

SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
Secretaría Académica, de Investigación e Innovación  
Dirección de Posgrado, Investigación e Innovación

**cenidet**<sup>®</sup>  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

# Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Electrónica

**TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS**

**Control Tolerante a Fallas con Modelo de Seguimiento**

presentado por  
**Ing. Oscar Gutiérrez González**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica**

Director de tesis  
**Dr. Luis Gerardo Vela Valdés**

Codirector de tesis  
**Dr. Manuel Adam Medina**

**Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2016.**

Cuernavaca, Mor., 13 de junio de 2016.

OFICIO No. DIE/0127/2016

**Asunto:** Aceptación de documento de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Oscar Gutiérrez González** con número de control **M14CE076** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado: **“Control Tolerante a Fallas con Modelo de Seguimiento”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

CODIRECTOR DE TESIS



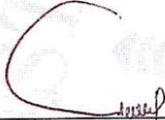
Dr. Luis Gerardo Vela Valdés  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 7980044



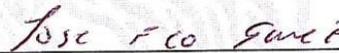
Dr. Manuel Adam Medina  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5992003

REVISOR 1

REVISOR 2



Dra. Ma. Guadalupe López López  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química  
Cédula profesional 7980045



Dr. José Francisco Gómez Aguilar  
Doctor en Física  
Cédula profesional 9124781

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Estudiante  
Expediente

CMAZ/lrr



Cuernavaca, Mor., 16 de junio de 2016  
OFICIO No. SAC/208/2016

**Asunto:** Autorización de impresión de tesis

**ING. OSCAR GUTIÉRREZ GONZÁLEZ**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Control Tolerante a Fallas con Modelo de Seguimiento”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

“CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO”

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**SEP TecNM**  
**CENTRO NACIONAL**  
**DE INVESTIGACIÓN**  
**Y DESARROLLO**  
**TECNOLÓGICO**  
**SUBDIRECCIÓN**  
**ACADÉMICA**

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr



## **Agradecimientos**

*A **dios** por permitirme alcanzar este logro tan importante en mi vida.*

*A **mi madre** por el amor que me ha brindado todos los días de mi vida. Gracias por, el apoyo, los consejos y el afecto que me ha brindado y que me han permitido concluir un grado más de mis estudios.*

*A **mi padre** por su educación, cariño y respeto que me han ayudado en cada etapa de mi vida.*

*A **mis hermanos** por cuidarme, aconsejarme y brindarme su apoyo en lo largo de esta etapa.*

*A **Dulce** por su apoyo y comprensión a lo largo de toda mi formación profesional, por su amor y cariño que me ha brindado.*

*A **mi asesor**, el Dr. Luis Gerardo Vela Valdés por sus consejos y su ayuda a lo largo del desarrollo de esta investigación.*

*A **mi co-director**, el Dr. Manuel Adam Medina por compartirme sus conocimientos a lo largo de la maestría.*

*A **mis revisores**, la Dra. Ma. Guadalupe López López, el Dr. Alejandro Rodríguez Palacios y el Dr. José Francisco Gómez Aguilar por sus valiosos comentarios, observaciones, disponibilidad y ayuda que contribuyeron al buen desarrollo de esta investigación.*

*Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (**CENIDET**) por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado en el área de maestría en ciencias.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACYT**) por solventar económicamente el desarrollo de esta investigación.*

## Resumen

En esta tesis se presentan los resultados en simulación de un CTF basado en modelo de seguimiento implementado a un sistema de tres tanques acoplados, con el fin de controlar los niveles en cada uno de los tanques.

La idea principal de este trabajo es la aplicación de un control basado en modelo de seguimiento (CMS) y el diseño de un mecanismo adaptable que ayude a compensar el control primario del CMS.

Para el desarrollo de este trabajo, primero se hace una descripción general del sistema de tres tanques acoplados, se obtiene el modelo no lineal del sistema de la literatura el cual se describe por las ecuaciones de balance de masa.

Para el diseño del CMS es necesario generar un modelo lineal en espacio de estado. El modelo lineal se obtiene por el método de expansión de Taylor, el cual es válido alrededor de un punto de operación.

Una vez obtenido el modelo lineal del sistema, se diseña el esquema de CMS y se le suma una nueva señal de control generada por un PI adaptable, a esta estructura se le conoce como Control con Modelo de Seguimiento Adaptable (CMSA).

Se simulan fallas paramétricas para comparar el desempeño del CMSA contra un control PI lineal.

## **Abstract**

**This thesis presents the results in simulation of a fault tolerant control based on model following implemented to a three coupled tanks system, in order to control the levels in each of the tanks.**

**The main idea of this work is the application of a Model Following Control (MFC) and the design of an adaptive mechanism to compare the primary control of MFC.**

**For the development of this work, firstly an overview of the system of three coupled tanks is done, then a nonlinear model system was taken from the literature which is based on mass balance equations.**

**To design the MFC is necessary to generate a continuous linear state space model. The linear model is obtained by the method of Taylor expansion, which is validated around an operating point.**

**After obtaining the linear model system, the MFC scheme is designed and a new control signal is added. The control signal is generated by an adaptive PI, this structure is known as Adaptive Model Following Control (AMFC).**

**Parametric faults are simulated to compare performance of AFMC against a linear PI control.**

## Contenido

<b>Lista de figuras .....</b>	<b>V</b>
<b>Lista de tablas .....</b>	<b>VII</b>
<b>Nomenclatura/Simbología.....</b>	<b>VII</b>
<b>Siglas. ....</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Planteamiento del problema.....</b>	<b>3</b>
<b>1.2. Justificación.....</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Objetivos.....</b>	<b>4</b>
1.3.1. Objetivo General.....	4
1.3.2. Objetivos Específicos.....	4
<b>1.4. Estado del Arte.....</b>	<b>4</b>
<b>1.5. Estructura de tesis .....</b>	<b>9</b>
<b>2. Fundamentos de FDD y CTF.....</b>	<b>10</b>
<b>2.1. Conceptos de FDD.....</b>	<b>10</b>
<b>2.2. Conceptos de CTF.....</b>	<b>16</b>
<b>3. Sistema de Tres tanques acoplados.....</b>	<b>31</b>
<b>3.1. Descripción general del sistema de tres tanques acoplados.....</b>	<b>31</b>
<b>3.2. Modelado del sistema de tres tanques acoplados.....</b>	<b>33</b>
<b>3.3. Puntos de equilibrio del sistema de tres tanques acoplados.....</b>	<b>34</b>
<b>3.4. Representación Lineal.....</b>	<b>38</b>
<b>3.5. FDD y CTF Aplicado al Sistema de Tres Tanques Acoplados.....</b>	<b>47</b>
<b>4. Pruebas y Resultados.....</b>	<b>51</b>
<b>4.1. Características del CMS.....</b>	<b>53</b>
<b>4.2. Características del control PI lineal.....</b>	<b>54</b>
<b>4.3. Comparación del CMS vs PI lineal.....</b>	<b>55</b>
<b>4.4. Comparación del CMSA vs PI lineal.....</b>	<b>57</b>
4.4.1 Fallas en actuadores.....	59
4.4.2 Fallas en sensores.....	63
4.4.3 Fallas incipientes en parámetros.....	66

4.4.1 Fallas en tuberías tapadas.....	68
4.4.2 Fallas de fugas en los tanques.....	74
<b>5. Conclusiones Generales y Trabajos Futuros.....</b>	<b>80</b>
5.1. Conclusiones Generales.....	80
5.2. Trabajos Futuros.....	81
<b>6. Bibliografía.....</b>	<b>82</b>
<b>7. Anexos.....</b>	<b>87</b>

### Lista de figuras.

Figura 1. El problema de control tolerante a fallas.....	3
Figura 2. Esquema de CTF propuesto.....	8
Figura 3. Problema de diagnóstico.....	12
Figura 4. Clasificación de métodos FDD.....	14
Figura 5. Detección de falla basada en modelos cuantitativos.....	15
Figura 6. Técnicas de generación de residuos basadas en modelo.....	15
Figura 7. Regiones de comportamiento.....	17
Figura 8. Clasificación de mecanismos para control tolerante a fallas.....	18
Figura 9. Acomodación de fallas.....	20
Figura 10. Reconfiguración de fallas.....	20
Figura 11. Sistema de control con modelo de seguimiento lineal.....	22
Figura 12. Sistema de CMSA con parámetros adaptable.....	24
Figura 13. Sistema de CMSA con adaptación de síntesis de señal.....	25
Figura 14. Representación del sistema de tres tanques.....	32
Figura 15. Sistema no lineal en lazo abierto.....	38
Figura 16. Sistema lineal de tres tanques en lazo abierto.....	46
Figura 17. Esquema de CMSA.....	49
Figura 18. Sistema de tres tanques acoplados.....	52
Figura 19. Modelo de referencia vs control basado en MS.....	53

Figura 20. Modelo de referencia vs control PI.....	54
Figura 21. Niveles de los tanques con CMS y PI lineal. ....	55
Figura 22. Esfuerzo de control con CMS y PI lineal. ....	56
Figura 23. Niveles de los tanques en estado estable sin falla.....	57
Figura 24. Esfuerzo de control de control PI y MSA. ....	58
Figura 25. Niveles de los tanques con atascamiento en actuador 1.....	60
Figura 26. Esfuerzo de control con atascamiento en actuador 1.....	60
Figura 27 Niveles de los tanques con caída de tensión en actuadores. ....	61
Figura 28 Esfuerzo de control con caída de tensión en los actuadores.....	62
Figura 29. Niveles de los tanques con congelamiento de señal. ....	63
Figura 30. Esfuerzo de control con congelamiento de señal. ....	64
Figura 31. Niveles de los tanques con error de medición en sensor del tanque 1.....	65
Figura 32. Esfuerzo de control con erro de medición en sensor del tanque 1. ....	65
Figura 33. Niveles de los tanques con falla incipiente en Sp32. ....	67
Figura 34. Esfuerzo de control con incipiente en Sp32. ....	67
Figura 35. Falla en la tubería Sp13. ....	68
Figura 36. Esfuerzo de control con falla en Sp13.....	69
Figura 37. Niveles de los tanques con falla en Sp13.....	69
Figura 38. Falla en la tubería Sp32. ....	70
Figura 39. Esfuerzo de control con falla en Sp32.....	71
Figura 40. Niveles de los tanques con falla en Sp32.....	71
Figura 41. Falla en la tubería Sp20. ....	72
Figura 42. Esfuerzo de control con falla en Sp20.....	73
Figura 43. Niveles de los tanques con falla en Sp20.....	73
Figura 44. Fuga en el tanque 1.....	74
Figura 45. Esfuerzo de control con fuga en tanque 1.....	75
Figura 46. Niveles de los tanques con fuga en tanque 1.....	75
Figura 47. Fuga en el tanque 3.....	76
Figura 48. Esfuerzo de control con fuga en tanque 3.....	77
Figura 49. Niveles de los tanques con fuga en tanque 3.....	77
Figura 50. Fuga en el tanque 2.....	78

Figura 51. Niveles de los tanques con fuga en tanque 2..... 79  
 Figura 52. Esfuerzo de control con fuga en tanque 2..... 79

**Lista de tablas**

Tabla 1. Ecuaciones del sistema de CMSA con adaptación de síntesis de señal..... 29  
 Tabla 2. Parámetros del sistema..... 32  
 Tabla 3. Ganancias PI..... 54  
 Tabla 4. Notaciones de las gráficas. .... 57  
 Tabla 5. Características de Actuadores. .... 58

**Nomenclatura/Simbología**

<b><math>A</math></b>	<b>Sección transversal del tanque (<math>m^2</math>)</b>
$S_p$	Sección transversal de tubo ( $m^2$ )
$\mu$	Coeficiente de salida de flujo
$L$	Nivel de tanque ( $m$ )
$q_e$	La velocidad de entrada de flujo volumétrico al sistema ( $m^3s^{-1}$ )
$q_s$	La velocidad de salida de flujo volumétrico del sistema ( $m^3s^{-1}$ )
$x_e$	Punto de equilibrio
$\lambda$	Valor propio
$B_f^+$	La matriz Pseudo-inversa de $B$ con falla
$f$	Falla
$u$	Entrada a la planta
$y$	Salida de la planta
$d$	Disturbio

## Siglas.

<b>FDD</b>	<b>Diagnóstico y Detección de la Falla.</b>
<b>CTF</b>	Control Tolerantes a Fallas.
<b>SCTFA</b>	Sistemas de Control Tolerantes a Fallas Activos.
<b>SCTFP</b>	Sistemas de Control Tolerantes a Fallas Pasivos.
<b>CMS</b>	Control Basado en Modelo de Seguimiento.
<b>CMSA</b>	Control Basado en Modelo de Seguimiento Adaptable.
<b>LTI</b>	Lineal e Invariante en el Tiempo.
<b>LPV</b>	Lineal Variante en el Tiempo.
<b>CAMR</b>	Control Adaptable con Modelo de Referencia.
<b><math>H_{\infty}</math></b>	Norma H Infinito
<b>GS</b>	Ganancia Programada.
<b>FMRLC</b>	Control de Aprendizaje con Modelo de Referencia Difuzo.
<b>PI</b>	Control Proporcional + Integral
<b>I</b>	Control Integral
<b>LQR</b>	Regulador cuadrático lineal.
<b>EA</b>	Asignación de Eigenestructuras.
<b>LMI's</b>	Desigualdades Matriciales Lineales.
<b>UAV</b>	Vehículo Aéreo no Tripulado.
<b>MIT</b>	Instituto Tecnológico de Massachusetts.
<b>MBD</b>	Diagnóstico Basado en Modelo.

## **1. Introducción.**

Se entiende por falla a todo cambio en el comportamiento de alguno de los componentes del sistema, de manera que éste ya no puede satisfacer la función para la cual ha sido diseñado provocando pérdidas económicas y riesgos en las personas que laboran en la planta (Blanke et al., 2001).

Para que un sistema sea fiable, es decir, que pueda funcionar de manera continua con/sin presencia de fallas, es importante buscar alternativas para detectar fallas y así lograr un control adecuado.

En las últimas dos décadas la creciente demanda de fiabilidad en los procesos industriales ha atraído más la atención al problema del diagnóstico y detección de la falla (FDD).

El FDD es la etapa principal de los sistemas de control tolerantes a fallas ya que determina el tipo, tamaño, localización e instante de aparición de una falla (Verde et al. 2013).

Una vez detectado la presencia de fallas en los sistemas, se emplea una estrategia de CTF con el fin de llevar al sistema con falla a un nuevo punto de operación nominal (sin falla), para ello varios estudios están basados en redundancias física o analítica.

La redundancia física es necesaria en sistemas donde la seguridad de las personas puede ser afectada (aviones, plantas nucleares, etc.). La redundancia analítica hace posible la reducción en costos de instrumentación y mantenimiento, (Noura et al. 2009).

Los mecanismos tolerantes a fallas que se emplean en la redundancia analítica se clasifican en pasivos y activos.

Los SCTFP están diseñados para ser robustos a perturbaciones e incertidumbres paramétricas, esto permite al controlador contrarrestar el efecto de una falla sin requerir

la reconfiguración y un módulo de FDD (Mahmoud et al. 2003).

Los SCTFA consisten en el diagnóstico en línea de la falla, a partir de dicha información, activar algún mecanismo de acomodación del mismo o de reconfiguración del control o incluso dependiendo de la gravedad un paro en el sistema, (Puig et al. 2004b).

En este trabajo se utilizará una estructura de CTF basada en modelo de seguimiento en la cual se realizará la acomodación de la falla, con el fin de compensar la señal del control primario en línea.

El sistema de CTF será un enfoque pasivo ya que la estructura de control propuesta no cuenta con un módulo de FDD; pero no estará diseñado para ser robusto a una clase de presuntas fallas. Se empleará una ley adaptable con el fin de compensar las fallas paramétricas en línea.

El caso de estudio es un sistema de tres tanques acoplados que estará sujeto a incertidumbres paramétricas, para el cual se simularán fallas de atascamiento en tuberías y fugas en los tanques.

## 1.1. Planteamiento del problema.

El problema del control tolerante a fallas aparece cuando ocurre una falla, el sistema se desvía de su punto de operación nominal definido por sus variables de entrada/salida  $(u_0, y_0)$  a uno defectuoso  $(u_f, y_f)$ .

El objetivo del control tolerante a fallas es determinar una nueva ley de control que toma en cuenta los parámetros del sistema degradados y lleva al sistema a un nuevo punto de operación  $(u_c, y_c)$ , como se muestra en la Figura 1 presentado por (Noura et al. 2000).

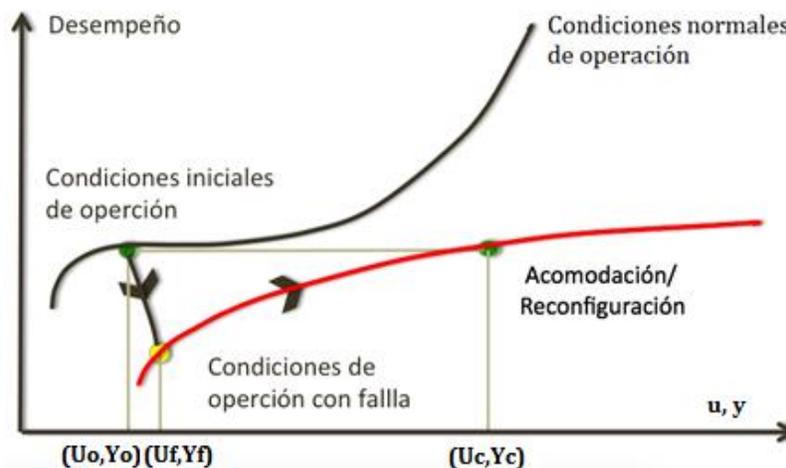


Figura 1. El problema de control tolerante a fallas.

Dicho lo anterior se propone realizar una estrategia de CTF cuyo propósito es que el sistema tenga buen desempeño alrededor de un punto de operación a pesar de la presencia de una falla. La principal problemática a realizar es la siguiente:

- Utilizar una estrategia de CTF basado en un diagnóstico de la falla en línea.
- Diseñar un mecanismo de acomodación para compensar las tres ganancias del CMS en línea.

En este trabajo se propone realizar un CTF que será aplicado a tres tanques acoplados donde se simularán fallas en los parámetros (atascamiento en tuberías y fugas), utilizando una estrategia de CMS y un mecanismo de acomodación para compensar la falla en línea.

## **1.2. Justificación.**

La necesidad de que el sistema sea confiable, rápido, seguro sin y con presencia de fallas en parámetros para evitar daños en los equipos y operadores del sistema utilizando una técnica de CTF fiable, de alto desempeño y fácil de implementar.

## **1.3. Objetivos.**

### **1.3.1. Objetivo General.**

- Diseñar una estrategia de control tolerante a fallas en línea basada en modelo de seguimiento aplicado a un sistema de tanques acoplados.

### **1.3.2. Objetivos Específicos.**

- Modelar un sistema de tanques.
- Diseñar un observador para la estimación del sistema.
- Diseñar una estrategia para el diagnóstico de fallas.
- Diseñar un CTF basado en modelo de seguimiento.
- Implementar un CTF en línea para un sistema de tanques utilizando un mecanismo de acomodación.
- Simular un sistema de tres tanques acoplados integrando el CTF en línea en matlab/simulink.

## **1.4. Estado del Arte.**

Los trabajos presentados en el estado del arte están relacionados con temas de diagnóstico y detección de fallas, técnicas de CTF (pasivos y activos) y esquemas de control con modelo de referencia.

A continuación se presentan los trabajos relacionados con diagnóstico y detección de fallas en sistemas de tanques.

Un esquema de diagnóstico de falla basado en redes neuronales puede detectar y localizar fallas muy pequeñas en sistemas no lineales, (Patton et al 1994).

(Theilliol et al. 2002) aplican un método de acomodación y diagnóstico de falla para un sistema real compuesto por tres tanques acoplados, el enfoque propuesto se basa en la detección, aislamiento y estimación de falla en línea por medio de un banco de observadores principalmente para distinguir entre las fallas de sensores y actuadores.

(Iqbal et al. 2007) y (Verde et al. 2013) utilizan observadores para la generación de residuos. (Verde et al. 2013) obtiene una firma de fallas vía grafos redundantes y las compara con los residuos generados ante presencia de falla. (Iqbal et al. 2007) utiliza un modelo linealizado para implementar una estructura de diagnóstico de fallas.

Algunas de las técnicas de control tolerante a fallas se presentan a continuación.

Lo importante del trabajo que presentan (Guenab et al. 2005) es el desarrollo de una estrategia de CTF basada en confiabilidad y vida de los componentes. La estrategia propuesta tiene que cambiar a otra estructura que asegure los objetivos del sistema mientras sea posible, o al menos redefinir los objetivos degradados. Esta estrategia fue aplicada a un sistema de Tres Tanques.

En el trabajo realizado por (Mendonça et al. 2008) proponen la aplicación de un CTF usando un control predictivo difuso. La aplicación de este enfoque mostró su capacidad para detectar, aislar y acomodar dos fallas en un proceso experimental de tres tanques.

(Hjiani and Poshtan 2012) diseñaron un controlador de realimentación de estado reconfigurable utilizando un método de asignación de eigenestructuras para un sistema de cuatro tanques. Los resultados muestran un buen desempeño del controlador y es capaz de compensar fallas en actuadores.

La siguiente investigación de (Gholipour and Zare 2015) trata de la comparación de dos controladores I y PI para un proceso de cuatro tanques. Según los resultados de la simulación un control PI tiene un mejor resultado y es capaz de compensar ciertas fallas.

A continuación se presentan los trabajos relacionados con CTF Activo en el cual un bloque de FDD brinda información de la falla para la reconfiguración del controlador.

En el trabajo de (Dardinier, Hamelin, and Noura 1999) se trata de un método de CTF para sistemas no lineales sin redundancia de hardware en caso de fallas en actuadores. El CTF Activo desarrollado aquí está compuesto de un módulo de detección de fallas y el rediseño de una nueva ley de control.

Un sistema de control en tiempo discreto con fallas parciales en actuadores es desarrollado por (He et al. 2012) en el cual se realizan pruebas en un sistema real de tres tanques acoplados por medio del internet aplicando un CTFA el cual incluye la parte del FDD y una estrategia de reconfiguración de controlador.

(Jiang and Yu 2012) presentan la estructura de un SCTFA que consiste en desarrollar un esquema eficaz de FDD para proporcionar información sobre la falla, volver a configurar el esquema de control existente de manera efectiva para lograr la estabilidad y el rendimiento aceptable del sistema con la ayuda de un mecanismo de reconfiguración.

(Simani and Castaldi 2012) desarrollaron un esquema de SCTFA que se aplica a una turbina de viento, la metodología propuesta está basada en controladores digitales adaptables los cuales están diseñados con los parámetros identificados en línea del proceso.

Los siguientes trabajos a diferencia de los anteriores no necesitan un bloque de FDD, utilizan la información del error generada por un modelo de referencia y la planta a controlar para hacer acomodación o reconfiguración de la falla.

(Zhi-jun et al., 2009) presentan una metodología para el diseño del CTF con un esquema de modelo de seguimiento empleando un esquema de control por modos deslizantes para un sistema de control de vuelo. (Lopez et al. 2014) y (Zhang et al., 2003) implementan una ley de control con modelo de seguimiento que se reconfigura en línea a pesar de presencia de fallas en sensores y actuadores.

(Zhi-jun et al. 2009) utilizan dos modelos de referencia uno bajo operación normal y otro degradado, un mecanismo de reconfiguración para reconfigurar las ganancias del controlador utilizando la información del FDD.

(Abdullah et al., 2009) realizan un control con modelo de referencia para un sistema LPV y emplean la metodología de LMI's para el cálculo de una ganancia. (Vargas, et al., 2012) hacen la comparación de un control adaptable con modelo de referencia para un sistema LPV (CAMR-LPV) ante un (CAMR- $H_\infty$ -GS-LPV). Estos dos trabajos prueban el desempeño del control a un sistema de dos tanques en cascada.

Un control adaptable con modelo de referencia (CAMR) para un UAV es realizado por (Chamseddine et al., 2011) en el cual compara su desempeño con un control regulador cuadrático lineal (LQR) y utiliza la regla MIT para el CAMR.

(Vallabhai et al., 2012) realizan un análisis comparativo de un control PI y un CAMR usando la regla MIT para el control de un motor de inducción. (Jain et al, 2013) realiza un CAMR usando la regla MIT modificada para un sistema de segundo orden.

Un CTF para un UAV es empleado por (Rotondo et al., 2015) el cual utiliza un esquema de modelo de referencia cuasi-LPV Robusto para compensar fallas en actuadores. El procedimiento de este diseño se basa en la solución de un conjunto de LMI's con el fin de lograr una asignación de polos en un área específica.

(Khuntia et al., 2009) y (Aydoggdu et al., 2013) realizan un controlador de aprendizaje con modelo de referencia difuso (FMRLC), este control utiliza un mecanismo de



## 1.5. Estructura de tesis

La distribución de los siguientes capítulos en este trabajo se realiza de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presentan los fundamentos del FDD y CTF.

En el capítulo 3 se hace una descripción general del sistema de tres tanques acoplados, el modelo del sistema de tres tanques acoplados no lineal y el modelo lineal de este, con el fin de aplicar las herramientas de sistemas LTI ya que se utilizará una técnica de control tolerante a fallas para sistemas lineales.

También se aplica la técnica de control basado en modelo de seguimiento al sistema de tres tanques acoplados utilizando un mecanismo de reconfiguración que ayude a compensar las tres ganancias  $K_o$ ,  $K_u$  y  $K_e$  del control primario.

En el capítulo 4 se compara el desempeño de un control PI vs CMSA ante presencia de fallas de tuberías tapadas y fugas en los tanques.

En el capítulo 5 se realizan las conclusiones generales del trabajo. En los capítulos 6 y 7 se encuentran la bibliografía y los anexos, respectivamente, que se utilizaron para la elaboración de este trabajo.

## 2. Fundamentos de FDD y CTF.

### Introducción.

En este capítulo se presentan los fundamentos del FDD y el CTF.

En la sección 2.1 se realiza una breve introducción de los fundamentos del FDD, en la cual se describen los tipos de fallas y su clasificación, también en que consiste el problema del diagnóstico de falla, cuales son las etapas principales y los diferentes métodos del FDD.

En la sección 2.2 se hace una breve introducción de los fundamentos del CTF, se presentan los diferentes mecanismos de CTF, los enfoques para resolver el CTF que son el pasivo y el activo, la teoría de CMS y una estrategia de CMSA.

### 2.1. Conceptos de FDD

Se entiende por falla a todo cambio en el comportamiento de alguno de los componentes del sistema (desviación no permitida de alguna de sus propiedades o parámetros característicos) de manera que éste ya no puede satisfacer la función para la cual ha sido diseñado (Blanke et al. 2001).

Los tipos de fallas se clasifican de la siguiente manera según (Gertler 1998):

- **Fallas de proceso aditivas:** son perturbaciones (entradas no medidas) actuando sobre la planta, las cuales causan una desviación en las salidas independientes en las entradas medidas. Las fallas que mejor describen son fugas en plantas, cargas, etc.

- **Fallas de proceso multiplicativas:** son cambios (abruptos o graduales) de los parámetros de la planta. Tales fallas describen adecuadamente el deterioro del equipo de la planta.
- **Fallas en sensores:** son discrepancias entre los valores reales y medidos de la planta. Dichas fallas describen bien las desviaciones en las mediciones proporcionadas por los sensores, también pueden usarse para describir un mal funcionamiento en los actuadores.
- **Fallas en actuadores:** son discrepancias entre el comando de entrada de un actuador y su salida actual. Las fallas en actuadores son usualmente manejados como aditivas aunque, también algunos tipos pueden ser mejor descritos como multiplicativas.

Cuando se considera la dependencia temporal de las fallas, (Verde et al. 2013) las clasifican de la siguiente forma:

- **Falla abrupta.** Se manifiesta con un cambio repentino y puede ser modelada mediante una función tipo escalón donde se desconoce el tiempo de ocurrencia.
- **Falla incipiente.** Esta falla se manifiesta como un cambio en magnitud en las variables del sistema que va aumentando paulatinamente con respecto al tiempo y puede modelarse mediante una función tipo rampa con un tiempo de ocurrencia desconocido. Ejemplo de estas fallas son las que producen un deterioro paulatino en el proceso a través del tiempo, como el desgaste de una válvula y un filtro tapado.
- **Falla intermitente.** Este tipo de falla se considera que no tiene una evolución determinada en el tiempo y frecuentemente se presenta solamente en ciclos de trabajo de manera aleatoria y desaparece también de la misma forma.

Para resolver el problemas de fallas en los sistemas de control, a mediados del siglo XX los sistemas contaban con el monitoreo de las variables más importantes a controlar y también se introdujo la protección de los equipos de la planta, para afínales del siglo XX el diagnóstico y el control tolerante a fallas fueron introducidos a los procesos.

El diagnóstico de fallas puede ayudar a prevenir fallas, descomposturas y catástrofes en las plantas. Es decir, permite planear las acciones de mantenimiento requeridas y disminuir el número de paros de emergencia de un proceso, los cuales son usualmente muy costosos.

Dicho lo anterior el diagnóstico es la etapa principal de sistemas de control tolerantes a fallas ya que determina el tipo, tamaño, localización e instante de aparición de una falla (Verde et al. 2013). La figura 3 ilustra el problema de diagnóstico. Un sistema dinámico con entradas  $u$  y salidas  $y$  es sometido a alguna falla  $f$ .

Definición 1 (*El problema de diagnóstico*). A partir de una secuencia de entradas  $U$  y salidas  $Y$  obtenidas a partir de los sensores instalados en el proceso, determinar la presencia de una falla  $f$  del conjunto de fallos posibles  $\mathcal{F}$

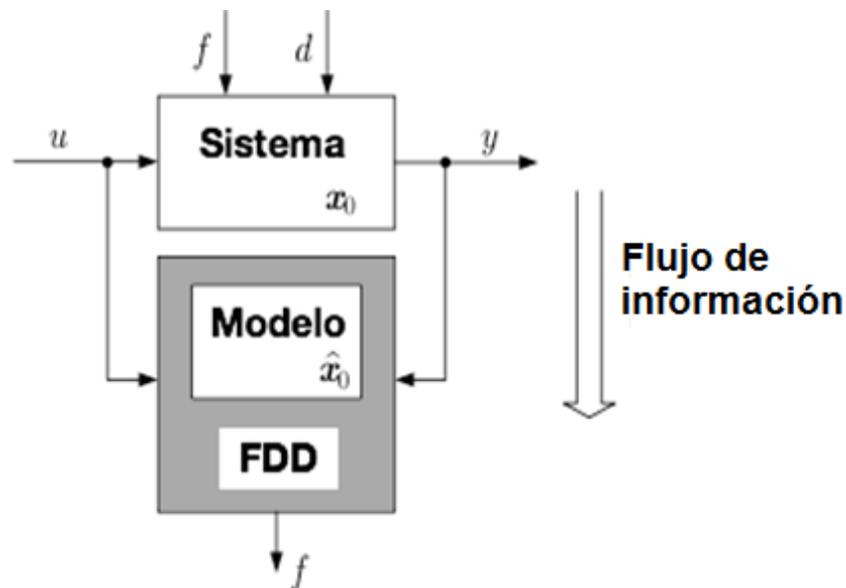


Figura 3. Problema de diagnóstico.

El diagnóstico y detección de fallas FDD consiste en las siguientes tres tareas esenciales según (Ding 2008) y (Blanke et al. 2006) que a continuación se definen dichos conceptos:

- **Detección de falla:** Decisión de si existe o no una falla, así como la determinación de su instante de aparición. Detección de la ocurrencia de fallas en las unidades funcionales del proceso, que conducen a un comportamiento no deseado en el sistema.

**Diagnóstico de la falla:** Se refiere a la localización, identificación y estimación de la falla.

- **Localización de la falla:** Localización del componente en el cual se ha producido la falla.
- **Identificación y Estimación de la falla:** identificación del tipo de falla y estimación de su magnitud.

En la literatura existen muchos métodos de FDD según (Zhang and Jiang 2008) los dividen en dos categorías:

1. Basado en modelos.
2. Basado en datos.

La figura 4 presenta una síntesis de la clasificación de estas técnicas (Zhang and Jiang 2008), ver figura completa en Anexo F.

