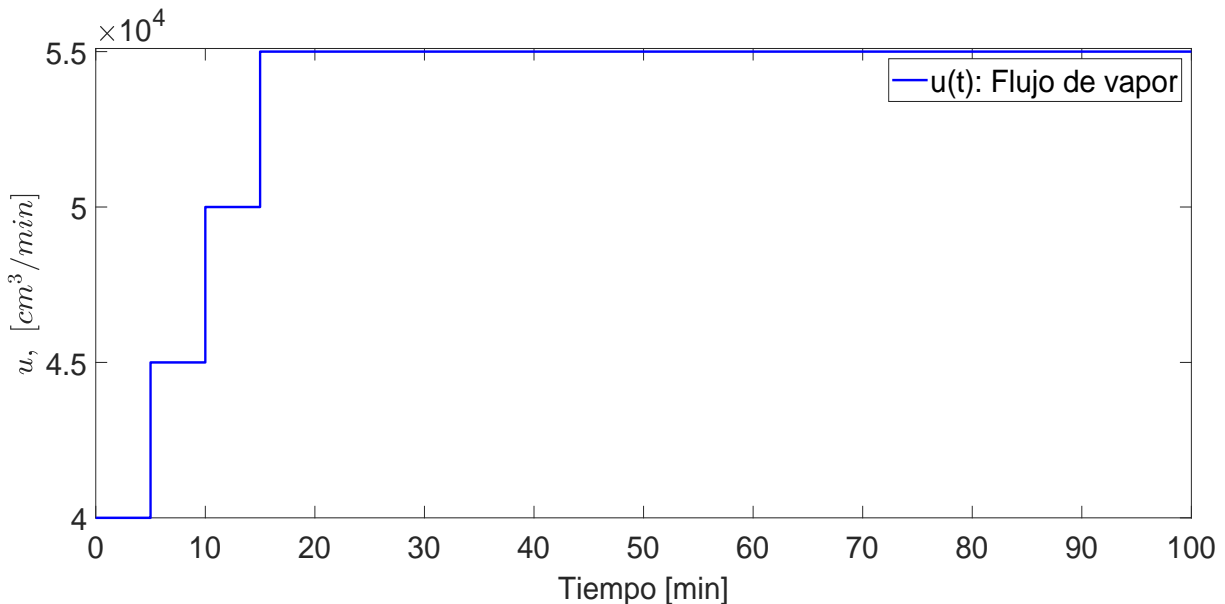


Fig. 2.11. Simulación 3. Incremento del flujo de vapor

La Fig. 2.12, muestra que la masa de aceite esencial en los tricomas  $x_1(t)$ , no se ve afectado por el incremento del flujo de vapor.

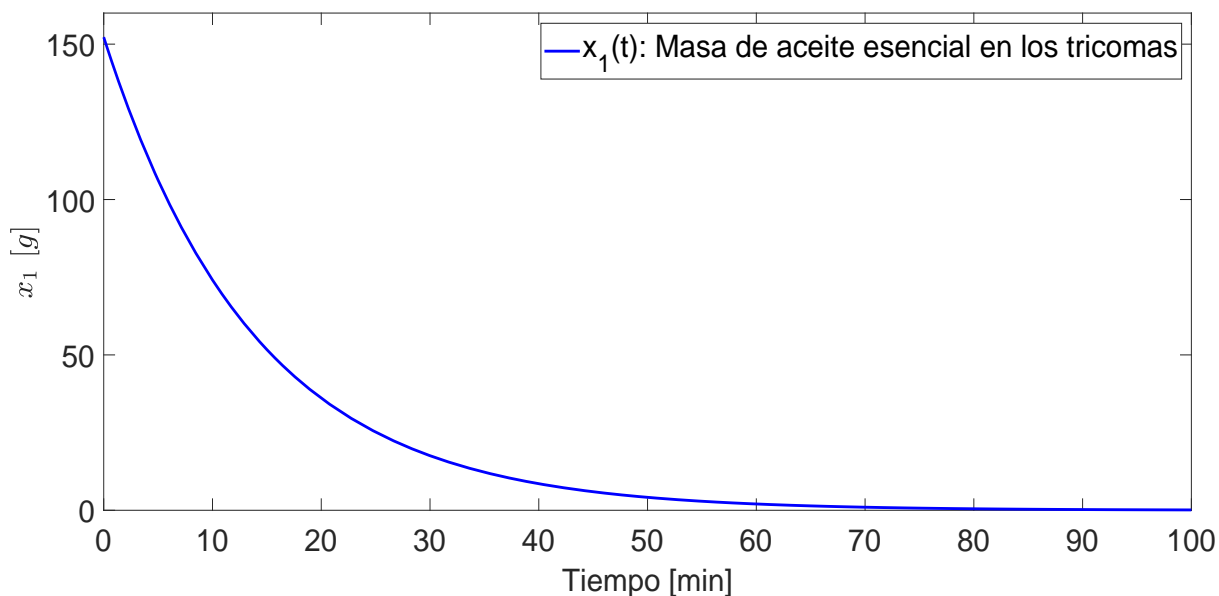


Fig. 2.12. Simulación 3. Masa de aceite esencial en los tricomas.

La Fig. 2.13, muestra que el estado  $x_2(t)$  se ve afectado por el incremento del flujo de vapor. En el intervalo de  $(0 - 6 \text{ min})$  de la simulación, la acumulación del aceite esencial en la capa acuosa disminuye, alcanzando un valor de  $8.54 \text{ g}$ . Alcanza un estado estacionario aproximadamente en un tiempo  $t = 70 \text{ min}$ .

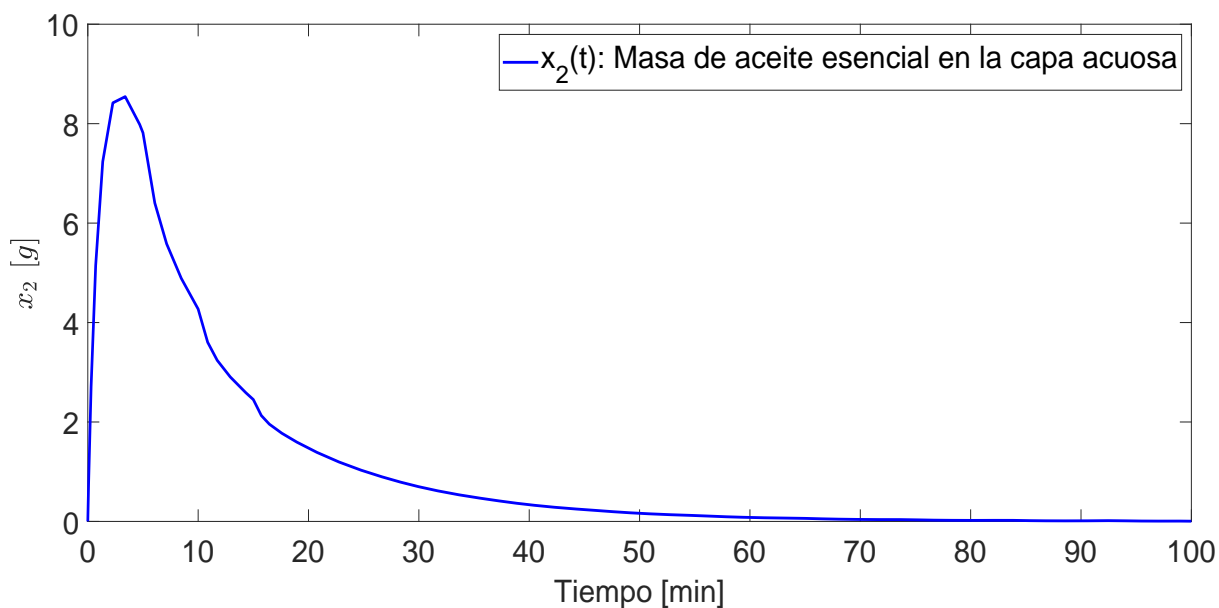


Fig. 2.13. Simulación 3. Masa de aceite esencial en la capa acuosa

En la Fig. 2.14, es posible notar que la variable de estado  $x_3(t)$ , alcanza su estado estacionario aproximadamente en 70 *min* de la simulación.

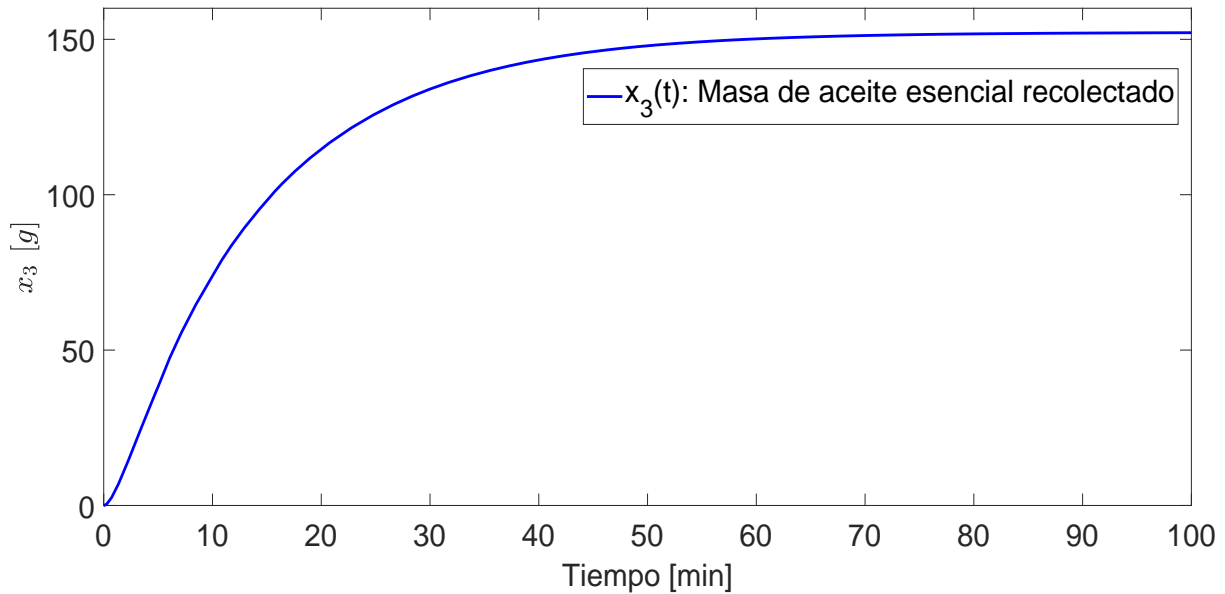


Fig. 2.14. Simulación 3. Masa de aceite esencial recolectado

### Conclusiones simulación 2 y 3.

Los resultados de la simulación 2 muestran que si el flujo de vapor disminuye, la masa de aceite en la capa acuosa crece, es decir, la capa de aceite en la superficie de las hojas incrementa. Por tanto, existe un periodo de tiempo para que la capa de aceite pase a la fase de vapor, y esto puede volver lento al proceso.

En la simulación 3 sucede lo contrario, si el flujo de vapor incrementa, la masa de aceite en la capa acuosa disminuye, es decir, la capa de aceite en la superficie de las hojas es pequeña, y por tanto se puede evaporar fácilmente favoreciendo la extracción del aceite esencial.

## 2.6. Actividades experimentales

En esta sección se describen las partes principales del equipo destilador de aceites esenciales, se indica el procedimiento para el montaje correcto de los elementos y, además, se presentan los experimentos para tres tipos de materiales vegetales distintos, incluyendo los datos recabados para cada destilación.

### 2.6.1. Equipo experimental

En la Fig. 2.15 se muestra el equipo destilador de aceites esenciales, el barril tiene las siguientes características: un diámetro de 25 *cm*, pesa 2804 *g*, el radio es de 12.5 *cm*, una altura de 40 *cm* y el volumen es de 20 *L*, está hecho de acero inoxidable 304. El condensador tiene un diámetro de 9 *cm* y una altura de 35 *cm*.



Fig. 2.15. Elementos de un destilador.

A continuación, se describen brevemente las funciones de cada una de las partes del destilador de aceites que están señaladas con flechas rojas en la Fig. 2.15.

- **Barril:** Es el recipiente metálico en donde se coloca la materia prima (lecho de hojas, tallos, etc).
- **Manijas:** Su propósito principal es facilitar la movilidad del destilador, permitiendo que sea transportado de manera segura sin riesgo de dañar el equipo o de lesionar al usuario.
- **Abrazaderas:** Ayudan a sellar adecuadamente la unión entre el barril y el condensador, esto es crucial para evitar fugas de vapor y asegurar que el vapor se condense de manera efectiva.
- **Tubo rectificador:** Su función es dirigir el vapor que contiene los componentes volátiles hacia la parte superior del condensador.
- **Termómetro:** Es un dispositivo digital que tiene una sonda metálica que permite medir la temperatura del vapor, cuenta con una pantalla LCD que muestra las lecturas del sensor. El dispositivo es conocido como sensor de temperatura HT-5, tiene un rango de medición de temperatura de  $-50^{\circ}C$  a  $110^{\circ}C$  y la precisión de medición de  $1^{\circ}C$ .
- **Condensador:** En este dispositivo se realiza un intercambio de calor, entre el vapor caliente que circula por una tubería en forma de serpentín y el agua fría que circula a contra corriente, logrando que el vapor pase a su estado líquido.
- **Tubo de salida del aceite:** Elemento que permite el transporte del producto destilado hacia el recipiente de recolección.

## 2.6.2. Instrucciones para el montaje y habilitación del destilador.

### Habilitación del barril

El barril destilador se configura de forma que el material vegetal o hierba seleccionada para destilar pueda recibir la corriente de vapor de agua de forma adecuada, de manera que se puedan extraer sus componentes volátiles.

En la Fig. 2.16 se muestran los pasos para preparar adecuadamente el barril donde se deposita la materia prima, es decir, el material vegetal que se desea destilar. Conforme se ilustra en la Fig. 2.16a, el primer paso es armar el plato perforado y la verificar que los soportes estén bien colocados.

Una vez completada esta etapa, el plato se coloca cuidadosamente dentro del barril, y se procede a medir la cantidad de agua, asegurándose de que no exceda la altura de la base perforada, tal como se indica en la Fig. 2.16b. Finalmente, se acomoda una bolsa tipo filtro en el interior del barril, preparándola para recibir el material vegetal, según se muestra en la Fig. 2.16c.



Fig. 2.16. Configuración del barril.

## Preparación del material vegetal

La selección y limpieza del material vegetal es importante en el proceso de destilación por arrastre de vapor, por varias razones. Primero, referente a la *calidad del producto*, si se selecciona un material fresco y en buen estado, es posible garantizar un producto final de mayor calidad. En cuanto a la *prevención de contaminantes* es importante realizar una limpieza adecuada para prevenir la presencia de residuos, pesticidas u otras sustancias no deseadas en el producto final. Utilizar material vegetal uniforme y limpio favorece a lograr *resultados más consistentes* en términos de aroma, sabor y composición química en los productos destilados. *Evitar olores y sabores indeseados*, cuando se presentan residuos en el material vegetal se pueden generar olores y sabores no deseados en el producto final, la limpieza adecuada evita estas contaminaciones.

En la Fig. 2.17 se muestra la selección de hojas de *eucalipto*. Se separan las hojas de los tallos y se seleccionan las que estén en mejor estado Fig.2.17a, una vez seleccionadas es recomendable lavar de manera cuidadosa las hojas para eliminar residuos de polvo que se encuentren en su superficie Fig.2.17b.



(a) Selección de las hojas.



(b) Lavado de las hojas.

Fig. 2.17. Tratamiento de las hojas de eucalipto.

### Acomodación del lecho

El lecho de hojas debe acomodarse, de manera que permita una distribución uniforme del material vegetal, garantizando así una superficie de contacto favorable a la corriente de vapor. Esto es esencial para facilitar la transferencia de los compuestos volátiles presentes en las hojas hacia la fase vapor, contribuyendo así a la eficiencia del proceso.

En la Fig. 2.18 se muestran dos formas de colocar el lecho del material vegetal.



(a) Geometría elíptica.



(b) Geometría cilíndrica.

Fig. 2.18. Formas de acomodación del lecho.

## Montaje del condensador

Para lograr un buen sellado entre el barril y el condensador, el equipo cuenta con una junta de goma, la cual debe colocarse en la boquilla del barril posteriormente se acopla el condensador a la boquilla y se sujeta con una abrazadera metálica, véase las Figs. 2.19a y 2.19b.



(a) Junta para acoplar el condensador.



(b) Abrazadera de acoplamiento.

Fig. 2.19. Montaje del condensador.

Una vez instalado, el condensador cuenta con un espacio en la parte inferior en donde se coloca el sensor de temperatura, la pantalla LCD se acomoda en la parte superior del condensador para facilitar al usuario la visualización de las lecturas de temperatura, véase las Figs. 2.20a y 2.20b.



(a) Colocación del sensor.



(b) Colocación de la pantalla.

Fig. 2.20. Instalación del sensor de temperatura.



## Etapa de enfriamiento

Para completar la condensación del vapor, es necesario tener un suministro de agua de enfriamiento. En la Fig. 2.21 se puede observar un recipiente que contiene agua fría, dentro del recipiente se encuentra una bomba sumergible que hace circular el agua de acuerdo con la trayectoria de las flechas azules, la trayectoria debe estar a contra corriente con el flujo de vapor para lograr un buen intercambio de calor y por ende favorecer la condensación del vapor que contiene los componentes aromáticos.



Fig. 2.21. Sistema de enfriamiento.

## Etapa de generación de vapor

El agua que está dentro del barril eleva su temperatura debido a la intervención de una fuente de calor externa, que calienta la superficie del barril hasta que el agua comienza a convertirse en vapor, véase Fig. 2.35. Para este caso, la fuente de calentamiento es por medio de gas, y sus partes son: un regulador de alta presión, una manguera adecuada para flujo de gas, una válvula que permita el paso o cierre del flujo de gas y un tornillo de ajuste para la intensidad de la flama, véase Fig. 2.23. Antes de realizar el encendido, se recomienda verificar que no existan fugas en la salida del tanque de gas y en la entrada de la parrilla. Al manipular la válvula, es suficiente con una apertura suave para encender la flama.



(a) Fuente de calor.



(b) Calentamiento del barril.

Fig. 2.22. Generación de vapor.



Fig. 2.23. Partes de la fuente de calor.

## Recolección del aceite esencial

El producto condensado es recolectado en un embudo de decantación, debido a la diferencia de densidad que tiene el agua y el aceite, este último se sitúa en la parte superior. Para realizar la extracción del aceite, el embudo cuenta con una llave de paso, la cual sirve para drenar primeramente el agua que es un subproducto debido a que posee algunas propiedades calmantes, ya que retiene parte del aroma del aceite. La recolección debe realizarse con cuidado, tratando de dejar solamente la capa de aceite, véase Fig. 2.24.



Fig. 2.24. Recolección del destilado.

### 2.6.3. Experimento 1. Destilación de aceite esencial de eucalipto.

**Objetivo.** El objetivo de este experimento es extraer aceite esencial de un lecho de hojas de eucalipto que tiene una masa de 800 g. Realizar el montaje correcto del destilador.

#### Desarrollo del experimento

La *metodología* del experimento consiste en: Realizar el montaje del equipo de acuerdo a lo establecido en la sección 2.6.1, registrar los datos de la temperatura de la mezcla de vapor, medir la temperatura del agua de enfriamiento, tomar en cuenta el tiempo en que comienza el goteo, medir el volumen de agua de perfume que se obtiene durante el proceso de destilación, determinar el tiempo de duración de la destilación, dar a conocer el volumen de aceite esencial extraído.

*Montaje del equipo destilador de aceites esenciales.* Se vierten 2.5 litros de agua al barril destilador para evitar que el agua sobrepase la base perforada que sostiene al lecho de hojas de eucalipto. Siguiendo el procedimiento de la sección 2.6.1 para el montaje del destilador, se realiza el acoplamiento del condensador verificando que quede sellado completamente.

En un recipiente de aluminio, se coloca la bomba sumergible que hará recircular un flujo de agua a contracorriente con la mezcla de vapor, se vierte agua en un 60 % de la capacidad del recipiente. Finalmente, en una base metálica, se coloca un embudo de decantación que recibe la mezcla que viene del tubo de salida del condensador.

En la Fig. 2.25, se muestra el montaje completo del equipo, donde se aprecian las conexiones del tanque de gas hacia la fuente de calor externa, las conexiones de las mangueras al condensador y la colocación del tubo de salida de producto al embudo de decantación.



Fig. 2.25. Montaje completo del equipo.

*Registro de los datos de temperatura de la mezcla de vapor y del agua de enfriamiento.* A lo largo de todo el proceso de destilación por arrastre de vapor se realizan mediciones de la temperatura, con un termómetro de mercurio y de forma manual se mide la temperatura del agua de enfriamiento. Para el caso de la temperatura del vapor, se toma el dato que se muestra en la pantalla del sensor de temperatura HT-5. Los datos registrados se representan en gráficas donde se muestra el comportamiento de ambas temperaturas con respecto al tiempo.

La Fig. 2.26 muestra la curva que describe el comportamiento de la temperatura del agua de enfriamiento durante el proceso de destilación de eucalipto. Se observa que la temperatura inicial es de aproximadamente  $25^{\circ}\text{C}$ . Después de 30 *min* desde el inicio de la destilación, la temperatura del agua alcanza los  $38^{\circ}\text{C}$ . En este punto, es crucial enfriar el agua, ya que de lo contrario, la condensación del vapor no será eficiente.

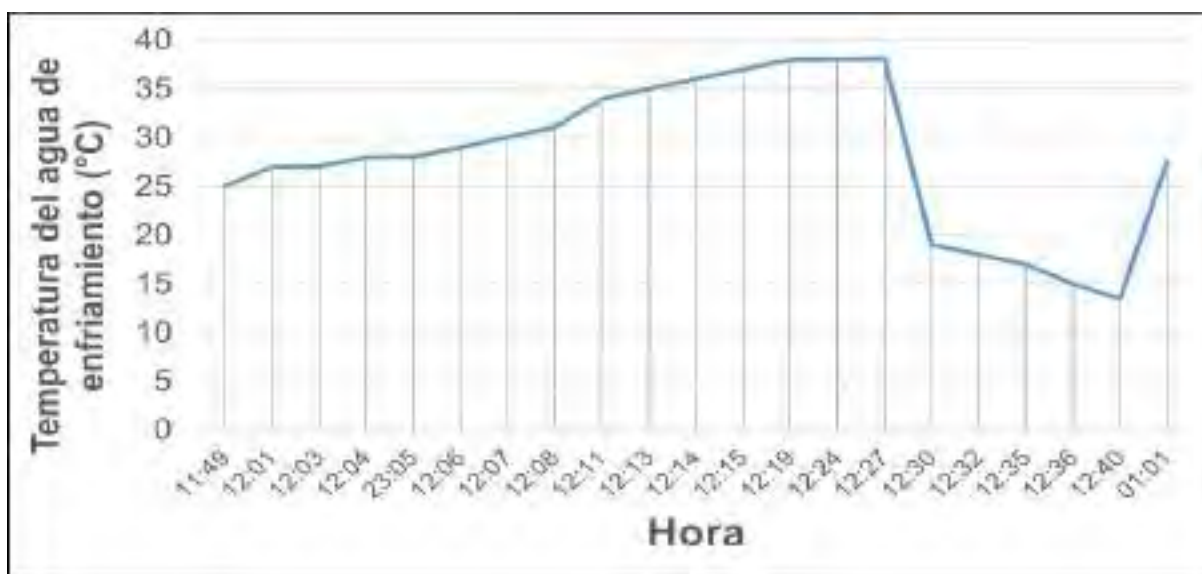


Fig. 2.26. Evolución de la temperatura del agua fría en la destilación de eucalipto.

La Fig. 2.27 muestra la curva de la temperatura del vapor durante la destilación de eucalipto. Para que el vapor pueda condensarse es necesario que su temperatura se sitúe entre  $80^{\circ}\text{C}$  y  $90^{\circ}\text{C}$ . Se observa en la curva que la temperatura deseada se alcanza cuando el proceso está próximo a concluir, esto tiene como consecuencia una demora significativa en la obtención de la primera gota de aceite. Es decir, si el agua de enfriamiento tiene una temperatura por encima de los  $25^{\circ}\text{C}$  durante la mayor parte del proceso, no será suficiente para enfriar la mezcla de vapor.

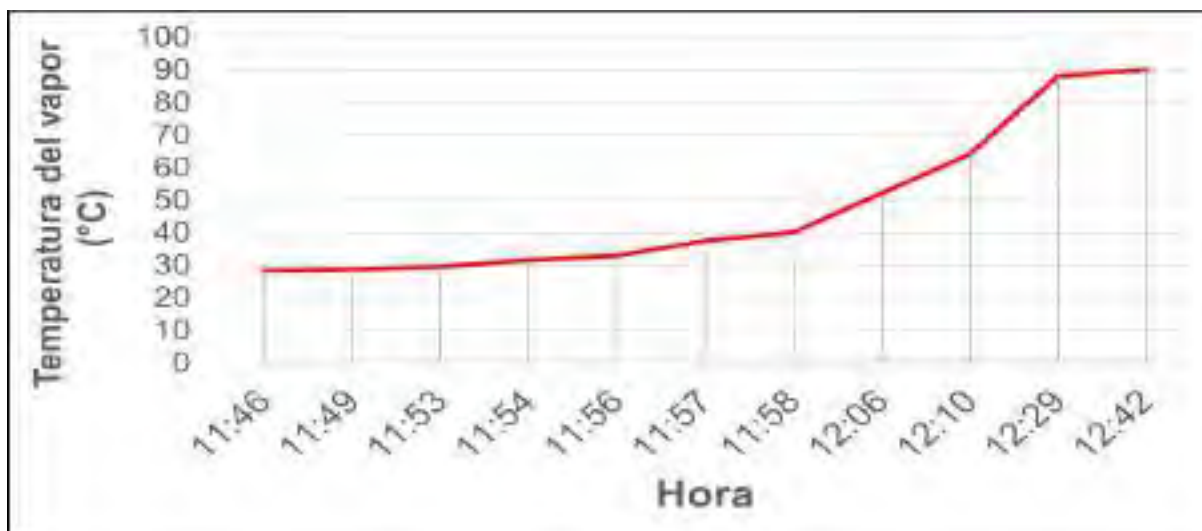


Fig. 2.27. Evolución de la temperatura del vapor en la destilación de eucalipto.

*Tiempo en que comienza el goteo del producto destilado.* Mediante un cronómetro se mide el tiempo que tarda en caer la primera gota del vapor destilado y se registra el dato de temperatura en ese instante. En la Tabla. 2.2, se indican los valores de tiempo y temperatura de este experimento.

Tabla 2.2. Obtención de la primera gota del destilado de eucalipto.

Tipo de Material Vegetal	Tiempo de obtención de la primera gota de destilado	Temperatura del vapor (°C)
<i>Eucalyptus globulus</i>	48 min	88.9

La primera columna de la Tabla 2.2 menciona el nombre científico del material vegetal, en la segunda columna se muestra tiempo de obtención de la primera gota del destilado, que es de 48 *min* y la tercera columna muestra el valor de temperatura de la mezcla de vapor en el instante en que comienza el goteo, aproximadamente 88.9°C.

