

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Mecánica

TESÍS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**Identificación Algebraica en Línea de Parámetros para el Balanceo de
Rotores Asimétricos**

presentada por

Ing. Mauricio Nango Blanco

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis
Dr. Jorge Colín Ocampo

Codirector de tesis
Dr. Andrés Blanco Ortega

Cuernavaca, Morelos, México. Mayo de 2015.

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, mor., 25/mayo /2015

OFICIO No. DIM/105/2015
Asunto: Aceptación de documento de tesis

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

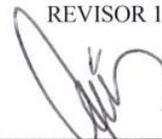
Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Mauricio Nango Blanco, con número de control M13CE022, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "**Identificación algebraica en línea de parámetros para el balanceo de rotores asimétricos**", hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS



DR. JORGE COLÍN OCAMPO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
4694783

REVISOR 1



DR. ARTURO ABUNDEZ PLIEGO
Dr. En Ciencias en Ing. Mecánica
6801139

REVISOR 2



M.C. CLAUDIA CORTÉS GARCÍA
Maestra en Ciencias en Ingeniería Mecánica
3146405

REVISOR 3



DR. DARIUSZ SLAWOMIR SZWEDOWICZ W.
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
REV. FOLIO B 046004

C.p. (Lic. Guadalupe Garrido Rivera).- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
Expediente

Iniciales AAP/mrsr



"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, Mor., 25 de mayo de 2015
OFICIO No. SAC/121/2015

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. MAURICIO NANGO BLANCO
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "**Identificación Algebraica en línea de Parámetros para el Balanceo de Rotores Asimétricos**", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



CENTRO NACIONAL DE
INVESTIGACIÓN Y
DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr

DEDICATORIAS

A mi **Dios**, por el infinito amor que me tiene, porque tal vez sin merecerlo me sigue llenando de bendiciones, bendiciones que me han permitido culminar esta etapa de mi vida.

A mis **padres**, que se esfuerzan por hacer de mí una mejor persona y que siempre han tenido una muestra de cariño y aliento. Una vida no sería suficiente para agradecer el enorme amor que me han brindado, todo lo que he logrado y todo lo que soy se lo debo a ustedes. Gracias.

A mis **hermanos**, porque me han manifestado siempre su apoyo incondicional, Yaz, Chris y Dulce los quiero mucho.

A mi **sobrinita**: Mariana, quien es una fuente de motivación y felicidad en nuestras vidas.

A mi **familia**: abuelitos, tíos, primos, a mi cuñada Deisy y a todos mis seres queridos que me apoyaron y me dieron ánimos para lograr esta meta.

A mi **amigo** y hermano Abelito Cárdenas por ser un gran apoyo para mí durante mi estancia en esta ciudad. Me llevo conmigo tus consejos, momentos inolvidables y aprendizaje a tu lado. Eres el mejor amigo que he tenido, te recordaré con cariño.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica y a la Secretaría de Educación Pública, por el apoyo económico brindado durante la maestría.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), por brindarme la oportunidad de formarme profesionalmente en esta institución, a los Catedráticos del Departamento de Ingeniería Mecánica por sus valiosas enseñanzas, y a todo el personal que labora en esta institución.

A mi asesor el Dr. Jorge Colín Ocampo por brindarme su amistad, sus consejos, enseñanzas y asesoría en la realización de este trabajo. Para él mi respeto y admiración. Muchas gracias.

A mi co-asesor el Dr. Andrés Blanco Ortega por sus valiosas observaciones y sugerencias en la elaboración de este trabajo.

A mis revisores de tesis: Dr. Arturo Abúndez Pliego, Dr. Dariusz Szwedowicz Wasik y Dra. Claudia Cortés García por sus comentarios, sugerencias y observaciones durante la revisión de la tesis.

A mis amigos y compañeros de generación: Magui, Pedro, Rubisel, Fredy, Ángel, Manuel, Javi, Guisepe, Xamán, Eduardo y Yessenia. A mis amigos y compañeros del CENIDET: Lulú, Roger, Polar, Elvis, Sommer, Edwing, Gabriel, Erick, Vico, Raúl, Liz, Xochil, Fer, Quijano, Moisés, Pancho, Anheló, Lenin, Arnold, Elsi Vanessa, Maribel, Alejandro, Nadia, Vuhges, Dilvar, Manuel Delgado, Alma, Correa, Aquino, Chévez, Ivonne y Rafa. Por su amistad y por todos esos grandes momentos en los que convivimos.

A mis amigos conocidos en Cuernavaca: Claudia, Clarissa, Facundo, Nico, Cristy, Edgar Noé, Fernando Arellano, Vianney, Rocío, Miriam, José Abel, Florecita, Suni, Néstor, Pablo Ortega, Maricruz, Cesiah, Carlos y Julio. Gracias por ser parte de mi vida.