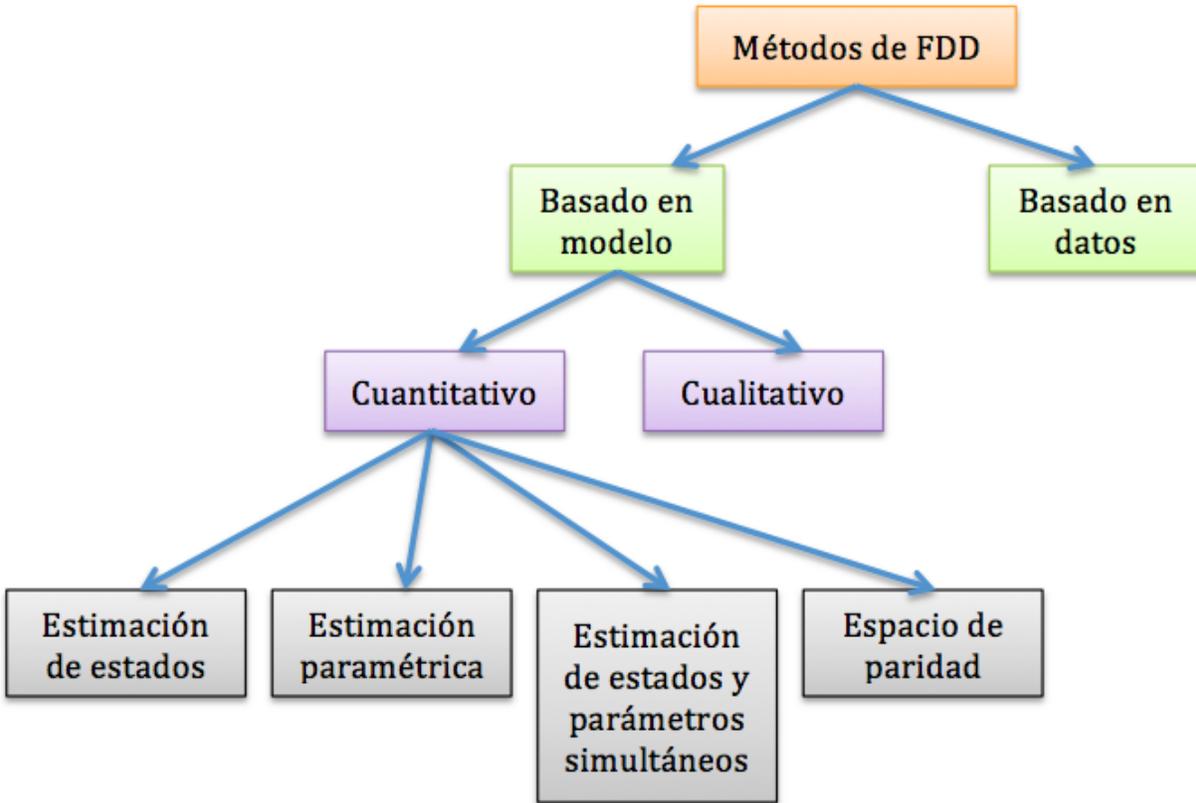


Figura 4. Clasificación de métodos FDD.

Puesto que en control tolerante se precisa llegar al nivel más profundo de las etapas de diagnóstico que corresponde con la estimación de la magnitud de la falla, las técnicas de *diagnóstico basadas en modelos* (MBD) son las preferidas puesto que proporcionan de forma natural información de las fallas (Puig et al. 2004b).

En el caso de utilizar modelos cuantitativos, una forma de verificar la consistencia entre el modelo y las medidas de las entradas/salidas es generar, a partir de las mismas  $(u, y)$  y del modelo, una estimación de las salidas  $\hat{y}$  ver figura 5 (Blanke et al. 2006).

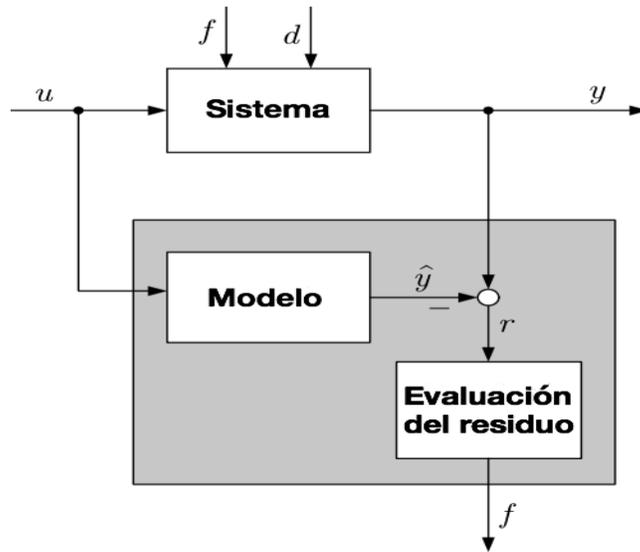


Figura 5. Detección de falla basada en modelos cuantitativos.

Una clasificación de las técnicas de generación de residuos basadas en modelos de forma cuantitativa se presentan en la Figura 6, (Zhang and Jiang 2008).

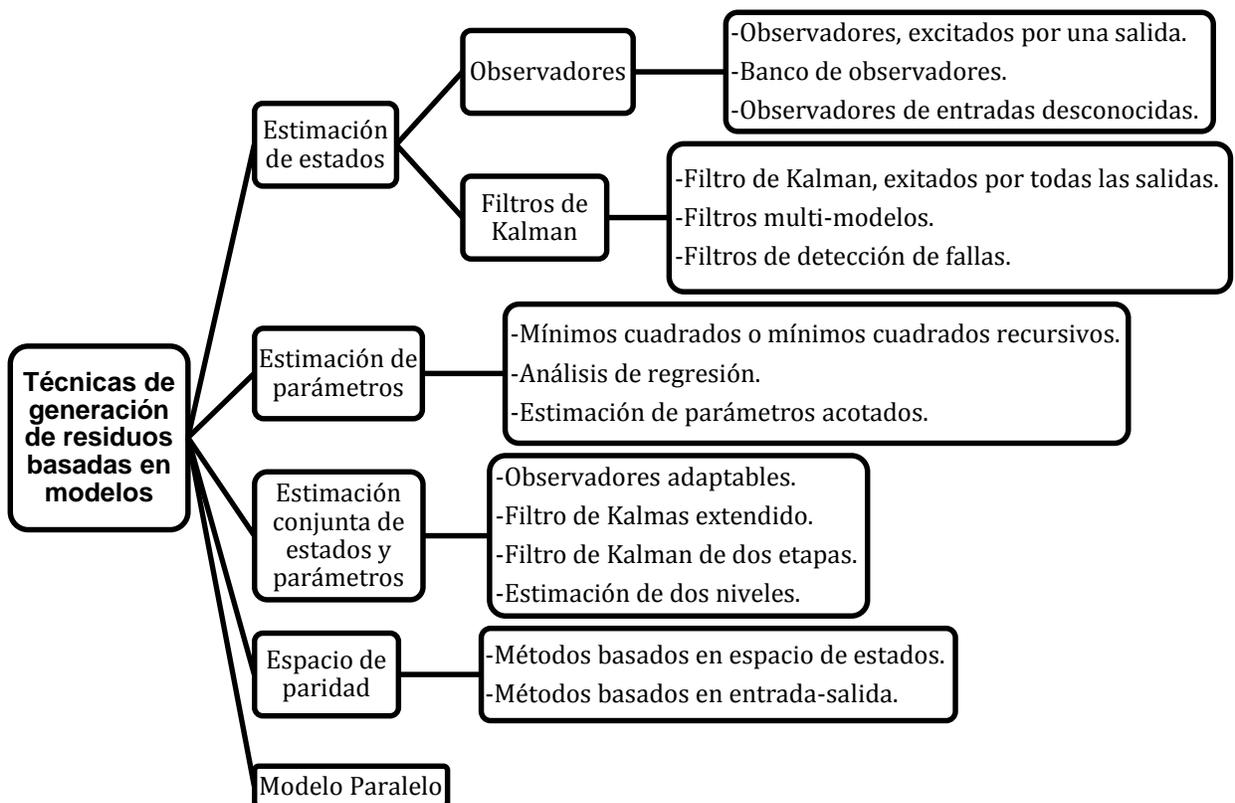


Figura 6. Técnicas de generación de residuos basadas en modelo.

Últimamente se han llegado a obtener equivalencias entre las diferentes técnicas de generación de residuos y de relaciones de redundancia analítica (Puig et al. 2004b).

Idealmente, en ausencia de fallas, el residuo debería ser siempre nulo, mientras que en presencia de falla, sea cual sea el tipo de falla, el residuo debería ser diferente de cero.

El residuo se determina mediante la diferencia del sistema y el modelo estimado o en otras palabras es el error generado entre ambos modelos, se representa en la siguiente ecuación (Blanke et al. 2006):

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t). \quad (2.1.1)$$

Para motivos de este trabajo el error se utilizará como información de las fallas en el sistema.

## 2.2. Conceptos de CTF

Un sistema de CTF tiene la capacidad de mantener los objetivos de control, a pesar de la ocurrencia de una falla y una degradación del desempeño de control puede ser aceptada, (Blanke et al. 2001).

Un problema de control estándar tiene como objetivo diseñar una ley de control  $\theta$ , partiendo de un conjunto de objetivos  $O$  y un conjunto de restricciones,  $C$ , que describen el comportamiento dinámico del sistema (modelo matemático). El conjunto de restricciones,  $C$ , están determinadas por la estructura del modelo matemático  $S$  y sus parámetros  $\theta$ , (Puig et al. 2004b).

Definición 2 (Problema de control estándar)

$$v = \text{solucionar}\{O, C(\theta)\}. \quad (2.2.1)$$

La aparición de una falla en el sistema puede ocasionar tanto modificaciones en las restricciones  $C$  como cambios en los parámetros  $\theta$  haciendo que el problema de

calcular la ley de control  $\theta$  no tenga solución a no ser que se modifique el conjunto de objetivos  $O$ .

Dicho lo anterior el problema de CTF consiste en solucionar  $v = \{O_f, \hat{C}_f(\hat{\theta}_f)\}$ , donde  $O_f$  representa el conjunto de objetivos y  $\hat{C}_f(\hat{\theta}_f)$  representa la estimación de las restricciones y parámetros del sistema según su estado de funcionamiento (normal o en falla), (Puig et al. 2004b).

Asumiendo que el funcionamiento del sistema realimentado puede ser descrito mediante las variables  $y_1$  y  $y_2$ , la Figura 7 ilustra las diferentes regiones que deben ser consideradas en el diseño de un control tolerante a fallas (Blanke et al. 2006).

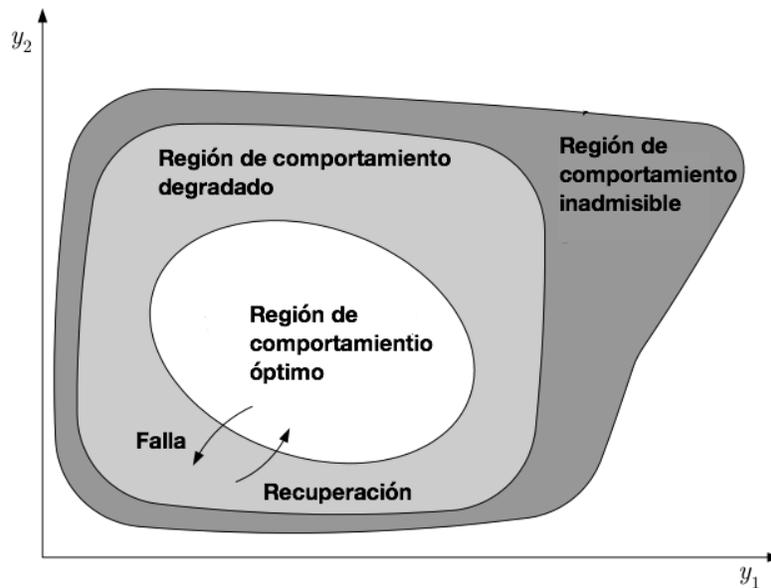


Figura 7. Regiones de comportamiento.

La región de comportamiento óptimo es aquella en la que el sistema debe operar normalmente cumpliendo su función. El controlador se encarga de mantener el sistema en dicha región a pesar de las perturbaciones e incertidumbre en el modelo utilizado para el diseño del lazo de control, e incluso en caso de pequeños fallos, aunque esa no es su función principal.

La región de comportamiento degradado se corresponde con la región de funcionamiento a la que el sistema se desplaza después de la aparición de una falla. En esta situación el controlador tolerante diseñado para reaccionar frente al mismo deberá de activar las acciones de recuperación preestablecidas de cara a evitar una mayor degradación que desplace al sistema hacia la región de comportamiento inadmisible e incluso de peligro.

Para solucionar el problema de CTF (Puig et al. 2004) presentan una clasificación de mecanismos tolerante a fallas que se pueden activar una vez que se ha diagnosticado la falla, en la Figura 8 se presenta una síntesis de los mecanismos, ver figura completa en Anexo G.

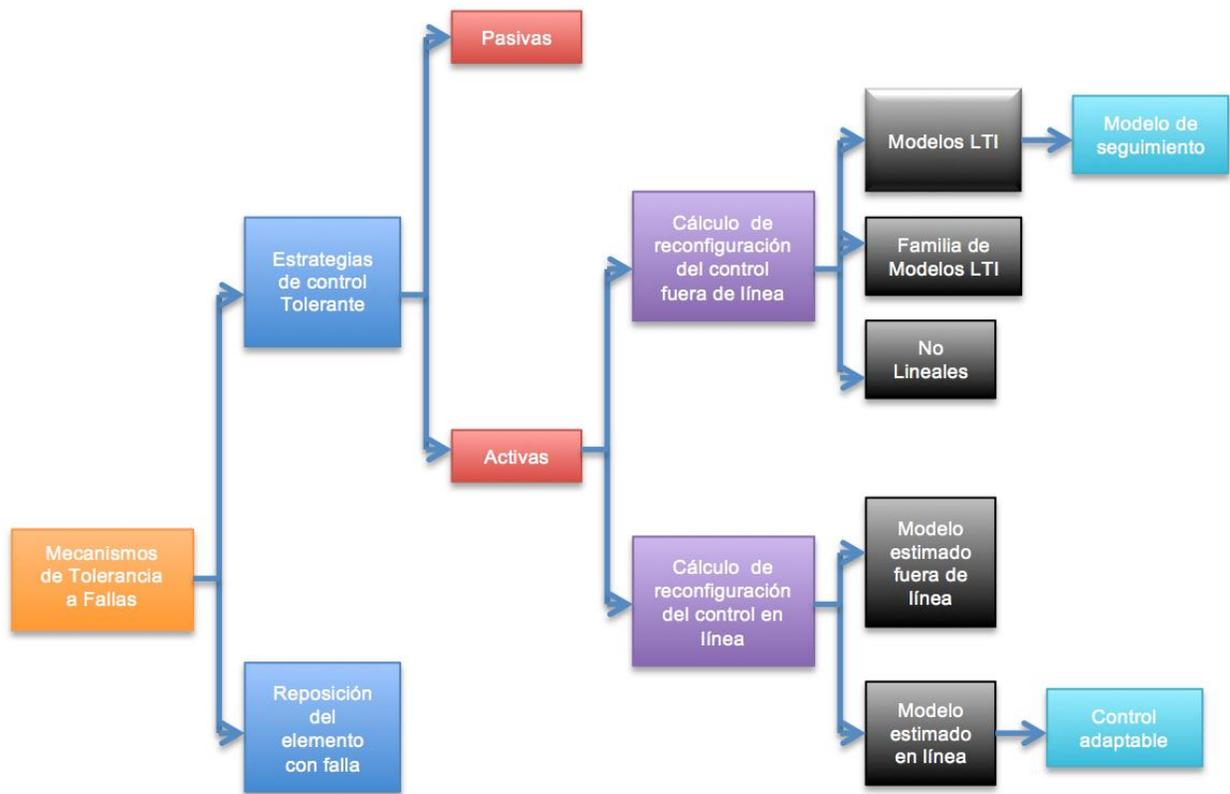


Figura 8. Clasificación de mecanismos para control tolerante a fallas.

Los mecanismos de tolerancia a fallas se clasifican según en la figura 8 en:

1. Estrategias de control tolerante.
2. Reposición del elemento con falla el cual involucra redundancia en sensores y/o actuadores.

Este trabajo se basará en una estrategia de control tolerante a fallas, en la literatura se consideran dos enfoques pasivos y activos:

1. Los sistemas de control tolerantes a fallas pasivos SCTFP están diseñados para ser robusto a perturbaciones e incertidumbres paramétricas, esto permite al controlador contrarrestar el efecto de una falla sin requerir la reconfiguración y un módulo de FDD, (Mahmoud et al. , 2003).
2. Los sistemas de control tolerantes a fallas activos SCTFA consisten en el diagnóstico en línea de la falla, a partir de dicha información, activar algún mecanismo de acomodación del mismo o de reconfiguración del control o incluso dependiendo de la gravedad un paro del sistema, (Puig et al, 2004).

El problema de control tolerante mediante el enfoque activo puede resolverse de dos formas: ya sea mediante la acomodación de falla, o bien, mediante la reconfiguración de la falla.

De acuerdo a los trabajos presentados por (Verde et al. 2013), (Blanke et al. 2006) y (Zhang, Jiang, and Shi 2013) definen acomodación y reconfiguración de la falla de la siguiente manera.

La acomodación de la falla significa adaptar los parámetros del controlador a las propiedades dinámicas de la planta defectuosa. La entrada y/o salida de la planta utilizada en el lazo de control siguen siendo las mismas que para el caso sin falla ver Figura 9.

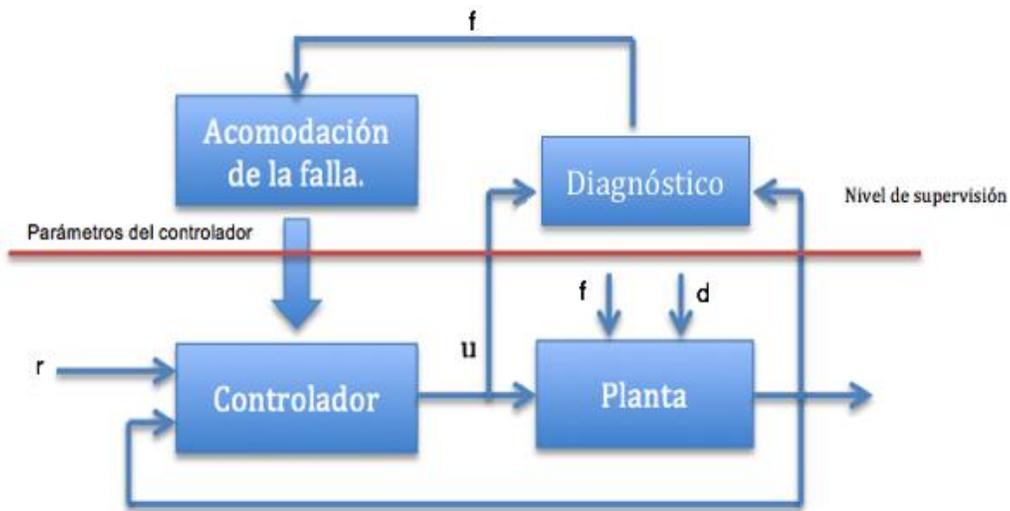


Figura 9. Acomodación de fallas.

La reconfiguración de la falla es utilizada si no es posible la acomodación de la falla, el lazo de control completo tiene que ser reconfigurado. La reconfiguración incluye la selección de una nueva configuración del control donde se utilizan señales de entrada y de salida alternativas. La selección de estas señales depende de la falla existente. Luego, una nueva ley de control tiene que ser diseñada en línea ver Figura 10.

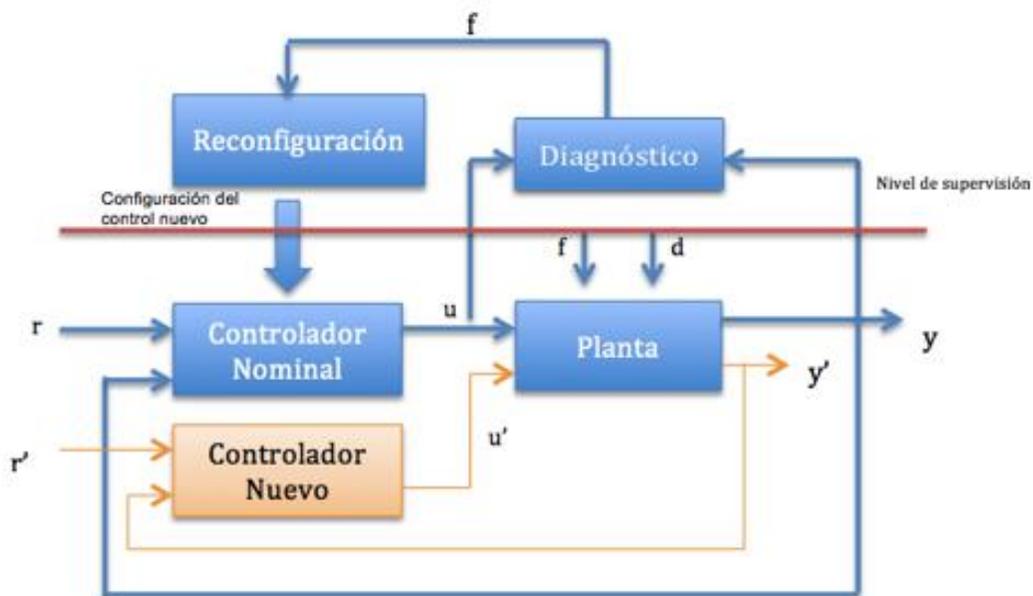


Figura 10. Reconfiguración de fallas.

La diferencia esencial entre ambas estrategias radica en que en el caso de la reconfiguración se utilizan diferentes señales de control y medidas entre el controlador y la planta, es decir, un cambio en su estructura, mientras que en la acomodación se pretende que sea la propia ley de control que compense el fallo. La estrategia de acomodación de la falla se clasifica en dos grupos (Puig et al. 2004a):

1. Acomodación fuera de línea
2. Acomodación en línea.

En el grupo de acomodación en línea de acuerdo en la figura 8 existen dos alternativas:

1. **Estimación fuera de línea.** A este grupo corresponden las técnicas de *control predictivo basado en modelo* y de *linealización estática por realimentación*.
2. **Estimación en línea.** El efecto de la falla sobre las restricciones se estima en línea de forma que el controlador, que también se calcula en línea a partir de las mismas, se adaptará a los cambios que se produzcan. A este grupo corresponden técnicas como el *control adaptable*, la *linealización dinámica por realimentación* y el *control predictivo dual*.

Para este trabajo se empleará una técnica de CTF basada en modelo de seguimiento y se diseñará una estrategia de control adaptable el cual adaptará los cambios que se produzcan en línea. A continuación se presenta la teoría de estas técnicas.

La técnica de control basada en modelo de seguimiento utiliza un modelo de referencia en el cual se especifican los objetivos de diseño como algo real del sistema. El objetivo es minimizar el error entre los estados del modelo de referencia y la planta a controlar.

(Landau 1979) presenta un sistema de control con modelo de seguimiento lineal como se muestra en la Figura 11.

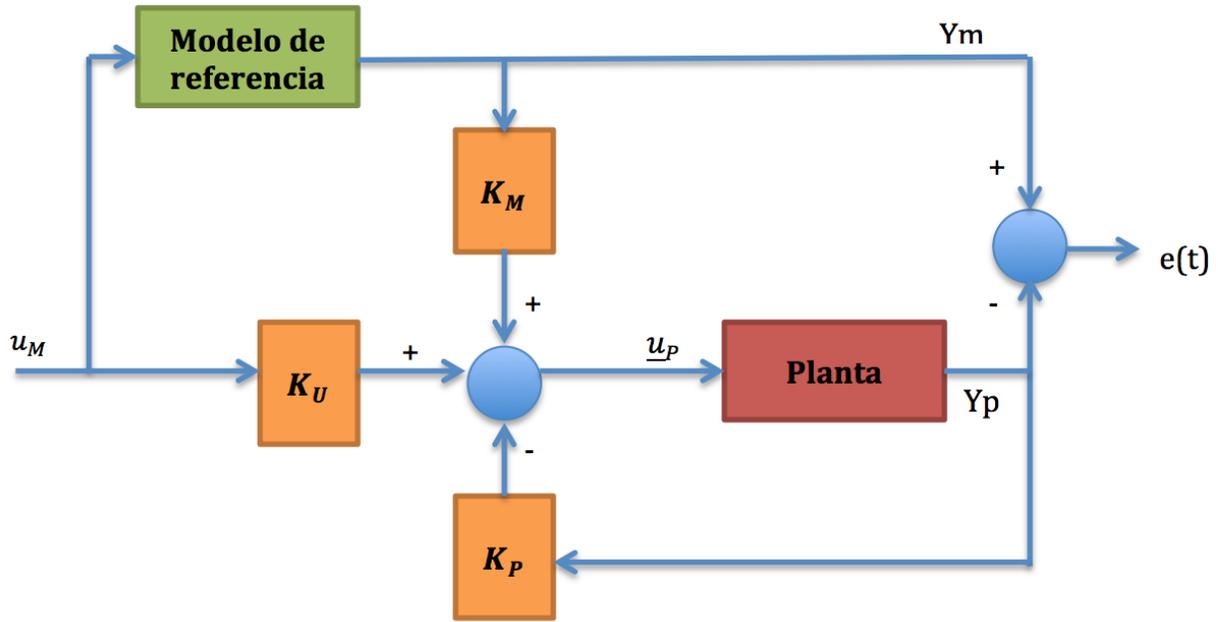


Figura 11. Sistema de control con modelo de seguimiento lineal.

El sistema de control de la figura 11 se puede describir por las siguientes ecuaciones:

Modelo de Referencia:

$$\dot{\underline{x}} = A_M \underline{x} + B_M \underline{u}_M. \quad (2.2.2)$$

La planta a ser controlada:

$$\dot{\underline{y}} = A_P \underline{y} + B_P \underline{u}_P. \quad (2.2.3)$$

La señal de control lineal:

$$\underline{u}_P = -K_P \underline{y} + K_M \underline{x} + K_U \underline{u}_M. \quad (2.2.4)$$

El error de estado generalizado:

$$\underline{e} = \underline{x} - \underline{y}. \quad (2.2.5)$$

La dinámica del error:

$$\dot{\underline{e}}(t) = [A_M - B_P K_M] \underline{e} + [A_M - A_P + B_P (K_P - K_M)] \underline{y} + (B_M - B_P K_U) \underline{u}_M. \quad (2.2.6)$$

Para tener un modelo de seguimiento perfecto, se debe asegurar que para toda  $\underline{u}_M$  el error sea igual a 0, es decir,  $\underline{e}(t) = \underline{x} - \underline{y} = 0$  por lo tanto, la dinámica del error es  $\dot{\underline{e}}(t) = \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{y}} = 0$ . Se concluye inmediatamente que esto se puede lograr si

$$[A_M - A_P + B_P (K_P - K_M)] \underline{y} + (B_M - B_P K_U) \underline{u}_M = 0, \quad (2.2.7)$$

para toda  $\underline{y} \in R^n, \underline{u}_M \in C^m$ .

Además de esto, el sistema debe ser asintóticamente estable,

$$\dot{e}(t) = [A_M - B_P K_M] \underline{e}. \quad (2.2. 8)$$

El cual implica que la matriz  $[A_M - B_P K_M]$  debe ser una Matriz Hurwitz.

De tal manera que la ecuación (2.2.7) es válida para todo  $\underline{y}$  y  $\underline{u}_M$ , se debe tener

$$[A_M - A_P + B_P(K_P - K_M)] = 0, \quad (2.2. 9)$$

$$(B_M - B_P K_U) = 0, \quad (2.2. 10)$$

o también despejando (2.2.9) y (2.2.10) se tiene lo siguiente:

$$K_M - K_P = B_P^+(A_M - A_P), \quad (2.2. 11)$$

$$K_U = B_P^+ B_M. \quad (2.2. 12)$$

Una dificultad en la realización de sistemas de control de este tipo es el alto grado de incertidumbre en cuanto a los valores de los parámetros de la planta, y además, esos parámetros después varían de un punto a otro.

Para ello un análisis de desempeño de varios diseños de sistemas CMS, ver por ejemplo (Newell and Fisher 1972), permite concluir que para realizar un sistema de control multivariable con alto desempeño aun con presencia de variaciones en los parámetros, los sistemas de control con modelo de seguimiento adaptable CMSA deben de ser considerados.

Los sistemas de CMSA se clasifican en dos esquemas: donde un mecanismo de acomodación ajustan los parámetros del controlador (Osburn et al, 1961) ver figura 12 o que añade una nueva señal de control (Landau 1979) ver figura 13. Se puede demostrar que las dos implementaciones son equivalentes.

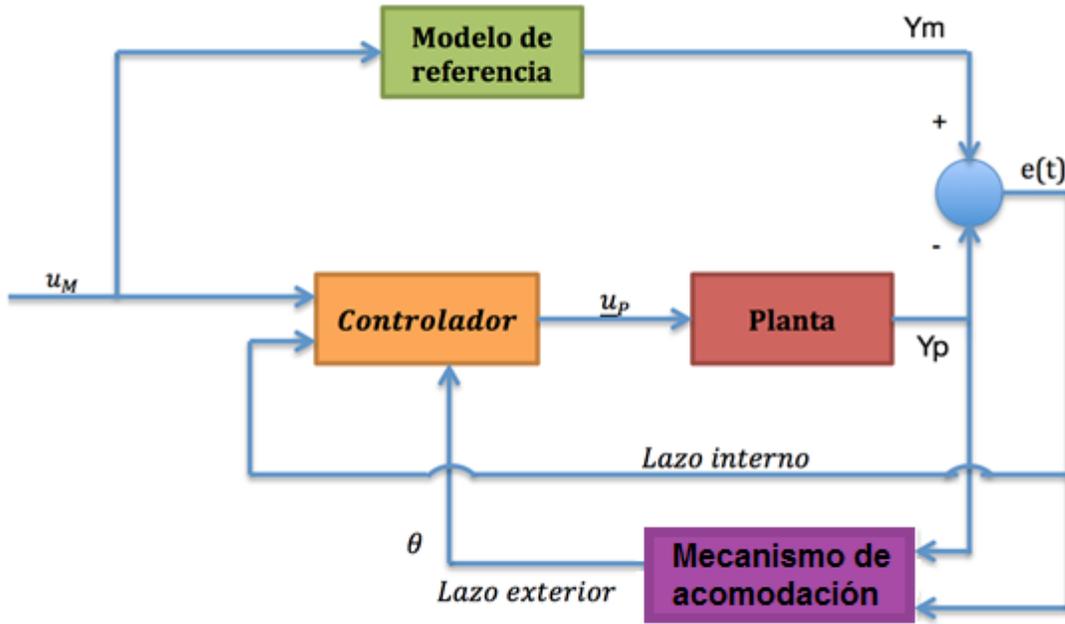


Figura 12. Sistema de CMSA con parámetros adaptable.

Para el sistema de CMSA con parámetros adaptables de la figura 12 la entrada de la planta puede ser expresada por:

$$\underline{u}_p = -K_p(\underline{e}, t)\underline{y} + K_U(\underline{e}, t)\underline{u}_M + K_M\underline{x}_M. \quad (2.2. 13)$$

Donde  $K_p(\underline{e}, t)\underline{y}$ ,  $K_U(\underline{e}, t)\underline{u}_M$  son matrices variantes en el tiempo dependientes del error generalizado  $\underline{e}$ , la diferencia de los estados del modelo de referencia y la planta a controlar. Pero  $K_p(\underline{e}, t)\underline{y}$ ,  $K_U(\underline{e}, t)\underline{u}_M$  puede ser expresado como:

$$K_p(\underline{e}, t) = K_p - \Delta K_p(\underline{e}, t), \quad (2.2. 14)$$

$$K_U(\underline{e}, t) = K_U + \Delta K_U(\underline{e}, t). \quad (2.2. 15)$$

Donde  $K_U$ ,  $K_p$  son matrices constantes diseñadas para algunos valores específicos de los parámetros de la planta. Con esta descomposición puede estar descrita como:

$$\underline{u}_p = \underline{u}_{p1} + \underline{u}_{p2}, \quad (2.2. 16)$$

dónde:

$$\underline{u}_{p1} = -K_p\underline{y} + K_M\underline{x} + K_U\underline{u}_M, \quad (2.2. 17)$$

$$\underline{u}_{p2} = \Delta K_p(\underline{e}, t)\underline{y} + \Delta K_U(\underline{e}, t)\underline{u}_M. \quad (2.2. 18)$$

La entrada de la planta  $\underline{u}_{P2}$  es la contribución del lazo adaptable y la correspondiente implementación como una señal de adaptación que es representada en la figura 13. De esta manera el mecanismo de acomodación aparece bajo la forma de un lazo cerrado suplementario el cual mejora el rendimiento del sistema CMSA.