*Medición del volumen del agua de perfume durante la destilación.* A medida que transcurre la destilación por arrastre de vapor, el agua de perfume que queda en la parte inferior del embudo, se almacena en recipientes de vidrio como ya que se considera un subproducto. En la Tabla 2.3 se muestran los datos relacionados al volumen del agua en las etapas del proceso.

Tabla 2.3. Volumen de agua en la destilación de eucalipto.

<b>Tipo de Material Vegetal</b>	<b>Volumen de agua ingresado al barril (ml)</b>	<b>Volumen de agua perfumada recolectada (ml)</b>	<b>Volumen de agua sobrante (ml)</b>
<i>Eucalyptus globulus</i>	2500	1850	630

La columna uno de la Tabla 2.3 menciona el nombre científico del material vegetal, la columna dos indica el volumen de agua que se ingresa al barril, aproximadamente 2500 *ml*, el volumen de agua perfumada recolectada se muestra en la columna tres, 1850 *ml*. Finalmente, la columna cuatro da a conocer el volumen de agua que queda al interior del destilador después de haber finalizado el proceso y es de 630 *ml*.

*Duración de la destilación de eucalipto.* El experimento se llevó a cabo el día martes 21 de noviembre de 2023 en el laboratorio de procesos del CENIDET, la hora de inicio de la destilación fue 11 : 46 *min* y finalizó a las 13 : 14 *min*. Por tanto, el proceso dura aproximadamente 88 *min*.

*Aceite esencial extraído.* Como resultado de la destilación por arrastre de vapor de un lecho de hojas de eucalipto de 800 *g*, se logra obtener aproximadamente 1.5 *g* de aceite esencial, el cual tiene un tono de color amarillo claro con un olor característico, véase la Fig. 2.28.



Fig. 2.28. Aceite esencial de eucalipto.



*Conclusiones del experimento.* Los resultados obtenidos en las gráficas de temperatura del agua de enfriamiento y de la mezcla de vapor demuestran que si no se cuenta con agua de enfriamiento a una baja temperatura, el proceso de condensación se ve afectado, ya que el intercambiador de calor no es capaz de condensar de forma rápida la mezcla de vapor. Se recolectó aproximadamente 1.5 g de aceite esencial de un lecho de hojas de eucalipto de 800 g, esto permite calcular el rendimiento del aceite de aproximadamente 0.18 %, véase la sección 2.6.6.

*Propiedades del aceite esencial de eucalipto.* Cuenta con propiedades interesantes en el tratamiento de las enfermedades de las vías respiratorias como el resfriado, asma, dolor de garganta, gripe, tos, fiebre, rinitis, bronquitis y sinusitis (Lipa Huamaní, 2014).

#### **2.6.4. Experimento 2. Destilación de aceite esencial de romero.**

**Objetivo.** El objetivo de este experimento es extraer aceite esencial de un lecho conformado por hojas y tallos de romero, el cual tiene una masa de 3584 g. Mejorar la etapa de condensación de la mezcla de vapor mediante la disminución de la temperatura del agua de enfriamiento.

##### **Desarrollo del experimento**

La *metodología* del experimento consiste en: Mostrar las evidencias de la medición del lecho y el lavado del material vegetal, realizar mediciones de la temperatura de la mezcla de vapor y del agua de enfriamiento, medición del tiempo en que comienza el goteo del producto destilado, medir el volumen del agua de perfume que se almacena durante el proceso, tomar el tiempo que tarda todo el proceso de destilación, medir el volumen de aceite esencial extraído.

*Pesaje y limpieza del lecho de hojas y tallos de romero.* Para conocer la masa del material vegetal es necesario medir el peso del barril con y sin la bolsa tipo filtro donde se colocan las hojas. En la Fig. 2.29a se puede observar que el peso del barril sin el filtro es de 2804 g y en la Fig. 2.29b, se observa que el peso del barril con el filtro es de 2828 g. Por tanto, el peso del filtro es de aproximadamente 24 g.





(a) Sin el filtro.



(b) Con el filtro.

Fig. 2.29. Medida del peso del barril.

El siguiente paso consiste en lavar con cuidado el material vegetal para eliminar los residuos de polvo o impurezas. En este experimento, se utilizaron hojas y tallos de romero. Después de lavar el romero, se deposita en la bolsa tipo filtro, véase las Figs. 2.30a y 2.30b.



(a) Lavado de hojas.



(b) Colocación de hojas.

Fig. 2.30. Lavado de hojas de romero.

El lecho de hojas de romero se coloca dentro del barril y se pesa nuevamente. En la Fig. 2.31b, se muestra que el peso del barril considerando la carga del lecho de hojas de eucalipto es de 6412 g.



(a) Barril cargado.



(b) Peso del barril cargado.

Fig. 2.31. Barril cargado de hojas de romero.

Se puede calcular la masa del material vegetal tomando en cuenta el peso del barril cargado y el peso del barril con la bolsa tipo filtro mediante la siguiente diferencia:

$$6412 \text{ g} - 2828 \text{ g} = 3584 \text{ g} \quad (2.27)$$

*Medición de la temperatura de la mezcla de vapor y del agua de enfriamiento.* El sensor de temperatura que se encuentra instalado en la parte inferior del condensador mide la temperatura de la mezcla de vapor y muestra los valores en una pantalla LCD que se ubica en la parte superior del condensador, se registran los datos que se muestran en el indicador para realizar la gráfica correspondiente. Por otro lado, con un termómetro de mercurio se mide la temperatura del agua de enfriamiento en ciertos instantes de tiempo y se registran los datos para realizar una gráfica del comportamiento de la temperatura en esta etapa.

En la Fig. 2.32, se muestra la curva que representa la temperatura del agua de enfriamiento durante la destilación de romero. Para este caso, antes de iniciar la destilación, se enfría el agua con una bolsa de aproximadamente 5 kg de hielo, alcanzando una temperatura de aproximadamente 7°C. Posteriormente, se inicia la destilación y, cuando la temperatura del agua alcanza los 19°C, se agrega más hielo al recipiente de agua fría para reducir nuevamente la temperatura, llegando a los 13°C. El propósito de enfriar el agua desde el principio y procurar mantenerla así durante la destilación es lograr condensar la mezcla de vapor en un menor tiempo que el experimento anterior.

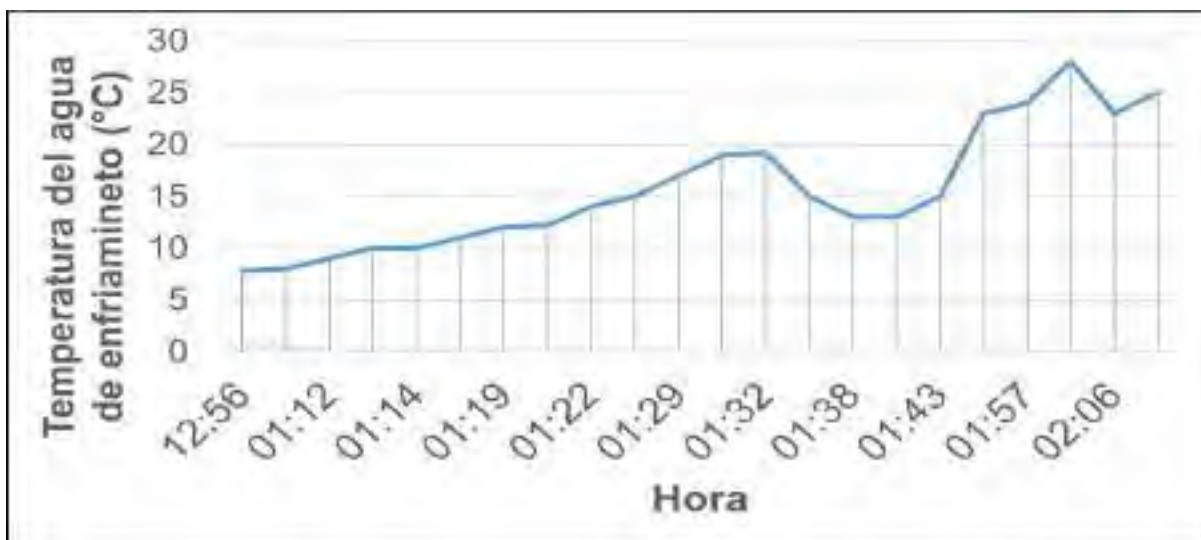


Fig. 2.32. Evolución de la temperatura del agua fría en la destilación de romero

En la Fig. 2.33, se presenta la curva de temperatura del vapor durante la destilación de romero. Se observa que aproximadamente a los 18 *min* desde el inicio del proceso, se alcanza la temperatura requerida para la condensación del vapor, que es aproximadamente  $90^{\circ}\text{C}$ . Como resultado, la obtención de la primera gota de aceite se logra en un menor tiempo en comparación con la destilación de eucalipto.

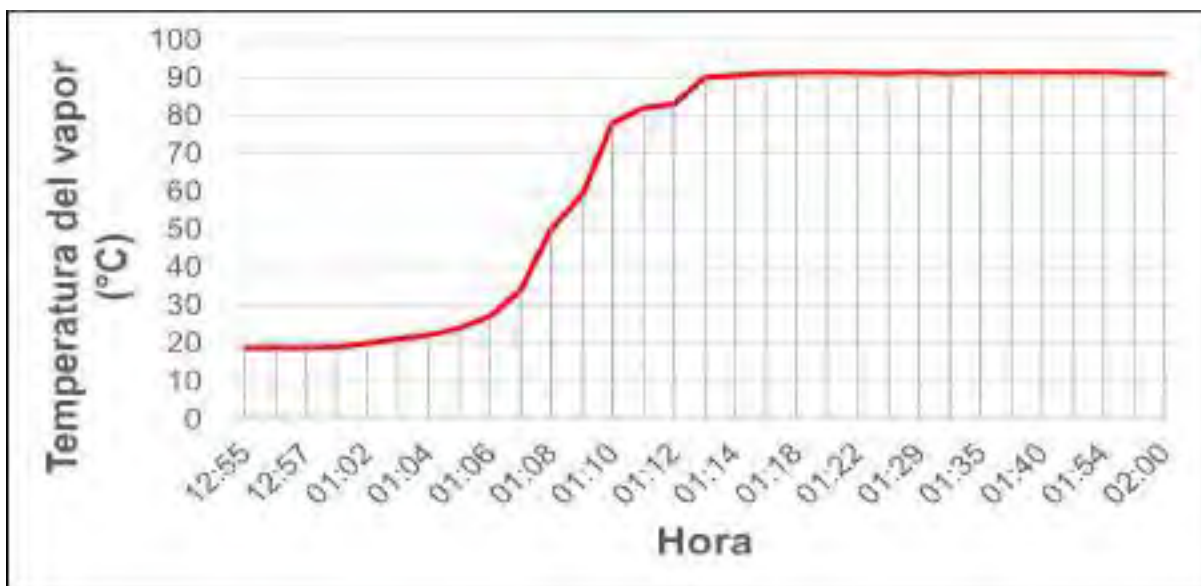


Fig. 2.33. Evolución de la temperatura del vapor en la destilación de romero

*Tiempo en que inicia el goteo del producto destilado.* Haciendo uso de un cronómetro, se determina el tiempo en que inicia el goteo del destilado. Además, se registra el dato de temperatura cuando cae la primera gota de destilado. En la Tabla. 2.4, se muestran los valores de tiempo y temperatura de goteo para este experimento.

Tabla 2.4. Obtención de la primera gota de destilado de romero.

<b>Tipo de Material Vegetal</b>	<b>Tiempo de obtención de la primera gota de destilado</b>	<b>Temperatura del vapor (°C)</b>
<i>Rosmarinus officinalis</i>	18 min	89.9

La primera columna de la Tabla 2.4 menciona el nombre científico del material vegetal, en la segunda columna se indica el tiempo que tarda en obtenerse la primera gota del destilado a partir del inicio de la destilación, y fue de aproximadamente 18 *min*, la tercera columna muestra la temperatura de la mezcla de vapor cuando comienza el goteo, y fue de aproximadamente 89.9°C.

*Medición del volumen del agua de perfume durante el proceso de destilación.* Con la ayuda de un matraz erlenmeyer, se mide la cantidad de agua destilada con características aromáticas del romero, posteriormente se almacena en recipientes de vidrio y se cierra para evitar contaminación. En la Tabla. 2.5 se muestran los datos relacionados a los volúmenes de agua que son importantes en este proceso.

Tabla 2.5. Volumen del agua de perfume en la destilación de romero.

<b>Tipo de Material Vegetal</b>	<b>Volumen de agua ingresado al barril (ml)</b>	<b>Volumen de agua perfumada recolectada (ml)</b>	<b>Volumen de agua remanente (ml)</b>
<i>Rosmarinus officinalis</i>	2500	1820	650

La columna uno de la Tabla. 2.5 menciona el nombre científico del romero, la columna dos indica la cantidad de agua que se ingresa al barril, aproximadamente 2500 *ml*, el volumen de agua perfumada se indica en la columna tres, aproximadamente 1820 *ml*. Finalmente, en la columna cuatro se muestra el dato del volumen de agua que queda en el interior del barril al final de la destilación y es de aproximadamente 650 *ml*.

*Duración de la destilación de romero.* El experimento se llevó a cabo el día miércoles 6 de diciembre de 2023 en el laboratorio de procesos del CENIDET, la hora de inicio de la destilación fue a las 12 : 55 *min* y finalizó a las 14 : 26 *min*. Por tanto, el proceso duró aproximadamente 91 *min*.

*Aceite esencial extraído.* El aceite esencial obtenido en este experimento se puede observar en las Figs. 2.34a y 2.34b. Particularmente la Fig. 2.34a, muestra la mezcla bifásica líquida donde se puede apreciar que el aceite está en la parte superior debido a su densidad.



(a) Mezcla líquida bifásica.



(b) Aceite esencial de romero.

Fig. 2.34. Extracción del aceite esencial de romero.

El aceite se deposita en un recipiente y se mantiene sellado, utilizando la báscula se determina el peso del recipiente sin aceite esencial, véase Fig. 2.35a. Cuando se deposita el aceite en el recipiente, se vuelve a determinar el peso considerando la cantidad de aceite, véase Fig. 2.35b.



(a) Sin aceite.



(b) Con aceite.

Fig. 2.35. Cantidad de aceite esencial en el recipiente.

Considerando las mediciones realizadas, se logra obtener aproximadamente 6 g de aceite esencial de un lecho formado por hojas y tallos de romero de 3584 g. El aceite esencial de romero tiene un aspecto líquido de color amarillento transparente, véase la Fig. 2.36.



Fig. 2.36. Aceite esencial de romero.

*Conclusiones del experimento.* Los resultados obtenidos en las gráficas de temperatura del agua de enfriamiento y la mezcla de vapor, demuestran que cuando se disminuye la temperatura del agua de enfriamiento antes del arranque del proceso, es posible reducir el tiempo de obtención de la primera gota del destilado, ya que la mezcla de vapor tiende a condensarse rápidamente.

Se obtuvo aproximadamente 6 g de aceite esencial de un lecho conformado por hojas y tallos de romero con una masa de 3584 g, el rendimiento fue de 0.16 %, consulte la sección 2.6.6.

*Propiedades del aceite esencial de romero.* Este aceite posee diversas propiedades beneficiosas, incluyendo efectos antiinflamatorios, antisépticos, antioxidantes y astringentes. Se utiliza comúnmente como tónico digestivo para el hígado, puede ayudar a reducir el flujo menstrual y se ha demostrado eficaz en el alivio de dolores abdominales (Larico Cari y Hayamamani Mamani, 2022).

### 2.6.5. Experimento 3. Extracción de aceite esencial de salvia.

**Objetivo.** El objetivo de este experimento es extraer aceite esencial de un lecho de hojas de salvia con una masa de 684 g. Lograr que la mezcla de vapor al interior del destilador se condense de manera rápida.

#### Desarrollo del experimento

La *metodología* del experimento consiste en: Realizar mediciones de la temperatura del agua de enfriamiento y la temperatura de la mezcla de vapor, medir el tiempo de la primera gota del producto destilado, medir el volumen de agua perfumada que se obtiene durante la destilación, determinar el tiempo de duración de todo el proceso, volumen de aceite esencial obtenido.

*Medición de la temperatura del agua de enfriamiento y de la temperatura del vapor.* Con un termómetro de mercurio, constantemente se realizan mediciones del agua de enfriamiento. Por otro lado, se registran los valores de las mediciones del sensor e indicador de temperatura HT-5.

A continuación, se presentan las gráficas de los datos registrados para la temperatura del agua de enfriamiento y la mezcla de vapor respectivamente.

En la Fig. 2.37, se presenta la curva de la temperatura del agua de enfriamiento durante la destilación de salvia. Inicialmente, la destilación comenzó con agua a temperatura ambiente, aproximadamente 25°C. No obstante, a los 10 min del proceso, se introdujo hielo en el recipiente que contiene el agua de enfriamiento, reduciendo la temperatura a 16°C. A lo largo de los siguientes 7 min, la temperatura aumentó hasta 20°C, pero nuevamente se agregó hielo al recipiente, disminuyendo la temperatura a un valor de aproximadamente 17°C. Como se puede observar en la curva, las temperaturas más bajas se registran en la parte media del proceso.



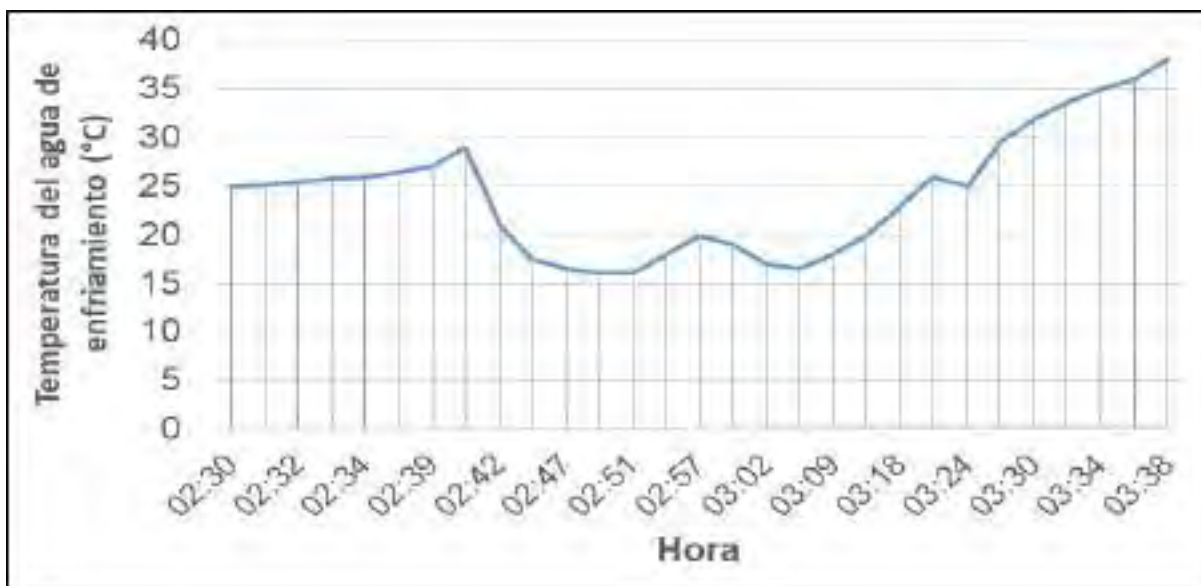


Fig. 2.37. Evolución de la temperatura del agua fría en la destilación de salvia

En la Fig. 2.38, se muestra la curva de la temperatura de la mezcla de vapor. Se observa que aproximadamente a los 13 *min* desde el inicio de la destilación, se alcanza la temperatura deseada para lograr la condensación de la mezcla de vapor. A diferencia de los experimentos anteriores, el comportamiento de la curva se mantiene estable una mayor cantidad de tiempo en la temperatura deseada que es de aproximadamente  $90^{\circ}\text{C}$  para condensar la mezcla de vapor.

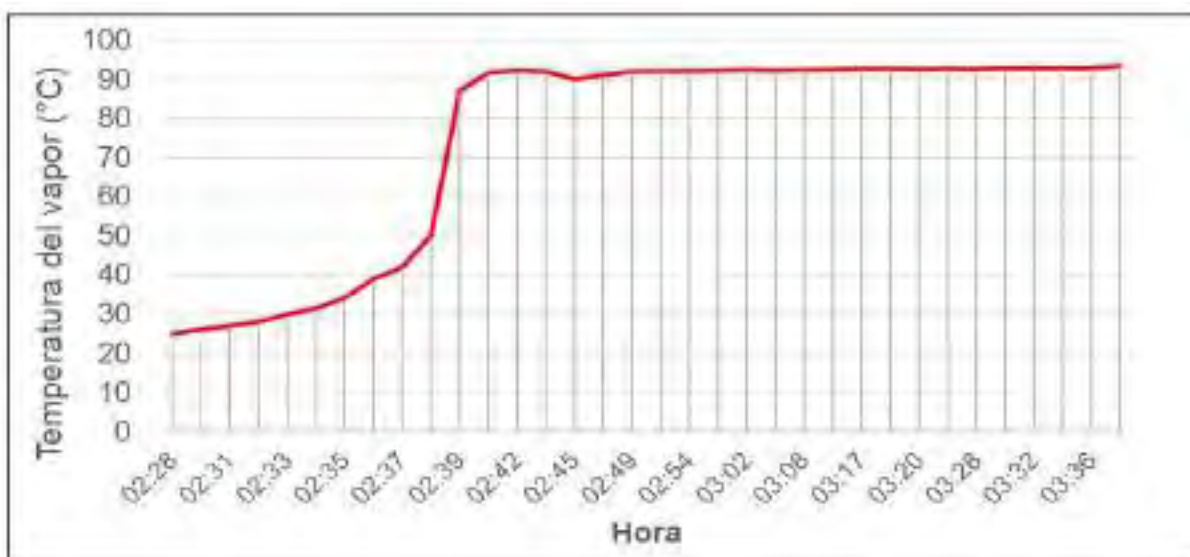


Fig. 2.38. Evolución de la temperatura del vapor en la destilación de salvia



*Medición del tiempo de obtención de la primera gota del producto destilado.* Con la ayuda de un cronómetro, se mide el tiempo que tarda en caer la primera gota de producto destilado. También es importante registrar el dato de temperatura en la que ocurre este fenómeno. En la Tabla. 2.6, se muestran los datos obtenidos particularmente para este experimento.

Tabla 2.6. Obtención de la primera gota de destilado de salvia.

<b>Tipo de Material Vegetal</b>	<b>Tiempo de obtención de la primera gota de destilado</b>	<b>Temperatura del vapor (°C)</b>
<i>Salvia officinalis</i>	13 min	80.5

En la primera columna de la Tabla. 2.6, se muestra el nombre científico del material vegetal, la segunda columna indica el tiempo que tarda en comenzar el goteo a partir del inicio del proceso, aproximadamente 13 *min*, en la tercera columna se observa que la temperatura de la mezcla de vapor al comienzo del goteo es de 80.5°C.

*Medición del volumen del agua de perfume durante la destilación.* Durante el proceso de destilación se almacena el agua de perfume en recipientes de vidrio, el volumen del agua perfumada permite establecer al menos de forma empírica la cantidad de agua que queda al interior del barril, lo cual es importante para detener el proceso en caso de que el volumen de agua perfumada se esté acercando al volumen de agua ingresado al destilador y así evitar que se consuma por completo.

En la Tabla. 2.7 se muestran los datos obtenidos particularmente para la destilación de salvia.

Tabla 2.7. Volumen del agua de perfume en la destilación de salvia.

<b>Tipo de Material Vegetal</b>	<b>Volumen de agua ingresado al barril (ml)</b>	<b>Volumen de agua perfumada recolectada (ml)</b>	<b>Volumen de agua remanente (ml)</b>
<i>Salvia officinalis</i>	2500	1780	700

La columna uno de la Tabla. 2.7 muestra el nombre científico del material vegetal, la columna dos indica la cantidad de agua que se ingresa al barril que es de 2500 *ml*, la columna tres muestra que la cantidad de agua perfumada que se obtiene de la destilación de salvia es de 1780 *ml*. Finalmente, la cantidad de agua que queda en el barril al final de la destilación es de 700 *ml*, véase la Fig. 2.39.

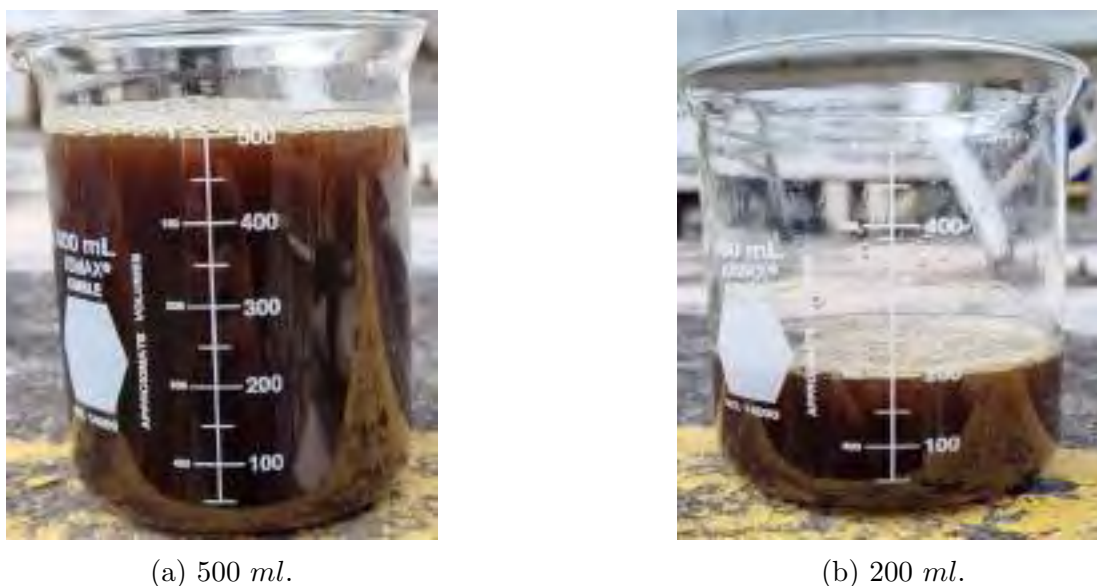


Fig. 2.39. Volumen de agua sobrante.

*Duración de la destilación de salvia.* El experimento se llevó a cabo el día viernes 8 de diciembre de 2023 en el laboratorio de procesos del CENIDET, la hora de inicio de la destilación fue a las 14 : 28 *min* y finalizó a las 15 : 38 *min*. Por tanto el proceso tiene un tiempo de duración de aproximadamente 70 *min*.

*Aceite esencial obtenido.* Como resultado de la destilación por arrastre de vapor de un lecho de hojas de salvia de 684 *g*, se logra obtener aproximadamente 1 *g* de aceite esencial, el cual tiene un tono de color amarillo dorado como se muestra en la Fig. 2.40.