RESUMEN

De acuerdo a la metodología propuesta por Ferraris y Lalanne, en este trabajo se presenta el tratamiento matemático para la obtención de un modelo para el análisis del comportamiento dinámico de la respuesta al desbalance de un sistema rotor asimétrico-cojinete de múltiples grados de libertad. En el modelo rotodinámico se incluyen los efectos de la inercia rotatoria, momentos giroscópicos, amortiguamiento de Rayleigh y viscoso, y se desarrolla con base en el método de elemento finito, con un elemento tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo, dos desplazamientos radiales y sus rotaciones. Asimismo se propone un modelo matemático para la identificación algebraica de parámetros en línea para el balanceo de rotores asimétricos, con base en la identificación algebraica propuesta por Fliess y Sira. Se evaluó y analizó el comportamiento en el tiempo del identificador propuesto para una distribución de masas de desbalance en diferentes puntos a lo largo del rotor, tomando como dato de entrada la respuesta de vibración para diferentes rampas de excitación de tipo lineal, obtenida de la simulación del sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad. Los resultados numéricos muestran la rapidez en la convergencia de la identificación de los parámetros en una fracción de segundos, sin importar la aceleración de la rampa de excitación. La ventaja que ofrece el método propuesto, es que se puede aplicar en el balanceo de rotores sin la necesidad de llevar al rotor hasta su velocidad nominal de operación para obtener la respuesta de vibración.

ABSTRACT

A mathematical treatment is presented according to the methodology proposed by Ferraris and Lalanne, for the mathematical model on dynamic behavior analysis of the unbalanced response of a multiple-degrees-of-freedom asymmetric rotor bearing system. The rotordynamic model includes rotative inertia, gyroscopic momentum, Rayleigh and viscous damping. This model was developed on the basis of Finite Element Method, with a four degrees of freedom beam type element: two radial displacements and its rotations. Likewise, a mathematical model for on line algebraic identification of parameters for balancing asymmetric rotors, based on the algebraic identification proposed by Fliess and Sira. For unbalancing masses distributed on different positions along the rotor, the behavior in time domain of the proposed identifier was assessed and analyzed, with the vibration response for several lineal-type coasting up as input data. This response was obtained from multiple degrees of freedom rotor system simulation. Numerical results show the promptness of the parameters identification convergence, which was reached in a fraction of seconds regardless the acceleration of the coast up. The strength of the developed method is its application on the rotor balancing without running the rotor up to nominal operation speed for obtaining vibration response.

CONTENIDO

DEDICATORIAS.....	i
AGRADECIMIENTOS.....	ii
RESUMEN.....	iii
ABSTRACT.....	iv
CONTENIDO.....	v
NOMENCLATURA.....	viii
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABLAS.....	xii
INTRODUCCIÓN.....	1
OBJETIVOS.....	3
JUSTIFICACIÓN.....	4
CAPÍTULO I ESTADO DEL ARTE.....	5
1.1 Conclusión de la revisión bibliográfica.....	20
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO.....	22
2.1 Características de los elementos del rotor.....	22
2.1.1 El disco.....	23
2.1.2 La flecha.....	25
2.1.2.1 Energía cinética.....	25
2.1.2.2 Energía de deformación.....	25
2.1.3 Soportes.....	29
2.1.4 Masa de desbalance.....	30
2.2 Modelo matemático de un rotor con 2 gdl.....	31
2.2.1 Ecuaciones diferenciales de movimiento de un rotor simétrico con desbalance.....	31
2.2.2 Ecuaciones diferenciales de movimiento de un rotor asimétrico con desbalance.....	33
2.2.2.1 Sistema coordenado.....	33
2.3 Modelado por elemento finito del rotor (múltiples gdl).....	38
2.3.1 Modelado del disco.....	38
2.3.1.1 Modelos del disco.....	38
2.3.2 Modelado de la flecha.....	39
2.3.3 Modelado de los soportes.....	45
2.3.4 Modelado de la masa de desbalance.....	45
2.4 Respuesta al desbalance en función del tiempo.....	46

2.4.1 Disco	46
2.4.2 Flecha	46
2.4.3 Masa de desbalance	47
2.5 Rampa de excitación	48
2.6 Parámetros que influyen en la respuesta vibratoria de un rotor	48
2.7 Métodos de solución al modelo matemático	50
2.7.1 Solución en estado estable para un rotor simétrico	50
2.7.2 Métodos numéricos	51
2.7.2.1 Integración directa de newmark	51
2.8 Amortiguamiento espectral	53