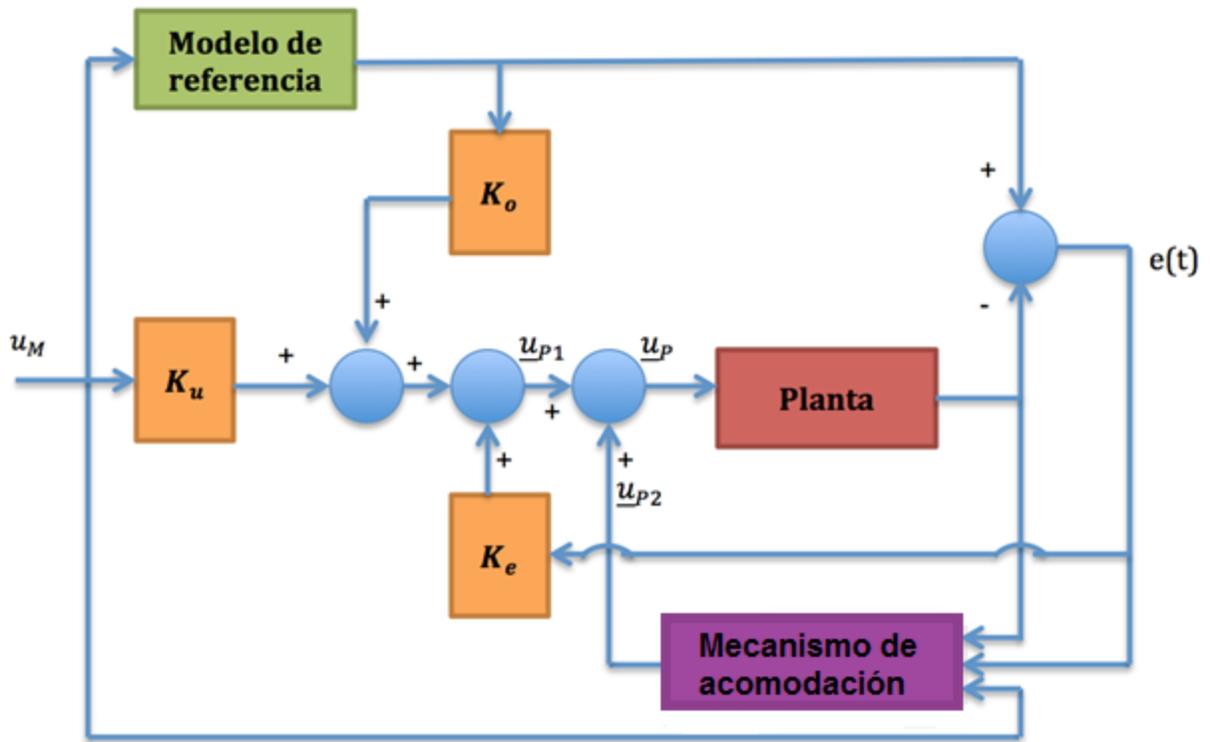


Figura 13. Sistema de CMSA con adaptación de síntesis de señal.

Para el diseño de un sistema de CMSA se consideran 4 objetivos (Landau and Courtiol 1974):

1. Ley de control simple.
2. Fuertes características de estabilidad.
3. Alta velocidad de adaptación.
4. Método de diseño sistemático.

De acuerdo a la metodología presentada por (Landau and Courtiol 1974) las ecuaciones del sistema de CMSA con adaptación de síntesis de señal están dadas a continuación.

$$\dot{\underline{x}} = A_M \underline{x} + B_M \underline{u}_M, \quad (2.2.19)$$

$$\dot{\underline{y}} = A_P \underline{y} + B_P \underline{u}_{P1} + B_P \underline{u}_{P2}, \quad (2.2.20)$$

$$\underline{e} = \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{y}}, \quad (2.2.21)$$

$$\underline{u}_{P1} = -K_P \underline{y} + K_M \underline{x} + K_U \underline{u}_M, \quad (2.2.22)$$

$$\underline{u}_{P2} = \Delta K_P(\underline{e}, t) \underline{y} + \Delta K_U(\underline{e}, t) \underline{u}_M. \quad (2.2.23)$$

El objetivo del mecanismo de acomodación es generar dos matrices  $\Delta K_P(\underline{e}, t)$  y  $\Delta K_U(\underline{e}, t)$  para asegurar que el error de los estados del modelo de seguimiento, también llamado “error generalizado”, valla a cero bajo ciertas condiciones

$$\left( \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \right). \quad (2.2.24)$$

El sistema CMSA del tipo descrito por las ecuaciones (2.2.7)...(2.2.11) son, de hecho, una forma especial de configuración básica de sistemas adaptable con modelo de referencia en paralelo (Landau 1974). Basado en previos resultados considerando el diseño de este tipo de sistemas adaptables (Landau 1969, 1972), el mecanismo de adaptación se descompone en dos partes: una parte lineal invariante con el tiempo el cual infiere el error del modelo de seguimiento o error generalizado  $\underline{e}$ :

$$v = D \underline{e}, \quad (2.2.25)$$

y una parte no lineal la cual esta generada por  $\Delta K_P(\underline{e}, t)$  y  $\Delta K_U(\underline{e}, t)$  en función de  $v$

$$\Delta K_P(\underline{e}, t) = \int_0^t \Phi_1(v, \tau, t) d\tau + \Phi_2(v, t) + \Delta K_P(0), \quad (2.2.26)$$

$$\Delta K_U(\underline{e}, t) = \int \psi_1(v, \tau, t) d\tau + \psi_2(v, t) + \Delta K_U(0), \quad (2.2.27)$$

Donde  $\Phi_1$  y  $\psi_2$  son matrices  $m_1 \times n$  y respectivamente  $m_1 \times m$  las cuales denotan una relación variante con el tiempo no lineal entre  $\Delta K_P(\underline{e}, t)$  y  $\Delta K_U(\underline{e}, t)$  y los valores de  $v$  para  $0 \leq \tau \leq t$ .  $\Phi_2$  y  $\psi_2$  son matrices de la misma dimensión el cual denota una relación entre  $\Delta K_P(\underline{e}, t)$  y  $\Delta K_U(\underline{e}, t)$  y los valores de  $v(t)$ . El término integral de las

ecuaciones (2.2.14) y (2.2.15) aseguran la memoria del el sistema adaptable las cuales  $\Phi_2$  y  $\psi_2$  son términos transitorios cuando  $v = 0$  y también  $\underline{e} = 0$ .

La metodología para el diseño del sistema de control con modelo de seguimiento adaptable se realiza en tres pasos como se presenta a continuación:

1. Representación del sistema CMSA como un sistema equivalente en lazo cerrado.

Combinando las ecuaciones (2.2.19)-(2.2.23) se puede escribir que:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = [A_M - B_P K_M] \underline{e} + B_P [B_P^+ (A_M - A_P) + K_P - K_M - \Delta K_P(\underline{e}, t)] \underline{y} \\ + B_P [B_P^+ B_M - K_U - \Delta K_U(\underline{e}, t)] \underline{u}_M. \end{aligned} \quad (2.2. 28)$$

La ecuación (2.2.28) y (2.2.29) junto con las ecuaciones (2.2.24) y (2.2.25) definen el sistema equivalente en lazo cerrado descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{e}(t) = [A_M - B_P K_M] \underline{e} + B_P w_1, \quad (2.2. 29)$$

$$v = D \underline{e}, \quad (2.2. 30)$$

$$\begin{aligned} w = -w_1 = [\Delta K_P(\underline{e}, t) - B_P^+ (A_M - A_P) - K_P + K_M] \underline{y} + \\ [\Delta K_U(\underline{e}, t) - B_P^+ B_M + K_U] \underline{u}_M. \end{aligned} \quad (2.2. 31)$$

Este sistema en lazo cerrado equivalente puede ser dividido en una parte lineal invariante en el tiempo descrito por las ecuaciones (2.2.29) y (2.2.30) y la parte no lineal variante en el tiempo descrito por la ecuación (2.2.31). El diseño de un sistema de CMSA es transformado en esta manera para el diseño de un sistema no lineal variante en el tiempo sea asintóticamente estable en lazo cerrado. El sistema resulta ser estable si satisface las condiciones del teorema Popov's hyperstability.

2. Diseño de la parte no lineal del sistema en lazo cerrado equivalente.

Para usar el teorema de Popov's hyperstability, la parte no lineal variante en el tiempo del sistema equivalente en lazo cerrado debe satisfacer la desigualdad integral:

$$\eta(0, t) = \int_0^t v^T(t)w(t)dt \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2.32)$$

Donde  $\gamma_0^2$  es una constante definida positiva. Basado en el criterio de súper estabilidad (hyperstability) para sistemas adaptables con modelo de referencia las siguientes elecciones en particular de  $\Phi_1, \Phi_2, \psi_2$  y  $\psi_2$  permitirán satisfacer la desigualdad (2.2.32):

$$\Delta K_P(\underline{e}, t) = \int_0^t F \underline{v} (G \underline{y})^T d\tau + F' \underline{v} (G \underline{y})^T + \Delta K_P(0), \quad (2.2.33)$$

$$\Delta K_U(\underline{e}, t) = \int M \underline{v} (N \underline{u}_M)^T d\tau + M' \underline{v} (N \underline{u}_M)^T + \Delta K_U(0), \quad (2.2.34)$$

donde:  $F, M, G, N > 0, \quad F', M', \geq 0.$

Este tipo de adaptación es llamado “proporcional+ integral” (PI).

### 3. Diseño de la parte lineal del sistema equivalente en lazo cerrado.

Si la parte equivalente no lineal satisface la condición (2.2.32) y la parte equivalente lineal cumple con la condición de que la matriz de transferencia de la ecuación (2.2.35) debe de ser estrictamente real positiva entonces el sistema es estable

$$Z(s) = D(sI - A_M + B_P K_M)^{-1} B_P. \quad (2.2.35)$$

Para que se cumpla esta condición de la ecuación (2.2.35) implica que  $(A_M - B_P K_M)$  sea una matriz Hurwitz y que  $(A_M, B_P)$  sea completamente controlable. Usando el lema de Kalman-Yakubovitch-Popov sobre la realización de matrices de transferencia reales positivas (Anderson 1967), el cual es resumida en el anexo E, la matriz D es obtenida de la expresión:

$$D = B_P^T P. \quad (2.2.36)$$

Donde P es una matriz simétrica definida positiva solución de la ecuación de Lyapunov:

$$(A_M - B_P K_M)^T P + P(A_M - B_P K_M) = -Q, \quad (2.2.37)$$

donde:  $Q > 0$ .

La metodología presentada anteriormente es sintetizada en las ecuaciones que se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Ecuaciones del sistema de CMSA con adaptación de síntesis de señal.

	<b>CMSA Paralelo</b>	<b>Observaciones</b>
<b>Modelo de Referencia</b>	$\dot{\underline{x}} = A_M \underline{x} + B_M \underline{u}_M$	$\dim \underline{x} = \dim \underline{y}$ $A_M = \text{Hurwitz matriz}$
<b>Planta a ser Controlada</b>	$\dot{\underline{y}} = A_P \underline{y} + B_P \underline{u}_{P1} + B_P \underline{u}_{P2}$	$(A_P, B_P) = \text{estabilizado}$ $(A_M, B_P) = \text{estabilizado}$
<b>Error</b>	$\underline{e} = \underline{x} - \underline{y}$	
<b>Señal de Control Lineal</b>	$\underline{u}_{P1} = -K_P \underline{y} + K_M \underline{x} + K_U \underline{u}_M$	
<b>Señal de Adaptación</b>	$\underline{u}_{P2} = \Delta K_P(\underline{e}, t) \underline{y} + \Delta K_U(\underline{e}, t) \underline{u}_M$	
<b>Condiciones del Modelo de Seguimiento Perfecto.</b>	$(I - B_P B_P^+)(A_M - A_P) = 0$  $(I - B_P B_P^+) B_M = 0$ o $\text{rango}(B_P) = \text{rango}[B_P, A_M - A_P]$ $= \text{rango}[B_P, B_M]$	
<b>Ley Adaptable (Integral + Proporcional)</b>	$\underline{v} = D \underline{e}$ $\Delta K_P(\underline{e}, t) = \int_0^t F \underline{v} (G \underline{y})^T d\tau + F' \underline{v} (G \underline{y})^T$ $+ \Delta K_P(0)$	

	$\Delta K_U(\underline{e}, t) = \int M \underline{v}(N \underline{u}_M)^T d\tau + M' \underline{v}(N \underline{u}_M)^T + \Delta K_U(0)$ $F, M, G, N > 0; \quad F', M', \geq 0$	
<b>Condición de Estabilidad</b>	$D(sI - A_M + B_P K_M)^{-1} B_P$ <p style="text-align: center;"><i>= estrictamente una matriz de transferencia real positiva</i></p> <p>o</p> $D = B_P^T P, \quad P > 0$ <p>donde <math>P</math> satisface</p> $(A_M - B_P K_M)^T P + P(A_M - B_P K_M) = -Q,$ $Q > 0$	<p>Si <math>B_P = B_P^0 R</math>, Donde <math>R &gt; 0</math>,</p> <p><math>B_P</math> puede ser remplazada por <math>B_P^0</math>.</p> <p><math>Q</math> es una matriz definida positiva arbitraria</p>

## Conclusiones

En este capítulo se presentaron conceptos de FDD y CTF, en el cual se hizo más énfasis a la parte de CTF ya que la técnica que se empleará en este trabajo no necesita de un bloque de FDD, solo se necesita la señal de error como información de la falla.

Se presentó la teoría del esquema de CTF basada en modelo de seguimiento lineal porque es la técnica de control que se utilizará para implementar un mecanismo de acomodación con el fin de compensar fallas paramétricas a un sistema de tres tanques acoplados.

Para el mecanismo de reconfiguración, se empleará una estrategia de control adaptable ya que esta estrategia de control se basa en las variaciones paramétricas de los sistemas.

### **3. Sistema de Tres tanques acoplados.**

#### **Introducción.**

En este capítulo se presenta el modelo del sistema de tres tanques acoplados y la aplicación de la técnica de CTF con modelo de seguimiento implementando un mecanismo de acomodación para compensar fallas paramétricas.

En la sección 3.1 se describe el sistema de tres tanque acoplados y en la sección 3.2 se realiza el modelado del sistema no lineal, después de obtener el modelo no lineal del sistema en la sección 3.3 se realiza un análisis de estabilidad del sistema para ello se calcula su punto de equilibrio.

En la sección 3.4 se realiza la representación lineal del sistema en espacio de estado, el cual es válido alrededor de un punto de operación.

En la sección 3.5 se presenta el cálculo del sistema de CTF con modelo de seguimiento y el desarrollo de un mecanismo de acomodación.

#### **3.1. Descripción general del sistema de tres tanques acoplados.**

El sistema hidráulico consta de tres tanques cilíndricos idénticos con área de sección transversal igual como se muestra en la figura 14 (Theilliol et al. 2002). Estos tres tanques están conectados por dos tubos cilíndricos de la misma área de sección transversal, denotadas  $S_p$ , y tienen el mismo coeficiente de salida, denotada  $\mu_{13}$  y  $\mu_{32}$ .

El flujo de salida nominal situado en el tanque 2 tiene la misma área de sección transversal que la tubería de acoplamiento entre los cilindros, pero un coeficiente de salida diferente, denotada  $\mu_{20}$ . Dos bombas suministran el primero y último tanque. Los caudales de las bombas son  $q_1$  y  $q_2$ . La velocidad de caudal máximo de la bomba  $i$  se denota  $q_{imax}$ .

Un sensor de presión diferencial piezo-resistivo lleva a cabo la medición de nivel necesario. Tres transductores ofrecen niveles de señal de tensión. La variable  $L_j$  denota el nivel en el tanque  $j$  y  $L_{j\max}$ , el nivel máximo de líquido asociado (Noura et al, 2009).

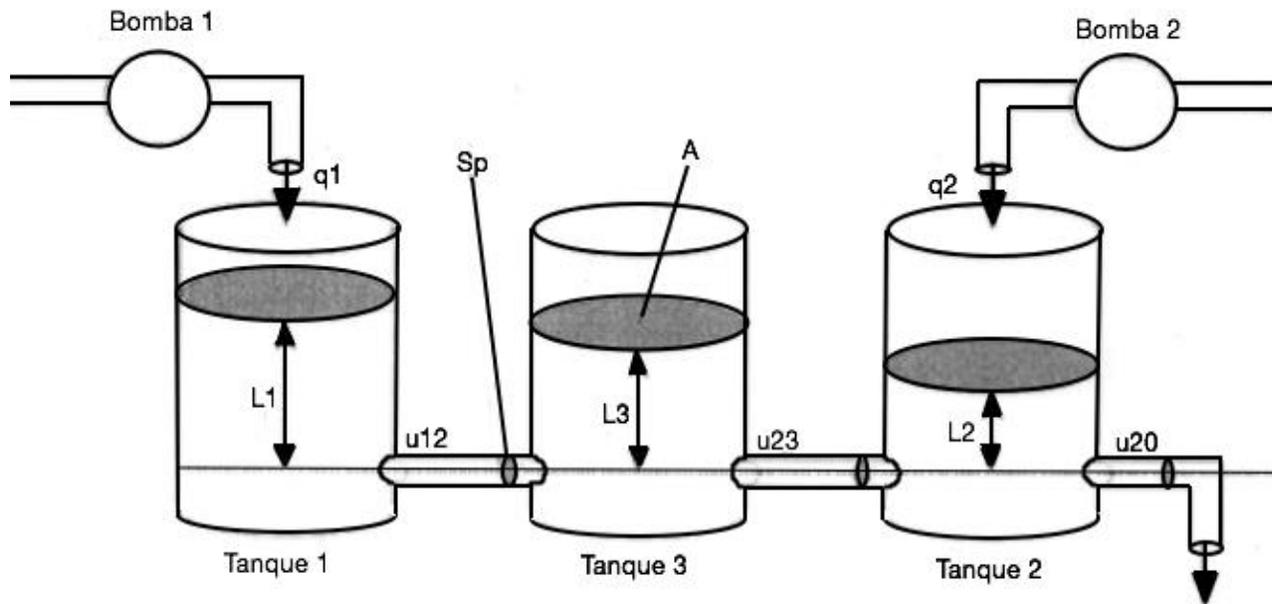


Figura 14. Representación del sistema de tres tanques.

Los valores numéricos de los parámetros de la planta son listados en la Tabla 2 de (Theilliol et al. 2002).

Tabla 2. Parámetros del sistema.

Variables	Símbolo	Unidades
Sección transversal del tanque	$A$	$0.0154 \text{ m}^2$
Sección transversal de tubo	$S_p$	$5E - 5 \text{ m}^2$
Coefficiente de salida de flujo	$\mu_{13} = \mu_{32}$	0.5
Coefficiente de salida de flujo	$\mu_{20}$	0.675
Velocidad de flujo volumétrico máxima	$q_{imax}(i \in [1 \ 2])$	$1.2E - 4 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$
Nivel máximo	$L_{jmax}(j \in [1 \ 2 \ 3])$	0.62 m

### 3.2. Modelado del sistema de tres tanques acoplados.

La ecuación de partida para el modelado del sistema de tres tanques se describe por el balance de masa como se muestra en (Bequette 1998)

$$\frac{dV}{dt} = q_e - q_s, \quad (3.2.1)$$

donde:

- $\frac{dV}{dt}$  La velocidad de cambio de masa en el sistema.
- $q_e$  La velocidad de entrada de masa al sistema.
- $q_s$  La velocidad de salida de masa del sistema.

Tomando en cuenta la dinámica de los tres tanques acoplados, el sistema no lineal puede estar descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{13}(t), \quad (3.2.2)$$

$$A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_2(t) + q_{32}(t) - q_{20}(t), \quad (3.2.3)$$

$$A \frac{dh_3(t)}{dt} = q_{13}(t) - q_{32}(t), \quad (3.2.4)$$

Dónde:  $q_{mn}(t)$  representa el caudal que va del tanque  $m$  al  $n$  ( $m, n = 1, 2, 3 \forall m \neq n$ ) la cual esta basada en la ley de Torricelli, como se muestra en la ecuación (3.2.5).

$$q_{mn}(t) = \mu_{mn} S_p \operatorname{sgn}(h_m(t) - h_n(t)) \sqrt{2g|h_m(t) - h_n(t)|}. \quad (3.2.5)$$

donde: la función  $\operatorname{sgn}(h_m(t) - h_n(t))$  determina la dirección del fluido entre los tanques, no es una función continua y actúa como la función de un conmutador entre valores de  $[-1, 1]$  dependiendo de la diferencia de los estados. Lo que no es necesario la linealización de estos términos (Iqbal et al. 2007).

Y  $q_{20}$  representa el caudal de salida del tanque 2 descrito de la siguiente manera en la ecuación (3.2.6):

$$q_{20}(t) = \mu_{20} S_p \sqrt{2gh_2(t)}, \quad (3.2.6)$$

y  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  representan el caudal de entrada al sistema, donde el caudal se pretende trabajar alrededor del siguiente punto de operación

$$U_o = [0.35e^{-4} \ 0.375e^{-4}]^T \left( \frac{m^3}{s} \right). \quad (3.2.7)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.2.2)-(3.2.6), el sistema no lineal puede estar escrito de la forma en espacio de estado de la siguiente manera:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad (3.2.8)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{x}(t), \quad (3.2.9)$$

donde  $\bar{y} = [h_1 \ h_2 \ h_3]^T$  es el vector de salida,  $\bar{u} = [q_1 \ q_2]^T$  es el vector de entrada.

### 3.3. Puntos de equilibrio del sistema de tres tanques acoplados.

Una manera de iniciar el análisis del sistema no lineal es determinar sus puntos de equilibrio ( $x_e$ ). Para ello se igualan a 0 las ecuaciones que rigen la dinámica de cada uno de los tanques según (Anzures et al. 2008).

Para la altura del tanque uno, la cual la rige la ecuación (3.2.2) se despeja  $\dot{h}_1$  y se iguala a 0.

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A} (q_1(t) - q_{13}(t)), \quad (3.3.1)$$

$$0 = \frac{1}{A} (q_1(t) - q_{13}(t)), \quad (3.3.2)$$

$$\frac{q_{13}(t)}{A} = \frac{q_1(t)}{A}. \quad (3.3.3)$$

Para la altura del tanque dos, la cual la rige la ecuación (3.2.3) se despeja  $\dot{h}_2$  y se iguala a 0.

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A}(q_2(t) + q_{32}(t) - q_{20}(t)), \quad (3.3.4)$$

$$0 = \frac{1}{A}(q_2(t) + q_{32}(t) - q_{20}(t)), \quad (3.3.5)$$

$$\frac{q_{32}(t)}{A} = \frac{1}{A} * (-q_2(t) + q_{20}(t)). \quad (3.3.6)$$

Para la altura del tanque tres, la cual la rige la ecuación (3.2.4) se despeja  $\dot{h}_3$  y se iguala a 0.

$$\dot{h}_3 = \frac{1}{A}(q_{13}(t) - q_{32}(t)), \quad (3.3.7)$$

$$0 = \frac{1}{A}(q_{13}(t) - q_{32}(t)). \quad (3.3.8)$$

Para el punto de equilibrio en el tanque 2 se sustituye (3.3.3) y (3.3.6) en (3.3.8) y se tiene lo siguiente

$$0 = \frac{q_1(t)}{A} + \frac{q_2(t)}{A} - \frac{q_{20}(t)}{A}, \quad (3.3.9)$$

después se sustituye (3.2.6) en (3.3.9) y despejando  $h_2(t)$  de (3.3.10) se obtiene (3.3.12) como se muestra a continuación

$$\frac{\mu_{20}S_p\sqrt{2gh_2(t)}}{A} = \frac{q_1(t)}{A} + \frac{q_2(t)}{A}, \quad (3.3.10)$$

$$\sqrt{h_2(t)} = \frac{q_1(t) + q_2(t)}{\mu_{20}S_p\sqrt{2g}}, \quad (3.3.11)$$

$$h_2(t) = \left( \frac{q_1(t) + q_2(t)}{\mu_{20}S_p\sqrt{2g}} \right)^2, \quad (3.3.12)$$

sustituyendo los valores de la tabla 2 en (3.3.12) se obtiene el punto de equilibrio en el tanque 2

$$h_2 = 0.2383. \quad (3.3.13)$$

Para el punto de equilibrio del tanque 3 se sustituye (3.2.5) y (3.2.6) en (3.3.6) y se eleva al cuadrado obteniendo lo siguiente:

$$\left(\sqrt{|h_3 - h_2|}\right)^2 = \left(\frac{-q_2 + \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2gh_2}}{\mu_{32}S_{p32}\sqrt{2g}}\right)^2, \quad (3.3.14)$$

despejando  $h_3$  de (3.3.14) se tiene que

$$h_3 = \left(\frac{-q_2 + \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2gh_2}}{\mu_{32}S_{p32}\sqrt{2g}}\right)^2 + h_2, \quad (3.3.15)$$

y finalmente sustituyendo los valores de la tabla 2 y el valor de  $h_2 = 0.2383$  en (3.3.15) se obtiene el punto de equilibrio en el tanque 3 donde:

$$h_3 = 0.3409. \quad (3.3.16)$$

Para el punto de equilibrio del tanque 1 se sustituye (3.2.5) en (3.3.3) y se eleva al cuadrado obteniendo lo siguiente:

$$\left(\sqrt{|h_1 - h_3|}\right)^2 = \left(\frac{q_1(t)}{\mu_{13}S_{p13}\sqrt{2g}}\right)^2, \quad (3.3.17)$$

despejando  $h_1$  se tiene lo siguiente:

$$h_1 = \left(\frac{q_1(t)}{\mu_{13}S_{p13}\sqrt{2g}}\right)^2 + h_3, \quad (3.3.18)$$

sustituyendo los valores de la tabla 2 y el valor de  $h_3 = 0.3409$  en (3.3.18) se obtiene el punto de equilibrio en el tanque 1

$$h_1 = 0.4408. \quad (3.3.19)$$

Los puntos de equilibrio del sistema ( $x_e$ ) se representan de la siguiente manera:

$$x_e = [0.4408 \ 0.2383 \ 0.3409]^T \text{ (m)}. \quad (3.3.20)$$

Una vez teniendo los puntos de equilibrio del sistema no lineal se realiza un análisis de estabilidad por el método de Lyapunov en la cual se propone la siguiente función candidata de Lyapunov que es:

$$V(h) = \frac{1}{2}h^T Ph, \quad (3.3.21)$$

donde:

- $P$  es una matriz identidad de  $\mathfrak{R}^{3 \times 3}$ ,  $P > 0$ ,
- $h$  el punto de equilibrio del sistema  $x_e$ .

Tomando en cuenta lo anterior y resolviendo (3.3.21) se tiene que

$$V(h) = \frac{1}{2}[h_1^2 + h_2^2 + h_3^2], \quad (3.3.22)$$

a continuación se deriva la ecuación (3.3.22)

$$\dot{V}(h) = \frac{\partial V(h)}{\partial h_1} \dot{h}_1 + \frac{\partial V(h)}{\partial h_2} \dot{h}_2 + \frac{\partial V(h)}{\partial h_3} \dot{h}_3, \quad (3.3.23)$$

$$\dot{V}(h) = h_1 \dot{h}_1 + h_2 \dot{h}_2 + h_3 \dot{h}_3, \quad (3.3.24)$$

se sustituyen las ecuaciones (3.3.1), (3.3.4) y (3.3.7) en (3.3.24)

$$\begin{aligned} \dot{V}(h) = & h_1 * (0.0023 - 0.0072\sqrt{|h_1 - h_3|}) + \dots \\ & \dots + h_2 * (0.0024 + 0.0072\sqrt{|h_3 - h_2|} - 0.0097\sqrt{h_2}) + \dots \\ & \dots + h_3 * (0.0072\sqrt{|h_1 - h_3|} - 0.0072\sqrt{|h_3 - h_2|}), \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

sustituyendo el punto de equilibrio del sistema ( $x_e$ ) en (3.3.25) y resolviendo algebraicamente se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}(h) = & 0.4408 * (0.0023 - 0.0072\sqrt{|0.4408 - 0.3409|}) + \dots \\ & + 0.2383 * (0.0024 + 0.0072\sqrt{|0.3409 - 0.2383|} - 0.0097\sqrt{0.2383}) + 0.3409 \\ & * (0.0072\sqrt{|0.4408 - 0.3409|} - 0.0072\sqrt{|0.3409 - 0.2383|}), \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

$$\dot{V}(h) = -9.7115e^{-9} - 1.0395e^{-7} - 1.04e^{-5}, \quad (3.3.27)$$

$$\dot{V}(h) = -1.0514e^{-5}, \quad (3.3.28)$$

$$\dot{V}(h) < 0. \quad (3.3.29)$$

Por lo tanto de acuerdo a la definición del anexo B se concluye que el sistema no lineal es estable asintóticamente, porque se cumple que la derivada de la función candidata de Lyapunov sea definida negativa.

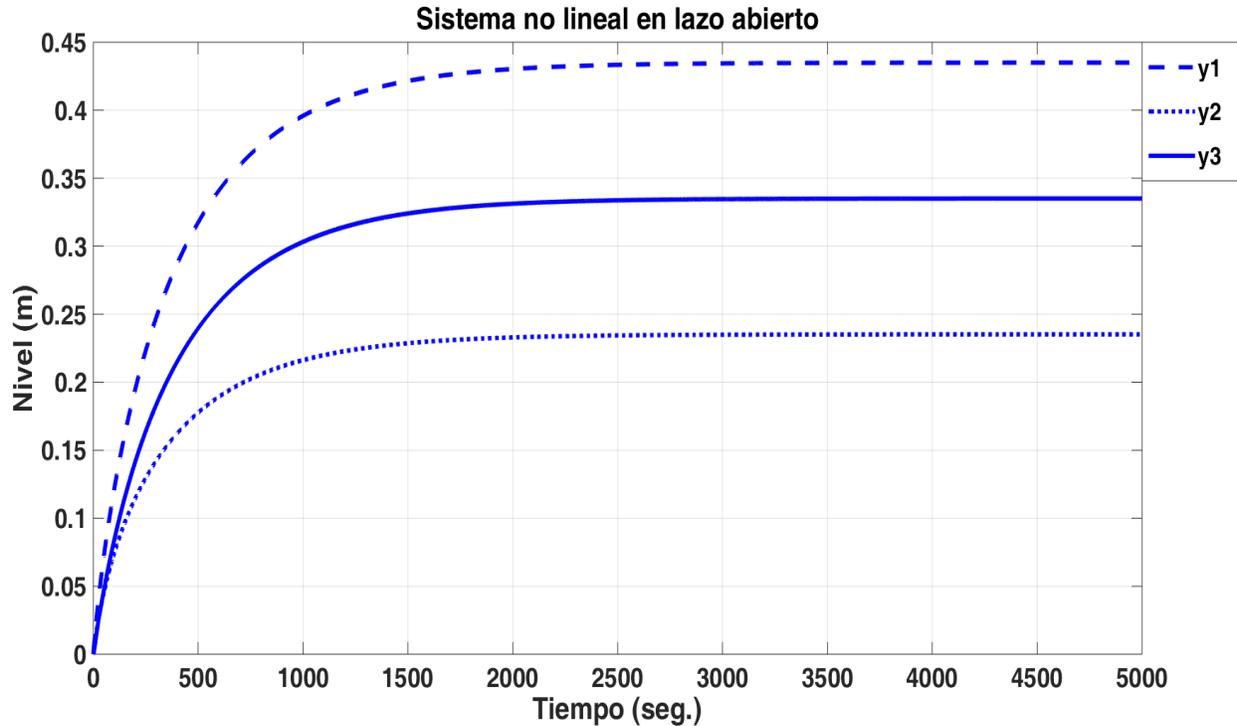


Figura 15. Sistema no lineal en lazo abierto.