Fig. 2.40. Aceite esencial de salvia.

*Conclusiones del experimento.* Los resultados obtenidos en las gráficas de la temperatura de vapor y la temperatura del agua de enfriamiento demuestran que la colocación del hielo en un tiempo determinado, favorece la condensación de la mezcla de vapor. Se recolectó aproximadamente 1 g de aceite esencial de un lecho de hojas de salvia de 684 g, con un rendimiento de 0.14 %, consulte la sección 2.6.6.

*Propiedades del aceite esencial de salvia.* Tiene propiedades antirreumáticas y antitranspirantes. Se ha empleado para disminuir la viscosidad sanguínea, crisis asmáticas, trastornos nerviosos y menstruales. En algunos casos se puede usar como aromatizante y en labores de saneamiento (Porres Martínez y col., 2010).

### 2.6.6. Cálculo del rendimiento

De acuerdo con Perdomo y Palomarez (2015), el rendimiento de los aceites esenciales mediante la destilación por arrastre de vapor ronda entre el (0.01 % al 10 %) en contenido de aceite esencial.

Es posible calcular el rendimiento de los aceites con la siguiente ecuación, (Quert Álvarez y col. (2001)):

$$Y_{\%} = \frac{M_2}{M_1} 100 \quad (2.28)$$

donde  $M_1$  es la masa inicial del material vegetal ( $g$ ),  $M_2$  es la masa final de aceite esencial ( $g$ ) y 100 es el factor matemático. En la Tabla 2.8, se proporcionan la masa inicial de los diversos materiales vegetales empleados en los experimentos, presentadas en la primera columna. La segunda columna muestra la masa final de los aceites esenciales obtenidos, mientras que la tercera columna refleja los resultados obtenidos al aplicar la fórmula (2.28) a cada material vegetal.

Tabla 2.8. Porcentaje de rendimiento de los aceites esenciales

Tipo de Material Vegetal	$M_2$ ( $g$ )	$M_1$ ( $g$ )	$Y_{\%}$
<i>Eucalyptus globulus</i>	$\approx 1.5$	800	0.187
<i>Rosmarinus officinalis</i>	$\approx 6$	3584	0.167
<i>Salvia officinalis</i>	$\approx 1$	684	0.146

El porcentaje de rendimiento de los aceites esenciales obtenidos, está dentro del rango reportado en la literatura para la destilación por arrastre de vapor.

### 2.6.7. Subproductos

Es importante señalar que, en el proceso de destilación por arrastre de vapor, no solo se recolectan los aceites esenciales. También se puede aprovechar el agua de perfume de la mezcla que se encuentra en el dispositivo de recolección, observe Fig. 2.41.



Fig. 2.41. Mezcla bifásica (aceite-agua de perfume)

Debido a que el agua conserva el olor característico del aceite, es considerado como un subproducto que también tiene utilidad, véase Fig 2.42.



Fig. 2.42. Productos y subproductos

## 2.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo, se dan a conocer las hipótesis generales que respaldan el modelado matemático. Se lleva a cabo una explicación detallada sobre la ruta de transferencia del aceite desde el tricoma hasta la fase de vapor, considerando cuatro etapas distintas (tricomas glandulares, capa acuosa, aceite libre exudado y vapor). Se presentan las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del aceite esencial. Además, se proponen dos formas de representar el modelo del sistema de destilación por arrastre de vapor, como representaciones en espacio de estados. Los resultados de simulación revelan que ante variaciones en el flujo de vapor, se produce una acumulación de aceite en la capa acuosa que puede disminuir o aumentar. En escenarios donde el flujo de vapor aumenta, la acumulación de aceite en la capa acuosa disminuye; por el contrario, cuando el flujo de vapor disminuye, la acumulación de aceite en la capa acuosa aumenta. Finalmente, los resultados de la sección de experimentación muestran que la temperatura del agua de enfriamiento tiene un efecto significativo en la condensación de la mezcla de vapor. El rendimiento de los aceites esenciales obtenidos está dentro del intervalo que reporta la literatura para la destilación por arrastre de vapor.

# Capítulo 3

## Diseño de observadores

En este capítulo se presenta el análisis y diseño de un observador para la estimación de variables de estado de un sistema no lineal. Se abordan las condiciones para asegurar la estabilidad y convergencia del observador mediante el segundo método de Lyapunov. También se muestra el análisis y diseño de un segundo observador, con la finalidad de estimar las variables de estado de un sistema no lineal y además fallas de tipo abruptas.

El presente capítulo está organizado de la siguiente forma: En la sección 3.1 se propone una estructura de observador no lineal que deriva de los observadores para sistemas no lineales Lipschitz Trinh y Fernando (2011), el estudio de la dinámica del error y el análisis de la estabilidad para el observador usando el segundo método de Lyapunov.

En la sección 3.2 se presenta la estructura del observador para la estimación de estados y fallas de tipo abruptas, el cual parte de la estructura del observador dinámico generalizado Osorio-Gordillo *y col.* (2018). Se aborda también el estudio de la dinámica del error, la parametrización de las matrices y el análisis de estabilidad mediante el segundo método Lyapunov.

### 3.1. Diseño de un observador para la estimación de variables de estado de un sistema no lineal

La metodología del diseño del observador para el sistema no lineal que se aborda a continuación, se llevó a cabo siguiendo parte de la estructura propuesta por Trinh y Fernando (2011).

Considerando el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada del sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  representa las variables de salida medidas.  $C$  es una matriz conocida de dimensiones apropiadas.

El observador de orden completo para el sistema no lineal de la Ec. (3.1), tiene la siguiente estructura matemática.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) + L(Cx(t) - C\hat{x}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados estimados por el observador,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada del sistema,  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  representa las variables de salida estimadas por el observador y  $L$  es la matriz de ganancias del observador y puede ser determinada de acuerdo a lo establecido en el Teorema 2.

#### **Teorema 2**

*Para el observador de estados propuesto en (3.2), la estimación  $\hat{x}(t)$  convergerá asintóticamente a  $x(t)$  siempre y cuando exista una matriz  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y una matriz  $S \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y un escalar positivo  $\delta$  tales que la siguiente LMI se cumpla:*

$$\begin{bmatrix} -C^T L^T P - PLC + \delta \lambda^2 I_n & P \\ P & -\delta I_n \end{bmatrix} \leq 0\tag{3.3}$$

donde la matriz de ganancia del observador está dada por  $L = P^{-1}S$ .

### 3.1.1. Estudio de la dinámica del error

Considerando al error con la expresión  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , la ecuación que describe la dinámica del error entre el valor real y el estimado está dada por:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.4)$$

Sustituyendo la parte dinámica tanto del sistema como del observador, en la Ec.(3.4), se tiene:

$$\dot{e}(t) = f(x(t), u(t)) - [f(\hat{x}(t), u(t)) + L(Cx(t) - C\hat{x}(t))] \quad (3.5)$$

$$\dot{e}(t) = f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) - LC \underbrace{(x(t) - \hat{x}(t))}_{e(t)} \quad (3.6)$$

La dinámica del error de estimación está dada por la siguiente expresión:

$$\dot{e}(t) = \tilde{f}(t) - LCe(t) \quad (3.7)$$

donde por simplicidad el término  $[f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t))]$  se refiere a  $\tilde{f}(t)$ , como se muestra en la siguiente expresión:

$$\tilde{f}(t) = f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) \quad (3.8)$$

### 3.1.2. Análisis de estabilidad

En esta sección, se muestran las condiciones de estabilidad para la ecuación de la dinámica del error de estimación (3.7), de tal manera que se pueda lograr la estimación de los estados del sistema.

Considere la siguiente función de Lyapunov:

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t) \quad (3.9)$$

donde la matriz  $P = P^T$ , y además  $P > 0$ . La derivada de la función de Lyapunov, está dada por:

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \quad (3.10)$$

reemplazando el valor de  $\dot{e}(t)$  de la Ec.(3.7) en la Ec.(3.10), se obtiene:

$$\dot{V}(e(t)) = (\tilde{f}(t) - LCe(t))^T Pe(t) + e^T(t)P(\tilde{f}(t) - LCe(t)) \quad (3.11)$$


---



efectuando las operaciones, se tiene:

$$\dot{V}(e(t)) = \tilde{f}^T(t)Pe(t) - e^T(t)C^T L^T Pe(t) + e^T(t)P\tilde{f}(t) - e^T(t)PLCe(t) \quad (3.12)$$

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t)(-C^T L^T P - PLC)e(t) + e^T(t)P\tilde{f}(t) + \tilde{f}^T(t)Pe(t) \quad (3.13)$$

De acuerdo con Lyapunov, la estabilidad del sistema (3.7) se garantiza si y sólo si  $\dot{V}(e(t)) < 0$ . Por tanto, para obtener la LMI que cumpla con dichas condiciones, es necesario aplicar una cota a la función no lineal  $\tilde{f}(t)$ , usando para este caso la condición de Lipschitz para sistemas no lineales Khalil (2002), véase la Ec. (3.14).

$$\|f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t))\| \leq \lambda \|x(t) - \hat{x}(t)\| \quad (3.14)$$

donde  $\lambda$  es la constante de Lipschitz del sistema, utilizando la norma  $\|\cdot\|_2^2$  para la Ec. (3.14), se tiene:

$$\|\tilde{f}(t)\|_2^2 \leq \lambda^2 \|e(t)\|_2^2 \quad (3.15)$$

$$\tilde{f}^T(t)\tilde{f}(t) \leq \lambda^2 e^T(t)e(t) \quad (3.16)$$

$$0 \leq \lambda^2 e^T(t)e(t) - \tilde{f}^T(t)\tilde{f}(t) \quad (3.17)$$

$$\lambda^2 e^T(t)e(t) - \tilde{f}^T(t)\tilde{f}(t) \geq 0 \quad (3.18)$$

De acuerdo con Trinh y Fernando (2011), la Ec.(3.18) se cumple para cualquier escalar  $\delta > 0$ , por tanto se puede reescribir como:

$$\delta\lambda^2 e^T(t)e(t) - \delta\tilde{f}^T(t)\tilde{f}(t) \geq 0 \quad (3.19)$$

tomando en cuenta la cota de la Ec.(3.18), la derivada de la función de Lyapunov está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &\leq e^T(t)(-C^T L^T P - PLC)e(t) + e^T(t)P\tilde{f}(t) + \tilde{f}^T(t)Pe(t) \\ &\quad + \delta\lambda^2 e^T(t)e(t) - \delta\tilde{f}^T(t)\tilde{f}(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Debido a que la derivada de la función de Lyapunov está en términos de  $e^T(t)$ ,  $e(t)$  &  $\tilde{f}^T(t)$ ,  $\tilde{f}(t)$ , es posible agruparla de forma matricial, como se muestra en la Ec. (3.21).

$$\dot{V}(e(t)) \leq \begin{bmatrix} e^T(t) & \tilde{f}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C^T L^T P - PLC + \delta\lambda^2 I_n & P^T \\ P & -\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f}(t) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

En la Ec. (3.21) es posible notar la existencia de bilinealidades tales como  $L^T P$  y  $PL$ , debido a que las matrices  $P$  y  $L$  son desconocidas. Para ello, es importante realizar el arreglo matemático  $S = PL$ , para simplificar la solución de la LMI y encontrar una sola variable desconocida  $S$ .

$$\dot{V}(e(t)) \leq \begin{bmatrix} e^T(t) & \tilde{f}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C^T S^T - SC + \delta\lambda^2 I_n & P^T \\ P & -\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

para garantizar que el error converge a cero, basta que lo siguiente se cumpla:

$$\begin{bmatrix} -C^T S^T - SC + \delta\lambda^2 I_n & P^T \\ P & -\delta I_n \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.23)$$

Considerando a  $S = PL$ , la desigualdad matricial de la Ec. (3.23) toma la forma de la LMI (3.3) definida en el Teorema 2. Con esto, se completa la demostración del Teorema 2.

## 3.2. Diseño del observador para la estimación de fallas

La metodología del diseño del observador para la sistema no lineal considerando fallas, se llevó a cabo siguiendo la estructura propuesta por Osorio-Gordillo *y col.* (2018).

Considerando el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Dg(x(t), u(t)) + G_f f_a(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $g(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^p$  es un vector que contiene las no linealidades del sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  representa las variables de salida medidas.  $A$ ,  $D$  y  $C$  son matrices conocidas de dimensiones apropiadas.  $G_f$  es la matriz de inferencia de la falla y  $f_a(t)$  representa la variación en el tiempo de la falla.

El observador propuesto para la estimación de fallas en el sistema (3.24), tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\zeta}(t) = N(\zeta(t) + TG_f \hat{f}_a(t)) + FCx(t) + TG_f \hat{f}_a(t) + TDg(\hat{x}(t), u(t)) \quad (3.25)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + TG_f \hat{f}_a(t) + Q_n Cx(t) \quad (3.26)$$

$$\dot{\hat{f}}_a(t) = \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (3.27)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estado del observador,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estimación del observador. Las matrices  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $Q_n$ ,  $P$  y  $\Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas, dichas matrices deben resolverse tal que  $\hat{x}(t)$  tenga una convergencia asintótica a  $x(t)$  y que  $\hat{f}_a(t)$  converja asintóticamente a  $f_a(t)$ .

### 3.2.1. Estudio de la dinámica del error

Tomando en cuenta a  $T$  como una matriz que  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$  y el vector del error transformado como:

$$\varepsilon(t) = \zeta(t) - Tx(t) + TG_f f_a(t)$$

realizando el despeje de  $\zeta(t)$  de la ecuación del error transformado, resulta:

$$\zeta(t) = \varepsilon(t) + Tx(t) - TG_f f_a(t)$$

la derivada de  $\varepsilon(t)$  está dada por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\zeta}(t) - T\dot{x}(t) + TG_f \dot{f}_a(t) \quad (3.28)$$

considerando el caso de presencia de fallas abruptas, se tiene que  $\dot{f}_a(t) = 0$ . Por lo cual, la dinámica del error de estimación queda como:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\zeta}(t) - T\dot{x}(t) \quad (3.29)$$

sustituyendo la parte derecha de la ecuación dinámica para  $\dot{\zeta}(t)$  y  $\dot{x}(t)$ , en la Ec.(3.29), la dinámica del error transformado queda como:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & N\varepsilon(t) + (NT + FC - TA)x(t) + (NTG_f + TG_f) \underbrace{(\hat{f}_a(t) - f_a(t))}_{e_f(t)} \\ & + TD \underbrace{(g(\hat{x}(t), u(t)) - g(x(t), u(t)))}_{\tilde{G}(t)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $e_f(t) = \hat{f}_a(t) - f_a(t)$  y  $\tilde{G}(t) = g(\hat{x}(t), u(t)) - g(x(t), u(t))$ . Para simplificar el análisis de la dinámica de  $\varepsilon(t)$ , se propone la siguiente consideración:

$$a) \quad NT + FC - TA = 0$$

Tomando en cuenta la consideración (a), la ecuación para  $\dot{\varepsilon}(t)$  puede reescribirse como:

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + (NTG_f + TG_f)e_f(t) + TD\tilde{G}(t) \quad (3.31)$$

El error  $e_x(t)$  se expresa como:

$$e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (3.32)$$

donde

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + TG_f\hat{f}_a(t) + Q_nCx(t) \quad (3.33)$$

Sustituyendo el valor de  $\zeta(t)$  en la Ec. (3.33), se tiene:

$$\hat{x}(t) = \varepsilon(t) + Tx(t) - TG_f f_a(t) + TG_f\hat{f}_a(t) + Q_nCx(t) \quad (3.34)$$

$$\hat{x}(t) = \varepsilon(t) + \underbrace{(T + Q_nC)}_I x(t) + TG_f e_f(t) \quad (3.35)$$

Simplificando el análisis de la Ec.(3.35), se propone la siguiente consideración

$$b) \quad T + Q_nC = I$$

Tomando en cuenta la consideración b), es posible expresar el error  $e_x(t)$  como:

$$e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \varepsilon(t) + TG_f e_f(t) \quad (3.36)$$

La expresión  $e_x(t)$ , está en términos de  $\varepsilon(t)$  y de  $e_f(t)$  y se puede agrupar como:

$$e_x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} I & TG_f \end{bmatrix}}_{\mathbb{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}}_{\eta(t)} \quad (3.37)$$

por tanto, la expresión para  $e_x(t)$  puede reescribirse de la siguiente manera:

$$e_x(t) = \mathbb{P}\eta(t) \quad (3.38)$$


---

El error de la falla, se expresa como:

$$e_f(t) = \hat{f}_a(t) - f_a(t) \quad (3.39)$$

Tomando en cuenta que  $\dot{f}_a = 0$ , debido a que se consideraron fallas abruptas. La derivada de  $e_f(t)$ , queda como:

$$\dot{e}_f(t) = \Phi C(\hat{x}(t) - x(t)) \quad (3.40)$$

$$\dot{e}_f(t) = \Phi C e_x(t) \quad (3.41)$$

Sustituyendo la Ec. (3.36) en la Ec. (3.41)

$$\dot{e}_f(t) = \Phi C(\varepsilon(t) + TG_f e_f(t)) \quad (3.42)$$

Es posible agrupar las dinámicas del error transformado y el error de la falla, como se muestra en la Ec. (3.43):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{e}_f(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\eta}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} N & NTG_f + TG_f \\ \Phi CP & \Phi CPTG_f \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}}_{\eta(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} TD \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} \tilde{G}(t) \quad (3.43)$$

Las consideraciones (a) y (b) son propuestas para simplificar el análisis de la estabilidad del observador, teniendo en cuenta que dicho observador tiene varios grados de libertad (particularmente en las matrices no conocidas), por ello es posible cumplir con las consideraciones propuestas.

### 3.2.2. Parametrización de las matrices del observador

Partiendo de las condiciones (a) y (b) mencionadas en la sección anterior.

$$a) \quad NT + FC - TA = 0$$

$$b) \quad T + Q_n C = I$$

es posible escribir la condición (b) como:

$$\begin{bmatrix} T & Q_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}}_{\Sigma} = I \quad (3.44)$$

La expresión de la solución particular para la Ec.(3.44) puede formularse como:

$$T = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$Q_n = \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Tomando la consideración (a), que establece que

$$a) \quad NT + FC - TA = 0$$

Despejando  $T$  de la consideración (b) y sustituyéndola en la consideración (a), se tiene:

$$N(I - Q_n C) + FC - TA = 0 \quad (3.47)$$

$$N - NQ_n C + FC - TA = 0 \quad (3.48)$$

$$N = \underbrace{(NQ_n - F)}_K C + TA \quad (3.49)$$

Tomando como referencia la Ec. (3.49) para determinar  $N$ , se tiene:

$$N = KC + TA \quad (3.50)$$

donde

$$K = NQ_n - F \quad (3.51)$$

Despejando la matriz  $F$  de la Ec. (3.51), se obtiene:

$$F = NQ_n - K \quad (3.52)$$

Sustituyendo la Ec. (3.50) en la Ec. (3.43), se llega a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{e}_f(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\eta}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} KC + TA & (KC + TA + I)TG_f \\ \Phi CP & \Phi CPTG_f \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbb{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}}_{\eta(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} TD \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} \tilde{G}(t) \quad (3.53)$$

por lo cual, la Ec. (3.53) puede reescribirse como

$$\dot{\eta}(t) = \bar{\mathbb{A}}\eta(t) + \mathbb{B}\tilde{G}(t) \quad (3.54)$$

### 3.2.3. Análisis de estabilidad

En esta sección se abordan las condiciones de estabilidad para la Ec.(3.54), de manera que sea posible llevar a cabo la estimación de la falla y de los estados. Considere la siguiente función de Lyapunov.

$$V(\eta(t)) = \eta^T(t)\mathbb{X}\eta(t) \quad (3.55)$$

donde  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ , con  $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$  y  $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$ , que debe cumplir  $X_1 = X_1^T$  y  $X_2 > 0$ . La derivada de la función de Lyapunov, se puede expresar como:

$$\dot{V}(\eta(t)) = \dot{\eta}^T(t)\mathbb{X}\eta(t) + \eta^T(t)\mathbb{X}\dot{\eta}(t) \quad (3.56)$$

Sustituyendo  $\dot{\eta}(t) = \bar{\mathbb{A}}\eta(t) + \mathbb{B}\tilde{G}(t)$  en la Ec. (3.56), se obtiene

$$\dot{V}(\eta(t)) = \eta^T(t)\bar{\mathbb{A}}\mathbb{X}\eta(t) + \tilde{G}^T(t)\mathbb{B}^T\mathbb{X}\eta(t) + \eta^T(t)\mathbb{X}\bar{\mathbb{A}}\eta(t) + \eta^T(t)\mathbb{X}\mathbb{B}\tilde{G}(t) \quad (3.57)$$

En acorde a Lyapunov, la estabilidad asintótica de la Ec. (3.54) se logra si y solo si  $\dot{V}(\eta(t)) < 0$ . Sin embargo, para determinar la LMI que cumpla con esto,  $\dot{V}(\eta(t))$  debe estar en términos de  $\eta^T(t)$  y de  $\eta(t)$ . Para lograr parte de la agrupación se utiliza el Lema de Xu et al. (2002).

$$\mathcal{M}^T\mathcal{N} + \mathcal{N}^T\mathcal{M} \leq \gamma\mathcal{M}^T\mathcal{M} + \frac{1}{\gamma}\mathcal{N}^T\mathcal{N} \quad (3.58)$$

$$\tilde{G}^T(t)\mathbb{B}^T\mathbb{X}\eta(t) + \eta^T(t)\mathbb{X}\mathbb{B}\tilde{G}(t) \leq \gamma\tilde{G}^T(t)\tilde{G}(t) + \frac{1}{\gamma}\eta^T(t)\mathbb{X}^T\mathbb{B}\mathbb{B}^T\mathbb{X}\eta(t) \quad (3.59)$$

Sustituyendo la parte derecha de la desigualdad de la Ec.(3.59) en la Ec.(3.57), se tiene:

$$\dot{V}(\eta(t)) \leq \eta^T(t)(\bar{\mathbb{A}}^T\mathbb{X} + \mathbb{X}\bar{\mathbb{A}})\eta(t) + \frac{1}{\gamma}\eta^T(t)\mathbb{X}^T\mathbb{B}\mathbb{B}^T\mathbb{X}\eta(t) + \underbrace{\gamma\tilde{G}^T(t)\tilde{G}(t)} \quad (3.60)$$

Como se observa en la Ec.(3.60), el término  $\gamma\tilde{G}^T(t)\tilde{G}(t)$  que contiene las no linealidades del sistema, no está agrupado. Sin embargo, puede resolverse aplicando la condición de Lipschitz, como se muestra a continuación:

$$\|g(\hat{x}(t), u(t)) - g(x(t), u(t))\| \leq \lambda \|\hat{x}(t) - x(t)\| \quad (3.61)$$

Utilizando la norma  $\|\cdot\|_2^2$  para la Ec.(3.61), se tiene:

$$\|\tilde{G}(t)\|_2^2 \leq \lambda^2 \|e_x(t)\|_2^2 \quad (3.62)$$

$$\tilde{G}^T(t)\tilde{G}(t) \leq \lambda^2 e_x^T(t)e_x(t) \quad (3.63)$$

De acuerdo con Trinh y Fernando (2011), la Ec.(3.63) se cumple para cualquier escalar  $\delta > 0$ , por tanto se puede reescribir como:

$$\delta \tilde{G}^T(t) \tilde{G}(t) \leq \delta \lambda^2 e_x^T(t) e_x(t) \quad (3.64)$$

Teniendo en cuenta que la transpuesta de la Ec.(3.38) es  $e_x^T(t) = \eta^T(t) \mathbb{P}^T$ , entonces la Ec.(3.64) se puede reescribir como:

$$\delta \tilde{G}^T(t) \tilde{G}(t) \leq \delta \lambda^2 \eta^T(t) \mathbb{P}^T \mathbb{P} \eta(t) \quad (3.65)$$

Sustituyendo la parte derecha de la desigualdad de la Ec.(3.68) en la ecuación de  $\dot{V}(\eta(t))$ , se tiene

$$\dot{V}(\eta(t)) \leq \eta^T(t) (\bar{\mathbb{A}}^T \mathbb{X} + \mathbb{X} \bar{\mathbb{A}} + \frac{1}{\gamma} \mathbb{X}^T \mathbb{B} \mathbb{B}^T \mathbb{X} + \delta \lambda^2 \mathbb{P}^T \mathbb{P}) \eta(t) \quad (3.66)$$

donde

$$(\bar{\mathbb{A}}^T \mathbb{X} + \mathbb{X} \bar{\mathbb{A}} + \frac{1}{\gamma} \mathbb{X}^T \mathbb{B} \mathbb{B}^T \mathbb{X} + \delta \lambda^2 \mathbb{P}^T \mathbb{P}) < 0. \quad (3.67)$$

## Desarrollo de cada término de la LMI

En esta sección, se desarrollará de manera matricial cada término de la LMI. Comenzando con los términos de  $\bar{\mathbb{A}}^T \mathbb{X} + \mathbb{X} \bar{\mathbb{A}}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} KC + TA & (KC + TA + I)TG \\ \Phi C & \Phi CTG \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} KC + TA & (KC + TA + I)TG \\ \Phi C & \Phi CTG \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} C^T K^T + A^T T^T & C^T \Phi^T \\ G^T T^T C^T K^T + \\ G^T T^T A^T T^T + G^T T^T & G^T T^T C^T \Phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} KC + TA & KCTG + TATG \\ & +TG \\ \Phi C & \Phi CTG \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} C^T K^T X_1 + A^T T^T X_1 & C^T \Phi^T X_2 \\ G^T T^T C^T K^T X_1 + \\ G^T T^T A^T T^T X_1 + G^T T^T X_1 & G^T T^T C^T \Phi^T X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 KC + X_1 TA & X_1 KCTG + \\ & X_1 TATG + X_1 TG \\ X_2 \Phi C & X_2 \Phi CTG \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} C^T K^T X_1 + A^T T^T X_1 & C^T \Phi^T X_2 + X_1 KCTG \\ + X_1 KC + X_1 TA & + X_1 TATG + X_1 TG \\ G^T T^T C^T K^T X_1 + G^T T^T A^T T^T X_1 & G^T T^T C^T \Phi^T X_2 \\ + G^T T^T X_1 + X_2 \Phi C & + X_2 \Phi CTG \end{bmatrix} \quad (3.68) \end{aligned}$$



Considerando que  $X_1$  y  $K$  son matrices desconocidas, lo cual provoca una bilinealidad. Por esa razón se propone la agrupación  $S = X_1 K$ . Entonces la matriz de la Ec.(3.68) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} C^T S^T + A^T T^T X_1 & C^T \Phi^T X_2 + S C T G \\ + S C + X_1 T A & + X_1 T A T G + X_1 T G \\ G^T T^T C^T S^T + G^T T^T A^T T^T X_1 & G^T T^T C^T \Phi^T X_2 \\ + G^T T^T X_1 + X_2 \Phi C & X_2 \Phi C T G \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Continuando con el término  $\frac{1}{\gamma} \mathbb{X}^T \mathbb{B} \mathbb{B}^T \mathbb{X}$

$$\frac{1}{\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1^T & 0 \\ 0 & X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T D \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} X_1^T T D \\ 0 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} D^T T^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} D^T T^T X_1 & 0 \end{bmatrix}} \quad (3.70)$$

Finalmente para el término  $\delta \lambda^2 \mathbb{P}^T \mathbb{P}$

$$\delta \lambda^2 \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ G^T T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T G \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \delta \lambda^2 I & \delta \lambda^2 T G \\ \delta \lambda^2 G^T T^T & \delta \lambda^2 G^T T^T T G \end{bmatrix}} \quad (3.71)$$

Habiendo desarrollado cada término de la LMI, es posible aplicar en complemento de Schur, que considera una matriz  $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$ , además indica que las siguientes condiciones son equivalentes

- I.  $S < 0$
- II.  $S_{11} < 0$ ,  $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$
- III.  $S_{22} < 0$ ,  $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$

Aplicando la consideración 3 del complemento de Schur a  $(\bar{\mathbb{A}}^T \mathbb{X} + \mathbb{X} \bar{\mathbb{A}} + \frac{1}{\gamma} \mathbb{X}^T \mathbb{B} \mathbb{B}^T \mathbb{X} + \delta \lambda^2 \mathbb{P}^T \mathbb{P}) < 0$ , se tiene:

$$\underbrace{\gamma}_{S_{22}} < 0, \quad \underbrace{\bar{\mathbb{A}}^T \mathbb{X} + \mathbb{X} \bar{\mathbb{A}} + \delta \lambda^2 \mathbb{P}^T \mathbb{P}}_{S_{11}} + \frac{1}{\gamma} \underbrace{\mathbb{X}^T \mathbb{B}}_{S_{12}} \underbrace{\mathbb{B}^T \mathbb{X}}_{S_{12}^T} < 0 \quad (3.72)$$

obteniendo como resultado la siguiente LMI

$$\begin{bmatrix} C^T S^T + A^T T^T X_1 + SC + & C^T \Phi^T X_2 + SCTG + X_1 T A T G + & X_1^T T D \\ X_1 T A + \delta \lambda^2 I & X_1 T G + \delta \lambda^2 T G & \\ \\ G^T T^T C^T S^T + G^T T^T A^T T^T X_1 + & G^T T^T C^T \Phi^T X_2 + X_2 \Phi C T G + & 0 \\ G^T T^T X_1 + X_2 \Phi C + \delta \lambda^2 G^T T^T & \delta \lambda^2 G^T T^T T G & \\ \\ D^T T^T X_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.73)$$

## Metodología para la obtención del observador adaptable

A continuación, se presenta el algoritmo que resume el método para obtener todos los parámetros del observador adaptable.