CAPÍTULO III MODELADO POR ELEMENTO FINITO DEL SISTEMA ROTOR CON FLECHA ASIMÉTRICA-SOPORTES DE MÚLTIPLES GDL

3.1 Energía cinética de la flecha asimétrica	56
3.2 Energía de deformación de la flecha asimétrica	57
3.3 Modelado de la flecha asimétrica	60
3.3.1 Matriz de masa de translación	64
3.3.2 Matriz de masa de rotación y matriz de efectos giroscópicos	65
3.3.3 Matriz de rigidez	68
3.4 Respuesta al desbalance en función del tiempo	71
3.4.1 Flecha	71
3.5 Ecuación general del sistema rotor asimétrico-soportes	72
3.6 Métodos de solución del modelo matemático	75
3.6.1 Solución en estado estable	75
3.6.2 Integración directa de newmark	75
3.7 Simulación del sistema rotor asimétrico-soportes	76
3.7.1 Discretización del sistema a múltiples gdl	76
3.7.2 Validación del método de newmark	80
3.7.3 Efectos de la asimetría del rotor en la respuesta vibratoria del sistema rotodinámico para múltiples grados de libertad	84

CAPÍTULO IV IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE UN ROTOR ASIMÉTRICO DE MÚLTIPLES GDL

4.1 Base matemática	89
4.2 Identificación algebraica en línea de la cantidad y posición angular de desbalance para el rotor asimétrico con soportes, de múltiples gdl	91
4.2.1 Desarrollo de los identificadores	91
4.2.2 Resultados de la identificación algebraica de la cantidad y posición angular de desbalance	98
4.3 Identificador algebraico vs rampa de excitación	102

CAPÍTULO V IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE UN ROTOR ASIMÉTRICO DE 2 GDL	109
5.1 Modelo matemático de un rotor asimétrico de 2 gdl	109
5.2 Métodos de solución al modelo matemático	110
5.2.1 Solución en estado estable para un rotor asimétrico	110
5.2.2 Métodos numéricos.....	111
5.3 Simulación: “validación del método de newmark”	111
5.4 Efectos de la asimetría del rotor en los diagramas polares de respuesta	114
5.5 Identificación algebraica en línea de la cantidad y ángulo de desbalance para un rotor asimétrico con 2 gdl	119
5.5.1 Desarrollos de los estimadores (modelos de identificación en línea).....	119
5.6 Identificación algebraica en línea de la masa, rigidez, amortiguamiento y asimetría de un rotor asimétrico con 2 gdl	122
CONCLUSIÓN	129
APÉNDICE	131
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134

NOMENCLATURA

a	Efecto cortante	<i>adimensional</i>
c	Coefficiente de amortiguamiento viscoso	$N/m/s$
C	Matriz de efectos giroscópicos , $\dot{\phi} = constante$	—
C_D	Matriz de efectos giroscópicos del disco	—
C_G	Matriz de amortiguamiento global	—
C_S	Matriz de efectos giroscópicos , $\dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$	—
e	Excentricidad de la masa de desbalance	m
e_D	Espesor del disco	m
ε	Deformación longitudinal del punto arbitrario B de la flecha	<i>adimensional</i>
ϵ	Parámetro de efecto de barrido (de la rampa de excitación)	<i>adimensional</i>
E	Módulo de Young	Pa
f	Distancia desde el centro a un lado achatado de la sección transversal de la flecha asimétrica	m
F_0	Fuerza axial	N
F_e	Fuerza elástica	—
F_a	Fuerza por amortiguamiento viscoso	—
G	Modulo a cortante	Pa
I_D	Momento de inercia del disco	$kg.m^2$
I_o	Tensor de inercia del disco en O	---
k	Rigidez de los soportes o chumaceras	N/m
K	Matriz de rigidez	—
K_{DT}	Matriz de rigidez del disco a causa de la aceleración	—
K_F	Matriz de rigidez al considerar fuerza axial	—
K_G	Matriz de rigidez global	—
K_S	Matriz de rigidez por efectos cortantes	—
K_{ST}	Matriz de rigidez a causa de la aceleración	—
L	Longitud	m
m_u	Masa de desbalance	kg
M_D	Masa del disco	kg
M	Matriz de masa de translación	—
M_S	Matriz de masa rotación	—
M_G	Matriz de masa global	—
N	Velocidad de rotación del rotor	rpm
q_i	Coordenada generalizada	—
R	Marco de referencia del cuerpo o rotatorio	—
R_o	Marco de referencia inercial o fijo	—

S	Área de sección transversal de la flecha	m^2
r_{eD}	Radio externo del disco	m
r_{iD}	Radio interno del disco	m
t	Tiempo	s
T	Energía cinética	J [Joules]
T_D	Energía cinética del disco	J [Joules]
T_S	Energía cinética de la flecha	J [Joules]
T_u	Energía cinética de la masa de desbalance	J [Joules]
μ	Asimetría modal de una flecha	<i>adimensional</i>
U_S	Energía de deformación de la flecha	J [Joules]
α	Posición angular inicial de la masa de desbalance	rad
δ	Vector de desplazamiento nodal	
θ	Rotación alrededor del eje x_1	rad
ν	Relación de Poisson	<i>adimensional</i>
ζ	Factor de amortiguamiento modal del sistema	<i>adimensional</i>
ρ	Densidad	kg/m^3
ϕ	Rotación alrededor del eje y de R	rad
ψ	Rotación alrededor del eje Z de R_o	rad
$\dot{\phi}$	Rampa de excitación lineal	rad/s
$\ddot{\phi}$	Aceleración de la rampa de excitación	rad/s^2
ω_i	Frecuencia natural amortiguada	rad/s
ω_{R/R_o}	Vector de velocidad angular instantánea	rad/s
Ω	Velocidad angular del rotor (<i>constante</i>)	rad/s
	Frecuencia de excitación del rotor	<i>adimensional</i>
\cdot	Primera derivada con respecto al tiempo	
$\ddot{}$	Segunda derivada con respecto al tiempo	