En la figura 15 se puede ver que el sistema llega a su estado estable en el punto de equilibrio de cada uno de los tanques.

### 3.4. Representación Lineal.

El propósito de este estudio es controlar el sistema alrededor de un punto de operación  $(U_o, x_e)$ , como se muestra en la ecuación 3.4.1.

$$\begin{cases} x_e = [0.4408 \ 0.2383 \ 0.3409]^T (m), \\ U_o = [0.35e^{-4} \ 0.375e^{-4}]^T \left(\frac{m^3}{s}\right). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

El sistema lineal se representa en espacio de estados de la siguiente manera.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Dónde:  $y$  y  $u$  representan variaciones alrededor de un punto de operación definido por  $(U_o, x_e)$ , la matriz A es la matriz jacobiana de  $Df(x_e)$  y la matriz B es la matriz jacobiana de  $Df(U_o)$ .

Por el método de expansión de Taylor ver anexo A

$$f(x) = Df(x_e)x + \frac{1}{2}D^2f(x_e)(x, x) + \dots \quad (3.4.3)$$

Se realiza la linealización del sistema utilizando el punto de operación dicho anteriormente.

➤ La dinámica del tanque 1 se expresa en la ecuación (3.4.4)

$$A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{13}(t), \quad (3.4.4)$$

se despeja  $\dot{h}_1$  y se iguala a 0

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A}(q_1(t) - q_{13}(t)), \quad (3.4.5)$$

$$0 = \frac{1}{A}(q_1(t) - q_{13}(t)), \quad (3.4.6)$$

y se sustituye la ecuación (3.2.5) en (3.4.6)

$$f_1 \rightarrow 0 = \frac{1}{A}(q_1(t) - \mu_{13}S_{p13}sgn(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|}). \quad (3.4.7)$$

Se deriva  $f_1$  parcialmente respecto a los estados  $h_1, h_2$  y  $h_3$  y las entradas  $q_1$  y  $q_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A}(q_1(t) - \mu_{13}S_{p13}sgn(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|}) \right)}{\partial h_1}, \quad (3.4.8)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial q_1(t)}{\partial h_1} - \mu_{13}S_{p13}sgn(h_1 - h_3)\sqrt{2g} \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial h_1} \right), \quad (3.4.9)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} = \frac{-\mu_{13}S_{p13}sgn(h_1 - h_3)\sqrt{2g}}{A} * \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial h_1}, \quad (3.4.10)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} = \frac{-\mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g}}{2A} * \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_3|}}, \quad (3.4.11)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (q_1(t) - \mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|}) \right)}{\partial h_1}, \quad (3.4.12)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_2} = 0, \quad (3.4.13)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_3} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (q_1(t) - \mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|}) \right)}{\partial h_1}, \quad (3.4.14)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_3} = \frac{-\mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g}}{A} * \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial h_1}, \quad (3.4.15)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_3} = \frac{\mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g}}{2A} * \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_3|}}, \quad (3.4.16)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (q_1(t) - \mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|}) \right)}{\partial q_1}, \quad (3.4.17)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{1}{A} * \frac{\partial q_1(t)}{\partial q_1}, \quad (3.4.18)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{1}{A}, \quad (3.4.19)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (q_1(t) - \mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|}) \right)}{\partial q_2}, \quad (3.4.20)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_2} = 0. \quad (3.4.21)$$

➤ La dinámica del tanque 2 se expresa en la ecuación (3.4.22)

$$A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_2(t) + q_{32}(t) - q_{20}(t), \quad (3.4.22)$$

Se despeja  $\dot{h}_2$  y se iguala a 0

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A}(q_2(t) + q_{32}(t) - q_{20}(t)), \quad (3.4.23)$$

$$0 = \frac{1}{A}(q_2(t) + q_{32}(t) - q_{20}(t)), \quad (3.4.24)$$

y se sustituyen las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6) en (3.4.24)

$$f_2 \rightarrow 0 = \frac{1}{A}(q_2(t) + \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g|h_3 - h_2|} - \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2gh_2}). \quad (3.4.25)$$

Se deriva  $f_2$  parcialmente respecto a los estados  $h_1, h_2$  y  $h_3$  y las entradas  $q_1$  y  $q_2$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_1} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A}(q_2(t) + \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g|h_3 - h_2|} - \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2gh_2}) \right)}{\partial h_1}, \quad (3.4.26)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_1} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial q_2(t)}{\partial h_1} + \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial h_1} - \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{h_2})}{\partial h_1} \right) \quad (3.4.27)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_1} = 0 \quad (3.4.28)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A}(q_2(t) + \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g|h_3 - h_2|} - \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2gh_2}) \right)}{\partial h_2} \quad (3.4.29)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_2} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial q_2(t)}{\partial h_2} + \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial h_2} - \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{h_2})}{\partial h_2} \right) \quad (3.4.30)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_2} = \frac{1}{A} \left( -\mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g} * \frac{1}{2\sqrt{|h_3 - h_2|}} - \mu_{20}S_{p20}\sqrt{2g} * \frac{1}{2\sqrt{h_2}} \right) \quad (3.4.31)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_2} = \frac{1}{2A} \left( -\mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{1}{\sqrt{|h_3 - h_2|}} - \mu_{20} S_{p20} \sqrt{2g} * \frac{1}{\sqrt{h_2}} \right) \quad (3.4.32)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_3} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (q_2(t) + \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|} - \mu_{20} S_{p20} \sqrt{2gh_2}) \right)}{\partial h_3} \quad (3.4.33)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_3} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial q_2(t)}{\partial h_3} + \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial h_3} - \mu_{20} S_{p20} \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{h_2})}{\partial h_3} \right) \quad (3.4.34)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_3} = \frac{\mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g}}{2A} * \frac{1}{\sqrt{|h_3 - h_2|}} \quad (3.4.35)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (q_2(t) + \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|} - \mu_{20} S_{p20} \sqrt{2gh_2}) \right)}{\partial q_1} \quad (3.4.36)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial q_2(t)}{\partial q_1} + \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial q_1} - \mu_{20} S_{p20} \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{h_2})}{\partial q_1} \right) \quad (3.4.37)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = 0 \quad (3.4.38)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (q_2(t) + \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|} - \mu_{20} S_{p20} \sqrt{2gh_2}) \right)}{\partial q_2} \quad (3.4.39)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial q_2(t)}{\partial q_2} + \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial q_2} - \mu_{20} S_{p20} \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{h_2})}{\partial q_2} \right) \quad (3.4.40)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{1}{A} \quad (3.4.41)$$

➤ La dinámica del tanque 3 se expresa en la ecuación (3.4.42).

$$A \frac{dh_3(t)}{dt} = q_{13}(t) - q_{32}(t) \quad (3.4.42)$$

Se despeja  $\dot{h}_3$  y se iguala a 0.

$$\dot{h}_3 = \frac{1}{A}(q_{13}(t) - q_{32}(t)) \quad (3.4.43)$$

$$0 = \frac{1}{A}(q_{13}(t) - q_{32}(t)) \quad (3.4.44)$$

Se sustituye la ecuación (3.2.5) en (3.4.44) y se tiene:

$$f_3 \rightarrow 0 = \frac{1}{A}(\mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|} - \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g|h_3 - h_2|}) \quad (3.4.45)$$

Donde  $f_3$  se deriva parcialmente respecto a los estados y las entradas.

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_1} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A}(\mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|} - \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g|h_3 - h_2|}) \right)}{\partial h_1} \quad (3.4.46)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_1} = \frac{1}{A} \left( \mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial h_1} - \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial h_1} \right) \quad (3.4.47)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_1} = \frac{\mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g}}{2A} * \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_3|}} \quad (3.4.48)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A}(\mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g|h_1 - h_3|} - \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g|h_3 - h_2|}) \right)}{\partial h_2} \quad (3.4.49)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_2} = \frac{1}{A} \left( \mu_{13}S_{p13}\text{sgn}(h_1 - h_3)\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial h_2} - \mu_{32}S_{p32}\text{sgn}(h_3 - h_2)\sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial h_2} \right) \quad (3.4.50)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_2} = \frac{\mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g}}{2A} * \frac{1}{\sqrt{|h_3 - h_2|}} \quad (3.4.51)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_3} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (\mu_{13} S_{p13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g|h_1 - h_3|} - \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|}) \right)}{\partial h_3} \quad (3.4.52)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_3} = \frac{1}{A} \left( \mu_{13} S_{p13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial h_3} - \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial h_3} \right) \quad (3.4.53)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_3} = \frac{1}{2A} \left( -\mu_{13} S_{p13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g} * \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_3|}} - \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{1}{\sqrt{|h_3 - h_2|}} \right) \quad (3.4.15) \quad (3.4.54)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_1} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (\mu_{13} S_{p13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g|h_1 - h_3|} - \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|}) \right)}{\partial q_1} \quad (3.4.55)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_1} = \frac{1}{A} \left( \mu_{13} S_{p13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial q_1} - \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial q_1} \right) \quad (3.4.56)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_1} = 0 \quad (3.4.57)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} (\mu_{13} S_{p13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g|h_1 - h_3|} - \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|}) \right)}{\partial q_2} \quad (3.4.58)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_2} = \frac{1}{A} \left( \mu_{13} S_{p13} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_1 - h_3|})}{\partial q_2} - \mu_{32} S_{p32} \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g} * \frac{\partial(\sqrt{|h_3 - h_2|})}{\partial q_2} \right) \quad (3.4.59)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_2} = 0 \quad (3.4.60)$$

Para llevar a cabo la representación en espacio de estados suponemos que:

$$y_j = h_j = x_j,$$

$$\dot{y}_j = \dot{h}_j = \dot{x}_j, \text{ donde: } (j \in 1,2,3),$$

$$q_i = u_i, \text{ donde: } (i \in 1,2).$$

Las matrices jacobianas quedan de la siguiente manera:

$$Df(x_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \quad Df(U_o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} \end{bmatrix}. \quad (3.4. 61)$$

En el cual la función lineal  $Df(x_e)x$  es una buena primera aproximación de la función no lineal  $f(x)$ .

La matriz jacobiana evaluada en los puntos de operación y sustituyendo los parámetros de la tabla 2 queda de la siguiente manera:

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.01144 & 0 & 0.01144 \\ 0 & -0.02128 & 0.01128 \\ 0.01144 & 0.01128 & -0.02272 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 64.94 & 0 \\ 0 & 64.94 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4. 62)$$

El sistema en espacio de estados queda representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = A_p \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + B_p \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (3.4. 63)$$

Los valores propios de A son:

$$\det(\lambda I - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda + 0.01144 & 0 & 0.01144 \\ 0 & \lambda + 0.02128 & 0.01128 \\ 0.01144 & 0.01128 & \lambda + 0.02272 \end{bmatrix} \right), \quad (3.4. 64)$$

$$\lambda^3 + 0.0554\lambda^2 + 7.2827e^{-4}\lambda + 1.2905e^{-6} = 0. \quad (3.4. 65)$$

Los eigenvalores de la matriz A son:

$$\lambda_{1,2,3} = \begin{bmatrix} -0.0363 \\ -0.0170 \\ -0.0021 \end{bmatrix} \quad (3.4.66)$$

Por lo tanto el sistema lineal es asintóticamente estable por que los eigenvalores no tienen parte imaginaria y son reales negativos, es decir  $\lambda < 0$ .

Como se puede verificar en la figura 16 el sistema lineal en lazo abierto de los tres tanques acoplados es asintóticamente estable de acuerdo a la definición del anexo B.

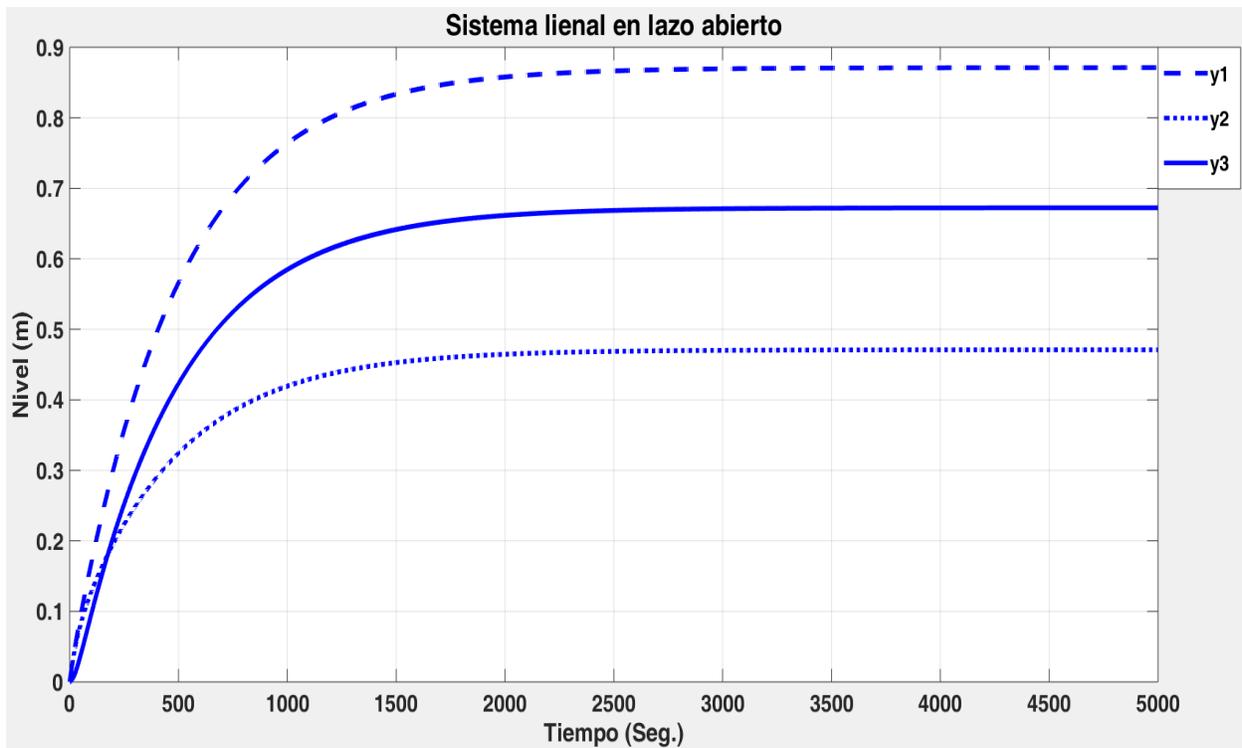


Figura 16. Sistema lineal de tres tanques en lazo abierto.

En la figura 16 se puede observar que el sistema lineal de la ecuación (3.4.63) tiene un comportamiento similar al sistema no lineal ya que el sistema lineal fue linealizado alrededor de un punto de operación.

### 3.5. FDD y CTF Aplicado al Sistema de Tres Tanques Acoplados.

En la técnica de CMS se hace la comparación entre el modelo de referencia y la planta a controlar generando una señal de error que brinda información del sistema, para este caso de estudio la señal de error se utilizará como diagnóstico de la falla para ser usada en el control primario y en el mecanismo de acomodación.

Para generar el modelo de referencia los parámetros de la matriz  $A_p$  y  $B_p$  de la planta se ajustaron para obtener salidas deseadas del sistema, las matrices  $A_m$  y  $B_m$  son:

$$A_m = \begin{bmatrix} -0.034 & 0 & 0.034 \\ 0 & -0.07274 & 0.03732 \\ 0.034 & 0.03732 & -0.07131 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5.1)$$

De tal forma que se redujo la constante de tiempo del sistema, la altura del tanque 1 se desea en 0.4m para evitar un desbordamiento, la altura del tanque 3 en 0.3m y la altura del tanque 2 en 0.2m.

Con el fin de que la planta siga el mismo comportamiento que el modelo de referencia, las ganancias  $K_o$ ,  $K_u$  y  $K_e$  del esquema de CTF basado en modelo de seguimiento se calculan de acuerdo en (Lopez et al. 2014) como se presenta a continuación:

La representación en espacio de estados del modelo de referencia y la planta se presentan en las ecuaciones (3.5.2) y (3.5.3) respectivamente

$$x_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t),$$
$$y_m(t) = C_m x_m(t), \quad (3.5.2)$$

$$x_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t),$$
$$y_p(t) = C_p x_p(t). \quad (3.5.3)$$

El error entre el modelo de referencia y la planta lineal es expresado de la siguiente manera:

$$e(t) = x_m(t) - x_p(t). \quad (3.5.4)$$

La dinámica del error se expresa como en la ecuación (3.5.5)

$$\dot{e}(t) = A_p e(t) + (A_m - A_p)x_m(t) + B_m r(t) - B_p u(t). \quad (3.5.5)$$

Si se define como la ley de control:

$$u_p(t) = K_e e(t) + [K_o x_m(t) + K_u u_M(t)], \quad (3.5.6)$$

entonces la ecuación de la dinámica del error se transforma en:

$$\dot{e}(t) = [A_p - B_p K_e]e(t) + (A_m - A_p - B_p K_o)x_m(t) + (B_m - B_p K_u)u_M(t), \quad (3.5.7)$$

donde  $K_o$  y  $K_u$  se determinan a partir de los valores que minimizan la norma:

$$\|(A_m - A_p - B_p K_o)x_m + (B_m - B_p K_u)r\|_2. \quad (3.5.8)$$

Con  $K_o = B_p^+(A_m - A_p)$  y  $K_u = B_p^+ B_m$ , respectivamente. Para este caso,  $B^+$  representa la matriz pseudo-inversa de B. El valor de  $K_e$  se determina de tal forma que los valores propios de la matriz  $[A_p - B_p K_e]$  cumplan con la condición de estabilidad.

$$K_o = 1e - 3 * \begin{bmatrix} -0.3476 & 0 & 0.3476 \\ 0 & -0.7761 & 0.3987 \end{bmatrix}, \quad (3.5.9)$$

$$K_u = \begin{bmatrix} 1.539999168400449 & 0 \\ 0 & 1.539999168400449 \end{bmatrix}. \quad (3.5.10)$$

La matriz de ganancia de retroalimentación  $K_e$  se realiza por el método de colocación de polos utilizando la fórmula de Ackerman (Ogata 2010).

Se determinan los polos de la matriz  $A_m$  y se colocan 5 veces más lejos de su posición original hacia el semiplano izquierdo para asegurar la estabilidad y para tener una estimación más rápida de los estados

$$\lambda_{Modelo de Referencia} = \begin{bmatrix} -0.1168 \\ -0.0541 \\ -0.0071 \end{bmatrix}. \quad (3.5.11)$$

El modelo de referencia es estable ya que los eigenvalores están en el semiplano izquierdo

$$\mathbf{P} = 5 * \text{eig}(\mathbf{A}_m) = \begin{bmatrix} -0.5842 \\ -0.27053 \\ -0.0355 \end{bmatrix}, \quad (3.5.12)$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0.0051 & -0.0011 & -0.0011 \\ -0.0009 & 0.0020 & -0.0006 \end{bmatrix}. \quad (3.5.13)$$

Una vez calculadas las ganancias de la señal de control  $u_p(t) = K_e e(t) + [K_o x_m(t) + K_u u_M(t)]$  se dejaron constantes como se muestra en la figura 17.

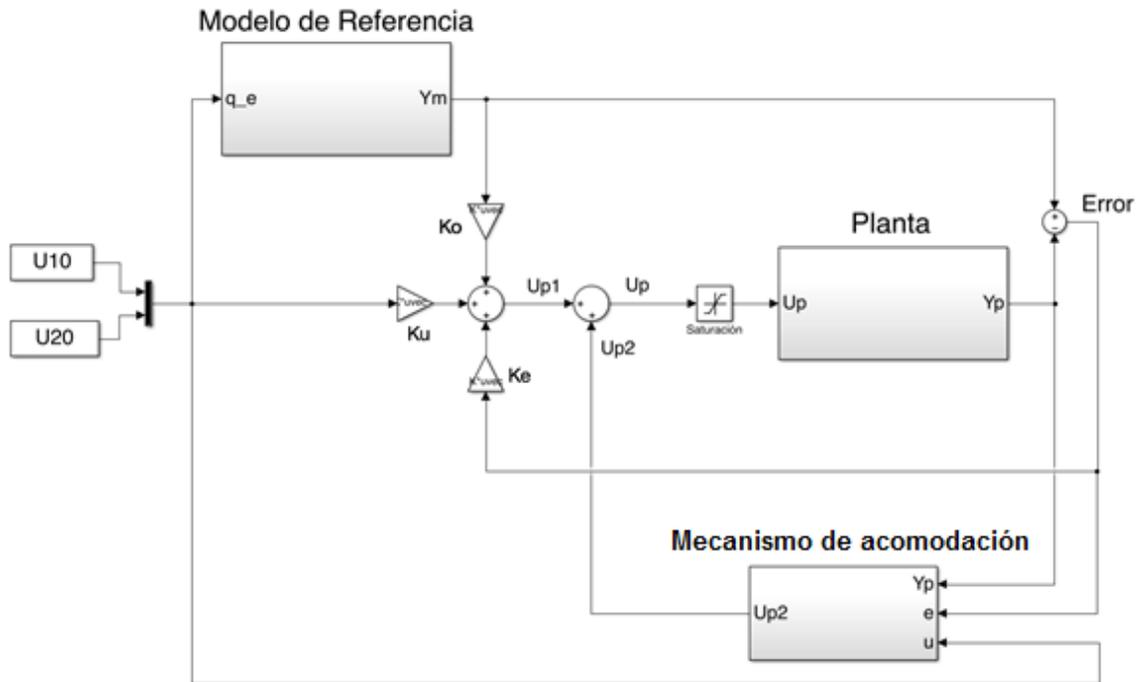


Figura 17. Esquema de CMSA.

Posteriormente a la señal del control  $u_p(t)$  se le suma una nueva señal de control llamada  $u_{p2}$ , entonces, la señal de control  $u_p(t)$  queda expresada nuevamente como la ecuación 3.5.14

$$\underline{u}_p = \underline{u}_{p1} + \underline{u}_{p2}, \quad (3.5.14)$$

$$\underline{u}_{p1} = \mathbf{K}_e \underline{e} + [\mathbf{K}_o \underline{x}_m + \mathbf{K}_u \underline{u}_M], \quad (3.5.15)$$

$$\underline{u}_{p2} = \Delta \mathbf{K}_p(\underline{e}, t) \underline{y} + \Delta \mathbf{K}_U(\underline{e}, t) \underline{u}_M. \quad (3.5.16)$$

La señal  $\underline{u}_{p2}$  esta dada por la ecuación 3.5.16 en donde  $\Delta K_P(\underline{e}, t)$  y  $\Delta K_U(\underline{e}, t)$  se expresan en 3.5.18 y 3.5.19 sucesivamente. La teoría base para el desarrollo de la señal  $\underline{u}_{p2}$  se presenta en la sección 2.2 y de manera sintetizada en la tabla 1.

$$\underline{v} = \underline{D}\underline{e}, \quad (3.5.17)$$

$$\Delta K_P(\underline{e}, t) = \int_0^t F \underline{v} (G\underline{y})^T d\tau + F' \underline{v} (G\underline{y})^T + \Delta K_P(0), \quad (3.5.18)$$

$$\Delta K_U(\underline{e}, t) = \int M \underline{v} (N\underline{u}_M)^T d\tau + M' \underline{v} (N\underline{u}_M)^T + \Delta K_U(0). \quad (3.5.19)$$

Para que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable según las condiciones de estabilidad presentadas en la tabla 1 las ganancias  $F, M, G, N$  deben de ser definidas positivas y las ganancias  $F', M'$  deben de ser mayores o iguales a 0.

La señal  $\underline{v}$  de la ecuación 3.5.17 es un compensador lineal en donde la matriz  $D$  asegura la estabilidad de la parte lineal del sistema en lazo cerrado. La matriz  $D$  se calculó con la ayuda de MATLAB utilizando el solucionario de LMI's

$$D = \begin{bmatrix} 124.0544 & -0.1445 & -1.8311 \\ -0.1445 & 125.1213 & -1.8041 \end{bmatrix}, \quad (3.5.20)$$

$$\underline{e} = y_m - y_p, \quad (3.5.21)$$

$$\Delta K_P(\underline{e}, t) = \int_0^t 0.4e^{-6} * (D * \underline{e}) * (2 * \underline{y})^T d\tau + 2.2e^{-4} * (D * \underline{e}) * (2 * \underline{y})^T, \quad (3.5.22)$$

$$\Delta K_U(\underline{e}, t) = \int 0.4e^{-6} * (D * \underline{e}) * (2 * \underline{u}_M)^T d\tau + 2.2e^{-4} * (D * \underline{e}) * (2 * \underline{u}_M)^T. \quad (3.5.23)$$

En el anexo F se presenta la descripción del diagrama a bloques de la figura 17.

## Conclusión

En este capítulo se obtuvo el sistema no lineal y a su vez el sistema lineal de tres tanques acoplados, se desarrolló el sistema de CTF con modelo de seguimiento y se implementó un mecanismo de acomodación.

## 4. Pruebas y Resultados.

### Introducción

En la sección 4.1 se muestra que con la señal de control generada por el CMS la planta si logra seguir los niveles deseados generados por el modelo de referencia.

En la sección 4.2 se sintoniza un control PI lineal para la regulación de los niveles de los tanques 1 y 2 con el fin de que la planta tenga un comportamiento similar al modelo de referencia del CMS.

Las pruebas que se realizan en la planta para probar el esfuerzo de control son fallas de atascamiento en los ductos y fugas en cada uno de los tanques. En la sección 4.3 se simulan las fallas antes mencionadas y se realiza una comparación del control PI lineal vs el CMS.

En la sección 4.4 se presentan las pruebas que se realizaron para la obtención de resultados. Para ello se realizan fallas en actuadores, sensores y parámetros del sistema.

Por otro lado, antes de iniciar con las pruebas de control, a continuación se presenta una breve descripción del sistema de tres tanques acoplados.

Como se muestra en la figura 18 el sistema hidráulico consta de tres tanques cilíndricos con la misma área de sección transversal denotados por  $A = 0.0154 \text{ m}^2$ . Estos tres tanques están conectados por dos tubos cilíndricos de la misma área de sección transversal denotadas por  $S_{p13} = S_{p32} = 5e^{-5} \text{ m}^2$ , con coeficientes de salidas iguales denotados por  $\mu_{13} = \mu_{32} = 0.5$ .

El flujo de salida nominal situado en el tanque 2 tiene la misma área de sección transversal que las tuberías de acoplamiento entre los cilindros, pero un coeficiente de salida diferente, denotada  $\mu_{20} = 0.675$ .

Dos bombas suministran el primero y último tanque. El caudal máximo que entrega cada bomba es  $1.2e^{-4} m^3s^{-1}$ . Las bombas se pretenden trabajar alrededor del siguiente punto de operación  $q_1 = 0.35e^{-4}$  y  $q_2 = 0.375e^{-4}$  ( $m^3s^{-1}$ ). Los niveles máximos en los tanques son  $0.62 m$ .

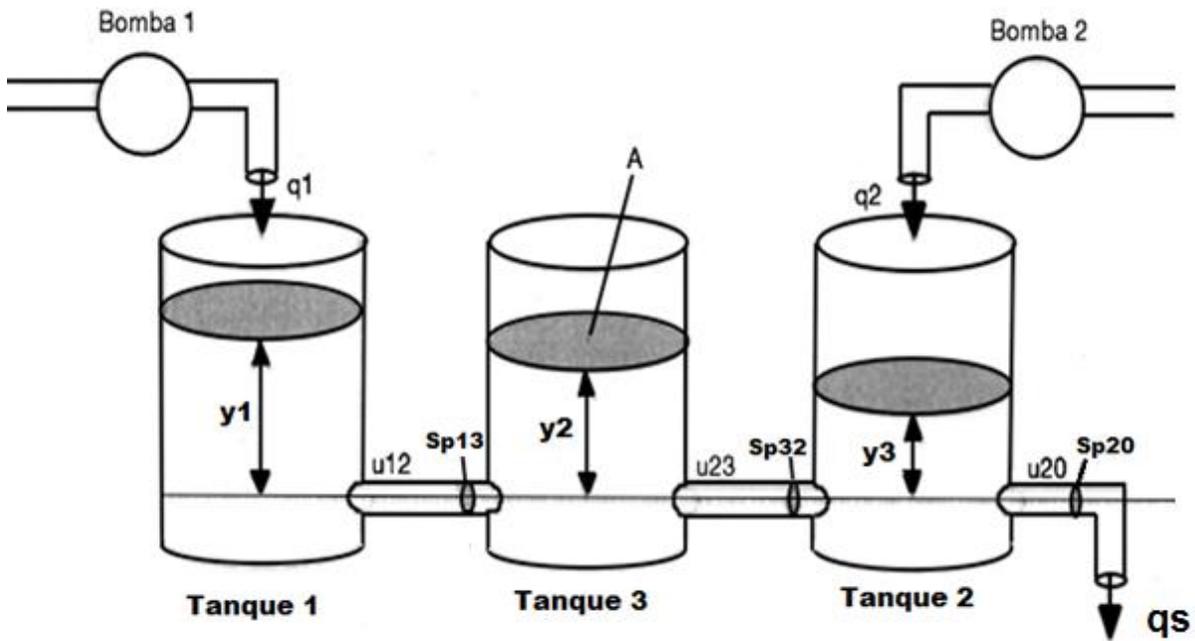


Figura 18. Sistema de tres tanques acoplados.

El esfuerzo de control debe de ser capaz de mantener los niveles del sistema a pesar de tener presente un caudal de salida  $q_s$  en el tanque 2 como se puede ver en la figura 18.

#### 4.1. Características del CMS.

Para el esquema de CMS se utilizaron las ganancias  $K_o$ ,  $K_u$  y  $K_e$  que se calcularon en la sección 3.5.

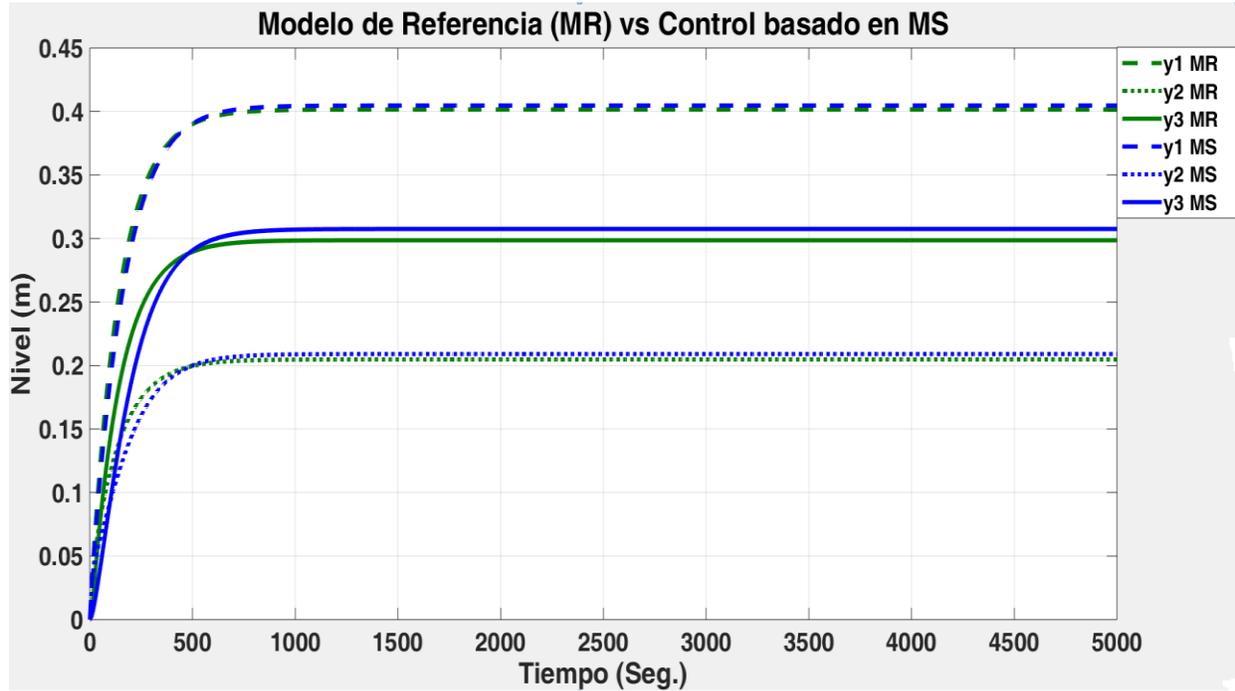


Figura 19. Modelo de referencia vs control basado en MS.