### Algoritmo

- 1.- Seleccionar el orden del observador  $q_0$  y una matriz  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que el rango de  $(\Sigma = n)$
2. Encontrar las matrices  $Q_n$  y  $T$  definidas en las Ecs. (3.45) y (3.46).
- 3.- Resolver las LMIs,  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ , con  $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$  y con  $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$  y (3.73), para encontrar las matrices  $X$ ,  $\Phi$  y  $S$ .
- 4.- Calcular las matrices  $K$ ,  $N$  y  $F$  con las ecuaciones  $K = X_1^+ S$ , (3.52) y (3.50), respectivamente.

## 3.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo, se ha abordado el análisis y diseño de dos observadores destinados a sistemas no lineales. El primer observador presenta una estructura matemática similar a la del observador de Luenberger. Sin embargo, se distingue por considerar las no linealidades del sistema, lo cual introduce complejidades en el análisis de estabilidad. El segundo observador, se deriva de la estructura de un observador dinámico generalizado. Este observador también incorpora un vector que aborda las no linealidades del sistema. En contraste con el primero, el segundo observador no se limita únicamente a la estimación de los estados del sistema, si no que también, dentro de su diseño, contempla fallas de tipo abruptas. En consecuencia, el observador está diseñado para estimar específicamente este tipo fallas. La aplicación de los observadores desarrollados en este capítulo al sistema de destilación por arrastre de vapor (DAV), se detalla en el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

## Resultados de simulación

En este capítulo se presenta la estructura del esquema de supervisión para el proceso de destilación por arrastre de vapor, el esquema está basado en los observadores del capítulo anterior. Se muestran los resultados de simulación, es decir, la convergencia de los observadores tanto para la estimación de las variables de estado no medibles como para la estimación de fallas.

Con el diseño de ambos observadores, se propone un esquema de supervisión para el proceso de destilación por arrastre de vapor como el que se muestra en la Fig. 4.1.

El presente capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: en la sección 4.1 se muestra el diagrama de bloques que sirve para estimar los estados y fallas en el proceso de destilación por arrastre de vapor. En la sección 4.2 se presenta la estructura matemática del observador para la estimación de estados no medibles en el proceso de destilación por arrastre de vapor. En la sección 4.3 y 4.4, se muestran los resultados de simulación, evidenciando la convergencia del observador y la estimación de las variables  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . En la sección 4.5, se presentan los casos de fallas aplicados al proceso de destilación por arrastre de vapor. En la sección 4.6, se muestra la estructura del observador para la estimación de fallas. Además, se expone la metodología para la obtención de las matrices desconocidas del observador.

## 4.1. Diagrama de bloques del esquema de estimación de estados y fallas

A continuación, en la Fig. 4.1, se presenta la estructura de los observadores que conforman el esquema de supervisión para el proceso de destilación por arrastre de vapor, los cuales reciben información de la entrada y la salida del sistema no lineal.

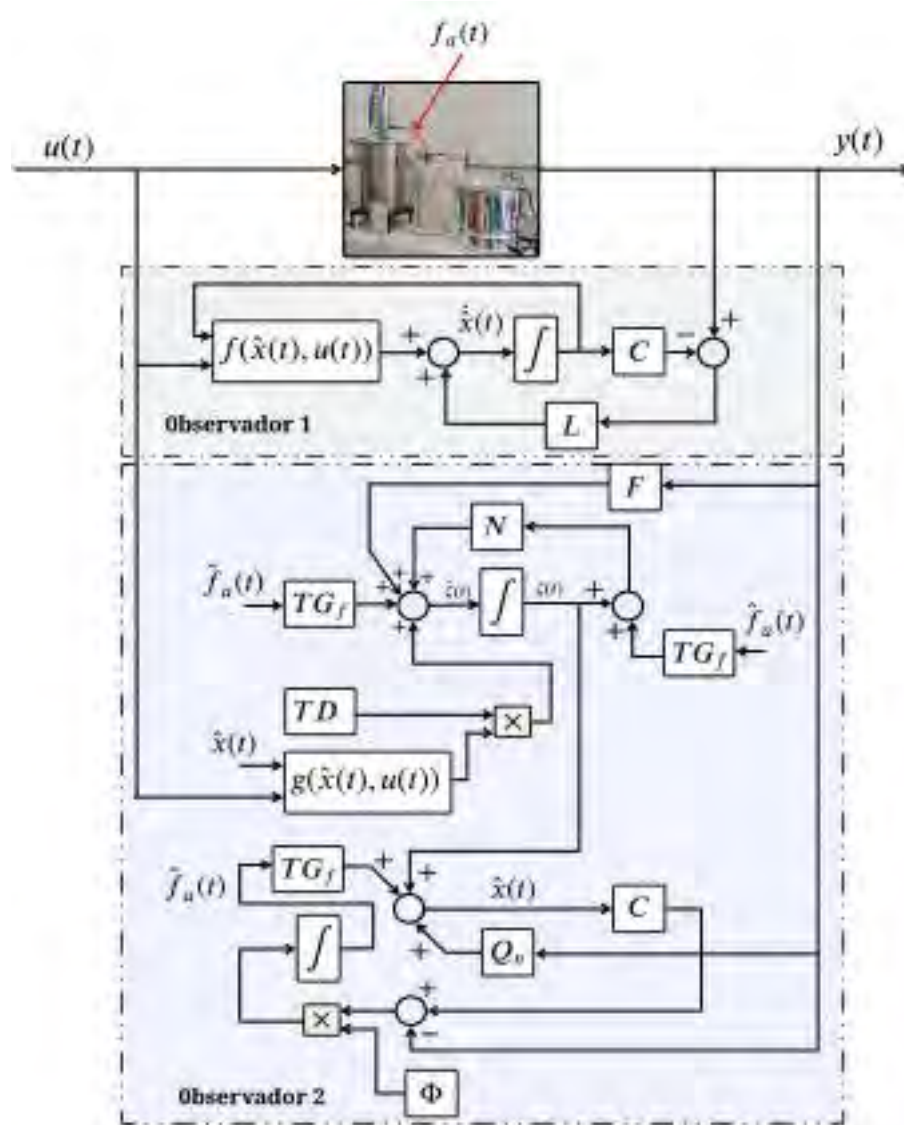


Fig. 4.1. Estructura del esquema de estimación.

## 4.2. Observador para la estimación de estados del sistema de destilación por arrastre de vapor

Partiendo de la estructura matemática mostrada en las ecuaciones (2.21), (2.22) y (2.23), para el sistema de destilación por arrastre de vapor, donde se considera que  $x_3(t)$  es un estado medible, es posible calcular la observabilidad del sistema como se muestra a continuación.

Para realizar la prueba de observabilidad del sistema no lineal del proceso de destilación por arrastre de vapor, es necesario calcular el Jacobiano de cada una de las funciones del modelo con respecto a los estados.

$$f_1(x, u) = -k_{tr}x_1 \quad (4.1)$$

$$f_2(x, u) = k_{tr}x_1 - \frac{k_g C^* x_2}{h\rho_{eo}} + \frac{k_g^2 C^* x_2^2}{uh^2 \rho_{eo}^2 + k_g h \rho_{eo} x_2} \quad (4.2)$$

$$f_3(x, u) = \frac{k_g u C^* x_2}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} \quad (4.3)$$

La matriz que contiene la dinámica del sistema, se determina de la siguiente manera:

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Realizando las derivadas parciales para cada uno de los elementos de la matriz  $A(x, u)$  se tiene:

*Primera función*

$$\frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} = -k_{tr}, \quad \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_3} = 0$$

*Segunda función*

$$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} = k_{tr}, \quad \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_3} = 0$$

Para la siguiente derivada parcial

$$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \quad (4.5)$$

se aplica la siguiente formula de derivación

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{w}{v} \right) = \frac{v \frac{dw}{dx} - w \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} w &= k_g^2 C^* x_2^2 \\ v &= u h^2 \rho_{eo}^2 + k_g h \rho_{eo} x_2 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de la Ec. (4.6) a la Ec. (4.5), se tiene:

$$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} = -\frac{k_g C^*}{h \rho_{eo}} + \left[ \frac{(u h^2 \rho_{eo}^2 + k_g h \rho_{eo} x_2) 2 k_g^2 C^* x_2 - k_g^2 C^* x_2^2 (k_g h \rho_{eo})}{(u h^2 \rho_{eo}^2 + k_g h \rho_{eo} x_2)^2} \right]$$

separando el denominador  $(u h^2 \rho_{eo}^2 + k_g h \rho_{eo} x_2)^2$  del segundo término, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} = -\frac{k_g C^*}{h \rho_{eo}} + \frac{2 k_g^2 C^* x_2}{u h^2 \rho_{eo}^2 + k_g h \rho_{eo} x_2} - \frac{k_g^3 C^* h \rho_{eo} x_2^2}{(u h^2 \rho_{eo}^2 + k_g h \rho_{eo} x_2)^2}$$

*Tercera función*

$$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} = 0,$$

Para la siguiente derivada parcial

$$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} \quad (4.7)$$

se emplea la fórmula de derivación de la Ec. (4.6), para este caso

$$w = k_g u C^* x_2 \quad (4.8)$$

$$v = u h \rho_{eo} + k_g x_2 \quad (4.9)$$

aplicando la fórmula se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} &= \frac{(uh\rho_{eo} + k_g x_2)k_g u C^* - (k_g u C^* x_2)k_g}{(uh\rho_{eo} + k_g x_2)^2} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} &= \frac{(uh\rho_{eo} + k_g x_2)k_g u C^*}{(uh\rho_{eo} + k_g x_2)^2} - \frac{k_g^2 u C^* x_2}{(uh\rho_{eo} + k_g x_2)^2} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} &= \frac{k_g u C^*}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} - \frac{k_g^2 u C^* x_2}{(uh\rho_{eo} + k_g x_2)^2}\end{aligned}$$

Por tanto la matriz  $A(x, u)$  tiene la siguiente estructura

$$A(x, u) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -k_{tr} & 0 & 0 \\ k_{tr} & a_{22}(x, u) & 0 \\ 0 & a_{32}(x, u) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{aligned}a_{22}(x, u) &= -\frac{k_g C^*}{h\rho_{eo}} + \frac{2k_g^2 C^* x_2}{uh^2 \rho_{eo}^2 + k_g h\rho_{eo} x_2} - \frac{k_g^3 C^* h\rho_{eo} x_2^2}{(uh^2 \rho_{eo}^2 + k_g h\rho_{eo} x_2)^2} \\ a_{32}(x, u) &= \frac{k_g u C^*}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} - \frac{k_g^2 u C^* x_2}{(uh\rho_{eo} + k_g x_2)^2}\end{aligned}$$

En el Anexo B se muestra el código para el cálculo de la observabilidad del sistema no lineal, obteniendo como resultado lo siguiente:

$$\text{rank}(O) = n = 3 \quad (4.11)$$

donde  $O$ , es la matriz de observabilidad.

La Ec. (4.11) permite establecer que el sistema cumple con la propiedad de observabilidad.

Por tanto, es posible diseñar un observador para la estimación de las variables de estado no medibles del sistema de destilación por arrastre de vapor (DAV).

Habiendo verificado la propiedad de observabilidad para el sistema de destilación por arrastre de vapor, es posible aplicar un observador como el que se muestra en la Ec. (3.2) para la estimación de los estados no medibles del sistema, como son: la masa de aceite en los tricomas  $x_1(t)$  y la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$ .

La estructura del observador propuesto particularmente para el sistema de destilación por arrastre de vapor, es la siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_{tr}\hat{x}_1(t) \\ k_{tr}\hat{x}_1(t) - \frac{k_g C^* \hat{x}_2(t)}{h\rho_{eo}} + \frac{k_g^2 C^* \hat{x}_2^2(t)}{u(t)h^2\rho_{eo}^2 + k_g h\rho_{eo}\hat{x}_2(t)} \\ \frac{k_g u(t) C^* \hat{x}_2(t)}{u(t)h\rho_{eo} + k_g \hat{x}_2(t)} \end{bmatrix}}_{f(\hat{x}(t), u(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}}_L [x_3(t) - \hat{x}_3(t)] \quad (4.12)$$

donde  $f(\hat{x}(t), u(t))$  es el vector de funciones no lineales estimadas por el observador,  $L$  es el vector de ganancias del observador,  $C$  es una matriz real de dimensión  $1 \times 3$ , el vector  $x(t) - \hat{x}(t)$  es el vector de diferencia entre las medidas reales y las estimadas.

Para determinar el vector de ganancias  $L$  del observador, es necesario seguir la metodología presentada en la sección 3.1, obteniendo como resultado la siguiente LMI.

$$\begin{bmatrix} -C^T S^T - SC + \delta\lambda^2 I_n & P^T \\ P & -\delta I_n \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.13)$$

Para resolver la LMI de la Ec. (4.13) se emplea el Toolbox YALMIP para MATLAB (Löfberg, 2004). De acuerdo con la metodología de la sección 3.1,  $\delta$  debe ser un número escalar positivo, para este caso  $\delta = 100$  y  $\lambda = 1.4230$  que es la constante de Lipschitz del sistema, véase Anexo C. Resolviendo la LMI con la herramienta de YALMIP, se obtienen las siguientes matrices

$$P = \begin{bmatrix} 0.0689 & -0.1775 & -0.4138 \\ -0.1775 & 0.7346 & -0.1034 \\ -0.4138 & -0.1034 & 985.3681 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.8596 \\ -0.2149 \\ 7.8389e + 03 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$L = \begin{bmatrix} 100.00 \\ 25.00 \\ 8.00 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$



### 4.3. Simulación 4. Observador para la estimación de estados del proceso de destilación por arrastre de vapor.

El objetivo de esta simulación es mostrar que la estructura del observador propuesto, es capaz de estimar todas variables de estado del sistema, incluyendo las variables difíciles de medir físicamente, como la masa de aceite en los tricomas  $x_1(t)$  y la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$ .

Considerando el observador de la Ec. (4.12), para el sistema de destilación por arrastre de vapor dado por la Ec. (2.21). Los parámetros que se toman para esta simulación son los de la Tabla. 2.1.

La simulación numérica se lleva a cabo en el software de MATLAB R2021a, donde se programó el observador de la Ec. (4.12), empleando el método de integración de Euler hacia adelante con un paso de integración  $\Delta x = 0.01 \text{ min}$  y un tiempo de simulación  $T_{sim} = 100 \text{ min}$ . Las condiciones iniciales para el sistema fueron  $x(t) = [152.25 \ 0 \ 0]^T$  y para el observador  $\hat{x}(t) = [1 \ 0.2 \ 0.1]^T$ .

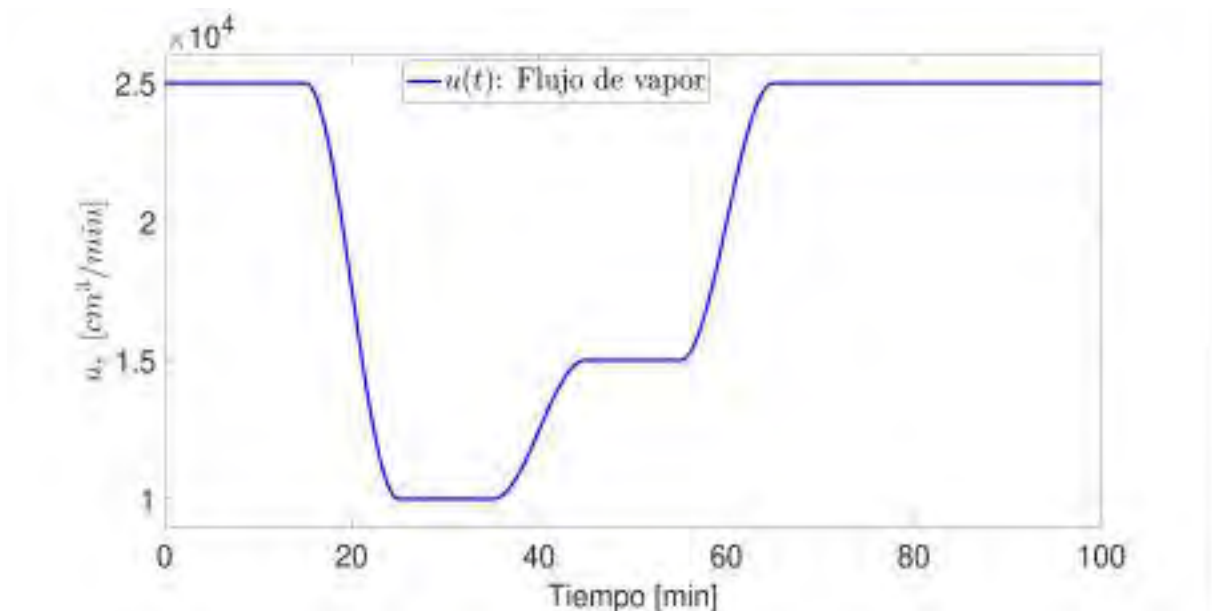
Considerando la siguiente variación en la entrada:

$$u(t) = \begin{cases} 25000 \text{ cm}^3/\text{min}, & 0 \text{ min} \leq t < 15 \text{ min} \\ f_{u1}(t), & 15 \text{ min} \leq t < 25 \text{ min} \\ 10000 \text{ cm}^3/\text{min}, & 25 \text{ min} \leq t < 35 \text{ min} \\ f_{u2}(t), & 35 \text{ min} \leq t < 45 \text{ min} \\ 15000 \text{ cm}^3/\text{min}, & 45 \text{ min} \leq t < 55 \text{ min} \\ f_{u3}(t), & 55 \text{ min} \leq t < 65 \text{ min} \\ 25000 \text{ cm}^3/\text{min}, & 65 \text{ min} \leq t \leq 100 \text{ min} \end{cases} \quad (4.16)$$

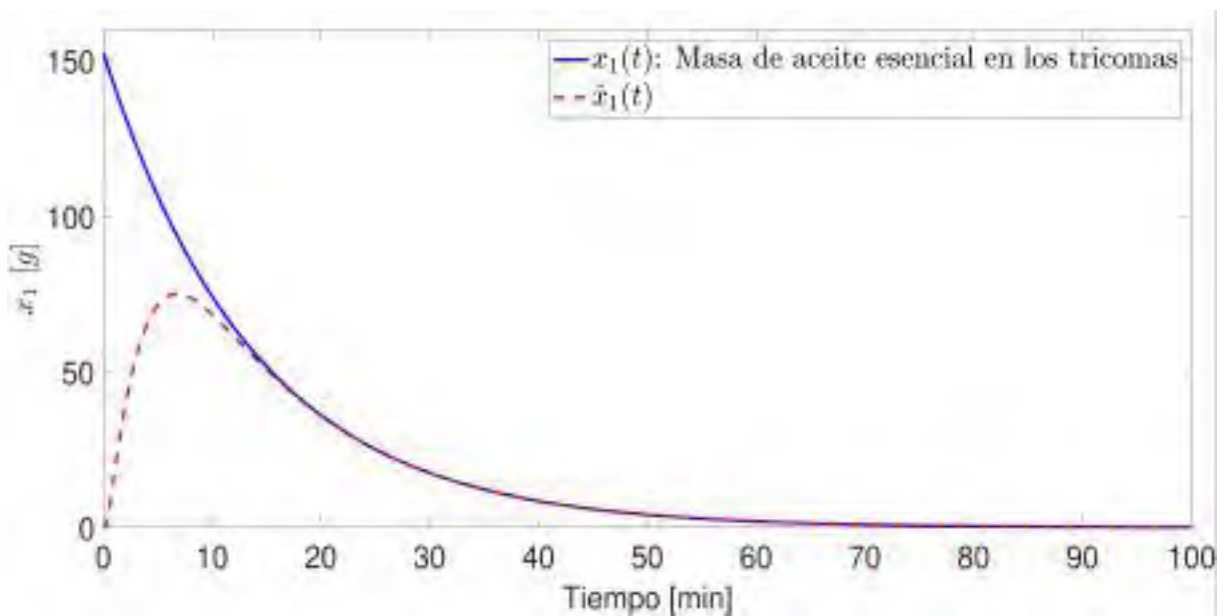
donde:

$$\begin{aligned} f_{u1}(t) &= -7500 \text{ sen}(0.1\pi(t - 20)) + 17500 \\ f_{u2}(t) &= 2500 \text{ sen}(0.1\pi(t - 40)) + 12500 \\ f_{u3}(t) &= 5000 \text{ sen}(0.1\pi(t - 60)) + 20000 \end{aligned}$$

En la Fig. 4.2, se puede apreciar la existencia de variaciones en el flujo de vapor, tal como se establece en la expresión (4.16).

Fig. 4.2. Simulación 4. Variación de la entrada  $u(t)$ 

En la Fig. 4.3, se observa que el estado estimado  $\hat{x}_1(t)$  del observador converge al estado  $x_1(t)$  del sistema no lineal, que representa la masa de aceite en los tricomas, alcanzando al sistema en su fase transitoria, aproximadamente a los 20 minutos de la simulación.

Fig. 4.3. Simulación 4. Estimación de la masa de aceite en los tricomas  $x_1(t)$

En la Fig. 4.4, se muestra que el estado  $\hat{x}_2(t)$  del observador converge al estado  $x_2(t)$  del sistema no lineal, que representa la masa de aceite en la capa acuosa, durante la parte transitoria del sistema, aproximadamente a los 16 minutos de la simulación.

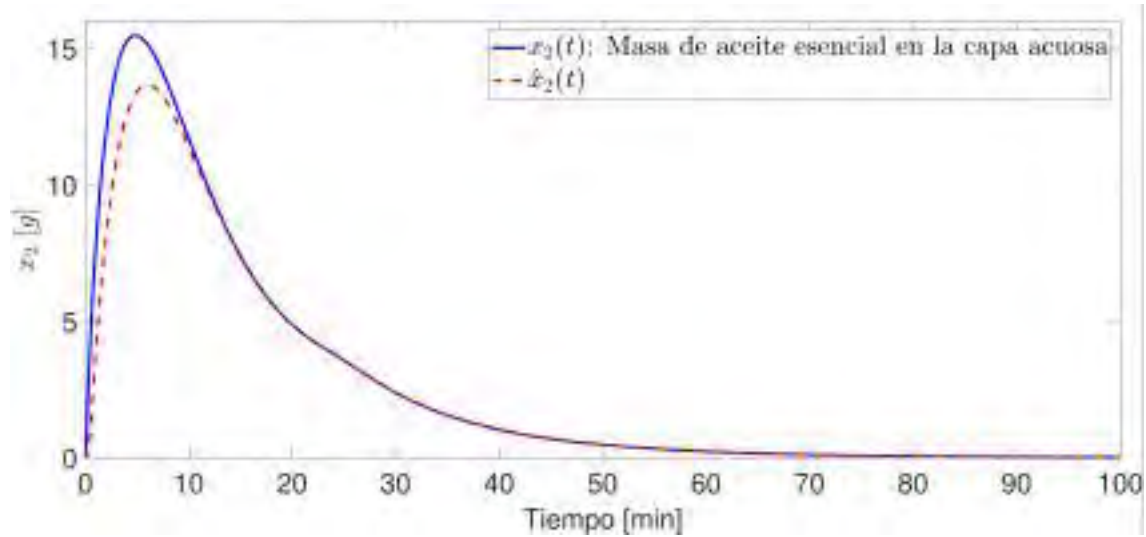


Fig. 4.4. Simulación 4. Estimación de la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$

Finalmente en la Fig. 4.5, la línea punteada muestra el comportamiento del estado estimado  $\hat{x}_3(t)$  del observador, el cual converge al estado  $x_3(t)$  del sistema no lineal (línea continua), que representa la masa de aceite esencial recolectado que se considera como la variable de estado medible.