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. a) Rotor Jeffcott-cojinete móvil, b) Vista lateral del disco inercial	13
Figura 1.2. Sistema rotor-chumacera con disco equilibrador activo.	13
Figura 1.3. El problema de la identificación de sistemas.	14
Figura 2.1. Elementos de un rotor.	22
Figura 2.2. Marcos de referencia del disco sobre una flecha girando.	23
Figura 2.3. Coordenadas del centro geométrico C y un punto arbitrario B en la flecha.....	26
Figura 2.4. Rigidez y amortiguamiento de los soportes.....	29
Figura 2.5. Masa de desbalance.....	30
Figura 2.6. Sección transversal de un rotor asimétrico en rotación.	34
Figura 2.7. Modelos disco-flecha.	39
Figura 2.8. Elemento finito de la flecha.....	40
Figura 2.9. Esquema de la aceleración promedio de Newmark.....	51
Figura 2.10. Fracción del amortiguamiento crítico en función de la frecuencia para el amortiguamiento de Rayleigh.....	54
Figura 3.1. Sección transversal asimétrica de la flecha	55
Figura 3.2. Discretización del sistema rotor-soportes en 7 elementos finitos tipo viga.	76
Figura 3.3. Discretización del sistema rotor-soportes en 14 elementos finitos tipo viga.	77
Figura 3.4. Discretización del sistema rotor-soportes en 25 elementos finitos tipo viga.	77
Figura 3.5. a) Amplitud de la respuesta de vibración en el disco 1 en la dirección vertical del rotor para los modelos de 7, 14 y 25 elementos, b)Zoom de la figura 3.5. a).....	79
Figura 3.6. Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$	81
Figura 3.7. Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$	81
Figura 3.8. Desplazamiento resultante en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$	82
Figura 3.9. Desplazamiento logarítmico resultante en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$	82
Figura 3.10. Fase en dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$	83

Figura 3.11. Diagramas polares de respuesta al desbalance en la dirección Z $\alpha = 45, \ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$	83
Figura 3.12. a) Desplazamiento en la dirección Z en estado estable, $\alpha = 45, \ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ b) Diagrama polar en la dirección Z en estado estable, $\alpha = 45, \ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$	84
Figura 3.13. a) Amplitud resultante de la respuesta de vibración en la dirección vertical del rotor. b) Zoom de la figura 3.13. a).....	87
Figura 3.14. a) Diagrama polar de respuesta al desbalance. b) Zoom de la figura 3.14. a).	87
Figura 4.1. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$), $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$. b) Zoom de la figura 4.1. a)	98
Figura 4.2. Identificación de la posición angular del desbalance (α), $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$. b) Zoom de la figura 4.2. a)	99
Figura 4.3. a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ b) Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$, nodo 1.....	99
Figura 4.4. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 1, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$. b) Zoom de la figura 4.4. a)	100
Figura 4.5. Identificación de la posición angular del desbalance (α) para el nodo 1, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$. b) Zoom de la figura 4.5. a).....	101
Figura 4.6. a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$. b) Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$	103
Figura 4.7. Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45, \ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$	104
Figura 4.8. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$. b) Identificación de la posición angular del desbalance (α), para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$	104
Figura 4.9. a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$. b) Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$	105
Figura 4.10. Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45, \ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$	105
Figura 4.11. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$. b) Identificación de la posición angular del desbalance (α) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$	106
Figura 4.12. a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$. b) Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$	107
Figura 4.13. Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45, \ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$	107

Figura 4.14. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$. b) Identificación de la posición angular del desbalance (α) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$	108
Figura 5.1. Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$	112
Figura 5.2. Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$	112
Figura 5.3. Desplazamiento resultante de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$	113
Figura 5.4. Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45$, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$	114
Figura 5.5. Respuesta vibratoria a causa de un desbalance en 45° , considerando únicamente cambios en la rigidez.....	115
Figura 5.6. Respuesta vibratoria a causa de un desbalance a 45° , considerando únicamente cambios de masa.....	115
Figura 5.7. Respuesta vibratoria a causa de un desbalance a 45° considerando únicamente cambios en los efectos giroscópicos. ...	117
Figura 5.8. Respuesta de vibración a causa de un desbalance a 45° considerando cambios en la masa, rigidez y efectos giroscópicos.....	118
Figura 5.9. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$), b) Zoom de la figura 5.9. a)	120
Figura 5.10. a) Identificación de la posición angular del desbalance (α), b) Zoom de la figura 5.10 a).....	121
Figura 5.11. Identificación de masa $M_1 = 1.005 \text{ kg}$	126
Figura 5.12. Identificación de masa $M_2 = -0.005 \text{ kg}$	126
Figura 5.13. Identificación del amortiguamiento $C_1 = 0.16 \text{ N/m/s}$	127
Figura 5.14. Identificación del amortiguamiento $C_2 = 0.01 \text{ N/m/s}$	127
Figura 5.15. Identificación de la rigidez $K_1 = 1.05 \text{ Nm}$	127
Figura 5.16. Identificación de la rigidez $K_2 = 0.05 \text{ Nm}$	128