Las líneas verdes de la figura 19 se generaron con el modelo de referencia, las cuales representan los niveles deseados de los tanques 1, 3 y 2 es decir [0.4 0.3 0.2] metros respectivamente, con un tiempo de subida aproximadamente de 700 segundos según las especificaciones del diseñador.

Las líneas azules de la figura 19 representan las respuestas de la planta bajo la acción de control del esquema de CMS, las cuales son comparas con las respuestas del modelo de referencia. Como se puede observar la planta trata de seguir el comportamiento del modelo de referencia.

## 4.2. Características del control PI lineal.

Un control PI lineal se sintonizó para obtener las salidas deseadas de la planta, en este caso son los niveles del modelo de referencia antes mencionado, en la figura 20 se muestran los niveles de cada uno de los tanques.

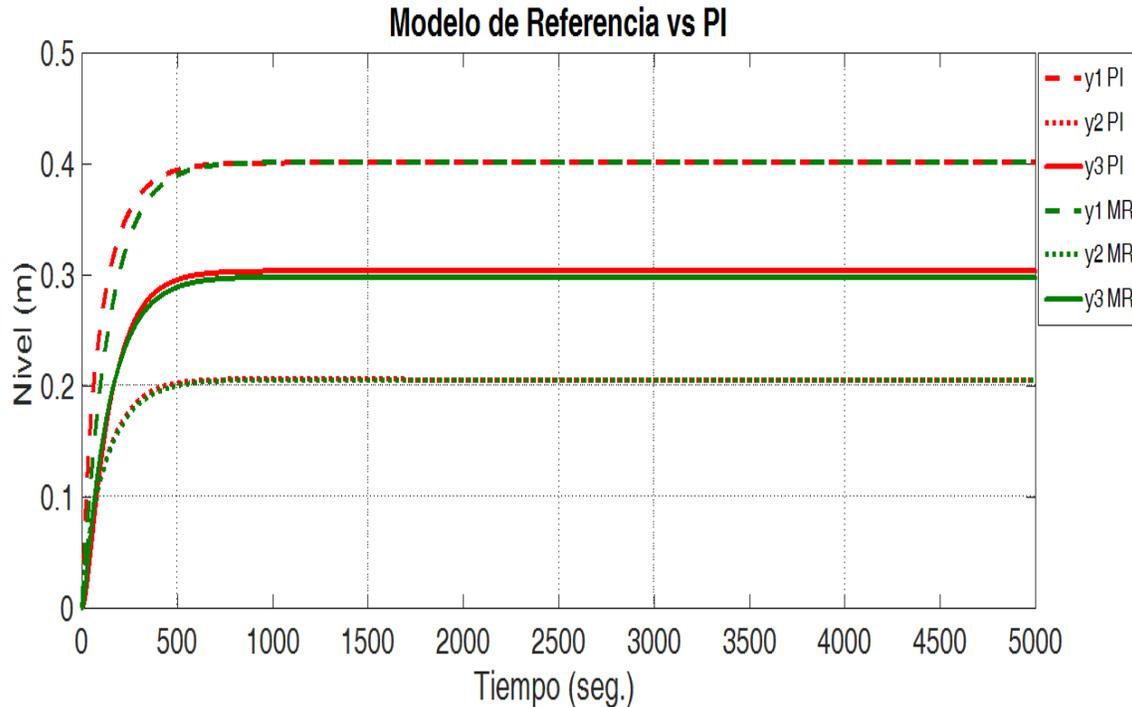


Figura 20. Modelo de referencia vs control PI.

Las líneas rojas de la figura 20 representan los niveles de los tres tanques utilizando un control PI para la regulación de los niveles en los tanques 1 y 2, las ganancias de este controlador se ajustaron para obtener las características similares a las del modelo de referencia.

Las ganancias del control PI se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 3. Ganancias PI.

	<b>P</b>	<b>I</b>
<b>Bomba 1</b>	0.00022	0.0000004
<b>Bomba 2</b>	0.0002	0.00000061

Dicho lo anterior, para comparar el CMS ante el control PI lineal se realizan pruebas de control simulando fallas de tuberías tapadas y fugas en los tanques.

### 4.3. Comparación del CMS vs PI lineal.

En esta sección se realiza la comparación del CMS ante un control PI lineal. A continuación se presenta una falla en el segundo 2000 de atascamiento en la tubería que interconectan los tanques 1 y 3 donde  $Sp_{13}$  se reduce un 40%.

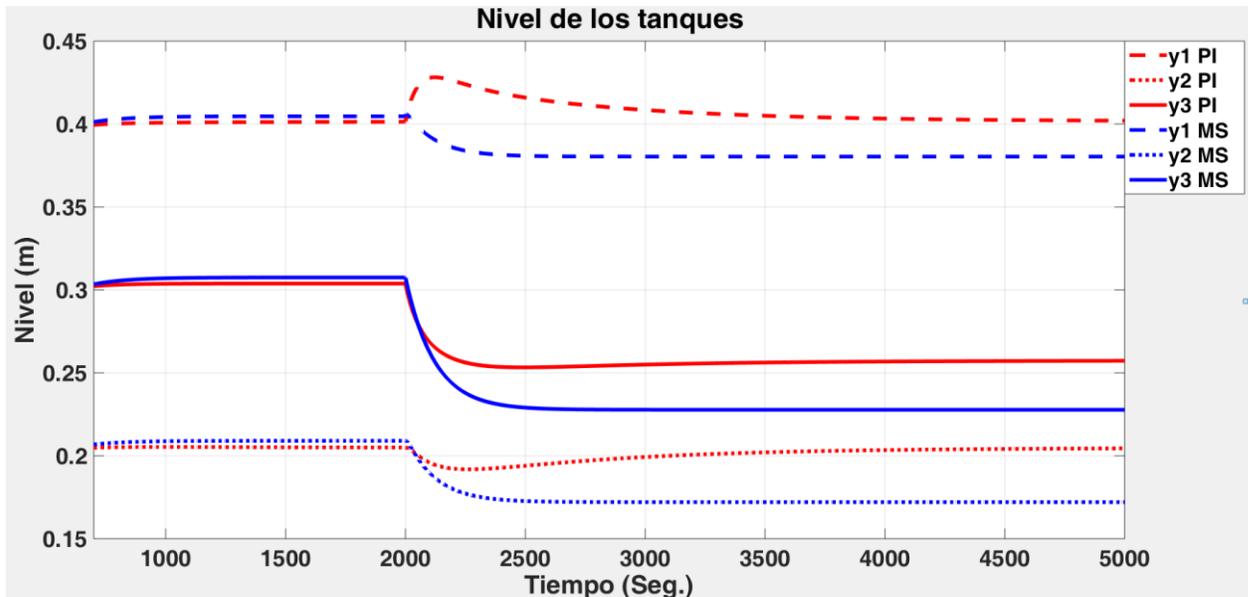


Figura 21. Niveles de los tanques con CMS y PI lineal.

En la figura 21 se puede observar que a pesar de la falla de atascamiento en  $Sp_{13}$  los niveles de los tanques 1 y 2 aplicando un control PI lineal hace que alcancen nuevamente los valores de referencias deseados.

Por otro lado aplicando el control MS en ninguno de los casos los niveles alcanzan nuevamente los valores de referencias deseados, siempre presenta una pequeña desviación ya sea positiva o negativa dependiendo de las fallas.

Las magnitudes de las señales de control del CMS y PI lineal se presentan en la siguiente figura 22.

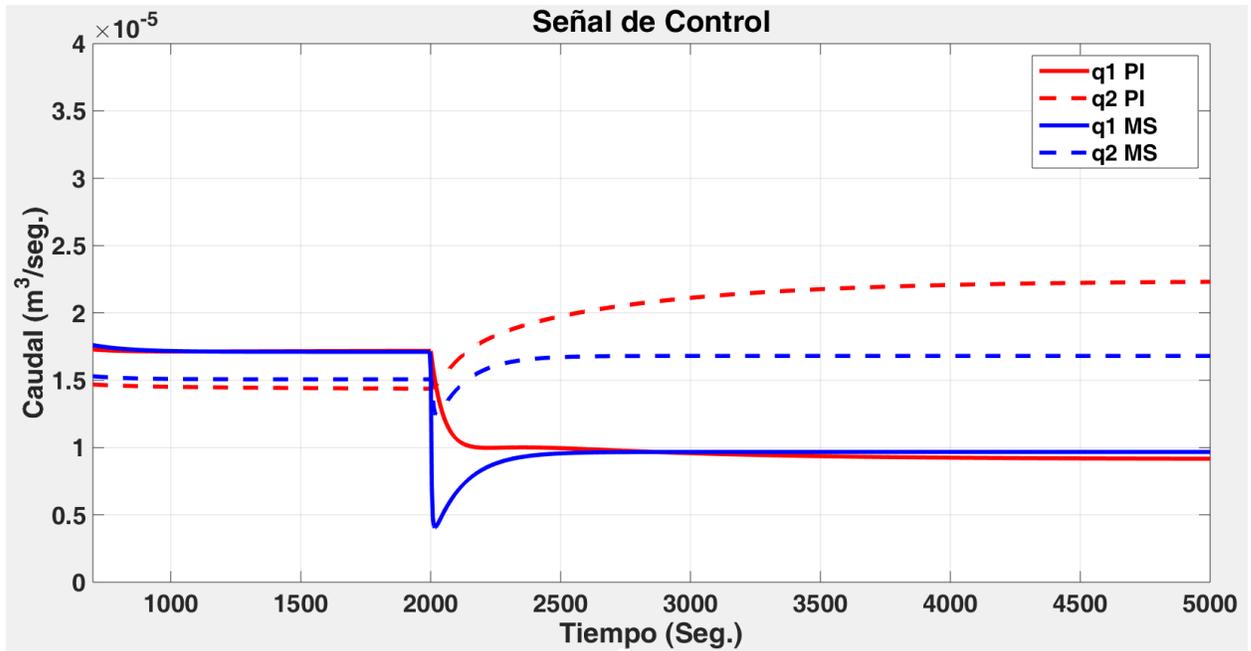


Figura 22. Esfuerzo de control con CMS y PI lineal.

De acuerdo a las comparaciones que se realizan del CMS vs control PI lineal, se concluye que en todos los casos de las fallas tanto de atascamiento en las tuberías y fugas en cada uno de los tanques, el esfuerzo de control del PI lineal presentó un desempeño mayor que el CMS.

Por tal motivo, para mejorar la respuesta del esquema de CMS se pretende implementar un mecanismo de acomodación y nuevamente compararlo con el control PI lineal.

#### 4.4. Comparación del CMSA vs PI lineal.

Las notaciones que se presentan en la parte superior derecha de las siguientes graficas significan lo siguiente:

Tabla 4. Notaciones de las gráficas.

Notaciones	Descripción	Unidades
y1 PI y2 PI y3 PI	Niveles de los tanques utilizando un control PI	metros
q1 PI y q2 PI	Esfuerzo de control (PI)	$\left(\frac{m^3}{seg.}\right)$
y1 MSA y2 MSA y3 MSA	Niveles de los tanques utilizando un control CMSA	metros
q1 MSA y q2 MSA	Esfuerzo de control (CMSA)	$\left(\frac{m^3}{seg.}\right)$

En la figura 23 se presentan los niveles de los tanques en estado estable, las líneas rojas son empleando un control PI y las líneas azules son empleando un CMSA.

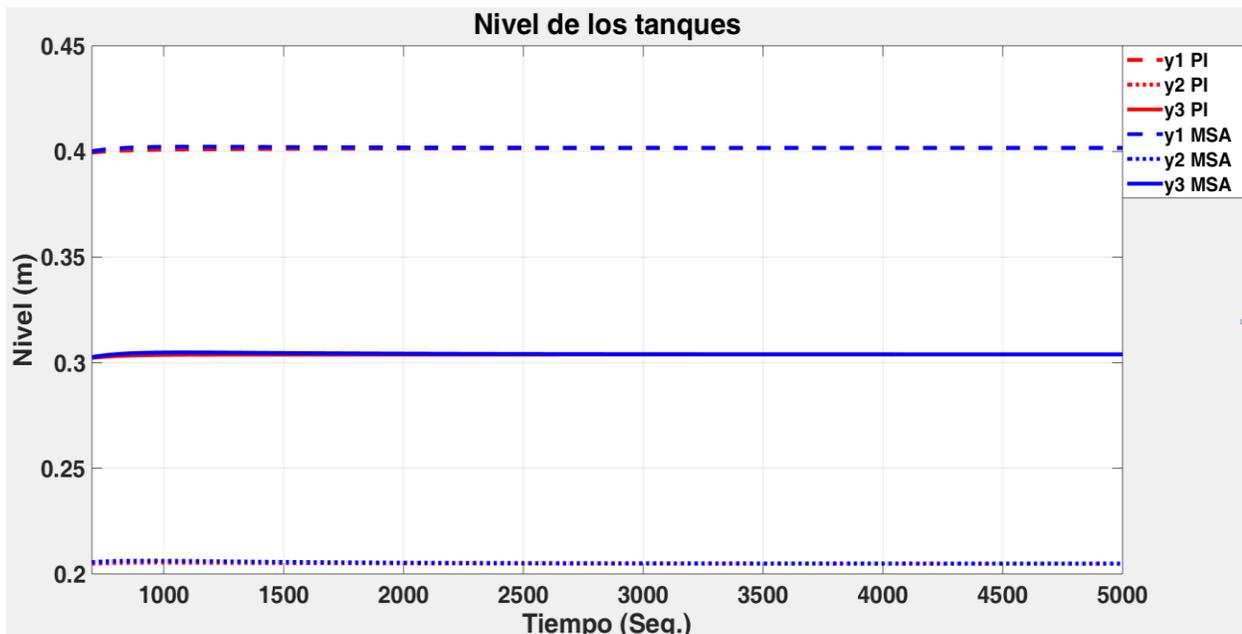


Figura 23. Niveles de los tanques en estado estable sin falla.

En la figura 23 se puede apreciar el sistema en sus condiciones nominales de operación sin fallas, los niveles de los tanques 1, 2 y 3 son [0.4 0.2 0.3] metros respectivamente.

Para probar el esfuerzo de control, las fallas se simularan después de los 700 segundos, ya que es el tiempo que tarda el sistema para encontrarse en estado estable. En la figura 24 se puede apreciar la comparación de los esfuerzos de control de ambos controladores.

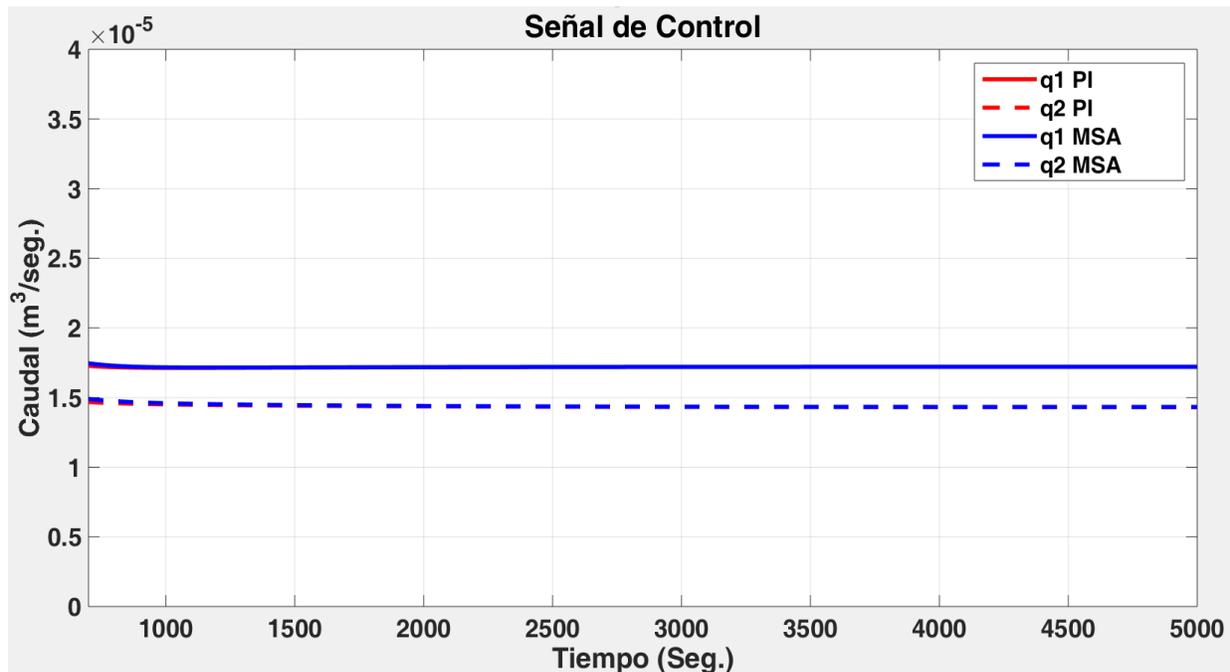


Figura 24. Esfuerzo de control de control PI y MSA.

Se concluye que para mantener el sistema de tres tanques acoplados en sus condiciones nominales de operación, el caudal 1 de la bomba 1 se encuentra en un 14.2% de su capacidad máxima y el caudal de la bomba 2 se encuentra en un 12.1% de su capacidad máxima.

Tabla 5. Características de Actuadores.

Actuador	Punto de operación $\left(\frac{\text{m}^3}{\text{seg.}}\right)$	Caudal máximo $\left(\frac{\text{m}^3}{\text{seg.}}\right)$	Caudal en estado estable $\left(\frac{\text{m}^3}{\text{seg.}}\right)$	Porcentaje de apertura
Bomba 1	0.35e-4	1.2e-4	1.7e-5	14.2%
Bomba 2	0.375e-4	1.2e-4	1.45e-5	12.1%

#### **4.4.1 Fallas en actuadores.**

Las fallas más usuales en los actuadores son por desgaste en las partes mecánicas, atascamientos producidos por suciedad, variaciones de voltaje que alimentan a los actuadores, etc. Para fines de este trabajo las fallas en los actuadores se simularan como atascamientos y variaciones de voltajes.

##### *4.4.1.1 Fallas en los actuadores por atascamientos.*

Las bombas hidráulicas son generalmente las más costosas de un sistema hidráulico y aproximadamente del 70 al 80 por ciento de las fallas se deben por suciedad, por lo tanto, se producen atascamientos y por consiguiente el caudal disminuye provocando un problema en el sistema.

En este caso de estudio se simulan fallas de atascamientos en cada una de las bombas, estas fallas se representan como señales abruptas. A continuación se presenta en el segundo 2000 un atascamiento en la bomba 1 del 70%, es decir, la bomba entrega el 30% del caudal que se está demandando al momento que ocurre la falla.

Como se puede apreciar en la figura 25 a pesar de que ocurre la falla en la bomba 1, los dos esquemas de control logran controlar los niveles a la misma altura, cumpliendo con  $y_1 > y_3 > y_2$ .

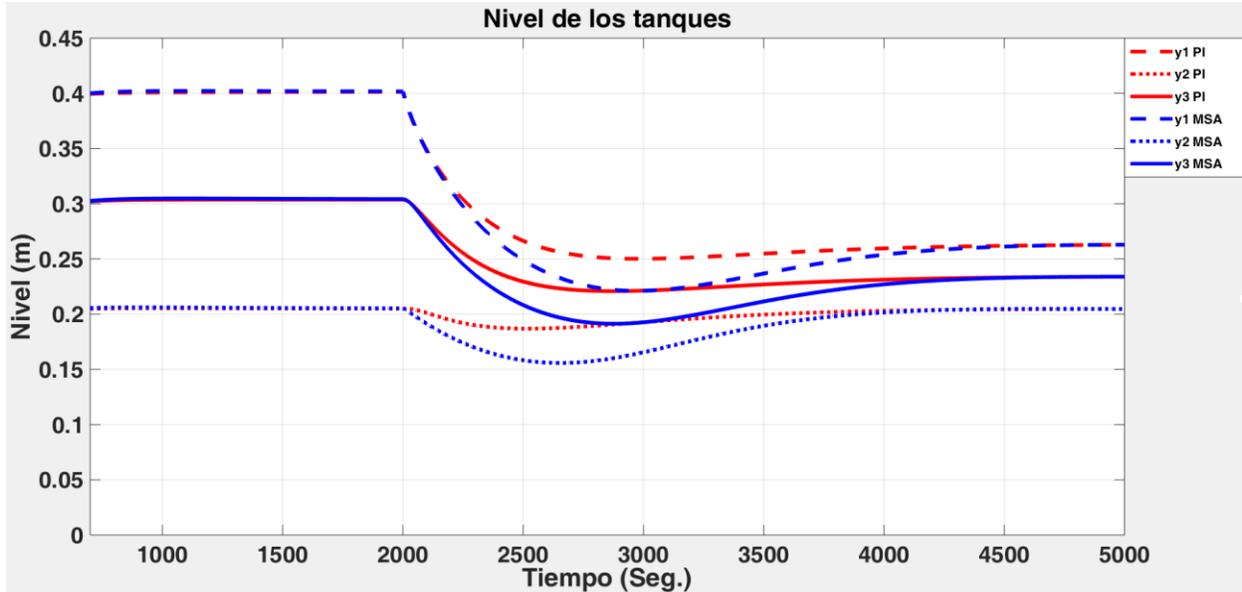


Figura 25. Niveles de los tanques con atascamiento en actuador 1.

Como se puede ver en la figura 26, utilizando un esquema de CMSA se tiene una acción de control más lenta que el esquema de control del PI lineal, por lo tanto tarda un poco más en estabilizar el sistema.

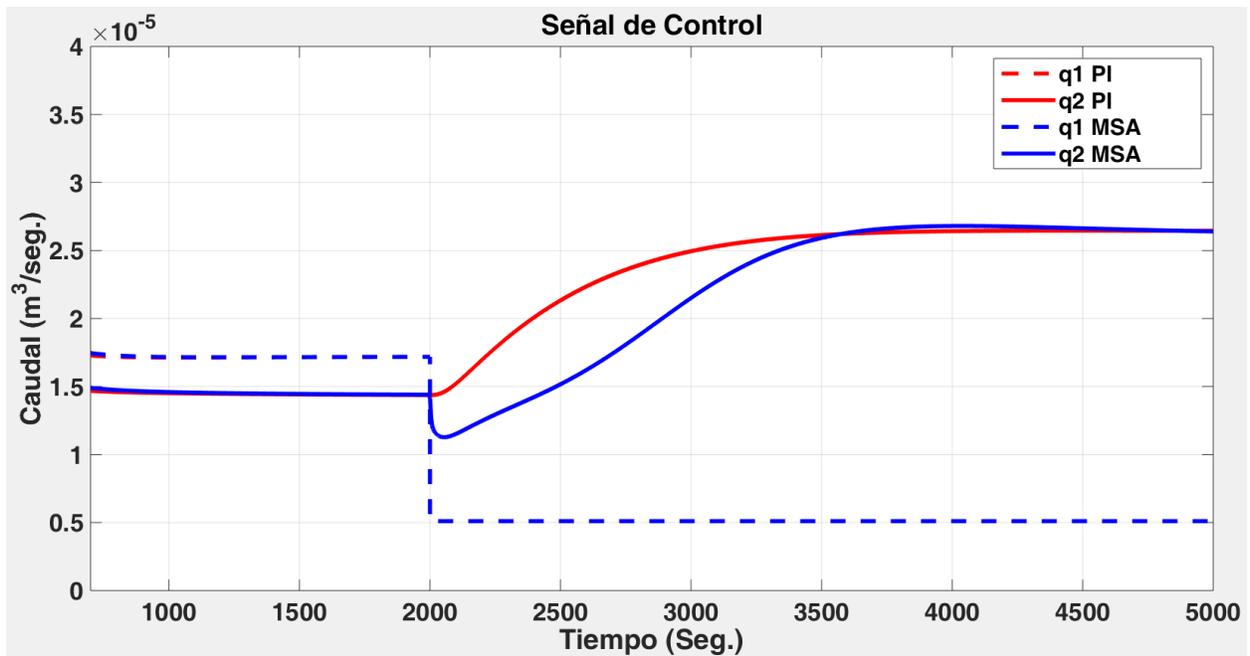


Figura 26. Esfuerzo de control con atascamiento en actuador 1.

#### 4.4.1.2 Fallas en los actuadores por variaciones de voltaje.

Las variaciones de voltajes perjudican el rendimiento de los actuadores, estas fallas se simulan como señales abruptas representando una caída de tensión en un determinado tiempo.

A continuación se presenta en el segundo 2000 una caída de tensión por lo tanto, las bombas 1 y 2 disminuyen su caudal un 50%, es decir, la bomba entrega el 50% del caudal que se está demandando al momento que ocurre la falla.

En la figura 27 se puede observar que con el esquema de CMSA se logran estabilizar más rápidos los niveles de los tanques ya que se tiene un esfuerzo de control mayor que el esquema de control PI lineal a la hora de ocurrir la falla.

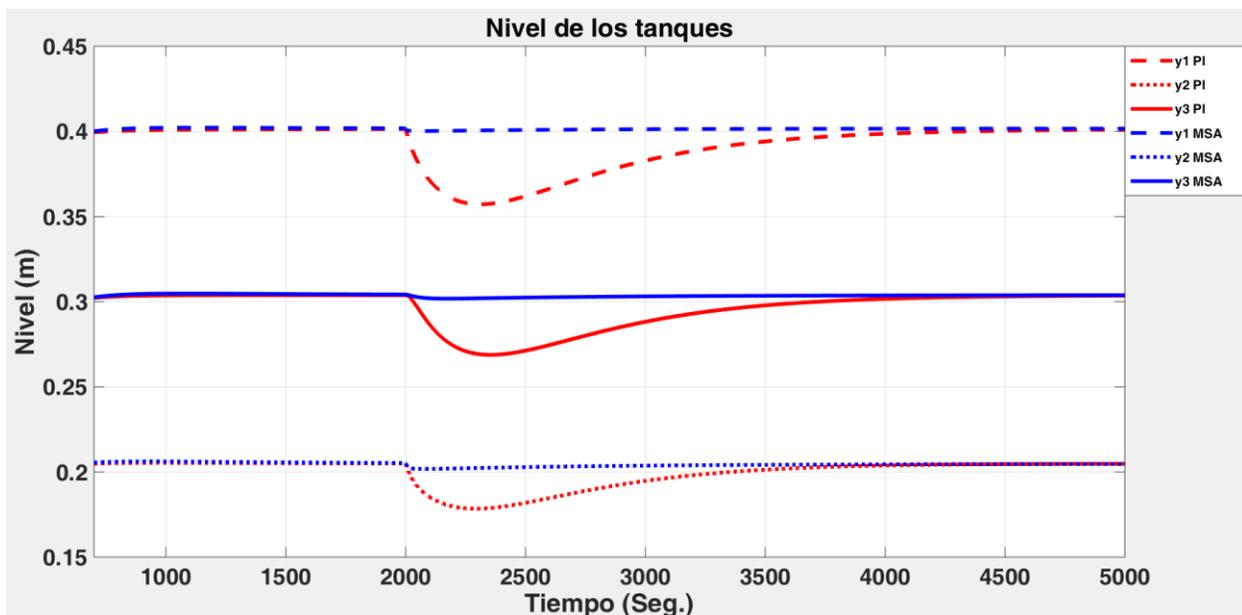


Figura 27 Niveles de los tanques con caída de tensión en actuadores.

En la figura 28 se presentan los esfuerzos de control de las bombas cuando se presenta la falla en el segundo 2000.

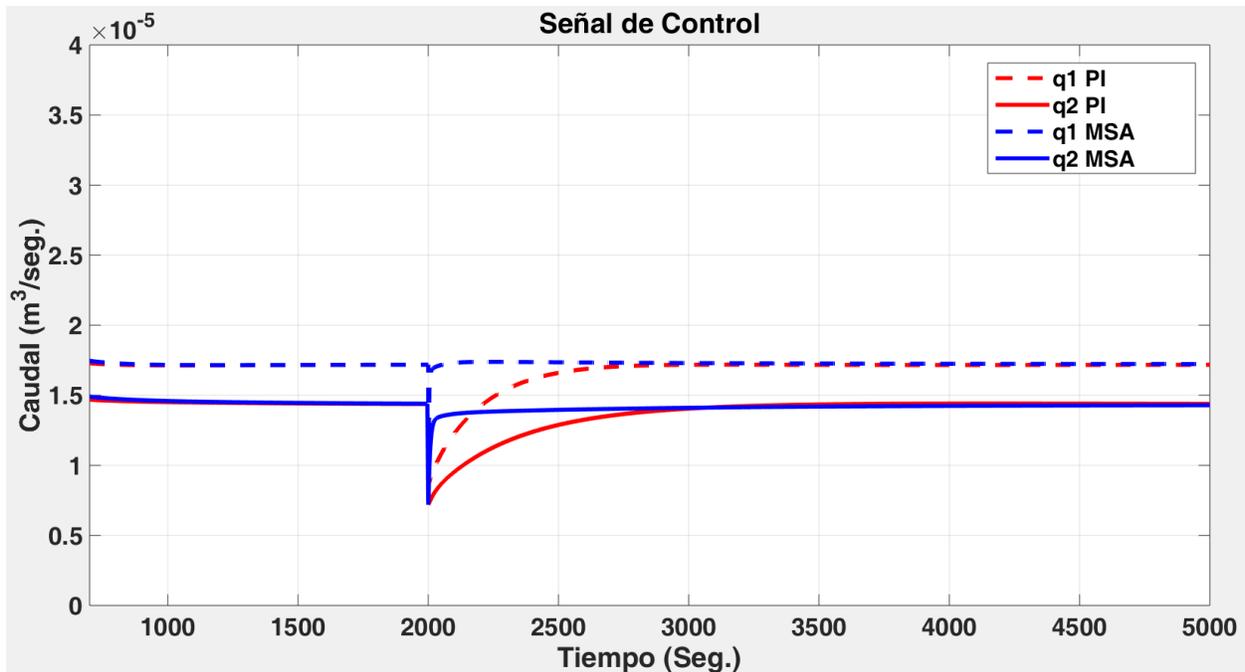


Figura 28 Esfuerzo de control con caída de tensión en los actuadores.

De acuerdo a los resultados obtenidos de las fallas en actuadores se concluye que:

- Para fallas de atascamientos los controles PI lineal y CMSA toleran fallas en el actuador 1 de hasta un 70% de mal funcionamiento y también toleran la avería en el actuador 2.
- Para fallas de caída de tensión en los actuadores el esquema de CMSA tiene mejor desempeño ante el control PI lineal, es capaz de compensar las fallas de una manera rápida y sin tener un problema de saturación en la señal de control.

Para tener un mejor rendimiento en el sistema para el caso de atascamiento en los actuadores se recomienda utilizar una estrategia de CTF que permita reemplazar el actuador con falla por un actuador en buen funcionamiento, es decir, reposición física del actuador.

#### 4.4.2 Fallas en sensores.

Las fallas más usuales en los sensores son las señales congeladas, intermitentes y con errores de medición. Para fines de este trabajo las fallas en los sensores se simularon como señales congeladas y con errores de medición.

##### 4.4.2.1 Falla de congelamiento en la señal.

En el segundo 2000 se presenta una falla en el sensor de nivel del tanque 1 con un delta negativo del 12%, es decir, el sensor detecta el 82% del valor actual y se mantiene congelado sin detectar variaciones.

En la figura 29 se muestran los niveles de los tanques, para cada uno de los niveles se grafican; los niveles de referencias deseados, los niveles reales y los niveles bajo la acción del CMSA.