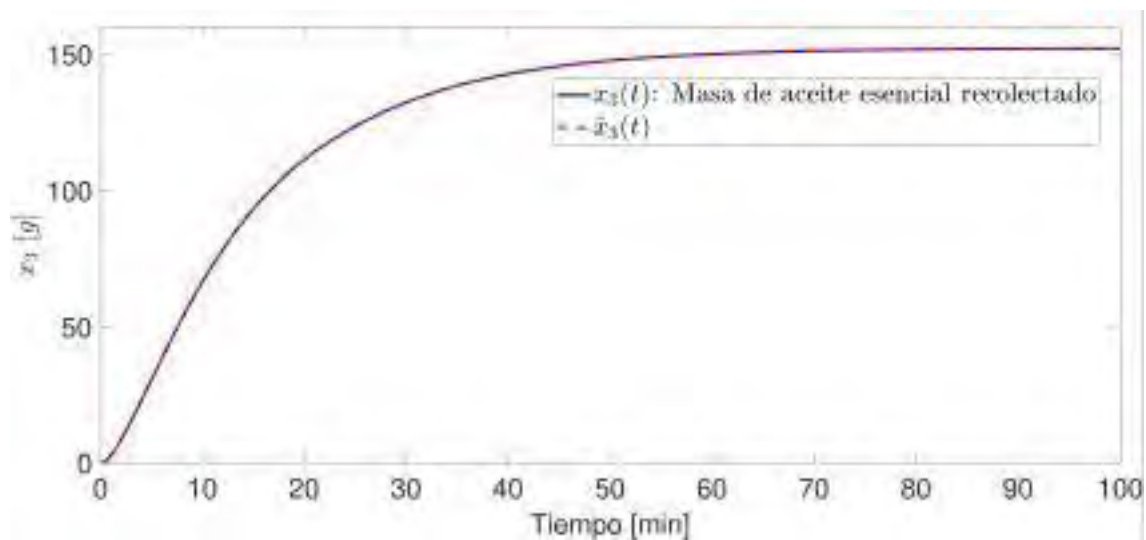


Fig. 4.5. Simulación 4. Estimación de la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$

## Conclusión simulación 4

Las simulaciones revelan que la estructura del observador propuesto en la Ec. (4.12), es capaz de estimar todos los estados del sistema no lineal del proceso de destilación por arrastre de vapor, incluso los estados internos como la masa de aceite en los tricomas  $x_1(t)$  y la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$ . Este observador puede realizar estas estimaciones solamente conociendo la información de la entrada del sistema y la masa de aceite esencial recolectado  $y(t) = x_3(t)$ .

### 4.4. Simulación 5. Prueba de convergencia del observador para la destilación de romero.

El objetivo de esta simulación es estimar la masa de aceite en el interior de los tricomas  $x_1(t)$  y la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$  de la destilación por arrastre de vapor de romero. En la Tabla 4.1 se muestran los parámetros para esta simulación.

Tabla 4.1. Definición de parámetros para una flor de romero

Parámetro	Valor	Unidades	Definición
$k_{tr}$	0.1354	$1/min$	Constante cinética de exudación
$W$	3584	$g$	Masa vegetal fresca
$C^*$	0.0010	$g/cm^3$	Concentración de aceite en el vapor, junto a la interfase
$h$	0.01012	$cm$	Espesor de la capa del aceite en la capa acuosa
$\rho_{eo}$	0.8292	$g/cm^3$	Densidad del aceite esencial líquido
$k_A$	0.0047	—	Coefficiente constante de transferencia de masa
$k_B$	3.5670	—	Coefficiente constante de transferencia de masa

Donde los valores para los parámetros  $h$  y  $k_{tr}$  se establecieron de acuerdo a (Cerpa y Palomino, 2007). El parámetro  $C^*$  y las constantes  $K_A$  y  $K_B$  se eligieron según lo reportado en (Valderrama y Ruiz, 2018). La densidad  $\rho_{eo}$  para el romero se estableció de acuerdo a los rangos determinados en (Ovares, 2016).

Para esta simulación, se toma la misma variación para el flujo de vapor  $u(t)$  según lo establecido en la Ec. (4.16). La simulación numérica se lleva a cabo en el software de MATLAB R2021a, donde se programó el observador de la Ec. (4.12), empleando el método de integración de Euler hacia adelante con un paso de integración  $\Delta x = 0.01 \text{ min}$  y un tiempo de simulación  $T_{sim} = 90 \text{ min}$ . Las condiciones iniciales para el sistema fueron  $x(t) = [6 \ 0 \ 0]^T$  y para el observador  $\hat{x}(t) = [1 \ 0.1 \ 0]^T$ .

La Fig. 4.6, muestra que el estado estimado  $\hat{x}_1(t)$  converge a  $x_1(t)$  aproximadamente a los 15 minutos de la simulación,  $x_1(t)$  representa la masa de aceite en los tricomas en este caso para la flor de romero.

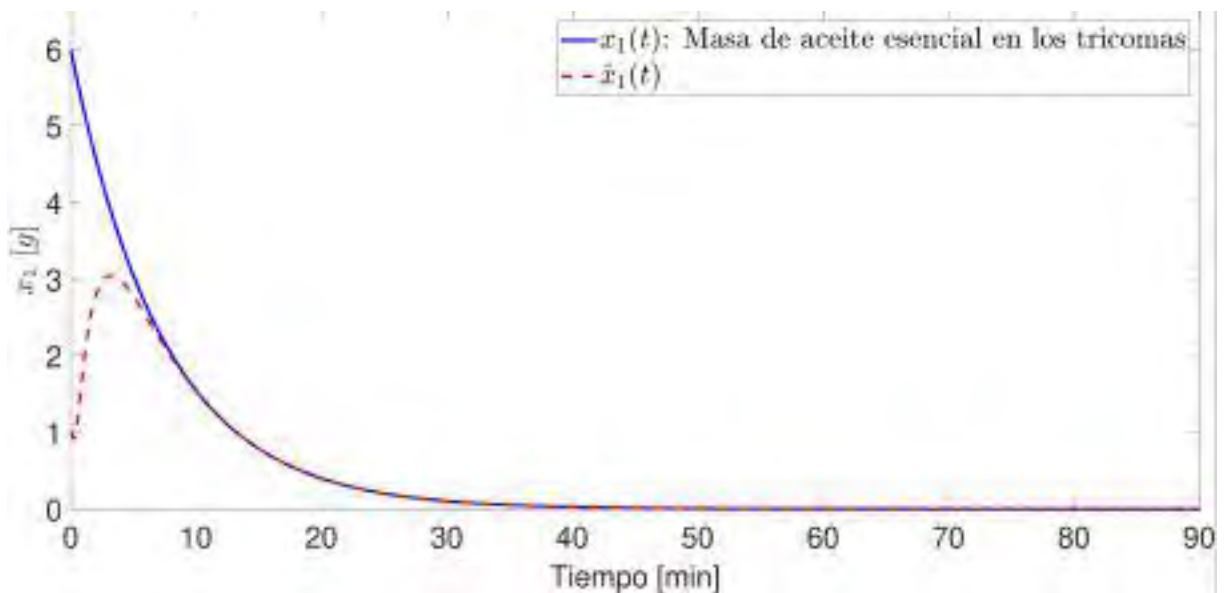
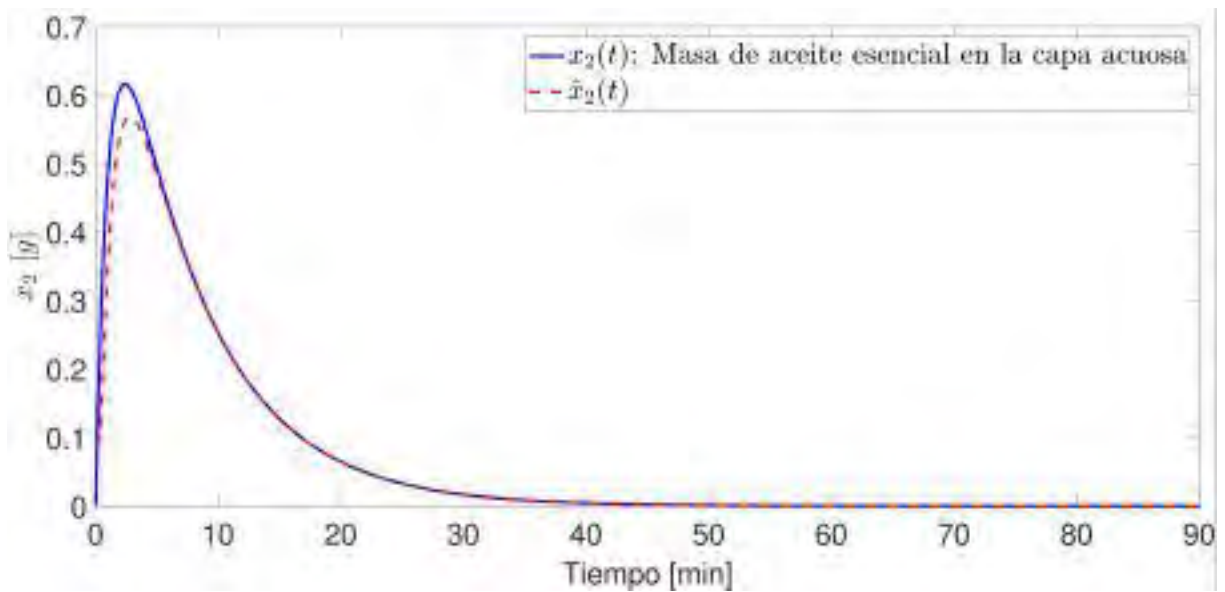
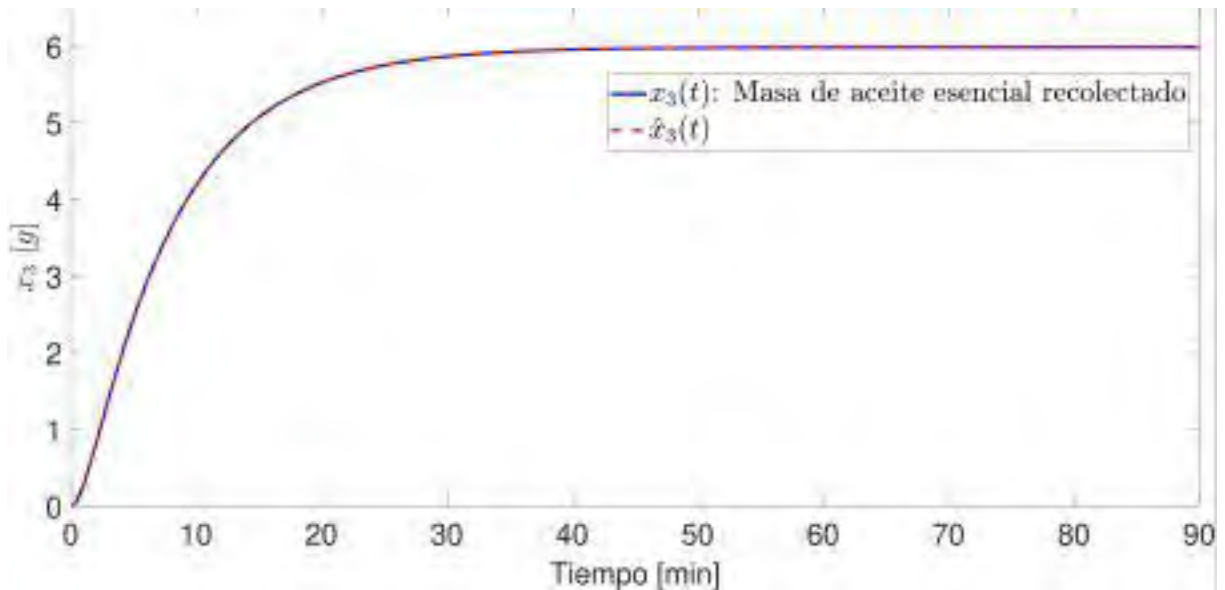


Fig. 4.6. Simulación 5.  $\hat{x}_1(t)$  vs  $x_1(t)$

En la Fig. 4.7, la línea punteada muestra el comportamiento del estado estimado  $\hat{x}_2(t)$  que converge hacia el estado  $x_2(t)$  (línea continua), el cual representa la masa de aceite en la capa acuosa para una flor de romero. El estado estimado alcanzó al sistema aproximadamente a los 13 minutos de la simulación.

Fig. 4.7. Simulación 5.  $\hat{x}_2(t)$  vs  $x_2(t)$ 

Finalmente, en la Fig. 4.8 se muestra la estimación del estado  $x_3(t)$  que representa a la masa de aceite esencial recolectado. Esta variable de estado es conocida; de hecho, a partir de  $x_3(t)$  es posible estimar  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ .

Fig. 4.8. Simulación 5.  $\hat{x}_3(t)$  vs  $x_3(t)$

## Conclusión simulación 5

Los resultados de simulación demuestran que para la destilación por arrastre de vapor de romero, el observador propuesto en la Ec. (4.12), es capaz de estimar la masa de aceite en el interior de los tricomas y la masa de aceite en la capa acuosa, que son estados difíciles de medir físicamente. Por tanto, el observador propuesto estima los estados de forma adecuada en la destilación de romero.

## 4.5. Simulación 6. Casos de falla en el proceso de destilación por arrastre de vapor.

El objetivo de esta simulación, es someter al proceso de destilación por arrastre de vapor a escenarios de falla en la etapa de recolección de aceite, y observar cómo estas fallas afectan la dinámica de la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$ .

Para esta simulación, se considera la siguiente estructura matemática para el proceso de destilación por arrastre de vapor:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -k_{tr} & 0 & 0 \\ k_{tr} & -\frac{k_g C^*}{h\rho_{eo}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_g^2 C^* x_2^2(t)}{u(t)h^2\rho_{eo} + k_g h\rho_{eo}x_2(t)} \\ \frac{k_g u(t)C^* x_2(t)}{u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t)} \end{bmatrix}}_{g(x(t),u(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}}_{G_f} \underbrace{\begin{bmatrix} -k_g u(t)C^* x_2(t) \\ u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t) \end{bmatrix}}_{f_s(t)} \delta_{f_s(t)} \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde  $A$  es una matriz constante de dimensiones  $3 \times 3$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $D$  es una matriz constante de dimensiones  $3 \times 2$ ,  $g(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^p$  es el vector que contiene las no linealidades del sistema,  $G_f$  es la matriz de inferencia de la falla, en ella se establece el porcentaje de la falla,  $\delta_{f_s}(t)$  representa la forma en que aparece la falla (constante, abrupta o rampa),  $f_s(t)$  representa el valor de la falla y está dada por la siguiente expresión:

$$f_s(t) = \frac{-k_g u(t)C^* x_2(t)}{u(t)h\rho_{eo} + k_g x_2(t)} * \delta_{f_s}(t) \quad (4.18)$$

Finalmente,  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  representa las variables de salida medidas.

Considerando el sistema de la Ec. (4.17) y tomando en cuenta los parámetros de la Tabla 2.1, se tienen las siguientes matrices conocidas:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0720 & 0 & 0 \\ 0.0720 & -0.7115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4.5.1. Primer caso de falla.

En esta simulación, se supone una falla en el tubo de salida del producto destilado, esta ocurre desde el inicio de la destilación. La falla se caracteriza como una ruptura en el tubo de salida del producto destilado, provocando una fuga de producto que afecta la cantidad de aceite que se desea extraer, véase la Fig. 4.9.

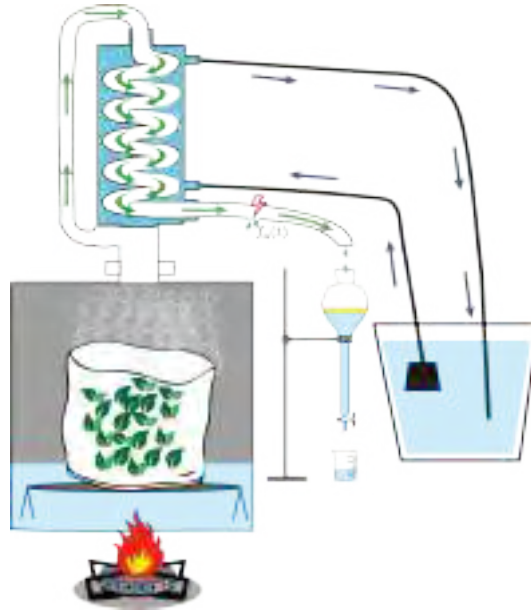


Fig. 4.9. Fuga en el tubo de salida del producto destilado.

La falla tiene una magnitud del 40 % del valor de  $\dot{x}_3(t)$ , esto se establece en  $G_f = [0, 0, 0.4]^T$ . Para este caso,  $\delta f_s(t) \in \{0, 1\}$ , donde 0 significa ausencia de falla y 1 presencia de falla.

La entrada se considera constante  $u(t) = 25000 \text{ cm}^3/\text{min}$ , Las condiciones iniciales del sistema no lineal se establecieron como:  $x_1(0) = 152.25 \text{ g}$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ . La simulación numérica se lleva a cabo en el software de MATLAB R2021a. Se emplea el método de Euler hacia adelante con un paso de integración  $\Delta_x = 0.01$  y un tiempo de simulación  $T_{sim} = 120 \text{ min}$ .



En la Fig. 4.10, se muestra el comportamiento de la falla con respecto al tiempo.

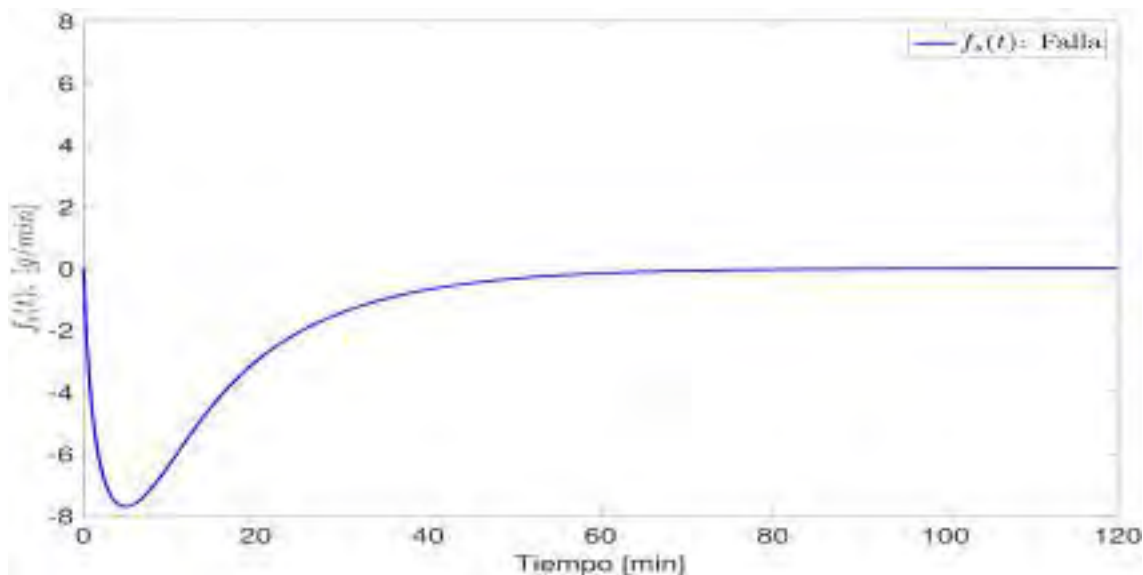


Fig. 4.10. Falla con respecto al tiempo.

En la Fig. 4.11, se muestran las variables de estado del sistema, donde se puede apreciar que la falla tiene un efecto negativo en la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$ , ya que el sistema en condiciones normales, tiene una recolección de aproximadamente 152.25 g de aceite, pero en este caso, solamente se recuperan 91.3 g debido a la existencia de la falla.

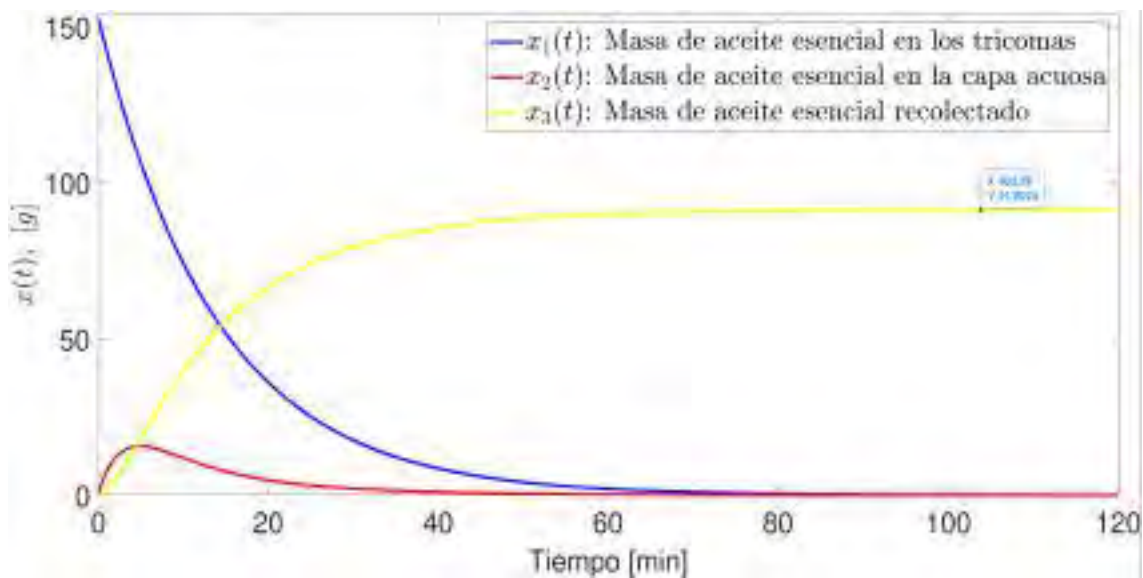


Fig. 4.11. Estados del sistema.

## Conclusión primer caso de fallas

Los resultados de simulación muestran que ante la presencia de una falla en el tubo de salida del producto destilado, la masa de aceite esencial en el interior de los tricomas  $x_1(t)$  y la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$  no se ven afectadas por este suceso. Sin embargo, la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$  experimenta afectaciones debido a la existencia de la fuga en el tubo de salida, ya que dentro del tubo se encuentra fluyendo la mezcla bifásica de aceite y agua. Los resultados muestran que se tuvo una pérdida de aproximadamente 60.9 g de aceite esencial debido a la falla en el tubo.

### 4.5.2. Segundo caso de falla.

En esta simulación, se considera nuevamente una fuga en el tubo de salida, pero a diferencia del primer caso, la falla ocurre de manera abrupta, aparece en el minuto 60 y desaparece en el minuto 80, como se muestra en la siguiente expresión:

$$f_s(t) = \begin{cases} -0.871 \text{ g/min} & \text{si } 60 \leq t \leq 80 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.19)$$

La entrada se considera constante  $u(t) = 15000 \text{ cm}^3/\text{min}$ , Las condiciones iniciales del sistema no lineal se establecieron como:  $x_1(0) = 152.25 \text{ g}$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ . La simulación numérica se lleva a cabo en el software de MATLAB R2021a. Se emplea el método de Euler hacia adelante con un paso de integración  $\Delta_x = 0.01$  y un tiempo de simulación  $T_{sim} = 120 \text{ min}$ .

En la Fig. 4.12, se muestra el comportamiento de falla abrupta con respecto al tiempo, de acuerdo a lo establecido en la Ec. 4.19.

La Fig. 4.13, muestra el comportamiento de los estados del sistema no lineal frente a la falla. La masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$  disminuye debido al efecto de la falla, obteniendo una recolección de aceite de aproximadamente 134.77 g. Además, es importante mencionar que debido al valor de la entrada la masa de aceite en la capa acuosa crece, es decir, existe una mayor acumulación de aceite en la superficie de las hojas del material vegetal, para este caso el valor máximo de aceite en la capa acuosa es de 31.43 g

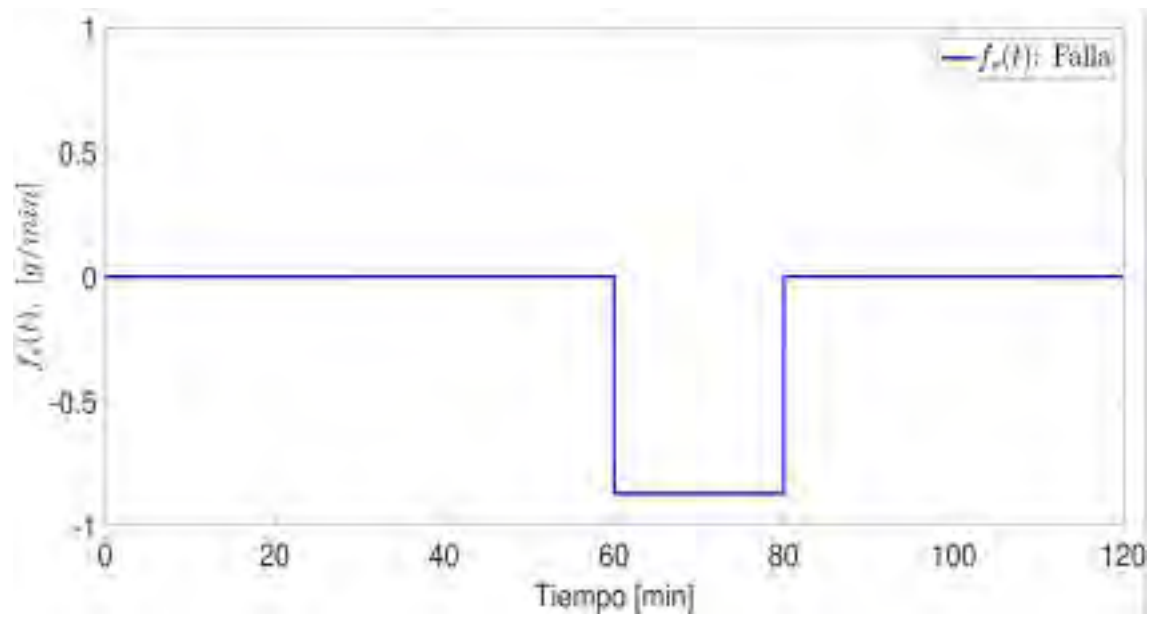


Fig. 4.12. Falla abrupta con respecto al tiempo.

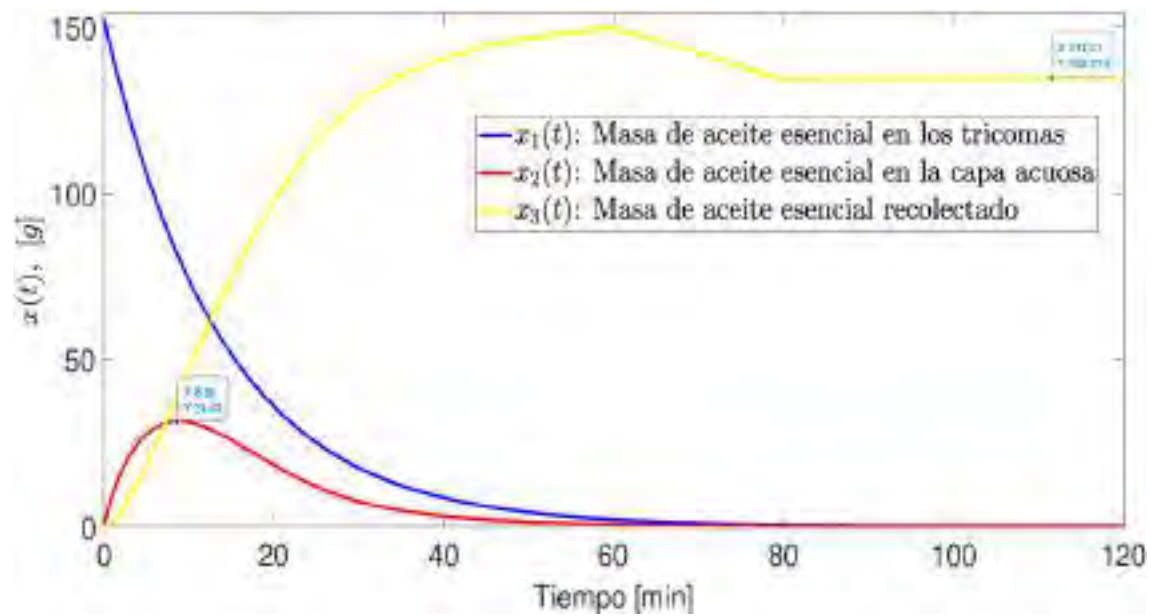


Fig. 4.13. Efecto de la falla en los estados del sistema.