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1. Algoritmo basado en el método de Newmark	52
Tabla 3.1. Propiedades mecánicas y geométricas de la flecha	78
Tabla 3.2. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos	78
Tabla 3.3. Características de los soportes.....	78
Tabla 3.4. Coeficientes para el amortiguamiento proporcional o espectral de Rayleigh.....	78

INTRODUCCIÓN

Durante el funcionamiento de una máquina rotatoria se generan altas vibraciones y ruido a causa de diversos factores tales como: lubricación inadecuada, excentricidad entre acoplamientos, campos magnéticos no uniformes, cargas no uniformes a lo largo de la flecha, y finalmente, fuerzas generadas por masas excéntricas del rotor.

La generación de fuerzas a causa de masas excéntricas del rotor, producen vibraciones que se transmiten a todos los componentes de la máquina y pueden llegar a dañarlos. Es por esta razón que resulta necesario emplear métodos capaces de reducir este tipo de fuerzas. A tales métodos se les conoce como métodos de balanceo.

Actualmente, las máquinas rotatorias tienen características físicas que les permiten funcionar a velocidades más altas que los primeros equipos rotatorios que se fabricaron, lo cual ha provocado que su comportamiento dinámico sea más complejo, exigiendo a su vez una evolución de los métodos de balanceo. En la actualidad, estos métodos se siguen mejorando con el objeto de economizar y hacer más rápidos los trabajos relacionados con esta actividad.

De acuerdo con la rigidez que poseen los rotores en su sección transversal, estos pueden clasificarse en dos tipos: rotores simétricos y asimétricos. Los primeros son de sección transversal circular y poseen parámetros de rigidez igual en toda su sección, mientras que los rotores asimétricos, poseen parámetros de rigidez diferente en los ejes de inercia principales de su sección transversal, esto afecta a las velocidades críticas y a la magnitud de la respuesta al desbalance del rotor. Tal es el caso de los rotores de algunos generadores de dos polos y también de los excitadores de algunos de los turbogeneradores.

Si un rotor presenta desbalance a causa de una masa excéntrica, puede obtenerse la amplitud y la fase del vector de vibración para varias frecuencias y graficarse en un diagrama polar de respuesta en estado estable, el cual facilita el análisis del comportamiento dinámico del rotor. En el caso de los rotores simétricos, los diagramas polares de respuesta son de forma circular.

En estos diagramas el vector de vibración de máxima amplitud se presenta aproximadamente en condiciones de resonancia (cuando la velocidad de rotación es

igual a la frecuencia natural), y se atrasa un ángulo de 90° con respecto a la posición angular donde se encuentra la fuerza de excitación.

En el caso de los rotores asimétricos, los diagramas polares de respuesta son de forma geométrica elíptica, y presentan características diferentes a la de los simétricos, ya que la respuesta depende principalmente de dos parámetros adimensionales: el factor de amortiguamiento y el de asimetría. De acuerdo con diversos investigadores, estos dos parámetros provocan que el vector de vibración en condiciones de resonancia presente diferentes amplitudes y ángulos de fase para diferentes posiciones angulares de la fuerza de excitación, lo cual dificulta identificar el vector de vibración en condiciones de resonancia en el diagrama polar de respuesta.

Los parámetros que producen la diferencia entre los diagramas polares de respuesta de los rotores simétricos y asimétricos han sido estudiados por años con el fin de desarrollar métodos eficientes para el balanceo de los rotores. En el caso de los rotores asimétricos, los métodos son escasos y más complejos, a causa de la asimetría, el amortiguamiento y de la dificultad para determinar la posición angular de la fuerza de excitación en los diagramas polares de respuesta.

En vista de lo anterior, el objetivo de este proyecto es aplicar una metodología de identificación algebraica en línea de parámetros para determinar el desbalance y su posición angular, usando únicamente mediciones de la respuesta de vibración (desplazamiento).

OBJETIVO GENERAL

Implementar el método de identificación algebraica en línea en la estimación de parámetros para el balaceo de rotores asimétricos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1.- Establecer un modelo matemático que describa la respuesta vibratoria de los rotores asimétricos a causa del desbalance.
- 2.- Desarrollar y analizar las ecuaciones diferenciales de movimiento de un rotor asimétrico.
- 3.- Determinar los parámetros que influyen en la respuesta de un rotor asimétrico.
- 4.- Aplicar el método de identificación algebraica para obtener los parámetros de: masa de desbalance y posición angular del desbalance.