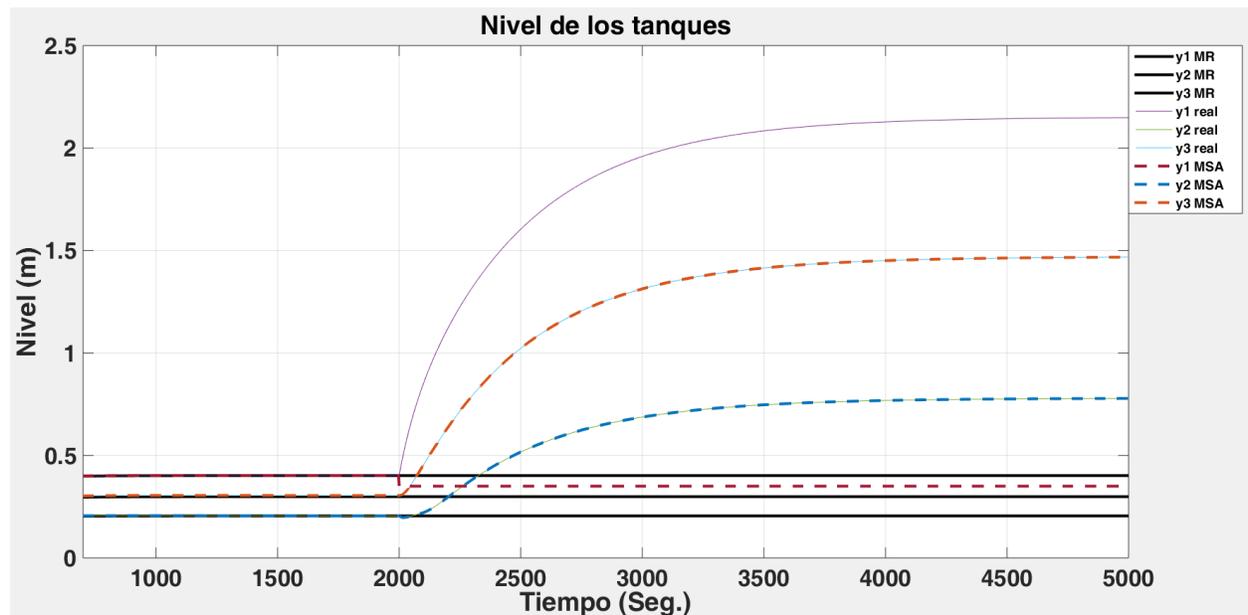


Figura 29. Niveles de los tanques con congelamiento de señal.

En la figura 30 se presentan los esfuerzos de control de las bombas cuando se presenta la falla en el segundo 2000.

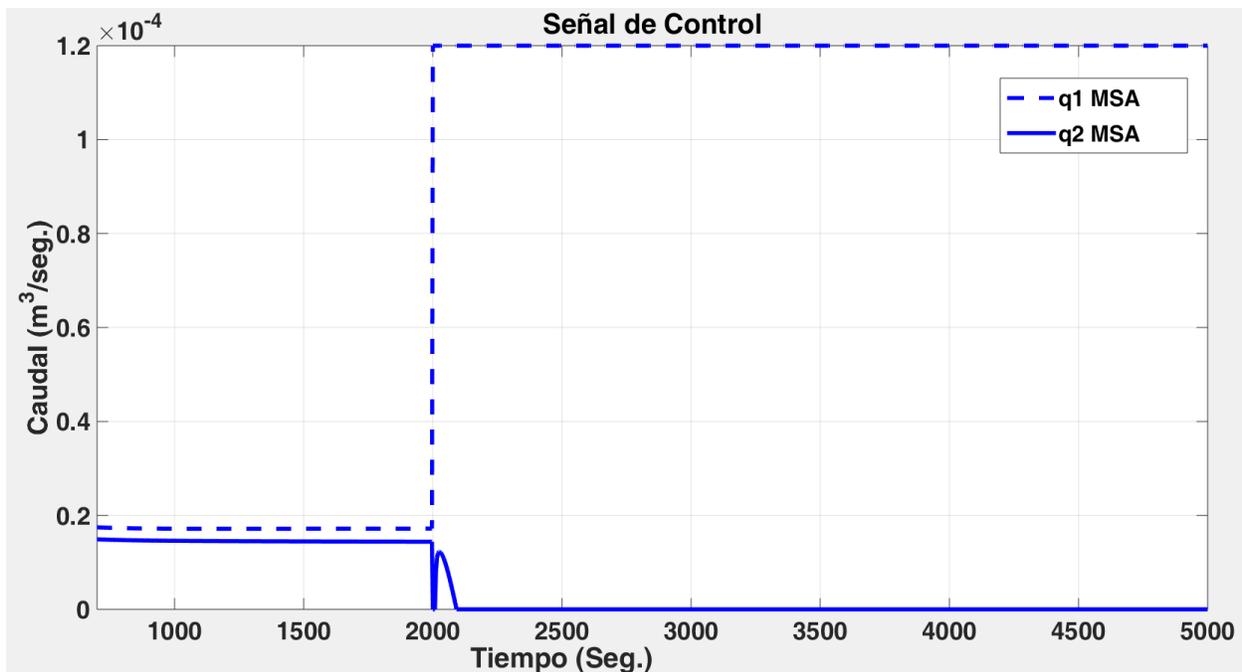


Figura 30. Esfuerzo de control con congelamiento de señal.

#### 4.4.2.2 Error de medición en sensores.

A continuación se presenta una falla en el segundo 2000 en el sensor de nivel del tanque 1 con un delta negativo del 30%, es decir, el sensor detecta el 70% del valor actual.

En la figura 31 se muestran los niveles de los tanques, para cada uno de los niveles se grafican; los niveles de referencias deseados, los niveles reales y los niveles bajo la acción del CMSA.

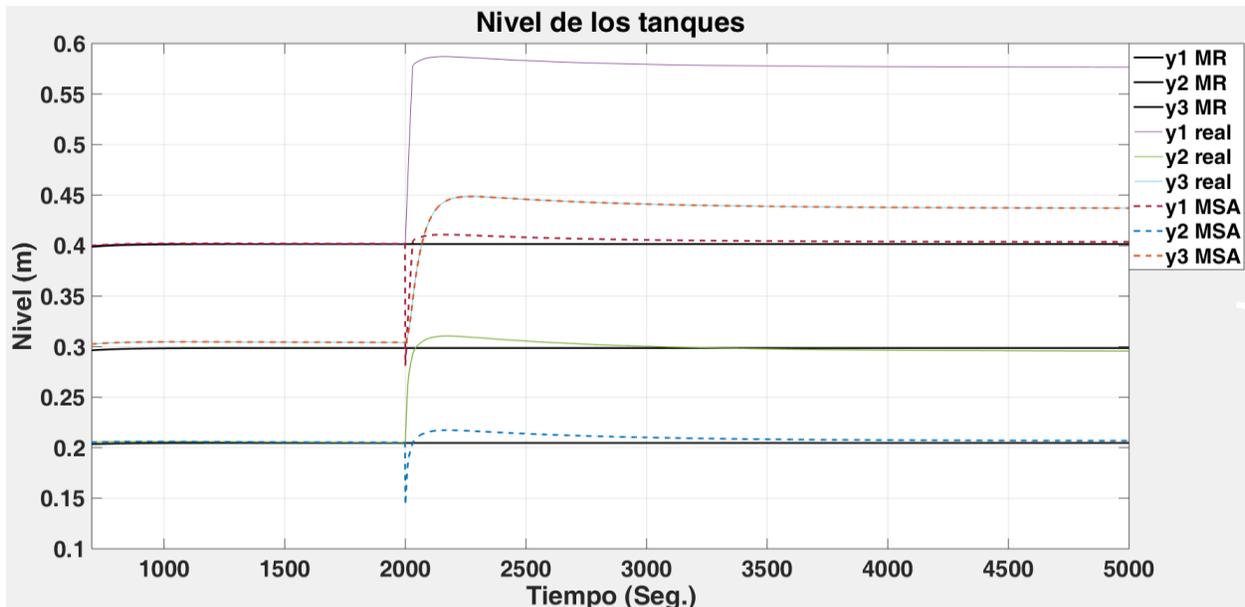


Figura 31. Niveles de los tanques con error de medición en sensor del tanque 1.

En la figura 32 se presentan los esfuerzos de control de las bombas cuando se presenta la falla en el segundo 2000.

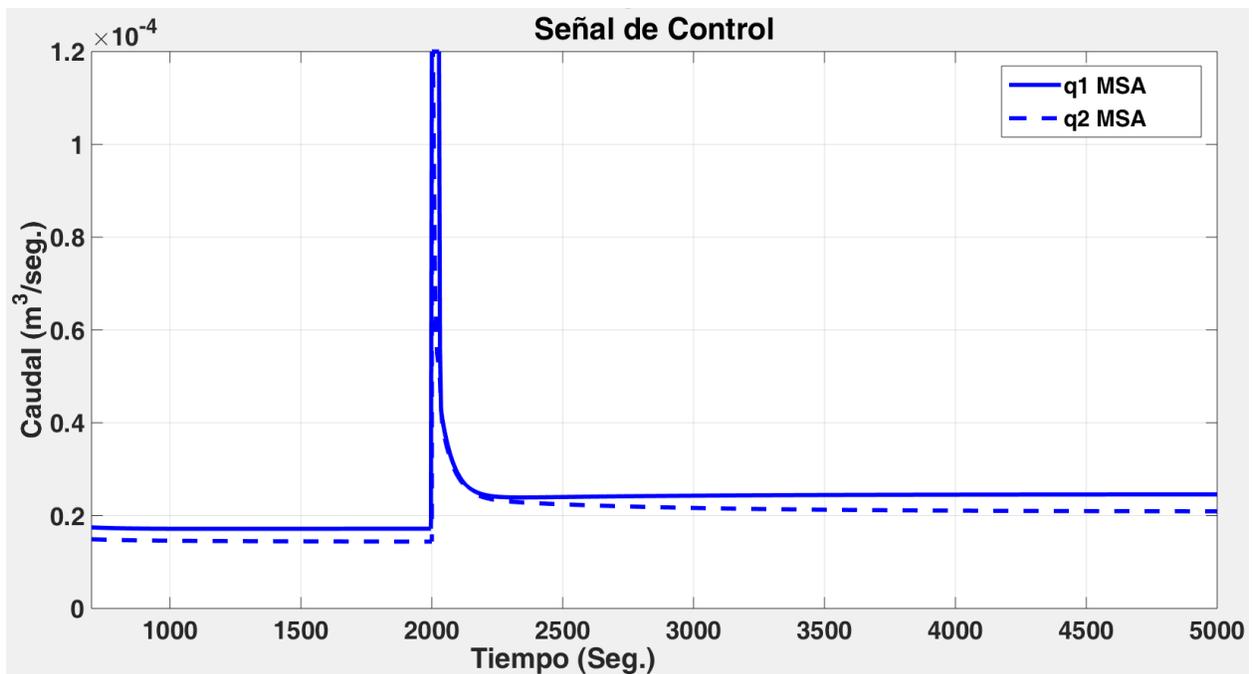


Figura 32. Esfuerzo de control con erro de medición en sensor del tanque 1.

De acuerdo a los resultados obtenidos de las fallas en sensores se concluye que:

- Los esquemas de control PI lineal y CMSA no son capaces de compensar las fallas en los sensores con señal congelada.
- Los esquemas de control PI lineal y CMSA son capaces de compensar una falla de sensor con error de medición, pero el error de medición debe de ser menor al 30% de la señal real.
- Una ventaja del esquema de CMSA es que detecta fallas en el sensor del tanque 3.

Para tener un mejor rendimiento en el sistema se recomienda utilizar una estrategia de control que permita reemplazar el sensor con falla ya sea por una técnica de: redundancia analítica (sensor virtual) o física (reposición de sensor).

#### **4.4.3 Fallas incipientes en parámetros.**

Las fallas incipientes en los parámetros de un sistema ocurren generalmente por un deterioro en el sistema, es decir, que los parámetros van creciendo o decreciendo con el paso del tiempo. Este tipo de fallas se representa mediante una función rampa.

En la figura 33 se muestran los niveles de los 3 tanques, en el segundo 1000 ocurre una falla incipiente; esta falla representa una reducción paulatina de 3000 segundos en el diámetro de la tubería que interconectan los tanque 3 y 2, es decir el área de sección transversal  $S_{p32}$  se disminuye. La falla se puede representar como suciedad, en donde el diámetro de la tubería se reduce un 50%.

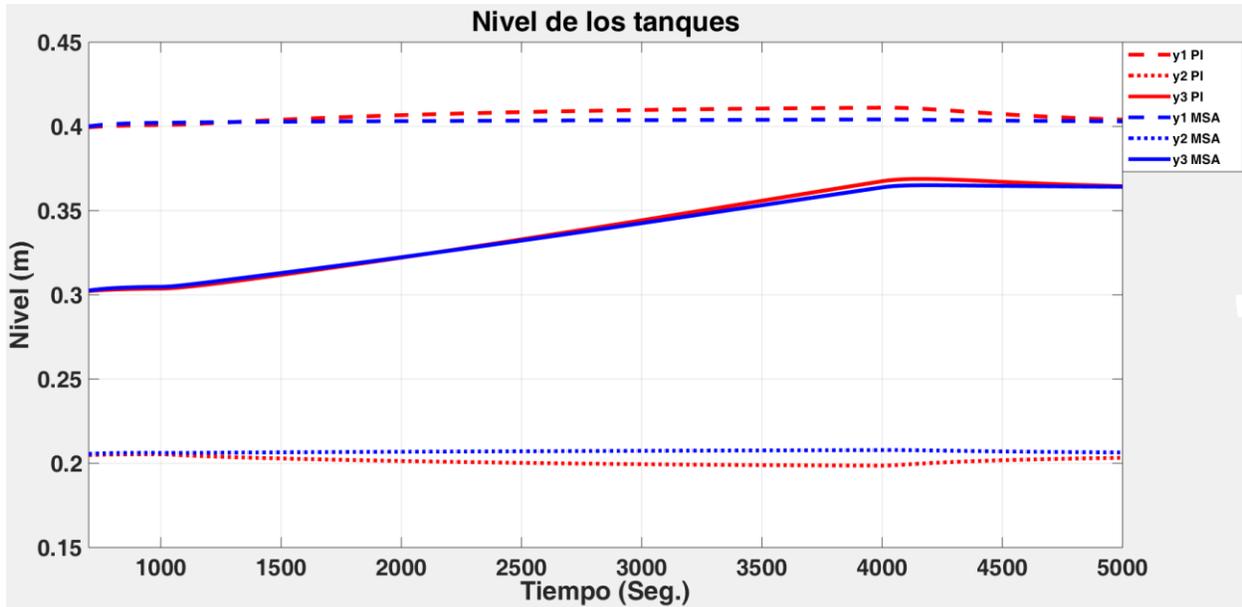


Figura 33. Niveles de los tanques con falla incipiente en Sp32.

En el caso de la falla en la tubería que interconectan los tanques 3 y 2, cuando ocurre la falla el desempeño del control MSA tiene una señal de control similar que el control PI lineal, como se puede ver en la figura 34.

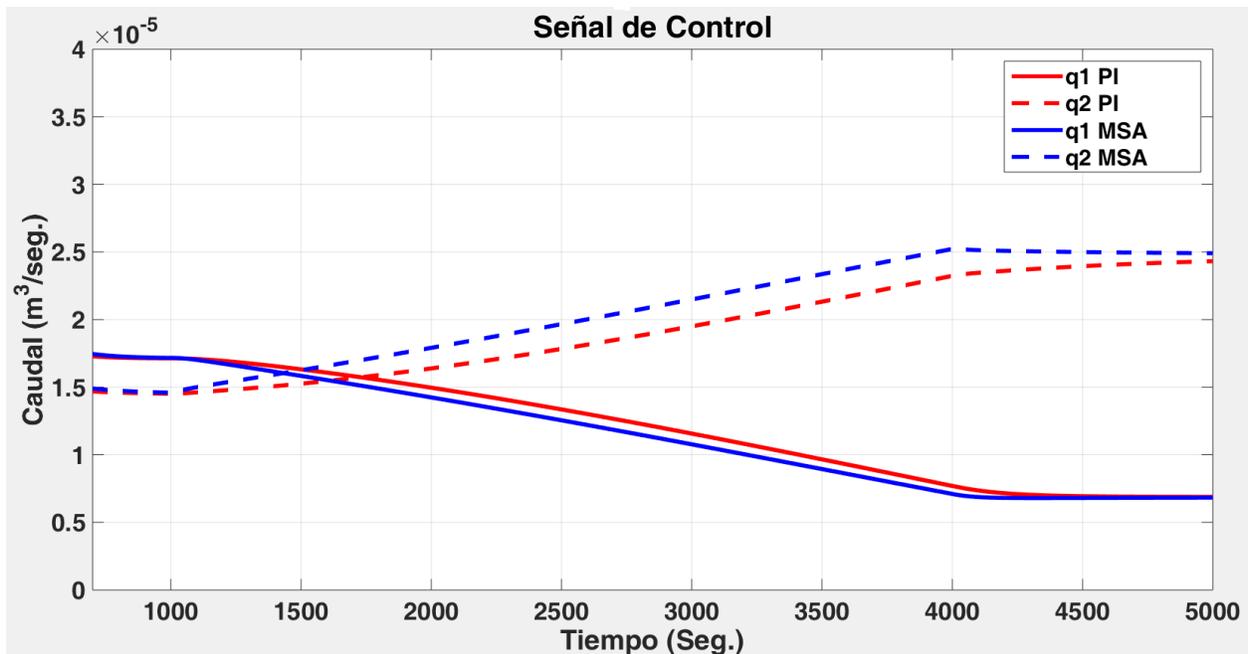


Figura 34. Esfuerzo de control con incipiente en Sp32.

#### 4.4.1 Fallas en tuberías tapadas.

Las fallas más comunes en las tuberías se producen ya sea por corrosión, atascamiento por suciedad, fugas, etc..., para este caso de estudio se simularan fallas de atascamiento por suciedad. Para motivos de simulación esta falla se representa como un cambio abrupto.

##### 4.4.1.1 Falla en la tubería Sp13.

En el segundo 2000 se presenta una falla en la tubería que interconectan a los tanques 1 y 3 de reducción de diámetro del 40%, esta falla se puede representar como un atascamiento en la tubería. En la figura 35 se muestra donde se localiza la falla de atascamiento.

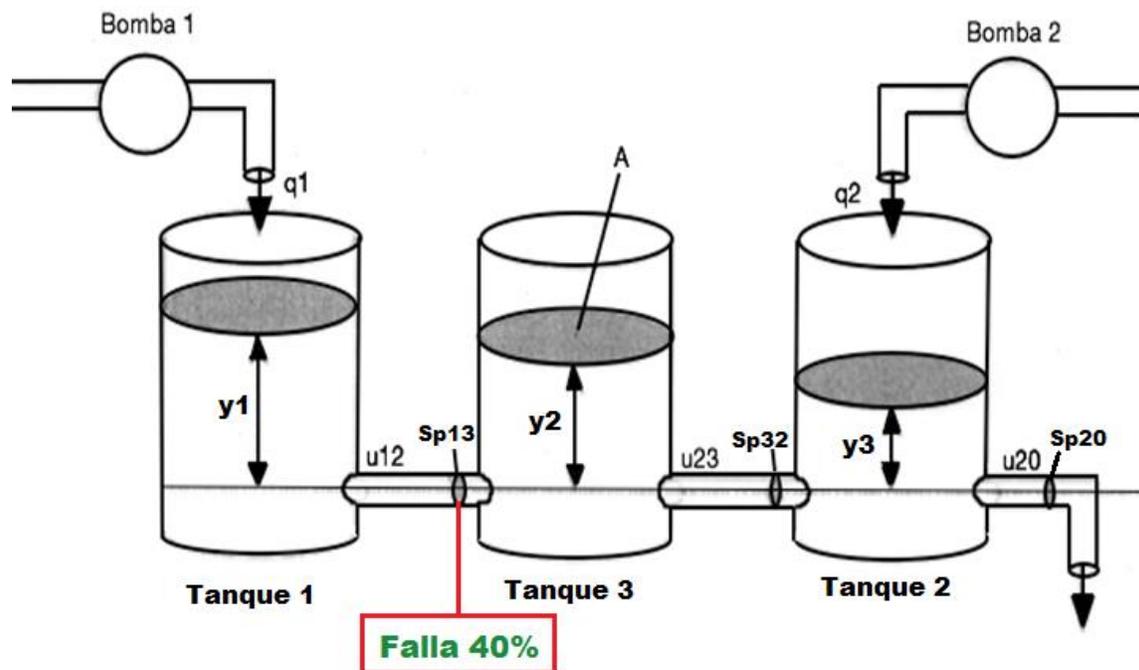


Figura 35. Falla en la tubería Sp13.

La representación física de esta falla repercute en que el nivel del tanque 1 aumente por lo tanto, la señal de control hace que la bomba 1 disminuya su caudal como se puede ver en la figura 36 y así evitar un desbordamiento en los tanques 1.

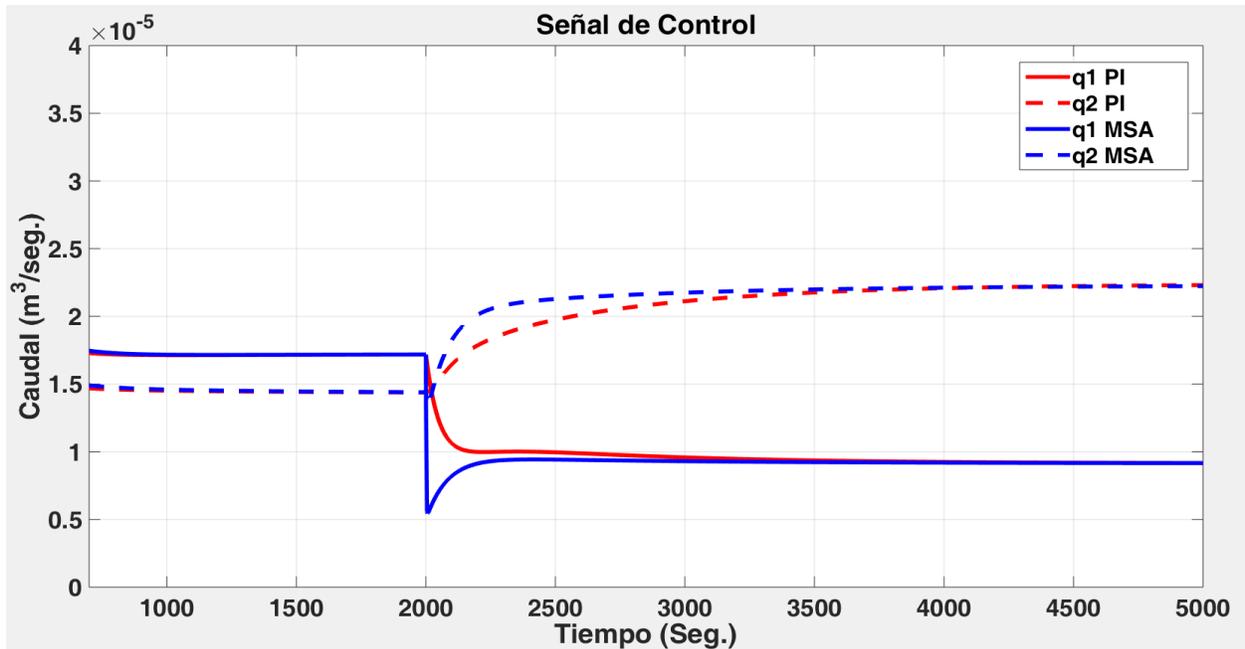


Figura 36. Esfuerzo de control con falla en Sp13.

Después de ocurrir la falla, los niveles de los tanques 3 y 2 disminuyen porque el caudal de entrada en el tanque 3 se reduce, por lo tanto, la señal de control de la bomba 2 hace que aumente su caudal y así mantener los niveles en las referencias deseadas.

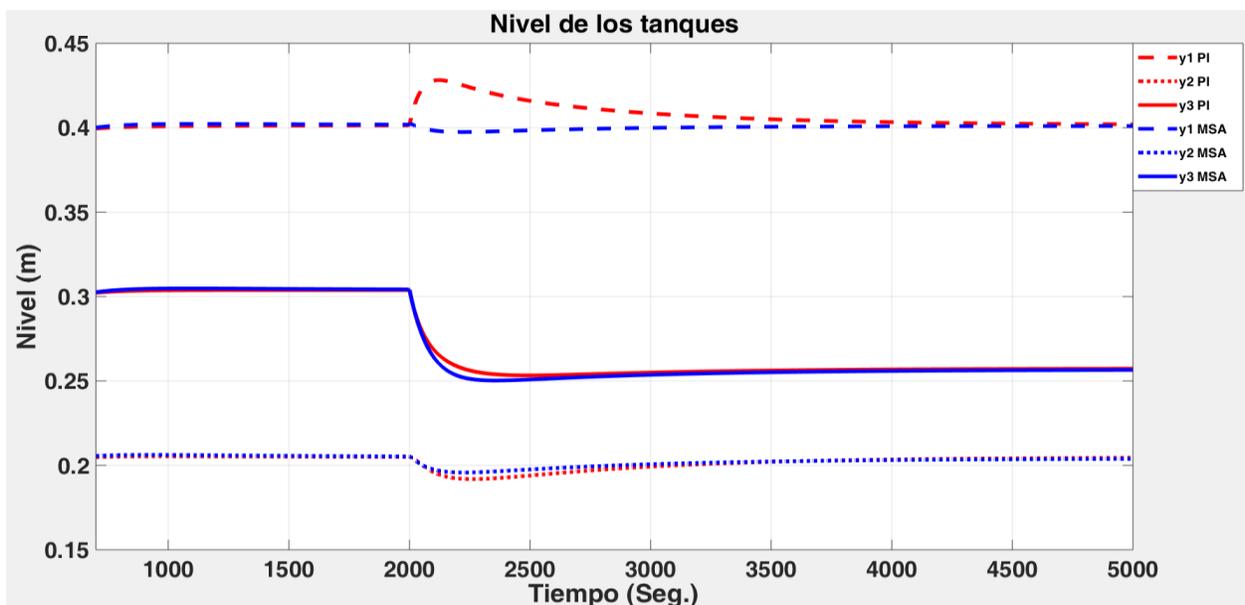


Figura 37. Niveles de los tanques con falla en Sp13.

El desempeño del CMSA tiene una respuesta más rápida que el control PI lineal, eso se ve reflejado en los niveles de los tanques como se puede apreciar en la figura 37.

#### 4.4.1.2 Falla en la tubería Sp32.

En el segundo 2000 se presenta una falla en la tubería que interconectan a los tanques 3 y 2 de reducción de diámetro del 40%, esta falla se puede representar como un atascamiento en la tubería. En la figura 38 se muestra donde se localiza la falla de atascamiento.

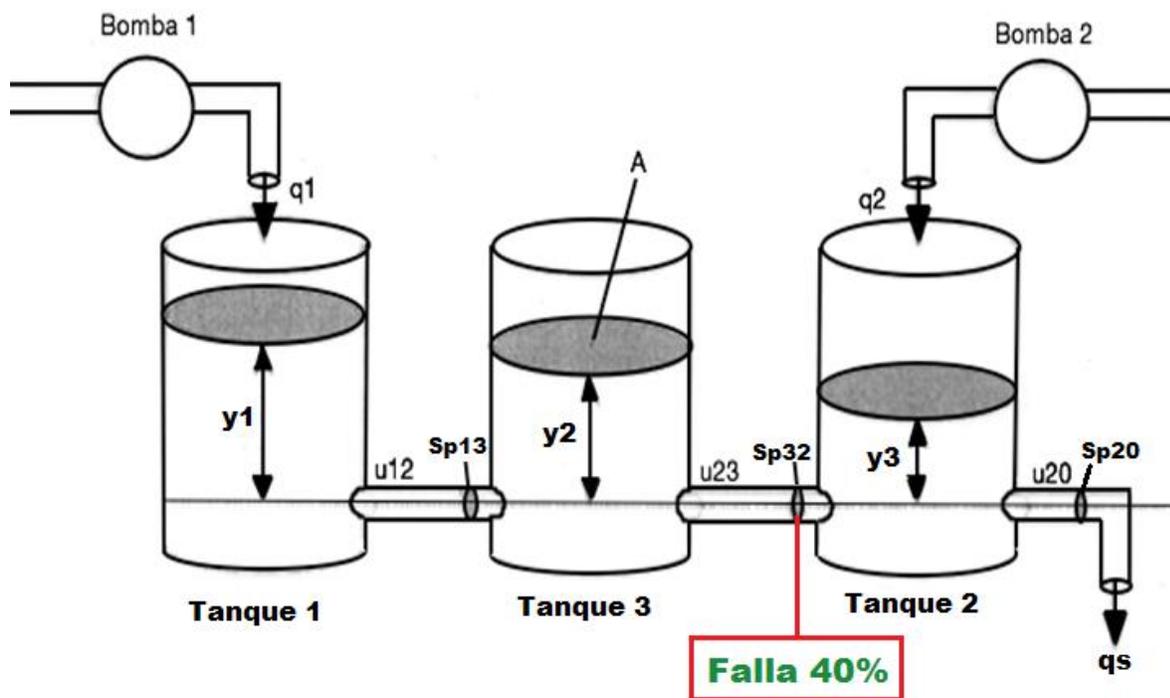


Figura 38. Falla en la tubería Sp32.

La representación física de esta falla repercute en que los niveles de los tanques 1 y 3 aumenten, por lo tanto, la señal de control de la bomba 1 hace que disminuya su caudal como se puede apreciar en la figura 39 y así evitar desbordamientos en los tanques 1 y 3.

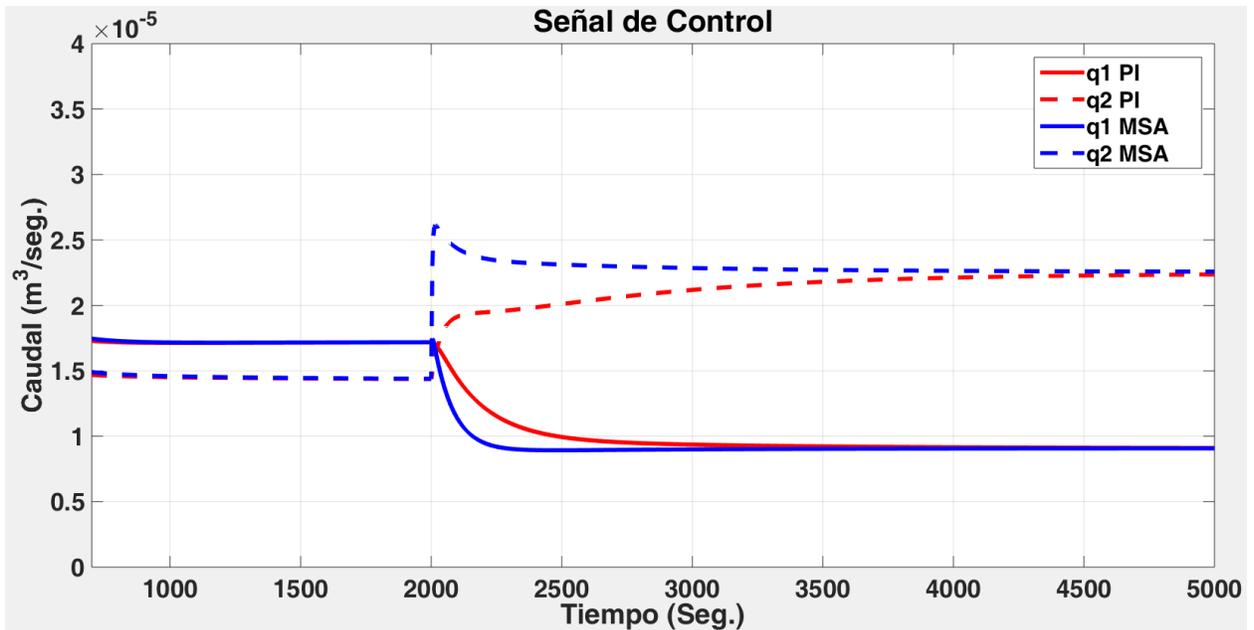


Figura 39. Esfuerzo de control con falla en Sp32.

Después de ocurrir la falla, el nivel del tanque 2 disminuye porque el caudal que entrega a la salida el tanque 3 se reduce, por lo tanto, la señal de control de la bomba 2 hace que aumente su caudal y así lograr mantener el nivel del tanque 2 en la referencia deseada.