## Conclusión segundo caso de fallas

Los resultados de la simulación muestran que ante la presencia de una falla abrupta, la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$  tuvo una pérdida de aproximadamente 17.47 g de aceite esencial. Cuando el valor del flujo de vapor disminuye, la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$  incrementa en la superficie de las hojas del material vegetal.

### 4.5.3. Tercer caso de falla.

En esta simulación, se considera que la falla ocurre a partir del minuto 45 y termina en el minuto 55 de la simulación, con un comportamiento de tipo rampa como se muestra en la siguiente expresión:

$$f_s(t) = \begin{cases} \frac{k_g u(t) C^* x_2(t)}{u(t) h \rho_{eo} + k_g x_2(t)} \delta_{f_s}(t) \\ \delta_{f_s}(t) = \begin{cases} -1 + t \text{ g/min} & \text{si } 45 \leq t \leq 55 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \end{cases} \quad (4.20)$$

La falla tiene una magnitud del 70 % del valor de  $\dot{x}_3(t)$ , esto se establece en  $G_f = [0, 0, 0.7]^T$ . Para este caso  $\delta_{f_s}(t)$  es una función rampa unitaria negativa, tal y como se establece en la Ec. (4.20), véase la Fig. 4.14.

La entrada se considera constante  $u(t) = 11000 \text{ cm}^3/\text{min}$ , las condiciones iniciales del sistema no lineal se establecieron como:  $x_1(0) = 152.25 \text{ g}$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ . La simulación numérica se lleva a cabo en el software de MATLAB R2021a. Se emplea el método de Euler hacia adelante con un paso de integración  $\Delta_x = 0.01$  y un tiempo de simulación  $T_{sim} = 120 \text{ min}$ .

La Fig. 4.14, muestra el comportamiento de  $\delta_{f_s}(t)$  con respecto al tiempo, el cual se comporta como una rampa unitaria con signo negativo.

La Fig. 4.15, muestra el comportamiento del valor de la falla con respecto al tiempo, se puede observar que al ser multiplicado por  $\delta_{f_s}(t)$  la falla es negativa.

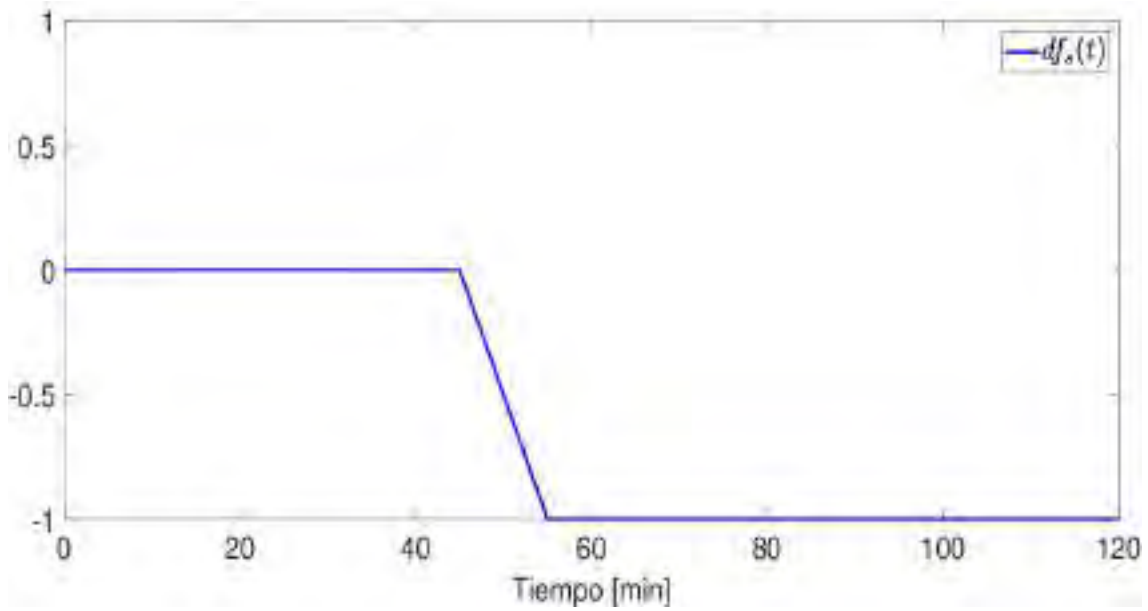


Fig. 4.14.  $\delta f_s(t)$ .

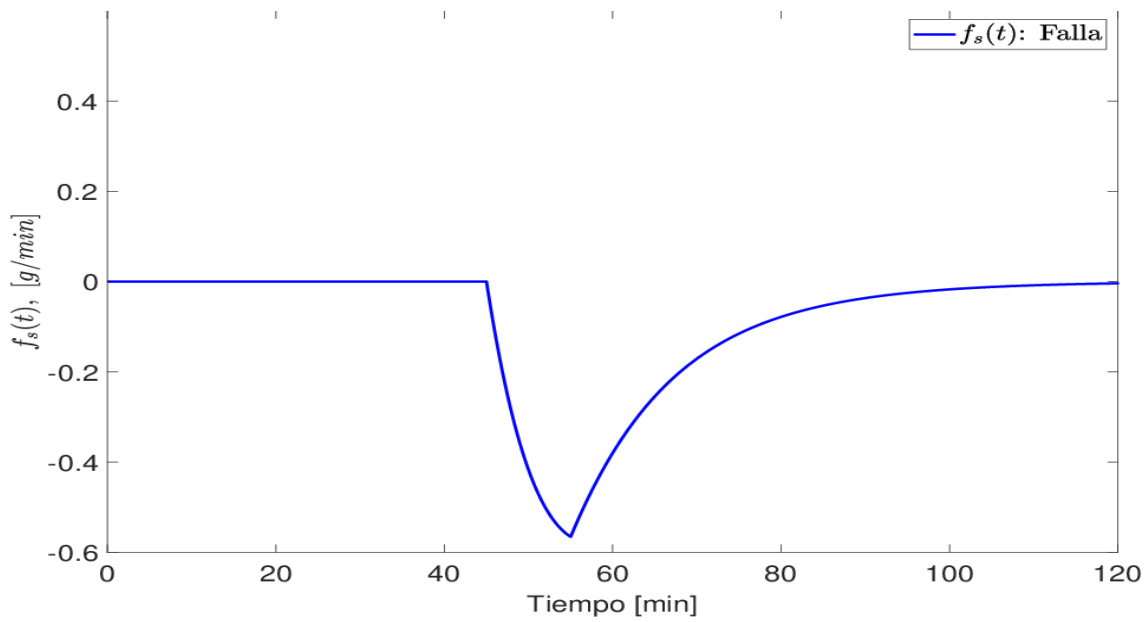


Fig. 4.15. Comportamiento de la falla con respecto al tiempo.

La Fig. 4.16, muestra el comportamiento de los estados del sistema no lineal frente al tercer caso de falla. En este caso, la masa de aceite esencial recolectado disminuye a un valor de 144.57 g. Debido al valor de la entrada, la masa de aceite en la capa acuosa tiene un valor máximo de aproximadamente 49.7 g, lo cual implica que en la superficie de las hojas la acumulación del aceite es significativa en relación a las anteriores simulaciones.

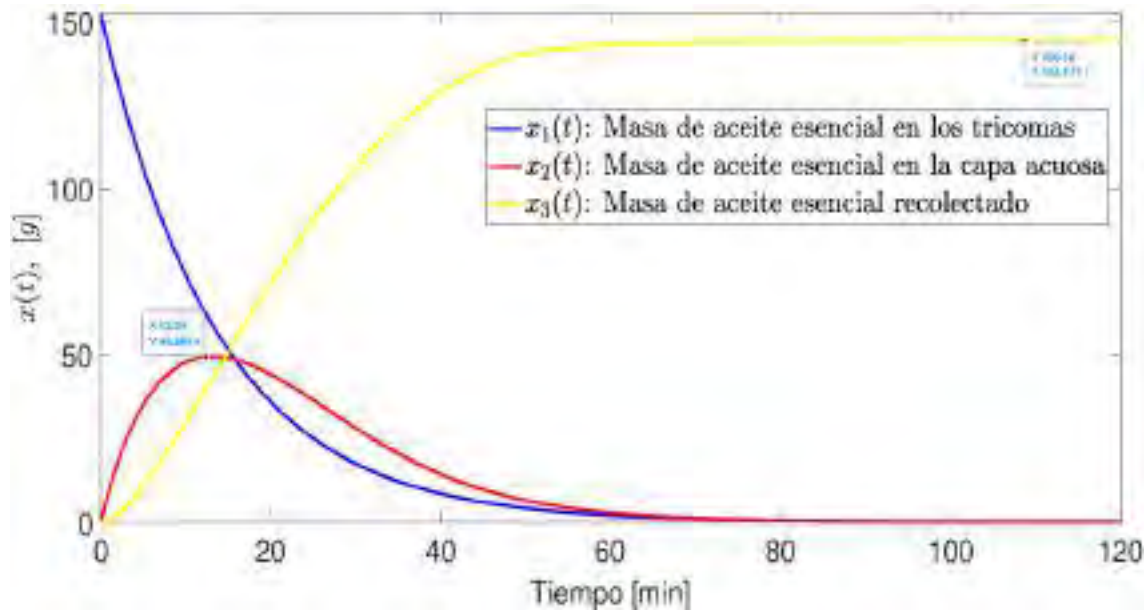


Fig. 4.16. Efecto del tercer caso de falla en los estados del sistema.

### Conclusión tercer escenario de falla.

Los resultados de la simulación muestran que ante la presencia de una falla de tipo rampa, la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$  tuvo una pérdida de aproximadamente 7.68 g de aceite esencial. Físicamente la falla puede interpretarse como un orificio en el tubo de salida que durante cierto tiempo se hace más grande, esto puede ser ocasionado por una persona que desea sustraer aceite del proceso.

## 4.6. Simulación 7. Estimación de los casos de fallas

Se propone un observador para la estimación de estados y fallas, la estructura es similar a la que se muestra en las Ecs. (3.25), (3.26) y (3.27), particularmente para el primer caso de fallas en el proceso de destilación por arrastre de vapor, el observador tiene la siguiente estructura:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1(t) \\ \dot{\zeta}_2(t) \\ \dot{\zeta}_3(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\zeta}(t)} = N \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}}_{\zeta(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_s(t) + F \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_s(t) + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_g^2 C^* \hat{x}_2^2(t)}{u(t) h^2 \rho_{eo} + k_g h \rho_{eo} \hat{x}_2(t)} \\ \frac{k_g u(t) C^* \hat{x}_2(t)}{u(t) h \rho_{eo} + k_g \hat{x}_2(t)} \end{bmatrix}}_{g(\hat{x}(t), u(t))} \right) \quad (4.21)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}}_{\zeta(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_a + Q_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \quad (4.22)$$

$$\hat{f}_a(t) = \Phi \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ \hat{x}_2(t) - x_2(t) \\ \hat{x}_3(t) - x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estado del observador,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estimación del observador. Las matrices  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $Q_n$  y  $\Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas, dichas matrices deben resolverse tal que  $\hat{x}(t)$  tenga una convergencia asintótica a  $x(t)$  y que  $\hat{f}_s(t)$  converja asintóticamente a  $f_s(t)$ .

### Metodología para determinar las matrices desconocidas del observador

Considerando el observador para la estimación de estados y fallas dado por las Ecs. (4.21), (4.22) y (4.23), para el sistema no lineal de destilación por arrastre de vapor indicado en la Ec. (4.17) y considerando los parámetros de la Tabla 2.1, se tienen las siguientes matrices conocidas:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0720 & 0 & 0 \\ 0.0720 & -0.7115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se presentan los pasos a seguir para la obtención de las matrices desconocidas que intervienen en el observador de acuerdo a la metodología presentada en las secciones 3.2.2 y 3.2.3.

1.- *Seleccionar el orden del observador  $q_0$  y una matriz  $I \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que el rango de  $(\Sigma = n)$*

Con la finalidad de realizar simulaciones de este observador se considera  $q_0 = 3$  y una matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por tanto el } rango(\Sigma) = 3.$$

2. *Determinar el valor de las matrices  $Q_n$  y  $T$  definidas en las Ecs. (3.45) y (3.46).*

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

3.- *Resolver las LMIs,  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ , con  $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$  y con  $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$  y (3.73), para encontrar las matrices  $X$ ,  $\Phi$  y  $S$ .*

Para resolver la LMI de la Ec. (3.73) se emplea el Toolbox YALMIP para MATLAB (Löfberg, 2004). De acuerdo con la metodología de la sección 3.2.3,  $\delta$  debe ser un número escalar positivo, para este caso  $\delta = 0.010$  y  $\lambda = 1.4230$  que es la constante de Lipschitz del sistema como se indica en el Anexo C.

Resolviendo la LMI con la herramienta de YALMIP, se obtienen las siguientes matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 137.0764 & -1.5506 & 0 & 0 \\ -1.5506 & 58.8380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 87.4832 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1000 \end{bmatrix}, \quad \Phi = [-279.4136] \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -58.9531 \end{bmatrix}$$

4.- *Calcular las matrices  $K$ ,  $N$  y  $F$  con las ecuaciones  $K = X_1^+ S$ , (3.52) y (3.50), respectivamente.*

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.6739 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -0.0720 & 0 & 0 \\ 0.0720 & -0.7115 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6739 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3369 \end{bmatrix}$$



#### 4.6.1. Estimación de los estados para el primer caso de fallas.

A continuación, se presentan las gráficas de las estimaciones del observador en relación a los estados del sistema no lineal. Las condiciones iniciales del observador se establecieron como  $\hat{x}_1(t) = 100$ ,  $\hat{x}_2(t) = 10$  y  $\hat{x}_3(t) = 0.1$ . La entrada  $u(t)$  y las condiciones de tiempo  $\Delta_x$  y  $T_{sim}$  se consideran igual que en la sección 4.5.1.

Los resultados de la convergencia del observador se pueden apreciar en las Figs. 4.17, 4.18 y 4.19.

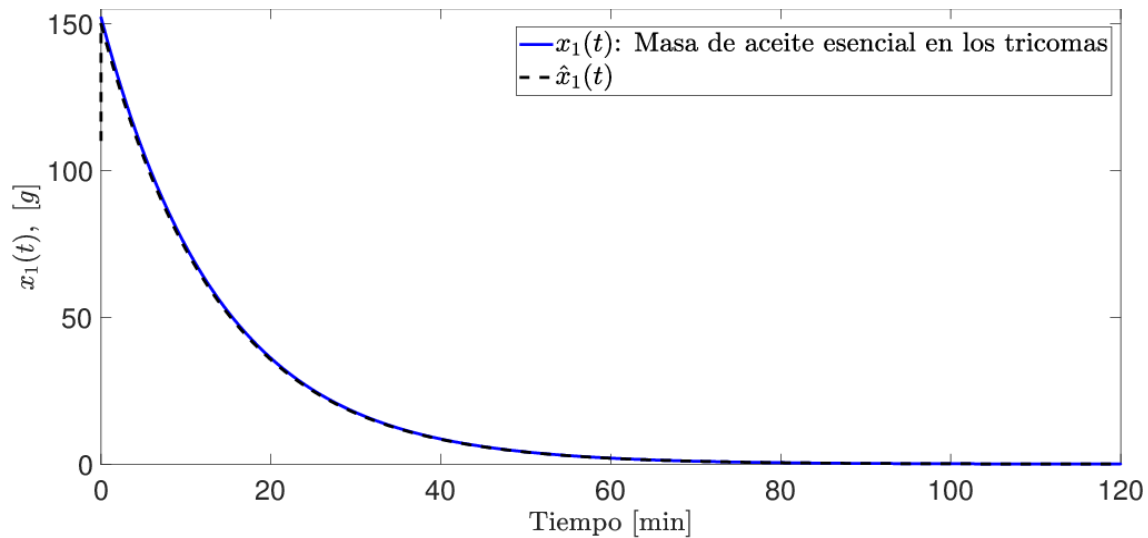


Fig. 4.17.  $x_1(t)$  vs  $\hat{x}_1(t)$

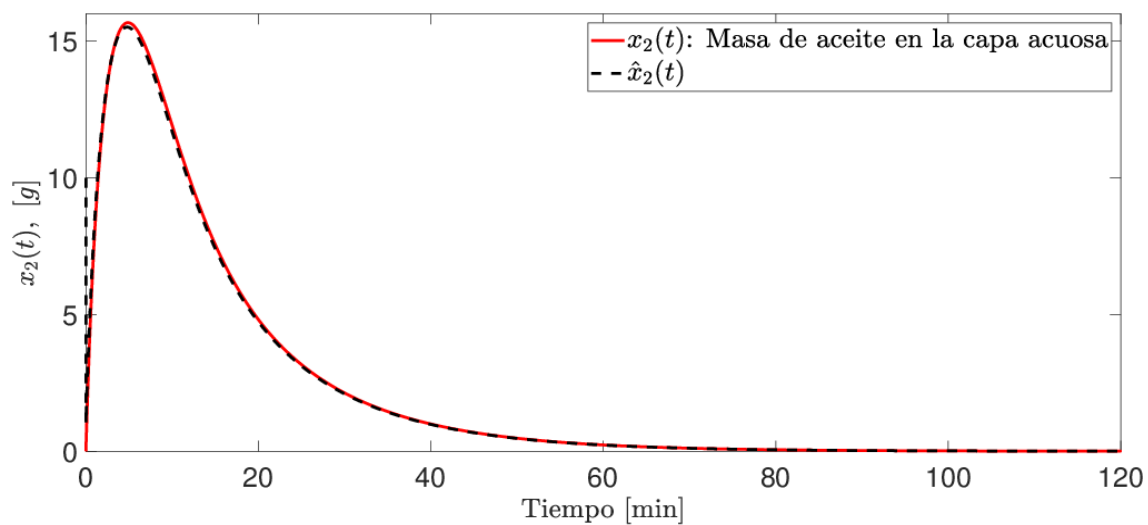
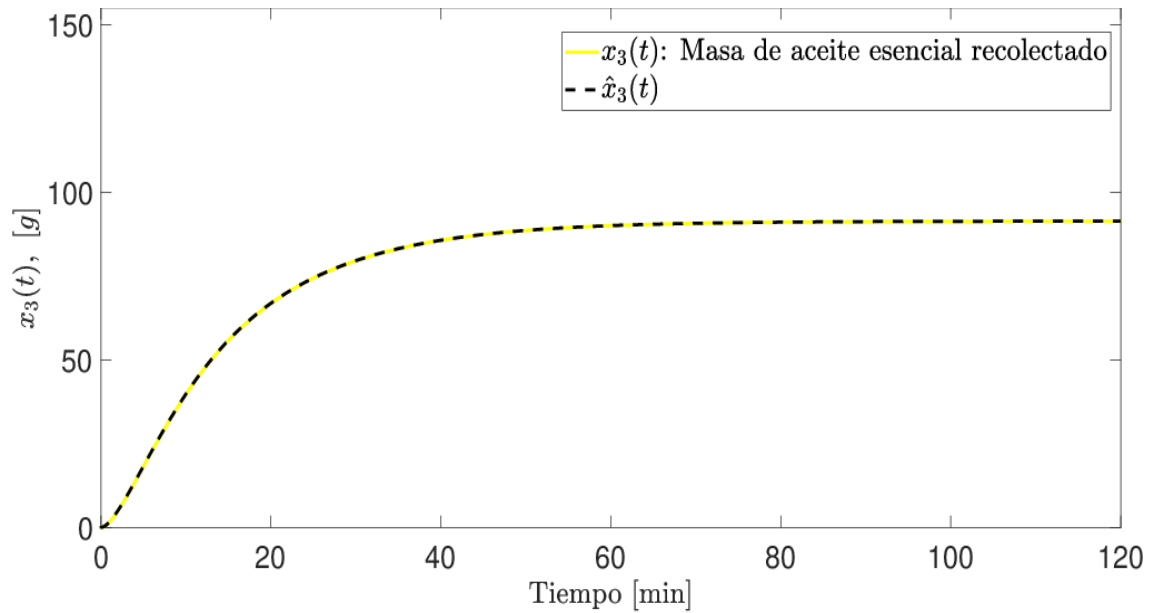
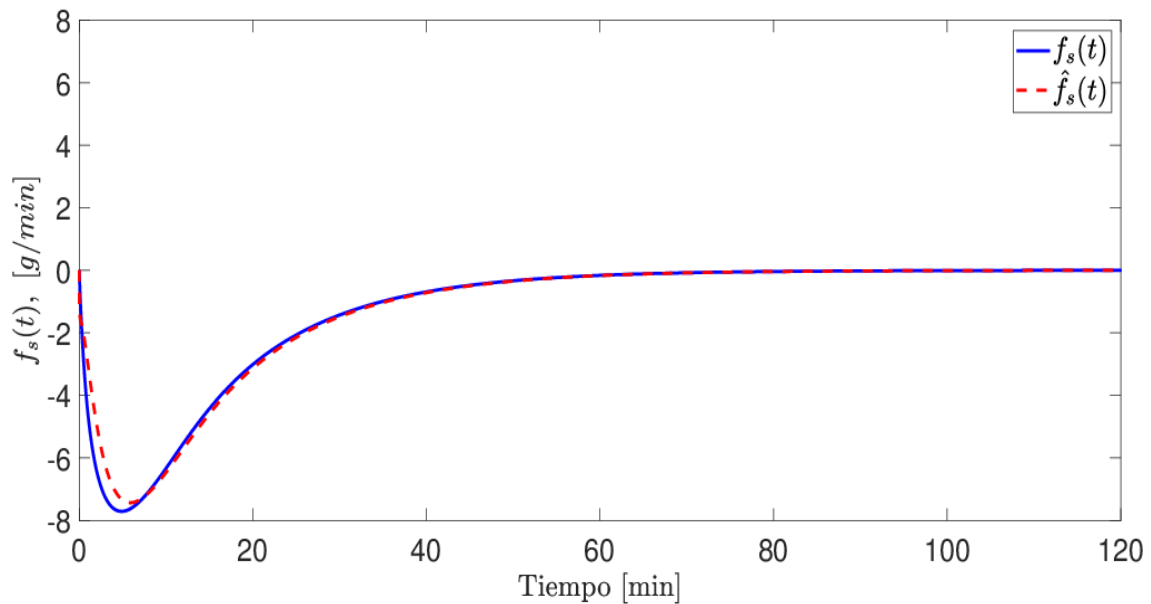


Fig. 4.18.  $x_2(t)$  vs  $\hat{x}_2(t)$

Fig. 4.19.  $x_3(t)$  vs  $\hat{x}_3(t)$ 

En la Fig. 4.20, se muestra la estimación de la falla en el tubo de salida del destilado, el tiempo de convergencia es considerable. Sin embargo, debido a la naturaleza del proceso, se considera aceptable para fines de estimación de falla en la parte estacionaria.

Fig. 4.20.  $f_s(t)$  vs  $\hat{f}_s(t)$

### 4.6.2. Estimación del segundo escenario de fallas.

Particularmente para el segundo caso de fallas en el proceso de destilación por arrastre de vapor, el observador tiene la siguiente estructura:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1(t) \\ \dot{\zeta}_2(t) \\ \dot{\zeta}_3(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\zeta}(t)} = N \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}}_{\zeta(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_s(t) + F \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_s(t) + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_g^2 C^* \hat{x}_2^2(t)}{u(t) h^2 \rho_{eo} + k_g h \rho_{eo} \hat{x}_2(t)} \\ \frac{k_g u(t) C^* \hat{x}_2(t)}{u(t) h \rho_{eo} + k_g \hat{x}_2(t)} \end{bmatrix}}_{g(\hat{x}(t), u(t))} \right) \quad (4.24)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}}_{\zeta(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_a + Q_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \quad (4.25)$$

$$\hat{f}_a(t) = \Phi \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ \hat{x}_2(t) - x_2(t) \\ \hat{x}_3(t) - x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estado del observador,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estimación del observador. Las matrices  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $Q_n$  y  $\Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas, dichas matrices deben resolverse tal que  $\hat{x}(t)$  tenga una convergencia asintótica a  $x(t)$  y que  $\hat{f}_s(t)$  converja asintóticamente a  $f_s(t)$ .

### Metodología para determinar las matrices desconocidas del observador

Considerando el observador para la estimación de estados y fallas dado por las Ecs. (4.24), (4.25) y (4.26), para el sistema no lineal de destilación por arrastre de vapor indicado en la Ec. (4.17) y considerando los parámetros de la Tabla 2.1, se tienen las siguientes matrices conocidas:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0720 & 0 & 0 \\ 0.0720 & -0.7115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se presentan los pasos a seguir para la obtención de las matrices desconocidas que intervienen en el observador de acuerdo a la metodología presentada en las secciones 3.2.2 y 3.2.3.

1.- *Seleccionar el orden del observador  $q_0$  y una matriz  $I \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que el rango de  $(\Sigma = n)$*

Con la finalidad de realizar simulaciones de este observador se considera  $q_0 = 3$  y una matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por tanto el } rango(\Sigma) = 3.$$

2. *Determinar el valor de las matrices  $Q_n$  y  $T$  definidas en las Ecs. (3.45) y (3.46).*

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

3.- *Resolver las LMIs,  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ , con  $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$  y con  $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$  y (3.73), para encontrar las matrices  $X$ ,  $\Phi$  y  $S$ .*

Para resolver la LMI de la Ec. (3.73) se emplea el Toolbox YALMIP para MATLAB (Löfberg, 2004). De acuerdo con la metodología de la sección 3.2.3,  $\delta$  debe ser un número escalar positivo, para este caso  $\delta = 0.010$  y  $\lambda = 1.4230$  que es la constante de Lipschitz del sistema como se indica en el Anexo C.