JUSTIFICACIÓN

La importancia del desbalance en las máquinas rotatorias se deja en evidencia por el continuo desarrollo y optimización de los métodos y técnicas de balanceo. A pesar de esto, hoy en día los métodos que se cuentan para el balanceo de rotores asimétricos son complejos a causa del comportamiento dinámico que presentan.

En general, el problema del desbalance en rotores asimétricos ha sido encarado mediante la aplicación de los dos métodos más conocidos y sus variantes: balanceo por coeficientes de influencia y análisis modal, y en un tercer caso por una combinación de ambos métodos. Todos basados en la respuesta del sistema ante la influencia de masas de prueba y en el análisis de las formas modales o modos de vibración del sistema. Para la generación de dichas formas modales es necesario el conocimiento de parámetros modales tales como: frecuencias naturales, amortiguamiento, factor de forma modal; y para ello es necesario contar con programas de extracción de parámetros modales, realización de simulación numérica o de pruebas experimentales en el rotor.

Varias técnicas de control de vibraciones (dispositivos activos o semiactivos) también han sido propuestas, algunas de las cuales se mencionan en el estado del arte, donde el objetivo final es el de modificar las propiedades de rigidez y amortiguamiento del sistema, para reducir la respuesta al desequilibrio mientras el rotor pasa por su velocidad crítica. Sin embargo, dichas técnicas no localizan el desbalance, sino que atenúan las amplitudes de vibración.

Aplicando el método de identificación algebraica en línea se determinarán los parámetros como lo son la cantidad y posición angular del desbalance, que afectan a un rotor asimétrico usando únicamente mediciones de la respuesta de vibración (desplazamiento). Dichos parámetros serán determinados desde la puesta en marcha (estado transitorio) y durante el estado estable sin necesidad de operar el rotor a velocidades cercanas a las frecuencias naturales o velocidades críticas evitando las máximas amplitudes de vibración que tienen lugar en condiciones de resonancia.

Es importante mencionar que varios estudios de casos concretos con simulaciones por ordenador y en otros más por resultados experimentales validan la buena respuesta del método de identificación algebraica en línea, demostrando además propiedades de robustez contra perturbaciones y alta velocidad en los resultados.

CAPÍTULO I

ESTADO DEL ARTE

El primer aporte al campo de la rotodinámica fue realizado por Jeffcott [1], quien consideró un modelo con una flecha de sección transversal circular soportada libremente sobre chumaceras rígidas; en este, se incluía un disco en la parte central cuyo centro de masa se encuentra desplazado una distancia del centro de giro.

Como resultado de este análisis, Jeffcott concluyó que la vibración de una flecha en rotación está compuesta por dos partes: una vibración transitoria amortiguada, que representa el movimiento libre del sistema causada por pequeños disturbios, y una vibración forzada (estado estable) que es función de la masa excéntrica y de la velocidad angular de la flecha. Las conclusiones más importantes obtenidas de su estudio fueron:

- ✓ Cuando la velocidad angular tiende a cero, el ángulo de fase del vector vibración con respecto a la posición angular donde se encuentra la fuerza de excitación tiende a 0° .
- ✓ El ángulo de fase se incrementa con la velocidad angular de la flecha, hasta llegar a 90° con respecto a la posición angular de la fuerza de excitación cuando la velocidad angular es igual a la frecuencia natural del sistema.
- ✓ Para velocidades angulares arriba de la frecuencia natural, el ángulo de fase cambia de tal forma que para valores muy grandes de la velocidad angular de la flecha, el ángulo de fase tiende a un valor de 180° con respecto a la posición angular de la fuerza de excitación.

Las consideraciones del análisis de Jeffcott aportaron las bases para el balanceo modal de rotores simétricos, sin embargo, los problemas presentados en la turbomaquinaria con características diferentes a estos rotores, tal como los turbogeneradores, propiciaron el estudio de los rotores asimétricos.

El primer estudio sobre los rotores asimétricos fue realizado por Taylor [2], quien utilizó una versión del modelo de Jeffcott, con el propósito de estudiar la inestabilidad de un turbogenerador de dos polos.

En su estudio concluyó que la fuerza elástica experimentada por el rotor no se encuentra en fase con el desplazamiento, y determinó que la fuerza elástica tiene una componente radial que es paralela al desplazamiento y una tangencial que es perpendicular a la dirección del desplazamiento. La componente tangencial la consideró como una característica única de las flechas asimétricas. Experimentalmente determinó que la influencia de pesos colocados en una misma posición angular del rotor no es proporcional a la respuesta vibratoria.

A partir de esta última consideración, Bishop et al. [3], concluyeron que la vibración de una flecha asimétrica en rotación presenta dos características importantes:

- 1) La respuesta vibratoria del rotor cambia en amplitud y fase para diferentes posiciones angulares de la fuerza de excitación.
- 2) Existe una componente de la vibración cuya frecuencia es igual al doble de la frecuencia de giro del rotor.