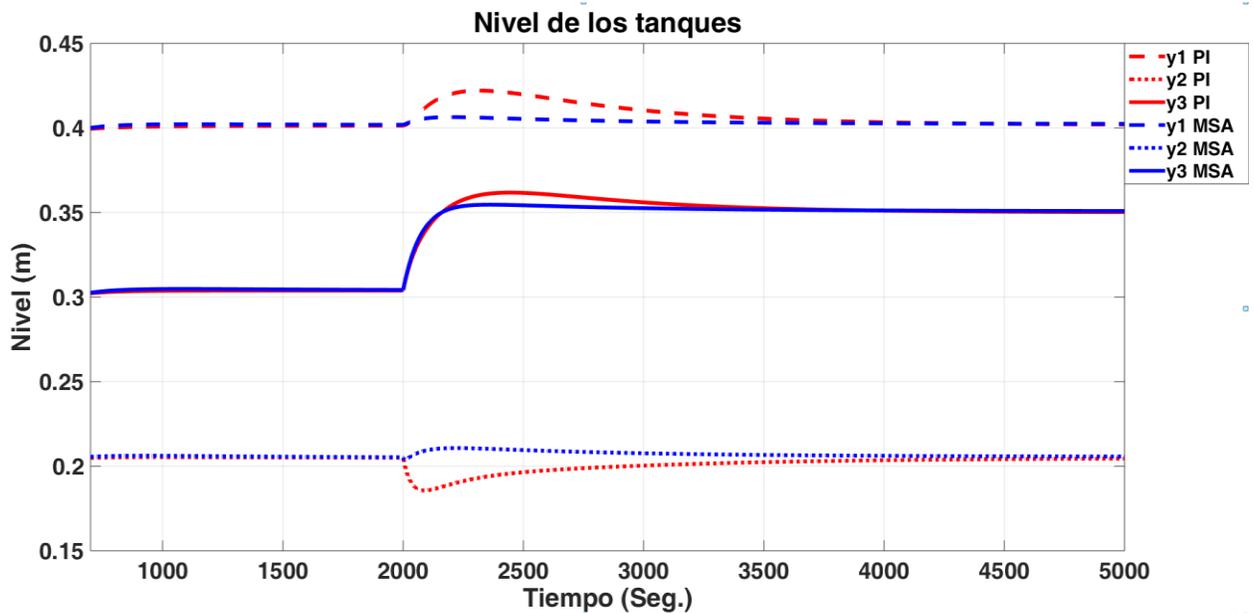


Figura 40. Niveles de los tanques con falla en Sp32.

El desempeño del CMSA tiene una respuesta más rápida que el control PI lineal, eso se ve reflejado en los niveles de los tanques como se puede apreciar en la figura 40.

#### 4.4.1.3 Falla en la tubería Sp20.

En el segundo 2000 en la tubería de salida del tanque 2 se presenta una falla de reducción de diámetro del 40%, esta falla se puede representar como un atascamiento en la tubería. En la figura 41 se muestra donde se localiza la falla de atascamiento.

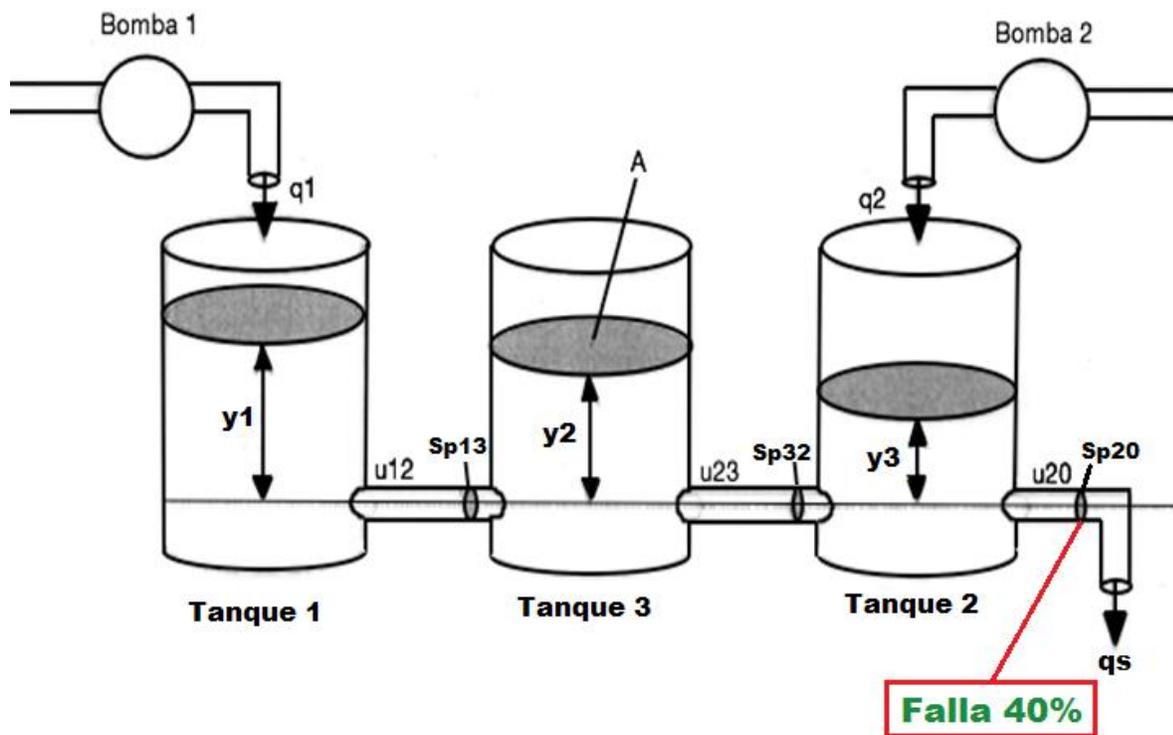


Figura 41. Falla en la tubería Sp20.

La representación física de esta falla repercute en que los niveles de los tanques 1, 3 y 2 aumenten por lo tanto la señal de control de la bomba 2 hace que disminuya el caudal como se puede ver en la figura 42 y así evitar un desbordamiento en los tres tanques.

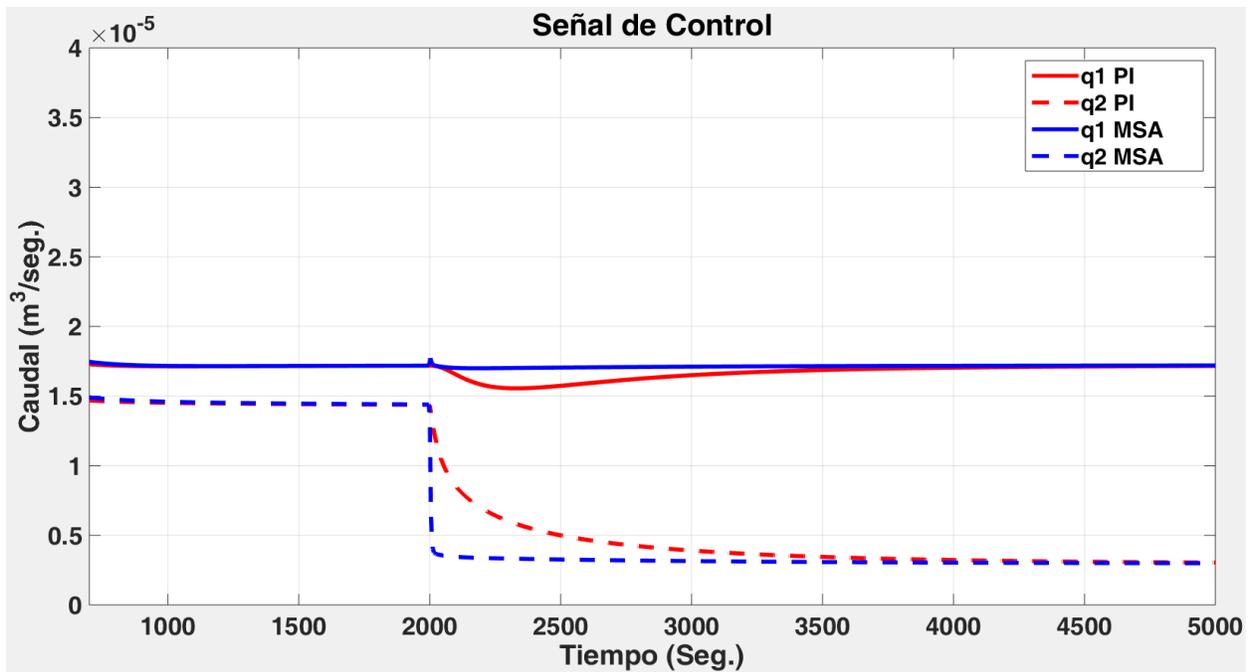


Figura 42. Esfuerzo de control con falla en Sp20.

El desempeño del CMSA tiene una respuesta más rápida que el control PI lineal, eso se ve reflejado en los niveles de los tanques como se puede apreciar en la figura 43.

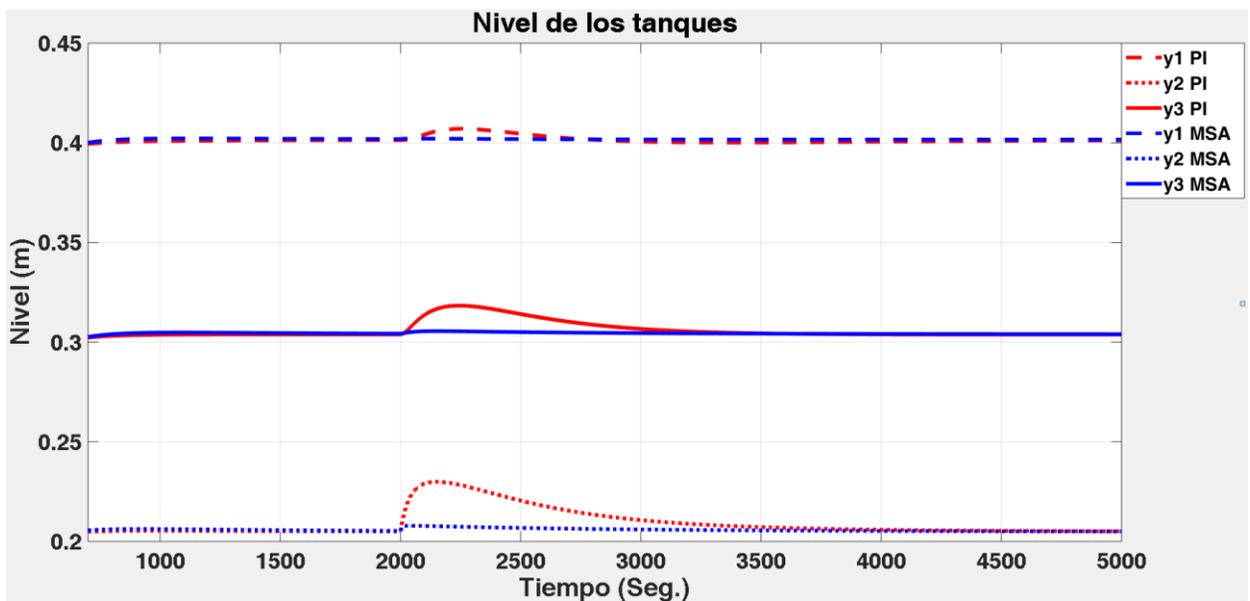


Figura 43. Niveles de los tanques con falla en Sp20.

#### 4.4.2 Fallas de fugas en los tanques.

Algunas de las fallas más comunes que se pueden presentar en los tanques son abolladuras y fugas ya sean causadas por perforaciones o corrosión. Para este caso de estudio se simularan fugas por perforaciones, que serán representadas como señales abruptas.

##### 4.4.2.1 Falla en el tanque 1.

A continuación en el segundo 2000 se presenta una fuga en el tanque 1, la sección transversal del orificio de la fuga  $S_{pf1}$  es igual a la sección transversal  $S_{p13}$  de la tubería que interconecta a los tanques 1 y 3, como se puede visualizar en la figura 44.

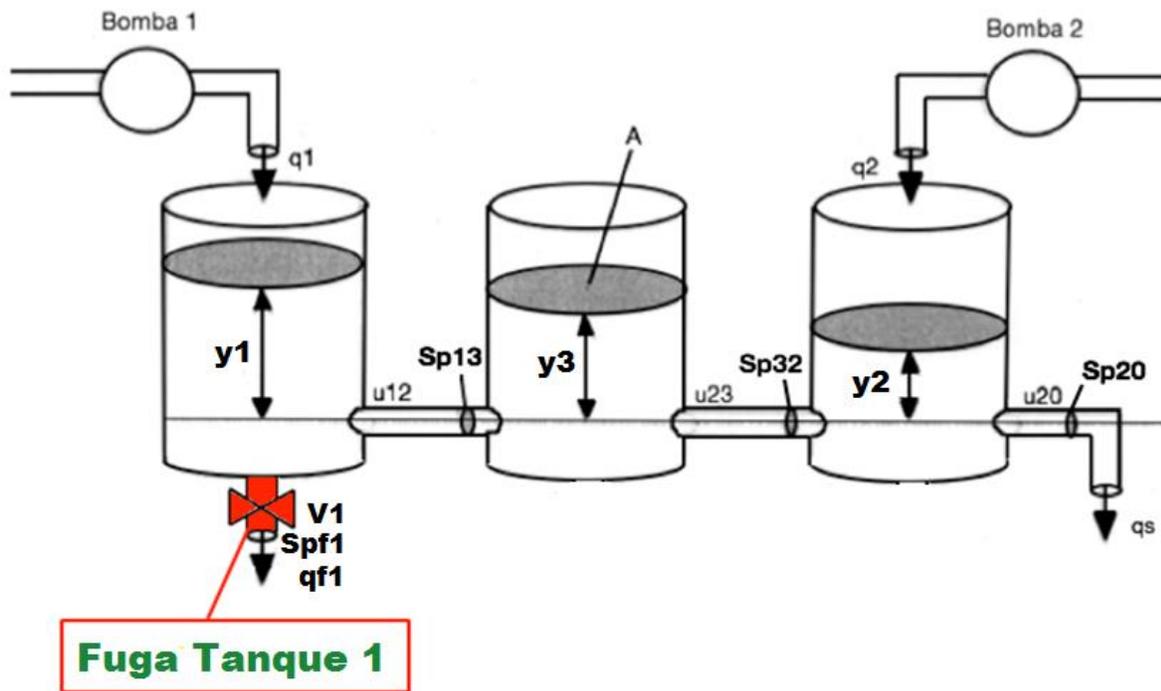


Figura 44. Fuga en el tanque 1.

La representación física de esta falla repercute en que los niveles de los tanques disminuyan pero de mayor magnitud en el tanque 1 por lo tanto, para compensar la fuga en el tanque 1 la señal de control hace que la bomba 1 aumente rápidamente su caudal, como se puede ver en la figura 45.

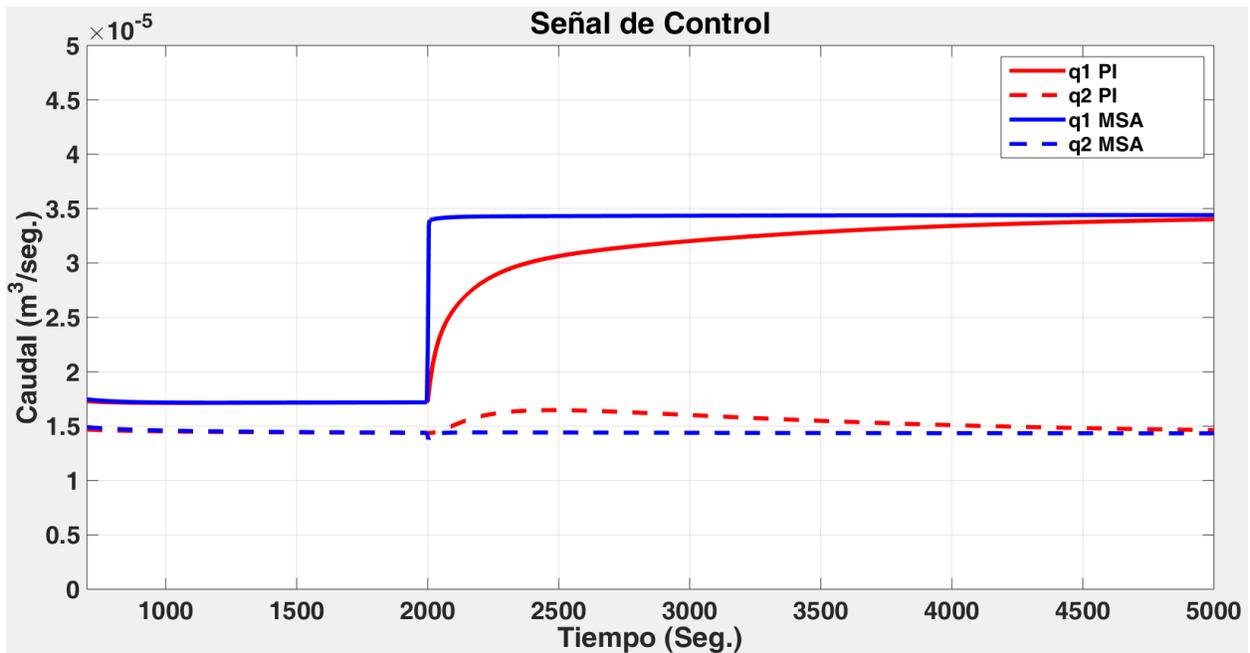


Figura 45. Esfuerzo de control con fuga en tanque 1.

Cuando ocurre la fuga en el tanque 1 el desempeño del control MSA tiene una señal de control más rápida que el control PI, eso se ve reflejado en los niveles de los tanques como se puede ver en la figura 46.

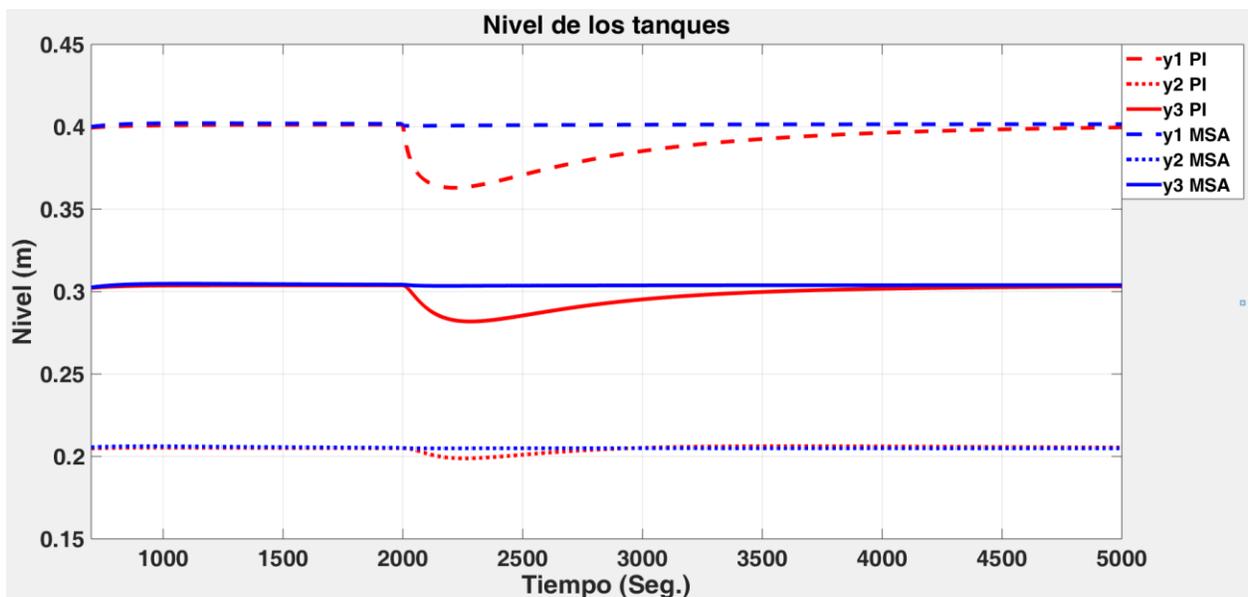


Figura 46. Niveles de los tanques con fuga en tanque 1.

#### 4.4.2.2 Falla en el tanque 3.

A continuación en el segundo 2000 se presenta una fuga en el tanque 3, la sección transversal del orificio de la fuga  $S_{pf3}$  es igual a la sección transversal  $S_{p32}$  de la tubería que interconecta a los tanques 3 y 2, como se puede visualizar en la figura 47.

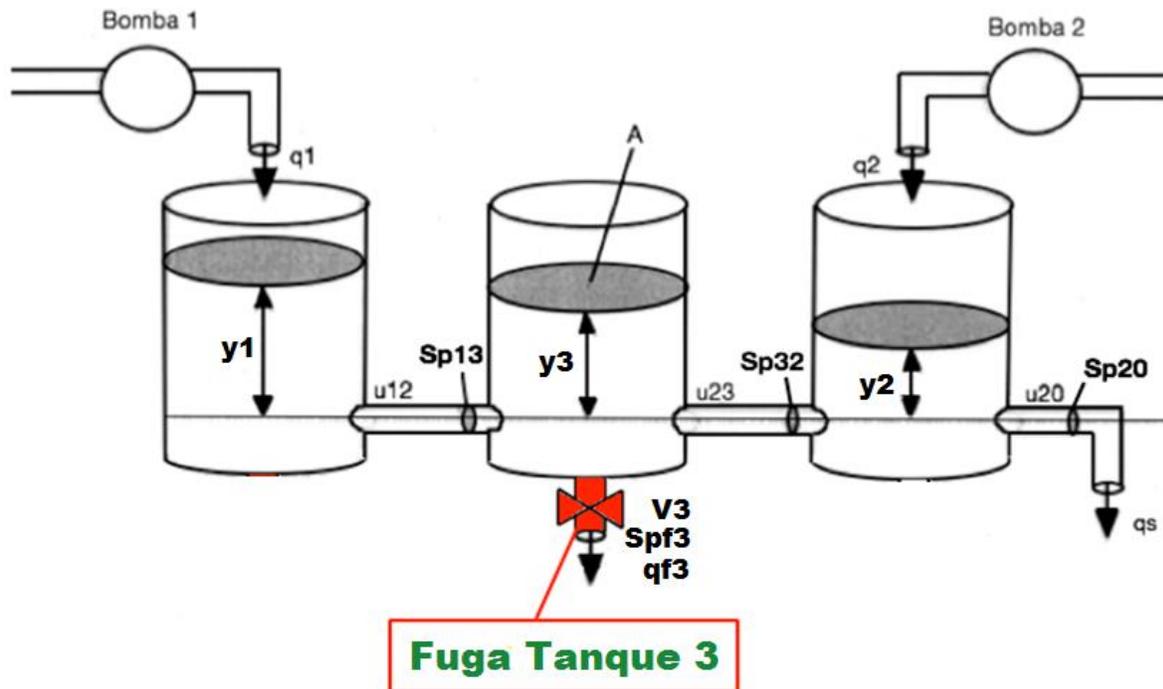


Figura 47. Fuga en el tanque 3.

La representación física de esta falla repercute en que los niveles de los tanques disminuyan, pero de mayor magnitud en el tanque 3 ya que la fuga se presenta ahí por lo tanto, la señal de control hace que la bomba 1 y 2 aumenten sus caudales, como se puede ver en la figura 48.

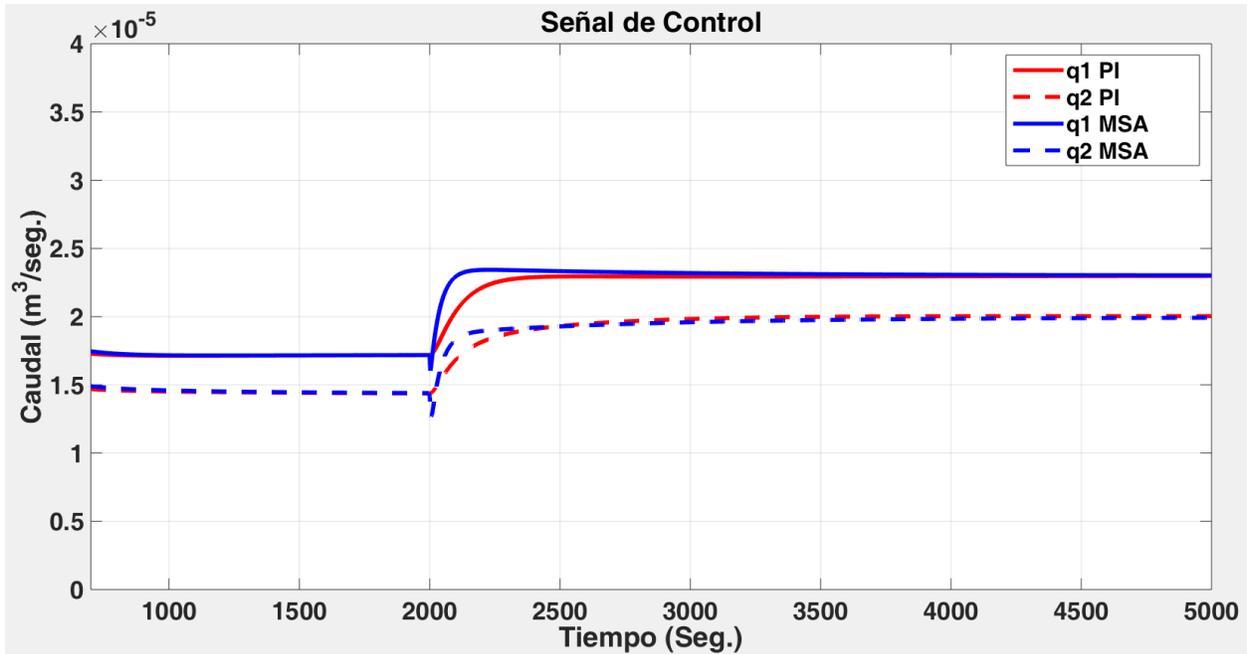


Figura 48. Esfuerzo de control con fuga en tanque 3.

Quando ocurre la fuga en el tanque 3 el desempeño del control MSA tiene una señal de control más rápida que el control PI, eso se ve reflejado en los niveles de los tanques como se puede ver en la figura 49.

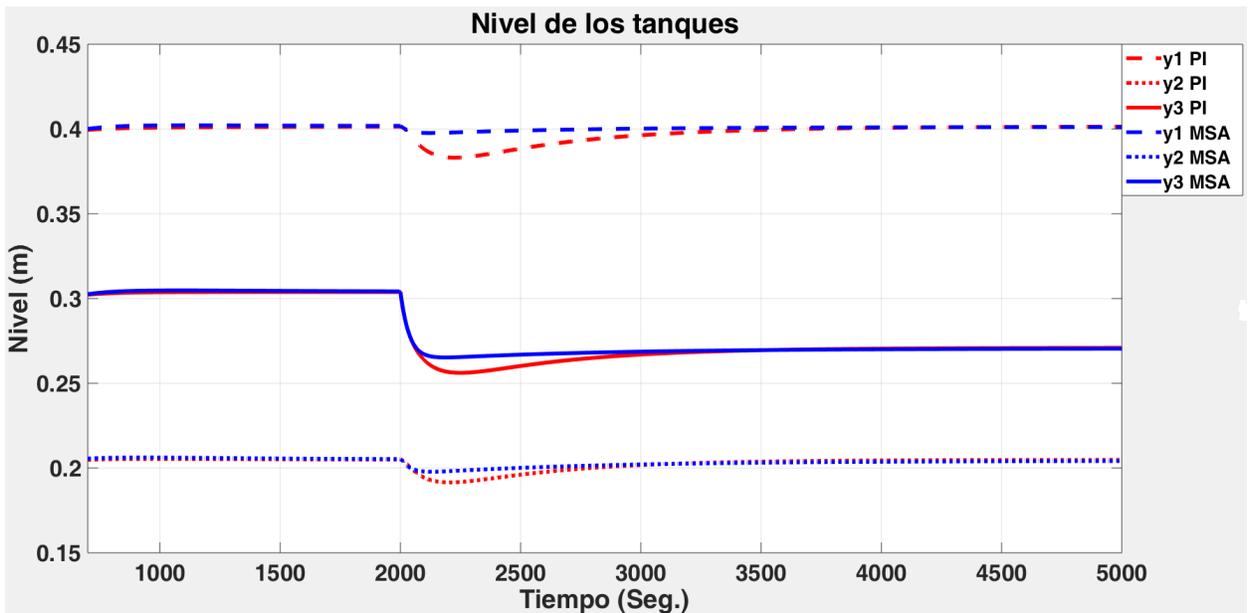


Figura 49. Niveles de los tanques con fuga en tanque 3.

#### 4.4.2.3 Falla en el tanque 2.

A continuación en el segundo 2000 se presenta una fuga en el tanque 2, la sección transversal del orificio de la fuga  $S_{pf2}$  es igual a la sección transversal  $S_{p20}$ , como se puede visualizar en la figura 50.

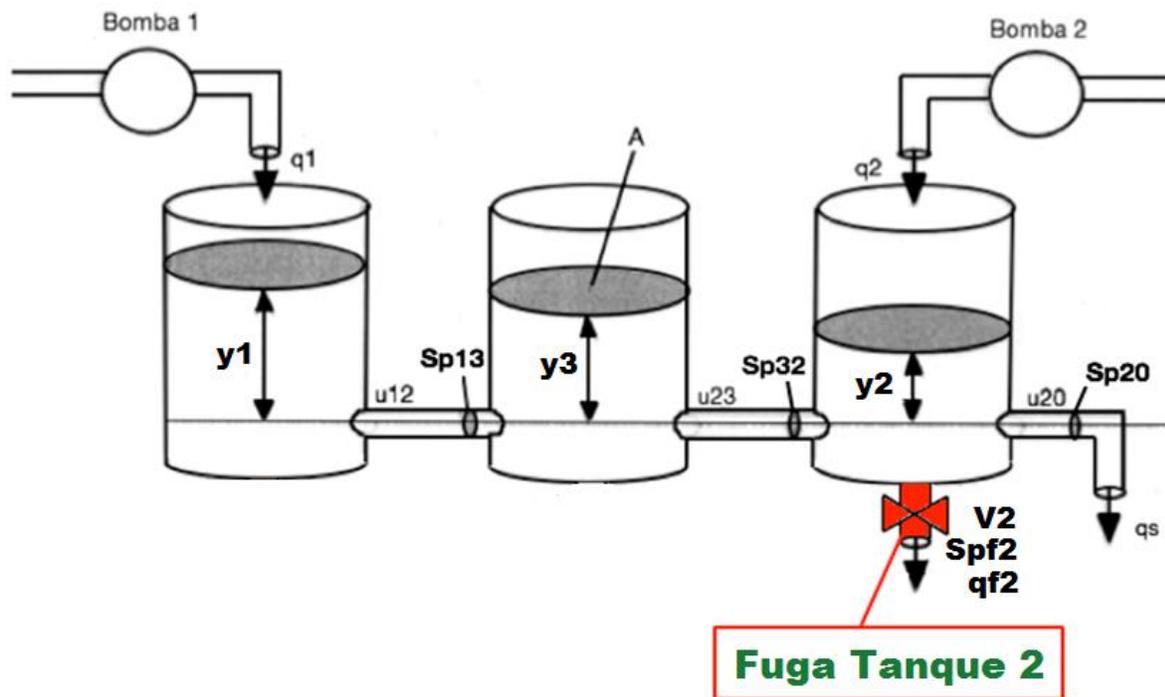


Figura 50. Fuga en el tanque 2.

La representación física de esta falla repercute en que los niveles de los tanques disminuyan pero de mayor magnitud en el tanque 2 por lo tanto, para compensar la fuga en el tanque 2 la señal de control hace que la bomba 2 aumente rápidamente su caudal, como se puede ver en la figura 51.