Resolviendo la LMI con la herramienta de YALMIP, se obtienen las siguientes matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 186.8746 & -2.1138 & 0 & 0 \\ -2.1138 & 80.2115 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 140.6536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1000 \end{bmatrix}, \quad \Phi = [-783.6919] \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -72.3462 \end{bmatrix}$$

4.- *Calcular las matrices  $K$ ,  $N$  y  $F$  con las ecuaciones  $K = X_1^+ S$ , (3.52) y (3.50), respectivamente.*

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5144 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -0.0720 & 0 & 0 \\ 0.0720 & -0.7115 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5144 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2572 \end{bmatrix}$$

A continuación, se muestran las gráficas de las estimaciones del observador en relación a los estados y el segundo caso de fallas. Las condiciones iniciales del observador se establecieron como  $\hat{x}_1(t) = 90$ ,  $\hat{x}_2(t) = 5$  y  $\hat{x}_3(t) = 0.4$ . Los valores de la entrada  $u(t)$  y las condiciones de tiempo  $\Delta_x$  y  $T_{sim}$  se consideran de igual forma que en la sección 4.5.2.

Los resultados de la convergencia del observador, tanto para los estados como para el segundo caso de falla se muestran en las Figs. 4.21 y 4.22. Para el caso de la Fig. 4.21, las líneas continuas de color azul, rojo y amarillo, se refieren a la masa de aceite esencial en los tricomas, en la capa acuosa y recolectada respectivamente. Las líneas punteadas de color magenta, cian y negro son las estimaciones de cada una de las masas. El observador es capaz de estimar cada una de las variables de estado del sistema no lineal, nótese que a pesar del cambio en  $x_3(t)$  debido al efecto de la falla, el observador sigue al estado perfectamente.

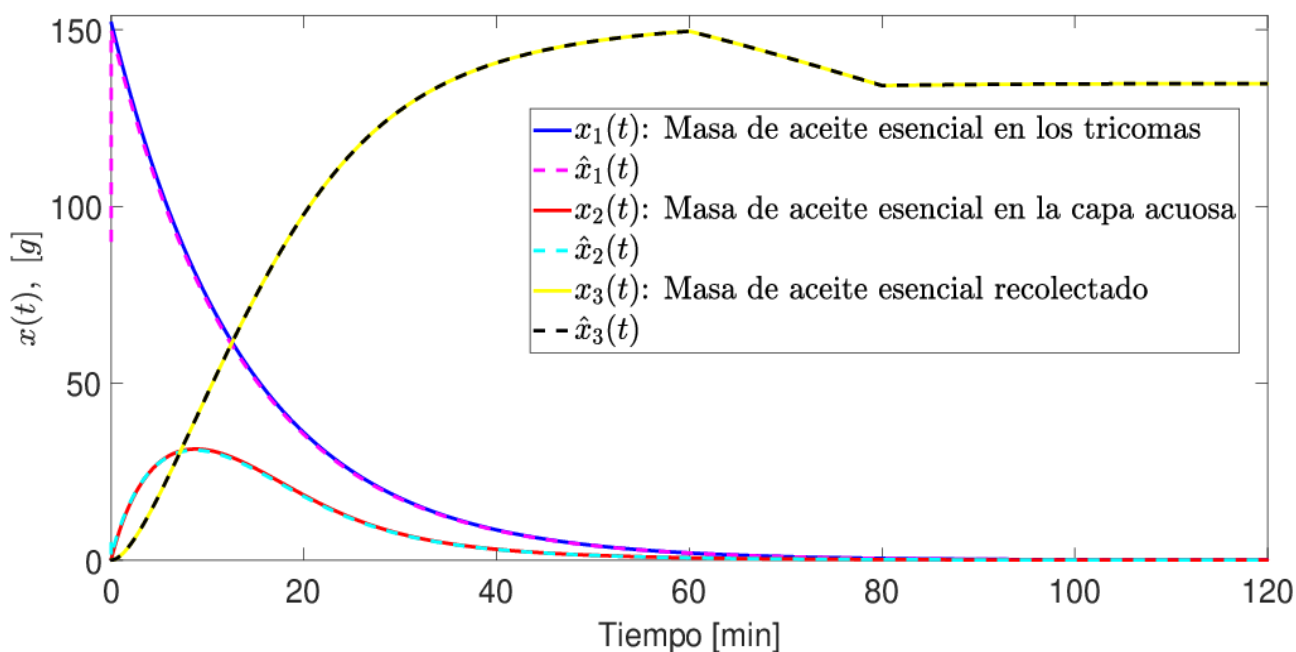
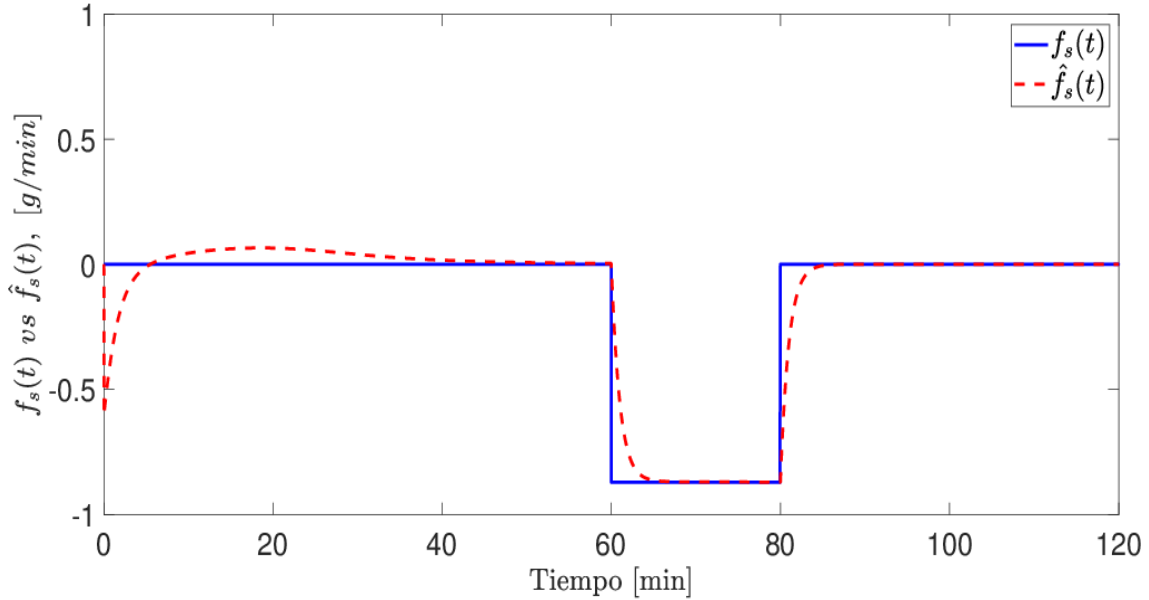


Fig. 4.21.  $x_1(t)$  vs  $\hat{x}_1(t)$

En la Fig. 4.22, la línea continua de color azul representa el comportamiento con respecto del tiempo de la falla, que para este caso es de tipo abrupta, la línea punteada de color rojo muestra la estimación de la falla que ocurre entre el minuto 60 y 80 de la simulación. El observador es capaz de estimar la falla en un tiempo de aproximadamente 7 min y se considera aceptable debido a la naturaleza lenta del proceso de destilación por arrastre de vapor.

Fig. 4.22.  $x_2(t)$  vs  $\hat{x}_2(t)$ 

### 4.6.3. Estimación del tercer caso de fallas.

Finalmente, para el tercer caso de fallas en el proceso de destilación por arrastre de vapor, el observador tiene la siguiente estructura:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1(t) \\ \dot{\zeta}_2(t) \\ \dot{\zeta}_3(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\zeta}(t)} = N \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}}_{\zeta(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_s(t) + F \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_s(t) + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_g^2 C^* \hat{x}_2^2(t)}{u(t) h^2 \rho_{eo} + k_g h \rho_{eo} \hat{x}_2(t)} \\ \frac{k_g u(t) C^* \hat{x}_2(t)}{u(t) h \rho_{eo} + k_g \hat{x}_2(t)} \end{bmatrix}}_{g(\hat{x}(t), u(t))} \right) \quad (4.27)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}}_{\zeta(t)} + T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \end{bmatrix}}_{G_f} \hat{f}_a + Q_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \quad (4.28)$$

$$\hat{f}_a(t) = \Phi \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ \hat{x}_2(t) - x_2(t) \\ \hat{x}_3(t) - x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estado del observador,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estimación del observador. Las matrices  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $Q_n$  y  $\Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones

apropiadas, dichas matrices deben resolverse tal que  $\hat{x}(t)$  tenga una convergencia asintótica a  $x(t)$  y que  $\hat{f}_s(t)$  converja asintóticamente a  $f_s(t)$ .

## Metodología para determinar las matrices desconocidas del observador

Considerando el observador para la estimación de estados y fallas dado por las Ecs. (4.27), (4.28) y (4.29), para el sistema no lineal de destilación por arrastre de vapor indicado en la Ec. (4.17) y considerando los parámetros de la Tabla 2.1, se tienen las siguientes matrices conocidas:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0720 & 0 & 0 \\ 0.0720 & -0.7115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se presentan los pasos a seguir para la obtención de las matrices desconocidas que intervienen en el observador de acuerdo a la metodología presentada en las secciones 3.2.2 y 3.2.3.

*1.- Seleccionar el orden del observador  $q_0$  y una matriz  $I \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que el rango de  $(\Sigma = n)$*

Con la finalidad de realizar simulaciones de este observador se considera  $q_0 = 3$  y una matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por tanto el } rango(\Sigma) = 3.$$

*2. Determinar el valor de las matrices  $Q_n$  y  $T$  definidas en las Ecs. (3.45) y (3.46).*

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

*3.- Resolver las LMIs,  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ , con  $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$  y con  $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$  y (3.73), para encontrar las matrices  $X$ ,  $\Phi$  y  $S$ .*

Para resolver la LMI de la Ec. (3.73) se emplea el Toolbox YALMIP para MATLAB (Löfberg, 2004). De acuerdo con la metodología de la sección 3.2.3,  $\delta$  debe ser un número escalar positivo, para este caso  $\delta = 0.010$  y  $\lambda = 1.4230$  que es la constante de Lipschitz del sistema como se indica en el Anexo C.

Resolviendo la LMI con la herramienta de YALMIP, se obtienen las siguientes matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 115.8486 & -4.0985 & 0 & 0 \\ -4.0985 & 28.2203 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72.5447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1000 \end{bmatrix}, \quad \Phi = [-273.7297] \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -32.1978 \end{bmatrix}$$

4.- Calcular las matrices  $K$ ,  $N$  y  $F$  con las ecuaciones  $K = X_1^+ S$ , (3.52) y (3.50), respectivamente.

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.4438 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -0.0720 & 0 & 0 \\ 0.0720 & -0.1393 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4438 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2219 \end{bmatrix}$$

A continuación, se muestran las gráficas de convergencia del observador en relación a los estados y el tercer caso de fallas. Las condiciones iniciales del observador se establecieron como  $\hat{x}_1(0) = 100$ ,  $\hat{x}_2(0) = 25$  y  $\hat{x}_3(0) = 0.6$ . Los valores de la entrada  $u(t)$  y las condiciones de tiempo  $\Delta_x$  y  $T_{sim}$  se consideran iguales que en la sección 4.5.3.

En la Fig. 4.23, las líneas continuas representan los estados del sistema no lineal  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$ , mientras que las líneas punteadas representan los estados estimados por el observador  $\hat{x}_1(t)$ ,  $\hat{x}_2(t)$  y  $\hat{x}_3(t)$ . Se puede apreciar que el observador logra estimar todos los estados del sistema, incluso el estado que presenta cambios debido a la falla.

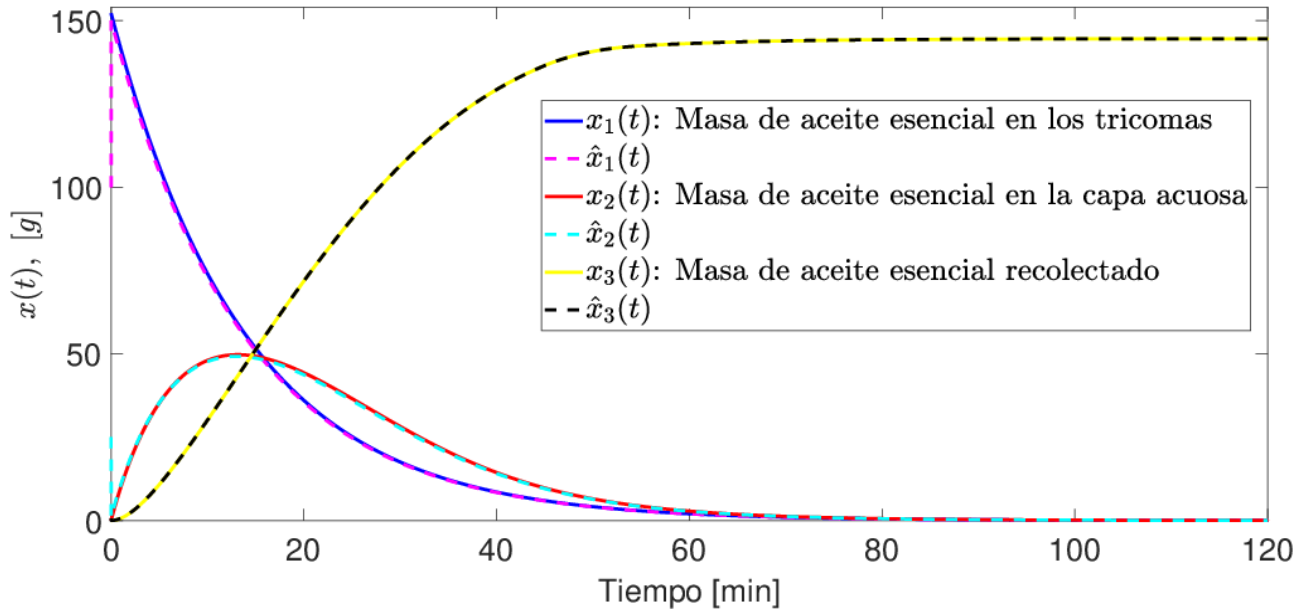


Fig. 4.23.  $x_1(t)$  vs  $\hat{x}_1(t)$



La Fig. 4.24, muestra el comportamiento de la falla con respecto al tiempo  $f_s(t)$ . En este caso, al observador le cuesta realizar la estimación de la falla, debido a que este tipo de fallas no se consideró en el diseño del observador. Sin embargo, a pesar de eso, el observador trata de estimar la falla.

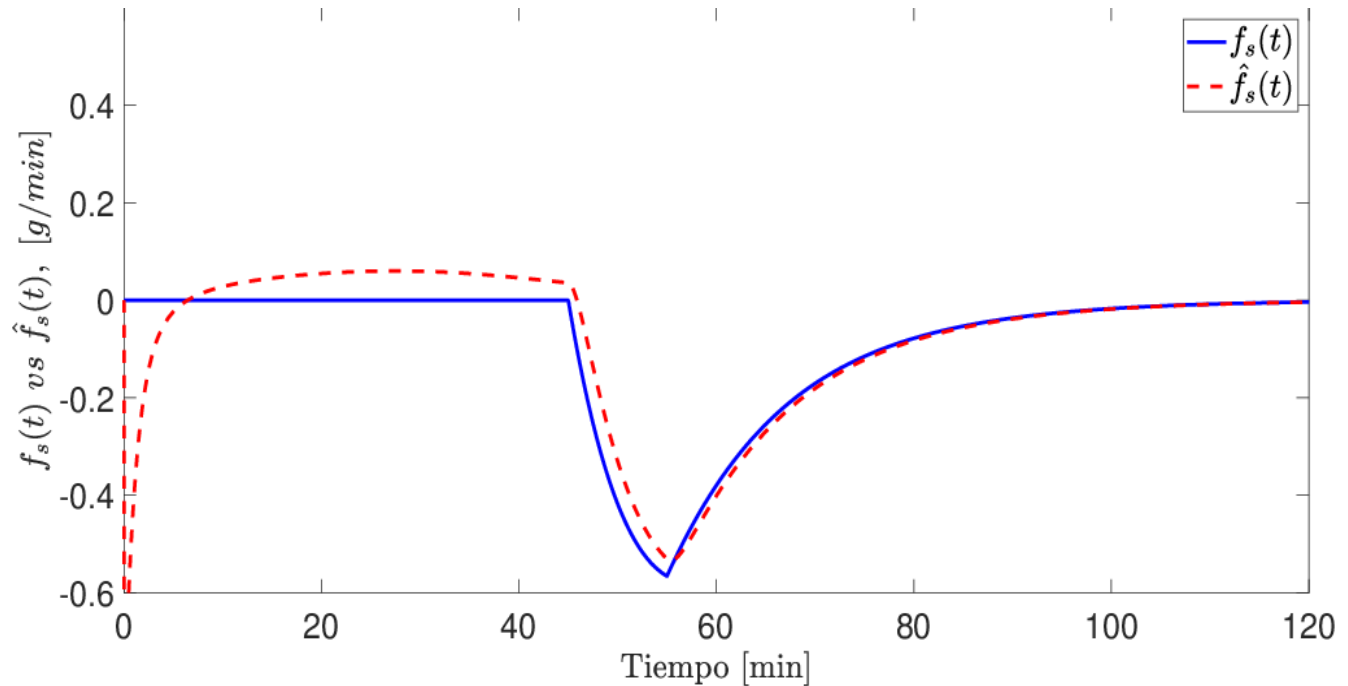


Fig. 4.24.  $f_s(t)$  vs  $\hat{f}_s(t)$

### Conclusiones sobre los casos de fallas.

Para cada caso de falla, el observador logró estimar todos los estados del sistema. En cuanto a la estimación de las fallas, el segundo caso es donde el observador demuestra una mejor estimación, lo cual es congruente por que en el diseño se consideraron fallas abruptas. A pesar de no ser consideradas en el diseño el primer y segundo caso de fallas, el observador trata de estimar lo mejor posible estos escenarios.

## 4.7. Conclusiones del capítulo.

En este capítulo, se presentó la estructura de un esquema de supervisión basado en los observadores diseñados en el capítulo anterior, donde ambos observadores realizan funciones que permite conocer todos los estados del sistema y, además, estimar los casos de fallas considerados en el tubo de salida del producto destilado, obstrucciones en la etapa de condensación y extracción de aceite por parte de un intruso.

Se mostraron las estructuras matemáticas de los observadores aplicados al proceso de destilación por arrastre de vapor. Los resultados de las simulaciones indican que, para el primer observador, es posible estimar todas las variables de estado del sistema, incluso aquellas desconocidas como la masa de aceite dentro de los tricomas  $x_1(t)$  y la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$ .

Se detalló la obtención de las matrices del observador adaptable para la estimación de estados y fallas, siguiendo el algoritmo presentado en la sección 3.2.3. Para este observador, se pudo determinar a través de las simulaciones que, además de realizar la estimación de todos los estados del sistema, tiene la capacidad de estimar fallas de tipo abruptas. Se llevaron a cabo tres escenarios de fallas: el primero considerando la falla desde el inicio de la destilación y el segundo asumiendo que la falla ocurre en un instante de tiempo durante la destilación. En ambos casos, el observador logró estimar de manera correcta la magnitud de ambas fallas. Como experimento adicional, se consideró un escenario de falla de tipo rampa para probar la convergencia del observador ante este tipo de fallas. A pesar de no haber sido diseñado específicamente para este tipo de fallas, el observador demostró una buena capacidad de estimación.

# Capítulo 5

## Conclusiones y aportaciones

### 5.1. Alcance

En este trabajo de investigación se obtiene un esquema de supervisión para un proceso de destilación por arrastre de vapor, aplicado a un destilador de aceites esenciales. El esquema está conformado por dos observadores no lineales con la finalidad de estimar las variables de estado no medibles del sistema y la estimación de fallas en la etapa de salida del producto.

Para desarrollar el esquema de supervisión, se diseñan dos observadores no lineales, los cuales utilizan como base las estructuras matemáticas del modelo del proceso de destilación por arrastre de vapor. En este trabajo, se presentan dos representaciones matemáticas en espacio de estados para las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del aceite durante la destilación.

El esquema de supervisión se llevó a cabo a nivel de simulación, donde el primer observador logró estimar todas las variables de estado del sistema. El segundo observador logró estimar todos los estados del sistema y además las fallas presentes en la etapa de salida del proceso.

### 5.2. Conclusiones

Este trabajo de tesis se integra de varias etapas: Estudio de la fenomenología del proceso, el modelo, diseño del observador para la estimación de variables de estado, diseño del observador para estimar las variables de estado y las fallas, realización de experimentos con tres materiales vegetales. Cada etapa fue desarrollada de manera correcta para cumplir con el objetivo principal de este trabajo.

### **5.2.1. Del modelo matemático:**

En el desarrollo de esta investigación se trabajó con un modelo dinámico fenomenológico para el proceso de destilación por arrastre de vapor.

Para comprender el comportamiento del aceite a lo largo del proceso de destilación por arrastre de vapor, fue crucial considerar las distintas fases por las que debe pasar. De acuerdo con Cerpa y Palomino (2007), estas etapas incluyen la presencia del aceite en el interior de los tricomas glandulares, la formación de una capa de aceite esencial libre y la transformación del aceite en fase de vapor. En este trabajo, se abordaron estas etapas mediante tres ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del aceite a lo largo del proceso de destilación por arrastre de vapor.

Una de las complicaciones que se tuvieron al abordar este tipo de modelo, fueron las no linealidades, tales como estados elevados al cuadrado, multiplicación de la entrada con un estado, suma de una entrada con un estado. Es decir, la estructura del modelo no es amigable para aplicar algunas técnicas de estimación como por ejemplo un banco de observadores, debido a que no se cumple para todos los casos la propiedad de observabilidad.

Sin embargo, las no linealidades son parte importante del modelo, ya que permiten caracterizar el comportamiento del aceite en cada etapa del proceso. Por tanto, en este trabajo se realizan dos representaciones del modelo conservando las no linealidades, pero que a su vez la estructura favorece a la aplicación de observadores de tipo no lineal, pero vuelve complejo el análisis de estabilidad de los observadores.

### **5.2.2. De los observadores:**

Una parte fundamental en el área de observadores es contar con el modelo matemático del sistema, debido a que estos son técnicas que se basan en el modelo. Sin embargo, es necesario que estos modelos tengan ciertas estructuras particulares que favorezcan a la aplicación del observador. En este trabajo, se proponen dos representaciones matemáticas en espacio de estados para las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del aceite en el proceso de destilación por arrastre de vapor. Una vez obtenidas las representaciones matemáticas, se proponen dos estructuras de observadores una para la estimación de estados y otra para la estimación de fallas.

En el diseño del primer observador para el sistema de destilación por arrastre de vapor, se consideró una representación matemática similar a la de un sistema no lineal general. Se asumió que en la ecuación de salida del sistema, la masa de aceite esencial recolectado  $x_3(t)$  es una variable medible. La estructura del primer observador para el sistema de destilación por arrastre de vapor fue similar a la presentada por Trinh et al. (2011) Trinh y Fernando (2011), quienes trabajaron con un tipo de observador para la estimación de estados en un sistema no lineal Lipschitz. El observador propuesto para el sistema de destilación por arrastre de vapor fue capaz de estimar las variables del sistema que se consideraron no medibles, como la masa de aceite al interior de los tricomas  $x_1(t)$  y la masa de aceite en la capa acuosa  $x_2(t)$ .

En el diseño del segundo observador para el sistema de destilación por arrastre de vapor, se empleó una representación matemática no lineal. Se introdujo un término adicional en la ecuación dinámica del sistema para modelar la presencia de una falla. Desde una perspectiva física, esta falla se interpreta como una ruptura en el tubo de salida del producto destilado, ocasionando una fuga del producto y, como consecuencia una pérdida de aceite esencial. La estructura matemática del segundo observador fue similar a la que se abordó en Osorio-Gordillo *y col.* (2018). El observador propuesto para el sistema de destilación por arrastre de vapor fue capaz de estimar todas las variables de estado del sistema y además la magnitud de la falla a la que se sometió el sistema.

Cabe destacar que el sistema fue sometido a tres escenarios de falla. En el primero, se consideró que la falla estaba presente desde el inicio de la destilación. En el segundo escenario, se asumió que la falla ocurrió en un instante durante la simulación y permaneció presente hasta su finalización. En ambos casos, el observador fue capaz de estimar la magnitud de la falla. Además, a modo de experimento, se indujo al sistema una falla tipo rampa, la cual no había sido considerada en el diseño original del observador. El propósito de este experimento fue verificar la capacidad de convergencia del observador frente a este tipo de fallas. Los resultados de la simulación demostraron que, a pesar de no haber sido considerada en su diseño, el observador pudo estimar la falla de manera efectiva.

Las condiciones de estabilidad para los observadores se comprobaron mediante desigualdades matriciales lineales. El análisis considera las funciones no lineales como acotadas usando la propiedad de Lipschitz, obteniendo las LMIs que garantizan la estabilidad de los observadores.

### 5.2.3. De las actividades experimentales:

En las actividades experimentales, fue posible realizar pruebas con tres diferentes materiales vegetales *eucaliptus globulus*, *rosmarinus globulus* y *salvia officinalis*. La primera prueba experimental se realizó utilizando aproximadamente 800 g de *eucaliptus globulus* que se acomodaron en un lecho fijo. La duración de la destilación fue de aproximadamente 1 hr 28 min, en esta primera prueba la primera gota de destilado se obtuvo a los 48 min a partir del inicio del proceso.

En la segunda prueba experimental se introdujeron al barril destilador aproximadamente 3584 g de *rosmarinus officilanlis*, la duración de la destilación fue de aproximadamente 1 hr 31 min y la primera gota de aceite se obtuvo a los 18 min a partir del inicio del proceso.

Finalmente se realizó una tercera prueba con 684 g de *Salvia officinalis*, la destilación duró 1 hr 10 min y la obtención de la primera gota de aceite se obtuvo a los 13 min de haber iniciado el proceso. Se pudo observar que el tiempo de obtención de la primera gota del producto destilado depende en cierta forma de la etapa de condensación, si no se cuenta con una temperatura baja para el agua de enfriamiento, el vapor no se condensará de manera adecuada y el proceso será de condensación será lento en cuanto a la obtención de la primera gota de aceite esencial.

## 5.3. Aportaciones y trabajos futuros

### 5.3.1. Aportaciones

Dentro de las aportaciones principales de este trabajo, se destaca el abordaje del modelo matemático de la transferencia de aceite esencial desde una perspectiva distinta, tratándolo como un modelo no lineal en espacio de estados, lo cual permitió la aplicación de técnicas de control como el diseño de observadores. El desarrollo de dos observadores no lineales específicamente para el proceso de destilación por arrastre de vapor demostró su capacidad para estimar las variables de estado internas del sistema, así como la estimación de escenarios de fallas. Por lo tanto, se puede concluir que los observadores presentados en este trabajo tienen aplicaciones potenciales en futuras investigaciones relacionadas con la estimación de variables y fallas en procesos de destilación por arrastre de vapor. Además, el diseño de estos observadores permitió proponer un esquema de supervisión para el proceso de destilación por arrastre de vapor, lo que representa un avance significativo en el control y la supervisión de este tipo de procesos industriales.