También determinaron que cuando la asimetría modal es más grande que el factor de amortiguamiento del sistema, se presenta una inestabilidad en la zona de resonancia. Sus estudios propiciaron futuras investigaciones sobre las propiedades de inestabilidad de los rotores asimétricos y sus formas de balanceo.

Los efectos de la asimetría y amortiguamiento considerados por Taylor y Bishop, et al. , también fueron estudiados por Parkinson [4], con la diferencia que encontró dos términos adicionales los cuales están en función de la asimetría modal de la flecha, los cuales son el amortiguamiento viscoso e histerético. Parkinson encontró una expresión analítica que considera la función de la asimetría modal de una flecha, considerando una ecuación de movimiento para cada eje principal de inercia de un rotor asimétrico.

$$\mu = \frac{1 \Omega_v^2 - \Omega_u^2}{2 \Omega_v^2 + \Omega_u^2} \quad (1.1)$$

Donde Ω_v y Ω_u son las frecuencias naturales a causa de la rigidez mayor y menor correspondientes a las direcciones principales de la sección asimétrica de la flecha.

Parkinson también estudió el comportamiento vibratorio de una flecha asimétrica mediante la construcción de los diagramas polares de respuesta considerando un factor de amortiguamiento (ζ) en relación con la asimetría modal (μ) de manera que le permitió obtener la forma geométrica característica de los diagramas polares de respuesta de una flecha asimétrica, las cuales son:

un círculo, si $\mu = 0$

una elipse, si $\zeta > \mu \neq 0$

una parábola, si $\zeta = \mu \neq 0$

una hipérbola, si $\zeta < \mu \neq 0$

En su análisis, Parkinson sólo considero los diagramas polares de respuesta en forma elíptica, encontrando que al trazar una línea recta en el diagrama entre el punto correspondiente a la frecuencia natural asociada con la rigidez máxima y el punto correspondiente a la frecuencia natural asociada con a la rigidez mínima de la sección transversal del rotor, esta línea trazada es paralela a la posición angular de la fuerza de excitación. De sus investigaciones concluyó que para velocidades de la flecha asimétrica muy lejanas de las velocidades críticas correspondientes a los ejes de inercia principales, el comportamiento vibratorio de la flecha es similar al de una flecha simétrica.

Otros autores como Shiraki y Kanki [5] propusieron un método de balanceo de rotores asimétricos basado en el principio de balanceo modal y en el análisis de los diagramas polares de respuesta obtenidos experimentalmente. En su método Shiraki y Kanki consideran las posiciones angulares de $\pm 45^\circ$ con respecto al eje de menor rigidez de la sección transversal del rotor. En sus investigaciones encontraron las siguientes características de los diagramas polares de respuesta:

- Son elípticos y tienen sus ejes mayor y menor orientados 45° y -45° con respecto al eje que contiene la rigidez mínima de la sección transversal del rotor.
- La amplitud máxima de la respuesta vibratoria del rotor está determinada cuando la fuerza de excitación está a -45° . Bajo esta condición, el vector de vibración en condiciones de resonancia se encuentra en fase con el eje mayor de la elipse.

- La amplitud mínima de la respuesta vibratoria del rotor está determinada cuando la fuerza de excitación está a 45° . Bajo esta condición, el vector de vibración en condiciones de resonancia se encuentra en fase con el eje menor de la elipse.

Otros investigadores que abordaron el estudio de un rotor asimétrico con base en sus ejes principales de inercia fueron Iwatsubo y Nakamura [6], quienes analizaron el comportamiento vibratorio de una flecha asimétrica soportada sobre chumaceras rígidas con propiedades de rigidez iguales tanto en el eje vertical como el horizontal. En sus análisis obtuvieron una ecuación diferencial de movimiento para cada eje de inercia principal del rotor.

Concluyeron que la técnica de balanceo modal es difícil de aplicar a las flechas asimétricas, a causa de que en condiciones de resonancia el desplazamiento no es siempre de amplitud máxima y no siempre presenta un ángulo de fase igual a 90° con respecto a la posición angular de la fuerza de excitación, como en el caso de los rotores simétricos. Propusieron un método de balanceo basado en los coeficientes de influencia, en el que los coeficientes se definen en forma separada para cada eje de inercia principal del rotor.

De la misma manera, otros autores desarrollaron métodos basados en los coeficientes de influencia, además procuraron optimizar el proceso de balanceo tal como Matsukura et al [7], quienes trataron sobre el balanceo de rotores flexibles con especial referencia a rotores asimétricos. Estos investigadores desarrollaron un método de balanceo basado en los coeficientes de influencia estimados de la vibración del rotor causada por una masa de desbalance. En el método propuesto por estos investigadores se considera un factor de convergencia, con el fin de disminuir los desbalances residuales más rápidamente.