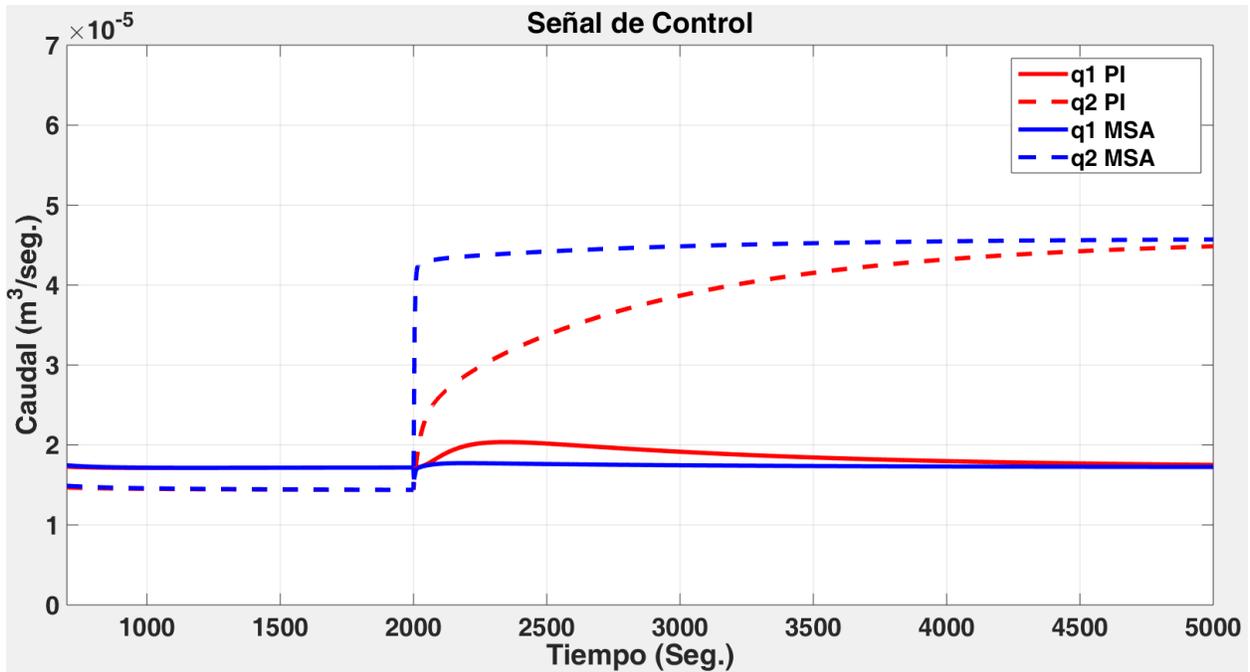


Figura 51. Niveles de los tanques con fuga en tanque 2.

Quando ocurre la fuga en el tanque 2 el desempeño del control MSA tiene una señal de control más rápida que el control PI lineal, eso se ve reflejado en los niveles de los tanques como se puede ver en la figura 52.

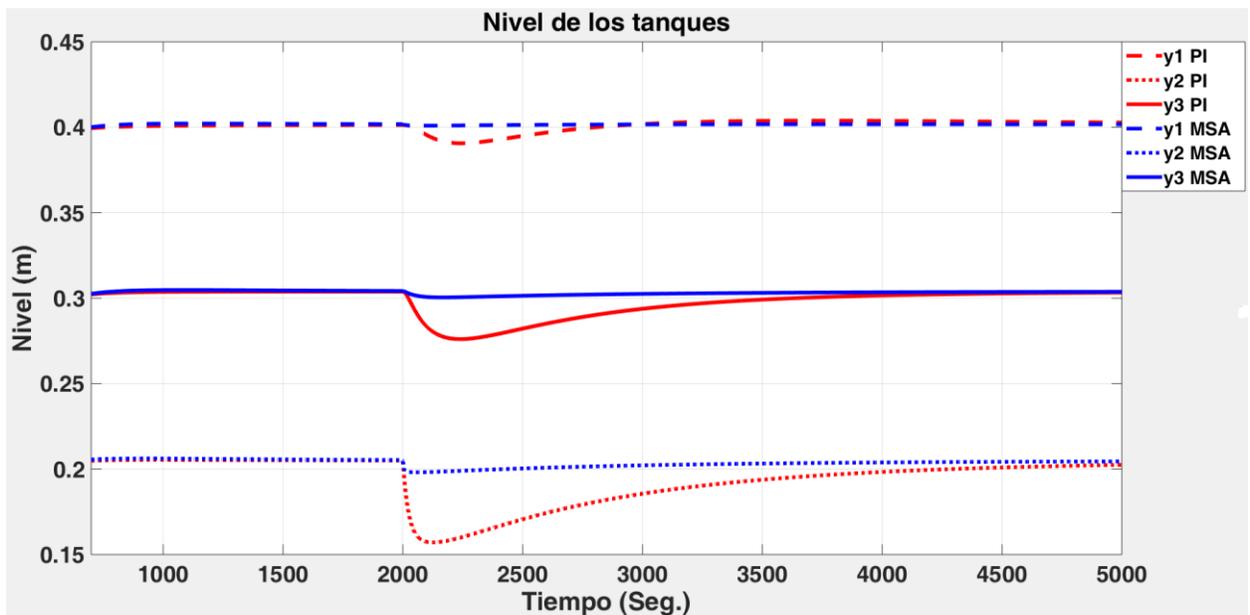


Figura 52. Esfuerzo de control con fuga en tanque 2.

## **5. Conclusiones Generales y Trabajos Futuros.**

### **5.1. Conclusiones Generales.**

El objetivo general de este trabajo fue desarrollar e implementar, en simulación, un sistema de control tolerante a fallas en línea basado en un esquema modelo de seguimiento.

Los objetivos específicos se cumplieron con el objetivo principal de que el esquema de CTF propuesto sea capaz de compensar fallas principalmente de incertidumbres paramétricas en un sistema de tres tanques acoplados.

De acuerdo a las fallas paramétricas que se simularon, se concluye que el esquema de CMSA tiene un buen desempeño y una respuesta más rápida ante fallas que el control PI lineal, además una ventaja del esquema de CMSA es que no se presentan problemas de saturación en el actuador.

Los esquemas de control PI lineal y CMSA son capaces de tolerar fallas en los actuadores con ciertas limitación mencionadas anteriormente en la sección 4.4.1.

Los esquemas de control PI lineal y CMSA no son capaces de compensar las fallas en los sensores con señales congeladas, pero si son capaces de compensar fallas con errores de medición con ciertas limitaciones mencionadas en la sección 4.4.2.

Para tener un mejor rendimiento en el sistema con fallas en actuadores y sensores, se recomienda utilizar una estrategia de control que permita reemplazar el actuador o sensor con falla, ya sea por una técnica de redundancia analítica o física.

## 5.2. Trabajos Futuros.

Los trabajos futuros que surgen de esta investigación son:

- Desarrollar el esquema de CMSA en tiempo discreto.
- Realizar la implementación del CMSA a un sistema físico de tres tanques acoplados.
- Implementar una estrategia de FDD, con el fin de diagnosticar y detectar fallas en sensores y actuadores.

## 6. Bibliografía

- Abdullah, Ali and Mohamed Zribi. 2009. "Model Reference Control of LPV Systems." *Journal of the Franklin Institute* 346(9):854–71.
- Anderson, Brian D. O. 1967. "A System Theory Criterion for Positive Real Matrices." *SIAM Journal on Control* 5(2):171–82.
- Anzures, M. Juan, G. José Padilla, and S. Omar Cuevas. 2008. "Estabilidad de Sistemas No-Lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados ." *Revista de Ingeniería Eléctrica Electrónica y Computación* 5(2):6–12.
- Aydogdu, Ömer and Özdemir Alkan. 2013. "Adaptive Control of a Time-Varying Rotary Servo System Using a Fuzzy Model Reference Learning Controller with Variable Adaptation Gain." *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences* 21(Sup. 2):2168–80.
- Bequette, B. Wayne. 1998. *Process Dynamics: Modelling, Analysis and Simulation*. Prentice H. Upper Saddle River, New Jersey.
- Blanke, Mogens, Christian W. Frei, Franta Kraus, Ron J. Patton, and Marcel Staroswiecki. 2001. "What Is Fault-Tolerant Control?" *Safeprocess* 1–12.
- Blanke, Mogens, Michel Kinnaert, Jan Lunze, and Marcel Staroswiecki. 2006. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. 2nd ed. Germany: Springer Science & Business Media.
- Chamseddine, Abbas, Youmin Zhang, Camille A. Rabbath, Cameron Fulford, and Jacob Apkarian. 2011. "Model Reference Adaptive Fault Tolerant Control of a Quadrotor Uav." *Proceedings of AIAA Infotech Aerospace* (March):1–13.
- Dardinier, V., F. Hamelin, and H. Noura. 1999. "A Fault Tolerant Control Design Against Mayor Actuator Failures Application to a Three Tanks System." Pp. 3569–74 in *Decision & Control*. Phoenix, Arizona USA.
- Ding, Steven. 2008. *Model-Based Fault Diagnosis Techniques: Design Schemes, Algorithms, and Tools*. edited by Springer Science & Business. Germany.

- Gao, Z. and P. J. Antsaklis. 1991. "Pseudo-Inverse Method." Pp. 717–29 in *Stability of the Pseudo-Inverse Method for Reconfigurable Control Systems*, vol. 53, edited by Taylor & Francis. U.S.A.
- Gertler, Janos J. 1998. *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. edited by C. Press. New York.
- Gholipour, Yousof and Ahmad Zare. 2015. "A Review on Comparing the Effect of I and PI Controllers on a Quadruple-Tank Process." *International Journal of Recent Research in Electrical and electronics Engineering* 1(1):1–6.
- Guenab, F., D. Theilliol, P. Weber, J. C. Ponsart, and D. Sauter. 2005. "Fault Tolerant Control Method Based on Cost and Reliability Analysis." *Proceedings of the 16th IFAC World Congress* 1–6.
- He, Xiao, Zidong Wang, Y. D. Ji, and D. H. Zhou. 2012. "Active Fault Tolerant Control for a Class of Networked Systems with Partial Actuator Failures \*." *Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*. 8(1):1299–1304.
- Hijani, Pedram and Javad Poshtan. 2012. "Reconfigurable Controller Design for Actuator Faults in a Four Tanks System Benchmark." *International Journal of Instrumentation and Control System* 2(2):69–76.
- Iqbal, M., Q. R. Butt, and A. I. Bhatti. 2007. "Linear Model Based Diagnostic Framework of Three Tank System." *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference o SYSTEMS* 170–76.
- Jain, Priyank and M. .. Nigam. 2013. "Design of a Model Reference Adaptive Controller Using Modified MIT Rule for a Second Order System." *Advance in Electronic and Electric Engineering* 3(4):477–84.
- Jiang, Jin and Xiang Yu. 2012. "Fault-Tolerant Control Systems: A Comparative Study between Active and Passive Approaches." *Annual Reviews in Control* 36(1):60–72.
- Khuntia, P. S. and Debjani Mitra. 2009. "Fuzzy Model Reference Learning Controller For Pitch \n Control System of an Aircraft." *Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications* 3(20):36–46.
- Landau, I. D. 1972. "A Generalization of Hyperstability Conditions for Model Reference

- Adaptive Systems.” *Automatic Control, IEEE Transactions* 1(April):246–47.
- Landau, I. D. 1974. “A Survey of Model Reference Adaptive Techniques-Theory and Applications.” *Automatica* 10(4):353–79.
- Landau, I. D. and B. Courtiol. 1974. “Design of Multivariable Adaptive Model Following Control Systems.” *Automatica* 10(5):483–94.
- Landau, Ioan Dorb. 1969. “A Hyperstability Criterion for Model Reference Adaptive Control Systems.” *Automatic Control, IEEE Transactions* (October):552–55.
- Landau, Yoan Doré. 1979. *Adaptive Control: The Model Reference Approach*. edited by J. M. Mendel. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc.
- Lopez, Betty Y. et al. 2014. “Sensors and Actuator Fault Tolerant Control Applied in a Heat Exchanger.” *Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*. 1–6.
- Mahmoud, Mufeed, Jin Jiang, and Youmin Zhang. 2003. *Active Fault Tolerant Control Systems*. Alemania: Springer Science & Business Media.
- Mendonça, L. F., J. M. Sousa, and J. Da Costa. 2008. “Fault Accommodation of an Experimental Three Tank System Using Fuzzy Predictive Control.” *Fuzzy Systems, IEEE World Congress on Computational Intelligence* 1619–25.
- Newell, R. B. and D. G. Fisher. 1972. “Experimental Evaluation of Optimal, Multivariable Regulatory Controllers with Model-Following Capabilities.” *Automatica* 8(3):247–62.
- Noura, Hassan, Dominique Sauter, Frédéric Hamelin, and Didier Theilliol. 2000. “Fault-Tolerant Control in Dynamic Systems: Application to a Winding Machine.” *Control Systems, IEEE* 20(1):33–49.
- Noura, Hassan, Didier Theilliol, Jean C. Ponsart, and Abbas Chamseddine. 2009. *Fault-Tolerant Control Systems: Design and Practical Applications*. London: Springer Science & Business Media.
- Ogata, Katsuhiko. 2010. *Ingeniería de Control Moderna*. 5ta ed. Madrid: Pearson Educación.
- Patton, R. J., J. Chen, and T. M. Siew. 1994. “Fault Diagnosis in Nonlinear Dynamic

- Systems Via Neural Networks.” *Control’94 International Conference* 2(389):1346–51.
- Puig, Vicenç, Joseba Quevedo, Teresa Escobet, Bernardo Morcego, and Carlos Ocampo. 2004a. “Control Tolerante a Fallas (Parte II): Mecanismo de Tolerancia Y Sistema Supervisor.” *Revista Iberoamericana de Automática e informática Industrial* 1(2):5–21.
- Puig, Vicenç, Joseba Quevedo, Teresa Escobet, Bernardo Morcego, and Carlos Ocampo. 2004b. “Control Tolerante a Fallos ( Parte I ): Fundamentos Y Diagnóstico de Fallos.” *Revista Iberoamericana de Automática e informática Industrial* 1(1):15–31.
- Rotondo, Damiano, Fatiha Nejjari, and Vicenc Puig. 2015. “Robust Quasi-LPV Model Reference FTC of a Quadrotor UAV Subject to Actuator Faults.” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 25(1):7–22.
- Simani, Silvio and Paolo Castaldi. 2012. “Adaptive Fault Tolerant Control Design Approach for a Wind Turbine Banchmark.” *Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS)* 8(1):319–24.
- Theilliol, Didier, Hassan Noura, and Jean Christophe Ponsart. 2002. “Fault Diagnosis and Accommodation of a Three-Tank System Based on Analytical Redundancy.” *ISA transactions* 41(3):365–82.
- Vallabhai, Missula Jagath, Pankaj Swarnkar, and D. M. Deshpande. 2012. “Comparative Analysis of PI Control and Model Reference Adaptive Control Based Vector Control Strategy for Induction Motor Drive.” *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)* 2(3):2059–70.
- Vargas, Adriana, Luis E. Garza, Vicenç Puig, and Rubén Morales. 2012. “Robust MRAC-Based Fault Tolerant Control for Additive and Multiplicative Faults in Nonlinear Systems.” Pp. 540–45 in *In 8th SAFEPROCESS 2012. IFAC International Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*.
- Verde, Cristina, Sylviane Gentil, and Rubén Morales. 2013. *Monitoreo Y Diagnóstico*

*Automático de Fallas En Sistemas Dinámicos*. Mexico: Trillas.

Zhang, Ke, Bin Jiang, and Peng Shi. 2013. *Observer-Based Fault Estimation and Accomodation for Dynamic Systems*. New York: Springer Science & Business Media.

Zhang, Y. and J. Jiang. 2003. "Fault Tolerant Control System Design with Explicit Consideration of Performance Degradation." *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 39(3):838–48.

Zhang, Youmin and Jin Jiang. 2008. "Bibliographical Review on Reconfigurable Fault-Tolerant Control Systems." *Annual Reviews in Control* 32(2):229–52.

Zhi-jun, Yang, Qi Xiao-hui, and Shan Gan-lin. 2009. "Fault Tolerant Flight Control Law Design with a Model-Following Sliding Mode Controller." *2009 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation* 1(1):665–68.

## 7. Anexos

### Anexo A Linealización.

Una manera de iniciar el análisis del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{A. 1})$$

es determinar sus puntos de equilibrio y describir su comportamiento cerca de estos. El comportamiento local del sistema no lineal (C1) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$  está determinado cualitativamente por el comportamiento del sistema lineal.

$$\dot{x} = Ax. \quad (\text{A. 2})$$

Definición 1. Un punto  $x_e \in \mathbb{R}^n$  se llama un punto de equilibrio o punto crítico de (C1) si  $f(x_e) = 0$ . Un punto de equilibrio  $x_e$  se llama un punto de equilibrio hiperbólico de (C1) si ninguno de los eigenvalores de la matriz  $Df(x_e)$  tiene parte real igual a cero. El sistema lineal (C2) con la matriz  $A = Df(x_e)$  se llama la linealización (tangencial) de (C1) en  $x_e$ .

Si  $x_e = 0$  es un punto de equilibrio de (C1), entonces  $f(0) = 0$  y, por el Teorema de Taylor,

$$f(x) = Df(x_e)x + \frac{1}{2}D^2f(x_e)(x, x) + \dots, \quad (\text{A. 3})$$

Resulta que la función lineal  $Df(0)x$  es una buena primera aproximación de la función no lineal  $f(x)$  cerca de  $x = 0$  y es razonable esperar que el comportamiento del sistema no lineal (C1) cerca del punto  $x = 0$  estará aproximado por el comportamiento de su linealización en  $x = 0$ .

Definición 2. Un punto de equilibrio  $x_e$  se llama un sumidero si todos los eigenvalores de la matriz  $Df(x_e)$  tienen parte real negativa; se llama una fuente si todos los eigenvalores de la matriz  $Df(x_e)$  tienen parte real positiva; y se llama un punto silla si es un punto de equilibrio hiperbólico y  $Df(x_e)$  tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos uno con parte real negativa.

## Anexo B. Estabilidad y Funciones de Lyapunov.

La estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{B. 1})$$

La estabilidad de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_e$  de (B.1) la determina el signo de las partes reales de los eigenvalores  $\lambda_j$  de la matriz jacobiana,  $Df(x_e)$ , de  $f$  evaluada en  $x_e$ . Un punto de equilibrio hiperbólico  $x_e$  es asintóticamente estable si, y sólo si,  $Re(\lambda_j) < 0$ , si  $x_e$  es un sumidero. Y un punto de equilibrio hiperbólico  $x_e$  es inestable si, y sólo si, es una fuente o un punto silla.

Definición 3. Se dice que  $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Lyapunov si satisface:

- a)  $V \in C^1(\Omega)$ ,
- b)  $V(x_e) = 0$ ,
- c)  $V(x) > 0$ , si  $x \neq x_e$  (definida positiva).

Teorema 1. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con  $x_e \in \Omega$ . Suponga que  $f \in C^1(\Omega)$  y que  $f(x_e) = 0$ . Suponga que existe una función de Lyapunov  $V$ . Luego,

- a) Si  $\dot{V}(x) \leq 0$  para toda  $x \in \Omega$ , entonces  $x_e$  es estable,
- b) Si  $\dot{V}(x) < 0$  para toda  $x \in \Omega - \{x_e\}$ , entonces  $x_e$  es estable asintóticamente,
- c) Si  $\dot{V}(x) > 0$  para toda  $x \in \Omega - \{x_e\}$ , entonces  $x_e$  es inestable.

## Anexo C. Método de la Pseudo-inversa.

El método de la Pseudo-inversa ha sido un enfoque clave para el control reconfigurable. Su principal objetivo es mantener al diseño original lo más similar posible y también mantener una degradación en el desempeño. Esto se logra rediseñando la ganancia en lazo cerrado.

La planta en lazo abierto está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Donde  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  y  $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ . Se asume que el sistema en lazo cerrado esta diseñado usando realimentación de estados  $u = Kx$ ,  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , el sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{C.2}$$

Donde  $K$  es la ganancia de realimentación de estados. Se supone que el modelo del sistema cuando ocurre una falla es el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= A_f x_f + B_f u_f, \\ y_f &= C_f x_f.\end{aligned}\tag{C.3}$$

Donde  $A_f \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_f \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  y  $C_f \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ , y el sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= (A_f + B_f K_f) x_f, \\ y_f &= C_f x_f.\end{aligned}\tag{C.4}$$

Donde la ganancia  $K_f$  es la nueva ganancia de retroalimentación por determinar.

El objetivo es encontrar una ganancia  $K_f$  tal que la matriz de transición en lazo cerrado de (C.4) aproxime al sistema (C2). Para ello el sistema  $A + BK$  es igualado a  $A_f + B_f K_f$  y una aproximación para la solución de  $K_f$  esta dada por

$$K_f = B_f^+ (A - A_f + BK),\tag{C.5}$$

donde  $B_f^+$  denota la pseudo-inversa de  $B_f$ .

Las propiedades de la pseudo-inversa están dadas en (Gao and Antsaklis 1991).

**Anexo D.** Diagrama a bloques del sistema de CTF.

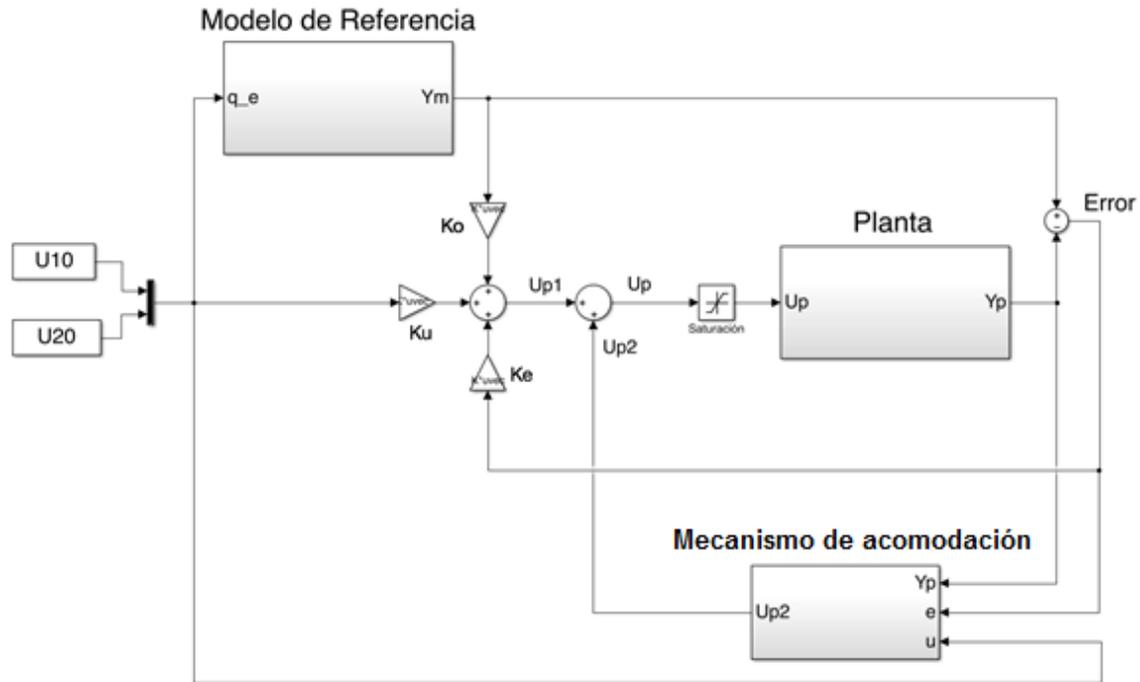


Figura D1 Control tolerante a fallas con modelo de seguimiento en línea.

A continuación se presentan las ecuaciones empleadas en cada uno de los bloques de simulink:

El sistema en espacio de estados de la planta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01144 & 0 & 0.01144 \\ 0 & -0.02128 & 0.01128 \\ 0.01144 & 0.01128 & -0.02272 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64.94 & 0 \\ 0 & 64.94 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (D. 1)$$

El sistema en espacio de estados del modelo de referencia:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.034 & 0 & 0.034 \\ 0 & -0.07274 & 0.03732 \\ 0.034 & 0.03732 & -0.07131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (D. 2)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ganancias del control primario del esquema de control:

$$\mathbf{K}_0 = 1e - 3 * \begin{bmatrix} -0.3476 & 0 & 0.3476 \\ 0 & -0.7761 & 0.3987 \end{bmatrix}, \quad (D.3)$$

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} 1.539999168400449 & 0 \\ 0 & 1.539999168400449 \end{bmatrix}, \quad (D.4)$$

$$\mathbf{K}_e = \text{place}(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, P) = \begin{bmatrix} 0.0051 & -0.0011 & -0.0011 \\ -0.0009 & 0.0020 & -0.0006 \end{bmatrix}. \quad (D.5)$$

Ley adaptable para generar el mecanismo de reconfiguración:

$$\underline{\mathbf{u}}_{p2} = \Delta \mathbf{K}_P(\underline{\mathbf{e}}, t) \underline{\mathbf{y}} + \Delta \mathbf{K}_U(\underline{\mathbf{e}}, t) \underline{\mathbf{u}}_M, \quad (D.6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D} \underline{\mathbf{e}}, \quad (D.7)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 124.0544 & -0.1445 & -1.8311 \\ -0.1445 & 125.1213 & -1.8041 \end{bmatrix}, \quad (D.8)$$

$$\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{y}_m - \mathbf{y}_p, \quad (D.9)$$

$$\Delta \mathbf{K}_P(\underline{\mathbf{e}}, t) = \int_0^t 0.4e^{-6} * (\mathbf{D} * \underline{\mathbf{e}}) * (2 * \underline{\mathbf{y}})^T d\tau + 2.2e^{-4} * (\mathbf{D} * \underline{\mathbf{e}}) * (2 * \underline{\mathbf{y}})^T, \quad (D.10)$$

$$\Delta \mathbf{K}_U(\underline{\mathbf{e}}, t) = \int 0.4e^{-6} * (\mathbf{D} * \underline{\mathbf{e}}) * (2 * \underline{\mathbf{u}}_M)^T d\tau + 2.2e^{-4} * (\mathbf{D} * \underline{\mathbf{e}}) * (2 * \underline{\mathbf{u}}_M)^T. \quad (D.11)$$

El bloque de mecanismo de reconfiguración contiene el siguiente diagrama a bloques el cual representan las ecuaciones de D.6-D.11.

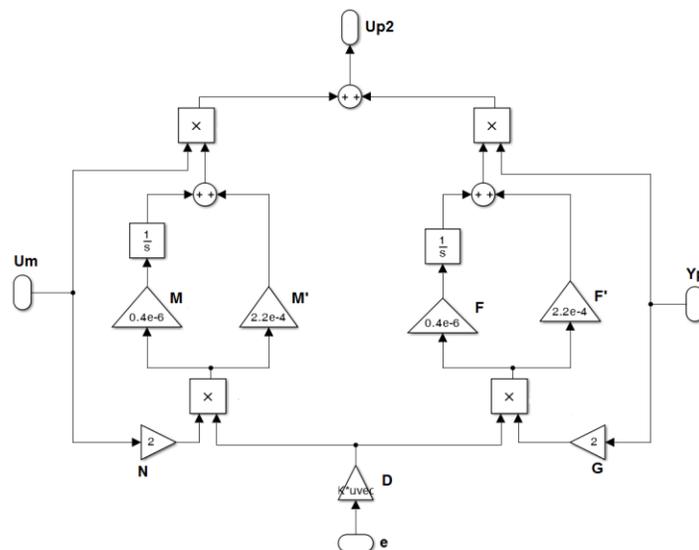


Figura D2.- Diagrama a bloques del Mecanismo de reconfiguración.

## Anexo E. Estabilidad (hyperstability).

Considere el sistema no lineal en lazo cerrado que este contiene una parte lineal descrita por las ecuaciones de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - Bw, \quad (\text{E. 1})$$

$$v = Cx + Ju. \quad (\text{E. 2})$$

Donde  $x$  es un vector de dimensión  $n$  y los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  son de dimensión  $m$ , donde el par  $(A, B)$  es completamente controlable y el par  $(C, A)$  es completamente observable, y una parte variante en el tiempo no lineal esta descrita por:

$$u = -w, \quad (\text{E. 3})$$

$$w = \tilde{f}(v(\tau), t), \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (\text{E. 4})$$

Teorema de Popov. Las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema en lazo cerrado (E.1), (E.2), (E.3) y (E.4) sea asintóticamente estable, es que la matriz de transferencia (E.5) que caracteriza al sistema (E.1) y (E.2) debe de ser estrictamente real y positiva

$$Z(s) = C(sI - A)B + J. \quad (\text{E. 5})$$

La matriz de transferencia  $Z(s)$  es estrictamente real positiva si:

1. Los polos de  $Z(s)$  se encuentren el plano izquierdo de los reales  $s < 0$ ,
2.  $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)$  debe ser una hermitian definida positiva para todo real  $\omega$ .

Lema de Kalman-Yakubovitch-Popov. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $J$  definen un sistema (E.1) (E.2) caracterizado por una matriz de transferencia real y positiva si y solo si existen dos matrices  $K$ ,  $L$  y una matriz definida positiva simétrica  $P$  verifican el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$K^T K = J + J^T, \quad (\text{E. 6})$$

$$PA + A^T P = LL^T, \quad (\text{E. 7})$$

$$B^T P + K^T L^T = C. \quad (\text{E. 8})$$

Anexo F Clasificación de métodos FDD.



Figura F1. Clasificación de métodos FDD.

**Anexo G** Clasificación de mecanismos para control tolerante a fallas.

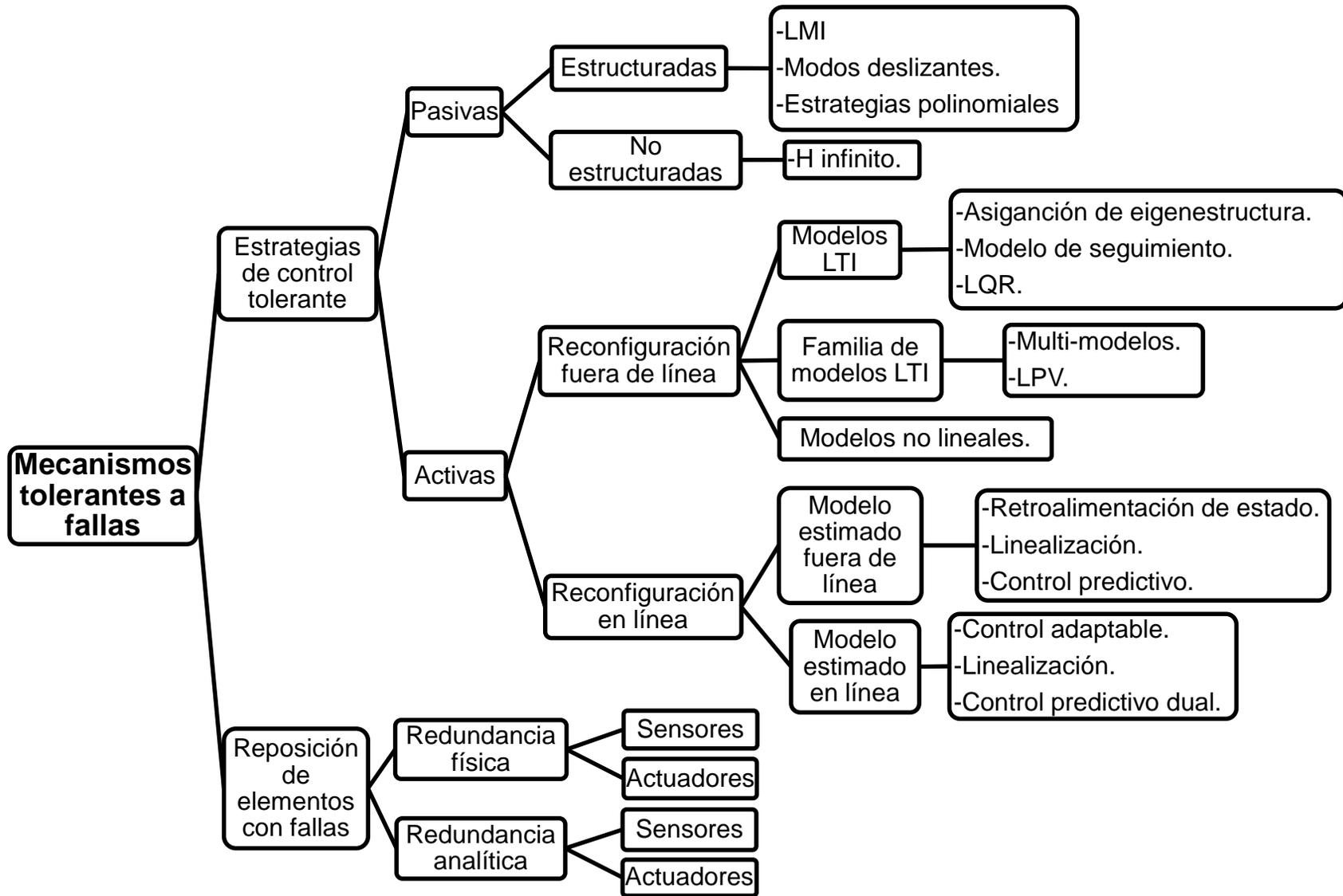


Figura G1. Clasificación de mecanismos para control tolerante a fallas.