### 5.3.2. Trabajos futuros

- El modelo matemático de la destilación por arrastre de vapor presentado en el capítulo 2, es no lineal y representa de forma adecuada la transferencia de aceite en el proceso de destilación por arrastre de vapor. Sin embargo, en la primera ecuación dinámica no considera una relación con la entrada. Es importante considerar esto debido a que cada estado del modelo sería sensible a la entrada u excitación del sistema.
- Es posible considerar el diseño de un observador que no se limite únicamente a la estimación de fallas abruptas, si no que además sea capaz de estimar otro tipo de fallas que se puedan presentar en el proceso de destilación por arrastre de vapor. En relación a los experimentos, sería interesante abordar en las diversas geometrías del lecho, esto con la finalidad de mejorar la superficie de contacto entre la corriente de vapor y el lecho de hojas.
- Para mejorar la instrumentación del proceso de destilación por arrastre de vapor, se sugiere incluir sensores de flujo en la alimentación del agua de refrigeración al condensador, para tener datos de flujo y realizar cálculos concretos del intercambio de calor en el condensador. También incluir sensores de temperatura que activen alarmas de bajo nivel de agua en el barril destilador, para que mediante un controlador se envíe una señal a la perilla de la fuente de calor y cierre la válvula de gas evitando que se consuma por completo el agua dentro del destilador.

### 5.3.3. Artículos publicados

- Ramos-Hernández, E., Astorga-Zaragoza, C.M., Reyes-Reyes J., Garcilazo-Mendoza, D.B., Flores-Montiel. M. *Esquema de observadores generalizados para el diagnóstico de fallas en sensores de una columna de destilación de tres platos. Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada. Vol. 6/Núm. 1, enero-junio 2023.*
- Ramos-Hernández, E., Astorga-Zaragoza, C. M., Reyes, J. R., Ramirez-Rasgado, F., Osorio-Gordillo, G. L., & Ruiz-Acosta, S. C. Estimation of process variables in a steam distillation plant. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, aceptado el 25 de octubre de 2023.*

# Bibliografía

- Alessandri, Angelo y Paolo Coletta (2001). Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems. En: *Hybrid Systems: Computation and Control: 4th International Workshop, HSCC 2001 Rome, Italy, March 28–30, 2001 Proceedings 4*. Springer. 7–18.
- Almaya, Zakiya, Samiadji Herdjunanto y Oyas Wahyunggoro (2020). Sensor fault detection and isolation using single observer approach in perfume mixing process. En: *2020 12th International Conference on Information Technology and Electrical Engineering (ICITEE)*. IEEE. 51–56.
- Almeida, Rafael N, Rafael de P Soares y Eduardo Cassel (2018). Fractionation process of essential oils by batch distillation. *Brazilian Journal of Chemical Engineering* **35**, 1129–1140.
- Arias, Julián, Daniel Casas-Orozco, Andres Caceres-Leon, Jairo Martínez, Elena Stashenko y Aida-Luz Villa (2020). Dynamic modeling and experimental validation of essential oils fractionation: Application for the production of phenylpropanoids. *Computers & Chemical Engineering* **135**, 106738.
- Avery, Harold Eric (1982). *Cinética química básica y mecanismos de reacción*. Reverté.
- Bandoni, Arnaldo L (2003). Los recursos vegetales aromáticos en latinoamérica. su aprovechamiento industrial para la producción de aromas y sabores. cyted. *Ciencia y tecnología para el desarrollo* **2**, 85.
- Benyoussef, E-H, Sabrina Hasni, R Belabbes y J-M Bessiere (2002). Modélisation du transfert de matière lors de l'extraction de l'huile essentielle des fruits de coriandre. *Chemical Engineering Journal* **85**(1), 1–5.
- Casado Villaverde, Irene (2018). Optimización de la extracción de aceites esenciales por destilación en corriente de vapor.



- Cedeño, Andrea, Cinthia Moreira, Jhonny Muñoz, Andrea Muñoz, Sergio Pillasaguay y María Antonieta Riera (2019). Comparación de métodos de destilación para la obtención de aceite esencial de eucalipto. *Revista Colón Ciencias, Tecnología y Negocios* **6**(1), 1–13.
- Cerpa, M y C Palomino (2007). Hidrodestilación de aceites esenciales. *Departamento de Ingeniería Química y Tecnología del Medio Ambiente, Valladolid*.
- Cerpa, Manuel G, Rafael B Mato y María José Cocero (2008). Modeling steam distillation of essential oils: application to lavandin super oil. *AIChE Journal* **54**(4), 909–917.
- Darouach, Mohamed y Mohamed Boutayeb (1995). Design of observers for descriptor systems. *IEEE transactions on Automatic Control* **40**(7), 1323–1327.
- De Andrade, Matheus Antonio Nogueira, Herman Augusto Lepikson y Carlos Alberto Tosta Machado (2021). A model proposal for digital twin development: Essential oil extraction perspective. *Research Square*.
- Dorf, Richard C, Robert H Bishop, Sebastián Dormido Canto, Raquel Dormido Canto y Sebastián Dormido (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson Educación.
- Ge, Xiaolong, Beibei Wang, Xinchuang Yang, Yu Pan, Botan Liu y Botong Liu (2021). Fault detection and diagnosis for reactive distillation based on convolutional neural network. *Computers & Chemical Engineering* **145**, 107172.
- Gonzalez, A Aguilera (2008). Observador continuo-discreto para la estimación de concentraciones en una columna de destilación, para la mezcla etanol-agua. *Trabajo de maestría en ingeniería electrónica, Cuernavaca, México. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico*.
- Guenther, Ernest (2014). *The essential oils-Vol 1: History-origin in plants-production-analysis*. Read Books Ltd.
- Heath, Henry B y Gary Reineccius (1986). *Flavor chemistry and technology*. Springer.
- Hodel, Jan, Tadhg O'Donovan y Annie E Hill (2021). Influence of still design and modelling of the behaviour of volatile terpenes in an artificial model gin. *Food and Bioproducts Processing* **129**, 46–64.

- Karam, Ayman M y Taous Meriem Laleg-Kirati (2019). Membrane fouling modeling and detection in direct contact membrane distillation. *Journal of Process Control* **81**, 190–196.
- Khalil, Hassan K (2002). Nonlinear systems. *Upper Saddle River*.
- Kockmann, Norbert (2014). History of distillation. En: *Distillation*. 1–43. Elsevier.
- Koul, VK, BM Gandotra, Suman Koul, S Ghosh, CL Tikoo y AK Gupta (2004). Steam distillation of lemon grass (cymbopogon spp.). *Indian Journal of Chemical Technology* **11**, 135–139.
- Lainez-Cerón, Elizabeth, María Teresa Jiménez-Munguía, Aurelio López-Malo y Nelly Ramírez-Corona (2021). Effect of process variables on heating profiles and extraction mechanisms during hydrodistillation of eucalyptus essential oil. *Heliyon* **7**(10), e08234.
- Larico Cari, Sergio Alexander y Juan Jose Hayamamani Mamani (2022). Encapsulamiento de aceite esencial de romero (rosmarinus officinalis) en matriz polimérica de maltodextrina y goma arábica con secado por liofilización. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Perú.
- Li, Chuankun, Dongfeng Zhao, Shanjun Mu, Weihua Zhang, Ning Shi y Lening Li (2019). Fault diagnosis for distillation process based on cnn-dae. *Chinese Journal of Chemical Engineering* **27**(3), 598–604.
- Lipa Huamaní, Fidel Gervacy (2014). Estudio comparativo en el proceso de extracción de aceite esencial de eucalipto (eucalipto globulus labill) mediante el método de destilación por arrastre de vapor y el método de hidrodestilación asistido por radiación microondas. Tesis, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.
- Löfberg, J. (2004). Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. En: *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan.
- Maharaj, Sharad y David McGaw (2020). Mathematical model for the removal of essential oil constituents during steam distillation extraction. *Processes* **8**(4), 400.
- Meziane, Ilhem Ait Amer, Naila Bali, Naila-Besma Belblidia, Nicolas Abatzoglou y El-Hadi Benyoussef (2019). The first-order model in the simulation of essential oil extraction kinetics. *Journal of Applied Research on Medicinal and Aromatic Plants* **15**, 100226.

- Milojević, Svetomir, Dragana B Radosavljević, Vladimir Pavićević, Srđan Pejanović y Vlada B Veljković (2013). Modeling the kinetics of essential oil hydrodistillation from plant materials. *Hemijska industrija* **67**(5), 843–859.
- Minaya Pinto, Milagros Marleni (2008). Destilación: Conceptos, equipos y aplicaciones. Tesis de Licenciatura, Escuela Profesional de Ingeniería de Industrias Alimentarias.
- Montiel, M Flores (2012). Modelo singular LPV de una columna de destilación binaria. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático (CNCA) 2012, Cuernavaca, México. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico*.
- Mora Moscoso, Gabriela Alejandra (2014). Diseño de una planta para la extracción del aceite esencial de palo santo (*bursera graveolens*) mediante destilación por arrastre de vapor. B.S. thesis. QUITO/EPN/2014.
- Needham, Joseph (1974). *Science and civilisation in China*. Vol. 5. Cambridge University Press.
- Obregon Mariano, Edwar Wilmar (2018). Análisis comparativo de la hidrodestilación con el arrastre de vapor para la extracción de aceites esenciales de la cascara de naranja. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión.
- Ogata, Katsuhiko (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Ortiz Torres, G, RF Escobar, Manuel Adam Medina, Astorga Zaragoza y GV Guerrero Ramírez (2016). Control tolerante a fallas activo en sensores y actuadores: Aplicación a una columna de destilación. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* **13**(1), 67–79.
- Ortiz-Torres, Gerardo, Jesus E Valdez-Resendiz, Carlos Alberto Torres-Cantero, Jesse Y Rumbo-Morales, Moises Bulmaro Ramos-Martinez y Jorge Salvador Valdez-Martinez (2023). Actuator and sensor fault detection and isolation system applied to a distillation column. *IEEE Access* **11**, 48548–48558.
- Osorio-Gordillo, Gloria, Carlos Astorga-Zaragoza, Abraham Pérez Estrada, Rodolfo Vargas-Méndez, Mohamed Darouach y Latifa Boutat-Baddas (2018). Fault estimation for descriptor linear systems based on the generalised dynamic observer. *International Journal of Systems Science* **49**(11), 2398–2409.

- Osorio-Gordillo, Gloria L, Mohamed Darouach, Carlos M Astorga-Zaragoza y Latifa Boutat-Baddas (2016). New dynamical observers design for linear descriptor systems. *IET Control Theory & Applications* **10**(17), 2223–2232.
- Ovares, J (2016). Determinación de los rendimientos y caracterización de aceites esenciales obtenidos por hidrodestilación a partir de *Lippia alba* y *Rosmarinus officinalis*. Tesis de Doctorado. Tesis de maestría en Química, Universidad de Costa Rica.
- Palomino, A y M Cerpa (1999). Modelamiento de la hidroextracción de aceites esenciales. *Memorias de la IV Reunión de Fenómenos de Transporte*.
- Parry, Ernest John (1921). *The chemistry of essential oils and artificial perfumes*. Vol. 1. Scott, Greenwood and son.
- Perdomo, D y B Palomarez (2015). Extracción y evaluación de rendimientos de los aceites esenciales del árbol aniba *perutilis hemsley* (comino) mediante el método de arrastre con vapor. *Universidad Nacional Abierta ya Distancia CEAD Florencia. España*.
- Porres Martínez, María, MP Gómez-Serranillos, ME Carretero Accame y col. (2010). Actividad neuroprotectora del aceite esencial de salvia *lavandulifolia vahl*. *ARS Pharm* (51), 657–675.
- Quert Álvarez, Rolando, Migdalia Miranda Martínez, Benito Leyva Córdova, Humberto García Corrales y Fisma Gelabert Ayón (2001). Rendimiento de aceite esencial en *pinus caribaea morelet* según el secado al sol ya la sombra. iii. *Revista Cubana de Farmacia* **35**(1), 47–50.
- Romdhane, Mehrez y Chedly Tizaoui (2005). The kinetic modelling of a steam distillation unit for the extraction of aniseed (*pimpinella anisum*) essential oil. *Journal of Chemical Technology & Biotechnology: International Research in Process, Environmental & Clean Technology* **80**(7), 759–766.
- Sartor, Rafael B, Argimiro R Secchi, Rafael de P Soares y Eduardo Cassel (2011). Dynamic simulation of rosemary essential oil extraction in an industrial steam distillation unit. *Industrial & Engineering Chemistry Research* **50**(7), 3955–3959.
- Souza Junior, Edgar Teixeira de, Leandro Martins Siqueira, Rafael Nolibos Almeida, Aline Machado Lucas, Caroline Garcia Finkler da Silva, Eduardo Cassel y Rubem Mário Figueiró Vargas

- (2020). Comparison of different extraction techniques of zingiber officinale essential oil. *Brazilian Archives of Biology and Technology* **63**, e20190213.
- Stamenić, Marko y Irena Zizovic (2013). The mathematics of modelling the supercritical fluid extraction of essential oils from glandular trichomes. *Computers & Chemical Engineering* **48**, 89–95.
- Sun, Suli, Zhe Cui, Xiang Zhang y Wende Tian (2020). A hybrid inverse problem approach to model-based fault diagnosis of a distillation column. *Processes* **8**(1), 55.
- Taqvi, Syed A, Lemma Dendena Tufa, Haslinda Zabiri, Abdulhalim Shah Maulud y Fahim Uddin (2018). Multiple fault diagnosis in distillation column using multikernel support vector machine. *Industrial & Engineering Chemistry Research* **57**(43), 14689–14706.
- Tarcsay, Bálint Levente, Sándor Németh, Tibor Chován y Ágnes Bárkányi (2021). Hybrid fault detection method for a distillation unit. *Chemical Engineering Transactions* **88**, 391–396.
- Téllez-Anguiano, AC, CM Astorga-Zaragoza, RF Escobar, E Alcorta-García y D Juárez-Romero (2016). Continuous-discrete observer-based fault detection and isolation system for distillation columns using a binary mixture. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* **15**(1), 275–290.
- Trinh, Hieu y Tyrone Fernando (2011). *Functional observers for dynamical systems*. Vol. 420. Springer Science & Business Media.
- Téllez, A. (2010). Supervisión electrónica de columnas de destilación basada en modelos. Tesis de Doctorado. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET). Cuernavaca Morelos, México.
- Unbehauen, Heinz (2009). *Control Systems, Robotics and Automation*. Eolss Publishers Company Limited Oxford.
- Valderrama, Freddy y Fredy Ruiz (2018). An optimal control approach to steam distillation of essential oils from aromatic plants. *Computers & Chemical Engineering* **117**, 25–31.
- Valiente Barderas, Antonio (1996). Historia de la Destilación. *Educación química* **7**(2), 76–82.
- Verde, Cristina (2023). *Diagnosis and Tolerant Control: Applications*. 978-607-30-7559-2.

Verde, Cristina, Sylviane Gentil y Rubén Morales-Menéndez (2013). *Monitoreo y Diagnóstico Automático de Fallas en Sistemas Dinámicos*. Trillas.

Wang, Guang-Yan, Zhen-Hao Yang, Yan Zhang, Hong-Hai Wang, Zhi-Xi Zhang y Bing-Jun Gao (2022). A preliminary fault detection methodology for abnormal distillation column operations using acoustic signals. *Applied Sciences* **12**(24), 12657.

# Apéndice A

## Análisis de dimensionalidad

A continuación, se muestra el análisis de dimensiones del modelo matemático del proceso de DAV, con el objetivo de asegurar que todas las partes de las ecuaciones del modelo tengan dimensiones compatibles, lo que significa que las unidades de medida en ambos lados de las ecuaciones sean consistentes.

Tabla A.1. Unidades de las variables y parámetros

Símbolo	Nombre	Unidades
$k_{tr}$	Constante cinética de exudación	$[1/min]$
$W$	Masa vegetal fresca	$[g]$
$G$	Masa del aceite en los tricomas por masa del lecho	$[g/g]$
$WG = x_1$	Masa del aceite en el interior del material vegetal	$[g]$
$k_g$	Coefficiente de transferencia de masa	$[cm/min]$
$C^*$	Concentración del aceite en el vapor, junto a la interfase	$[g/cm^3]$
$M^{os} = x_2$	Masa del aceite en la capa acuosa	$[g]$
$h$	Espesor de la capa de aceite en la capa acuosa	$[cm]$
$\rho_{eo}$	Densidad del aceite esencial líquido	$[g/cm^3]$
$Q = u$	Caudal de vapor	$[cm^3/min]$

### Ecuación uno

$$\dot{x}_1 = -k_{tr}x_1 \quad (A.1)$$

$$\underbrace{\dot{x}_1}_{(g/min)} = - \underbrace{k_{tr}}_{(1/min)} \underbrace{x_1}_{(g)} \quad (A.2)$$

## Ecuación dos

$$\dot{x}_2 = \underbrace{k_{tr}x_1}_{(g/min)} - \frac{k_g C^* x_2}{h\rho_{eo}} \left( 1 - \frac{k_g x_2}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} \right) \quad (A.3)$$

$$\frac{k_g C^* x_2}{h\rho_{eo}} = \frac{(cm/min)(g/cm^3)(g)}{(cm)(g/cm^3)} = (g/min) \quad (A.4)$$

$$\dot{x}_2 = \underbrace{k_{tr}x_1}_{(g/min)} - \frac{k_g C^* x_2}{h\rho_{eo}} \left( 1 - \frac{k_g x_2}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} \right) \quad (A.5)$$

$$\frac{k_g x_2}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} = \frac{\left(\frac{cm}{min}\right)(g)}{\left(\frac{cm^3}{min}\right)(cm) \left(\frac{g}{cm^3}\right) + \left(\frac{cm}{min}\right)(g)} = \frac{\left(\frac{cm}{min}\right)}{\left(\frac{cm}{min}\right) + \left(\frac{cm}{min}\right)} = \frac{\left(\frac{cm}{min}\right)}{\left(\frac{cm}{min}\right)} = 1 \quad (A.6)$$

## Ecuación tres

$$\dot{x}_3 = \frac{k_g u C^* x_2}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} \quad (A.7)$$

$$\frac{k_g u C^* x_2}{uh\rho_{eo} + k_g x_2} = \frac{\left(\frac{cm}{min}\right) \left(\frac{cm^3}{min}\right) \left(\frac{g}{cm^3}\right)(g)}{\left(\frac{cm^3}{min}\right)(cm) \left(\frac{g}{cm^3}\right) + \left(\frac{cm}{min}\right)(g)} = \frac{\left(\frac{cm}{min^2}\right)}{\left(\frac{cm}{min}\right) + \left(\frac{cm}{min}\right)} = \frac{\left(\frac{cm}{min^2}\right)}{\left(\frac{cm}{min}\right)} = \frac{g}{min} \quad (A.8)$$



# Apéndice B

## Código para el cálculo de la observabilidad del sistema de DAV

Considerando los valores de la Tabla 2.1 para los parámetros. Una entrada constante  $u(t) = 25000 \text{ cm}^3/\text{min}$  y las condiciones iniciales de los estados en  $x = [152.25 \text{ g} \ 0 \ 0]^T$ . Se puede calcular la observabilidad del sistema de destilación por arrastre de vapor con el siguiente código de MATLAB:

```
clc
clear all
close all
%Parámetros
W=2175;          %Masa vegetal fresca[g]
ktr=0.072;      %Cte cinética de exudación [min-1]
Cas=0.001;     %Concentración de masa de aceite esencial en la interfase [g/cm3]
h=0.0115;     %Espesor de las manchas de aceite [cm s]
rho_eo=0.99;  %Densidad del líquido del aceite esencial [g/cm3]
Q=25000;      %Flujo volumétrico de vapor [cm3/min]
u(1)=Q;          %C.I Flujo volumétrico de vapor [cm3/min].
kg(1)=0.00047*(u(1)-74400)+31.4; %C.I Coeficiente de transferencia de masa [cm/min]
%C.I iniciales de las masas.
G=0.07;
Mos=0;
Msd=0;
```

```
%C.I de los estados del sistema
```

```
x1(1)=G*W;
```

```
x2(1)=Mos;
```

```
x3(1)=Msd;
```

```
%Matriz de salida del sistema
```

```
C=[0 0 1];
```

```
%C.I no linealidades de la matriz A(x)
```

```
a22(1)=-((kg(1)*Cas)/(h*rho_eo))
```

```
+(((2*kg(1)^2*Cas*x2(1))/(u(1)*h^2*rho_eo^2+kg(1)*h*rho_eo*x2(1)))
```

```
-((kg(1)^3*Cas*h*rho_eo*x2(1)^2)/(u(1)*h^2*rho_eo^2+kg(1)*h*rho_eo*x2(1))^2);
```

```
a32(1)=((kg(1)*u(1)*Cas)/(u(1)*h*rho_eo+kg(1)*x2(1)))
```

```
-((kg(1)^2*u(1)*Cas*x2(1))/(u(1)*h*rho_eo+kg(1)*x2(1))^2);
```

```
%Condiciones de tiempo
```

```
t=0;
```

```
dx=0.001;
```

```
Tsim=180;
```

```
for k=1:Tsim/dx
```

```
t(k+1)=t(k)+dx;
```

```
u(k+1)=u(k);
```

```
kg(k+1)=0.00047*(u(k)-74400)+31.4;
```

```
%Modelo matemático no lineal del sistema de DAV
```

```
x1(k+1)=x1(k)+dx*(-ktr*x1(k));
```

```
x2(k+1)=x2(k)+dx*(ktr*x1(k)-
```

```
((kg(k)*Cas*x2(k))/(h*rho_eo))*(1-((kg(k)*x2(k))/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(k)))));
```

```
x3(k+1)=x3(k)+dx*((kg(k)*u(k)*Cas*x2(k))/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(k)));
```

```
%no linealidades de la matriz A(x)

a22(k+1)=-((kg(k)*Cas)/(h*rho_eo))+
((2*kg(k)^2*Cas*x2(k))/(u(k)*h^2*rho_eo^2+kg(k)*h*rho_eo*x2(k)))-
((kg(k)^3*Cas*h*rho_eo*x2(k)^2)/(u(k)*h^2*rho_eo^2+kg(k)*h*rho_eo*x2(k))^2);

a32(k+1)=((kg(k)*u(k)*Cas)/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(k)))-
((kg(k)^2*u(k)*Cas*x2(k))/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(1))^2);

A=[-ktr 0 0;ktr a22(k) 0;0 a32(k) 0];
eig(A);

%Matriz de observabilidad
O=[C;C*A;C*A^2];
rango=rank(O);
end
```

# Apéndice C

## Cálculo de la constante de Lipschitz del sistema de DAV

La constante de Lipschitz para el sistema en  $\mathbb{R}^n$ , se puede calcular si el jacobiano está acotado, como se indica en la Ec.(C.1).

$$\left\| \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq \lambda \quad (\text{C.1})$$

donde

$$\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} = \begin{bmatrix} -k_{tr} & 0 & 0 \\ k_{tr} & a_{22}(x, u) & 0 \\ 0 & a_{32}(x, u) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Para encontrar el valor máximo de la constante de Lipschitz del sistema, se aplica la norma infinito al jacobiano como se muestra en la siguiente expresión:

$$\left\| \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \right\|_{\infty} := \max \{ | -k_{tr} | + | k_{tr} | + | 0 |, \quad | 0 | + | a_{22}(x, u) | + | a_{32}(x, u) |, \quad | 0 | + | 0 | + | 0 | \} \quad (\text{C.3})$$

Para obtener el valor numérico de la constante de Lipschitz del sistema, se programó en MATLAB la Ec. (C.3), como se muestra a continuación:

```
clear all
close all
%Parámetros
W=2175;           %Masa vegetal fresca[g]
ktr=0.072;       %Cte cinética de exudación [min-1]
Cas=0.001;       %Concentración de masa de aceite esencial en la interfase [g/cm3]
h=0.0115;        %Espesor de las manchas de aceite [cm s]
rho_eo=0.99;     %Densidad del líquido del aceite esencial [g/cm3]
Q=25000;         %Flujo volumétrico de vapor [cm3/min]

u(1)=Q;          %C.I Flujo volumétrico de vapor [cm3/min].
kg(1)=0.00047*(u(1)-74400)+31.4; %C.I Coeficiente de transferencia de masa [cm/min]

%C.I iniciales de las masas.
G=0.07;
Mos=0;
Msd=0;

%C.I de los estados del sistema
x1(1)=G*W;
x2(1)=Mos;
x3(1)=Msd;

%Matriz de salida del sistema
C=[0 0 1];

%C.I no linealidades de la matriz A(x)
a22(1)=-((kg(1)*Cas)/(h*rho_eo))+
((2*kg(1)^2*Cas*x2(1))/(u(1)*h^2*rho_eo^2+kg(1)*h*rho_eo*x2(1)))-
((kg(1)^3*Cas*h*rho_eo*x2(1)^2)/(u(1)*h^2*rho_eo^2+kg(1)*h*rho_eo*x2(1))^2);
```

---

```

a32(1)=((kg(1)*u(1)*Cas)/(u(1)*h*rho_eo+kg(1)*x2(1)))-
((kg(1)^2*u(1)*Cas*x2(1))/(u(1)*h*rho_eo+kg(1)*x2(1))^2);

%Condiciones de tiempo
t=0;
dx=0.001;
Tsim=180;

for k=1:Tsim/dx

t(k+1)=t(k)+dx;
u(k+1)=u(k);
kg(k+1)=0.00047*(u(k)-74400)+31.4;

%Modelo matemático del sistema no lineal de DAV
x1(k+1)=x1(k)+dx*(-ktr*x1(k));
x2(k+1)=x2(k)+dx*(ktr*x1(k)-
((kg(k)*Cas*x2(k))/(h*rho_eo))*(1-((kg(k)*x2(k))/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(k)))));
x3(k+1)=x3(k)+dx*((kg(k)*u(k)*Cas*x2(k))/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(k)));

%no linealidades de la matriz A(x)
a22(k+1)=-((kg(k)*Cas)/(h*rho_eo))+
((2*kg(k)^2*Cas*x2(k))/(u(k)*h^2*rho_eo^2+kg(k)*h*rho_eo*x2(k)))-
((kg(k)^3*Cas*h*rho_eo*x2(k)^2)/(u(k)*h^2*rho_eo^2+kg(k)*h*rho_eo*x2(k))^2);

a32(k+1)=((kg(k)*u(k)*Cas)/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(k)))-
((kg(k)^2*u(k)*Cas*x2(k))/(u(k)*h*rho_eo+kg(k)*x2(1))^2);

% Cálculo de la observabilidad del sistema
A=[-ktr 0 0;ktr a22(k) 0;0 a32(k) 0];
eig(A);

```

---

```
O=[C;C*A;C*A^2];
```

```
rango=rank(O);
```

```
%Cálculo de la constante de Lipschitz
```

```
Lamda=max([abs(A(1,1))+abs(A(2,1))+abs(A(3,1)),abs(A(1,2))+abs(A(2,2))+abs(A(3,2)),  
abs(A(1,3))+abs(A(2,3))+abs(A(3,3))]);
```

```
end
```

Obteniendo como resultado un  $\lambda = 1.4230$ .

Por tanto, se dice que:

$$\left\| \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq 1.4230 \quad (\text{C.4})$$