Sin embargo, encontraron algunos problemas para proponer la magnitud del factor de convergencia que pudiera ser aplicada para todos los casos prácticos de balanceo de rotores asimétricos, ya que desafortunadamente, este factor de convergencia depende de varios factores, tales como la asimetría modal, la posición angular del desbalance y la posición angular donde se colocan los pesos de balanceo. En este sentido, propusieron los valores para el factor de convergencia de los cuales fueron determinados numéricamente observando los efectos sobre la convergencia de las

vibraciones residuales en el proceso de balanceo, de otra manera, determinar este valor en la práctica resultaría en un proceso demasiado complejo y riesgoso.

Otros investigadores se enfocaron a optimizar los métodos de balanceo basados en los coeficientes de influencia, tal como Songbo y Yacai [8]. Estos investigadores propusieron un método para el balanceo de rotores flexibles con rigidez asimétrica, basado en los valores de los coeficientes de influencia calculados de la respuesta de un rotor y modificados experimentalmente. Su estudio fue realizado sobre una flecha asimétrica y también consideraron los parámetros geométricos y físicos de los soportes del sistema ya que estos afectan a la aproximación de los coeficientes de influencia.

Mediante esta consideración desarrollaron un método optimizado de balanceo. El modelo matemático fue discretizado y resuelto por el método de elemento finito, concluyendo que la respuesta de un sistema complejo puede aproximarse considerando varios factores como la inercia rotacional, efectos giroscópicos, amortiguamiento, deflexión, etc. por lo que los coeficientes de influencia pueden calcularse para el balanceo.

Por otro lado, también fueron analizados los coeficientes de influencia dependientes del tiempo y sus efectos en los diagramas polares de respuesta, tal es el caso de los investigadores Inagaki, Kanki y Shiraki [9], quienes desarrollaron un método analítico para la evaluación de la respuesta de un rotor asimétrico. Sus estudios se basaron en la ecuación de movimiento con coeficientes dependientes del tiempo de una flecha asimétrica soportada con chumaceras con propiedades de rigidez diferentes en los ejes vertical y horizontal. En este estudio las ecuaciones de movimiento fueron resueltas con el método de balanceo armónico y la matriz de transferencia con el fin de obtener una solución aproximada para la vibración causada por factores como desbalance, flexión y cortante.

Experimentalmente encontraron que los diagramas polares de respuesta correspondientes a la primera velocidad crítica (primer modo) de cuatro casos con la fuerza de excitación en las posiciones angulares de 0, 45, 90 y 315° son elípticos y están orientados sobre los ejes de 45°. Por otro lado, para la segunda velocidad crítica (segundo modo) los diagramas polares de respuesta son similares a los correspondientes a un rotor simétrico.

Por otra parte, Colín [10] estudió el comportamiento dinámico de los rotores asimétricos, considerando masas excéntricas (desbalance) del rotor como causa de la generación de fuerzas centrífugas. Para su análisis consideró un modelo matemático de dos grados de libertad basado principalmente en el trabajo de Taylor, donde la variación de la rigidez se presenta como función de la posición angular de la sección transversal del rotor. En su modelo consideró rampas de excitación de tipo lineal con el fin de observar los efectos en los diagramas polares de respuesta. El modelo matemático fue validado experimentalmente, tomando como base el inicio y el eje mayor del diagrama polar de respuesta obtenido de un rotor experimental.

El balanceo fue realizado considerando tres métodos: en el primero consideró las posiciones angulares a $\pm 45^\circ$ de la sección transversal del rotor, en el segundo consideró la localización de la fuerza de excitación, y uno tercero que combina los dos métodos anteriores.

Los métodos de balanceo por coeficientes de influencia y balanceo modal presentan desventajas que hacen que ninguno de ellos sea preferible respecto al otro. En el Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE) se desarrolló una técnica de balanceo que aprovecha las ventajas de los métodos anteriores y pretende eliminar sus desventajas. A este método se le denominó Balanceo Modal usando coeficientes de Influencia. En términos generales, este método de balanceo consiste en la generalización del método de los coeficientes de influencia, de tal forma que permita la utilización de arreglos de pesos afectando a modos específicos de vibración, con lo cual se logra caracterizar el comportamiento dinámico de la máquina en un solo rodado de prueba.

El procedimiento para calcular los arreglos modales de pesos con el método de balanceo modal utilizando coeficientes de influencia consiste en colocar pesos de prueba que exciten todos los modos presentes en la máquina. Mediante el programa AMODAL desarrollado por el IIE se extraen parámetros modales: frecuencia natural, factor de forma modal y amortiguamiento modal, de la respuesta del rotor. Al conocer el factor de forma modal en los planos de balanceo se descompone el peso de prueba en arreglos modales de pesos. La desventaja del método es que se requiere el factor de forma modal en los planos de balanceo y para ello es necesario contar con programas de extracción de parámetros modales o la realización de pruebas modales experimentales en el rotor.

Tal fue el caso de Muñoz [11], quien desarrolló una metodología que permitió la construcción de arreglos de pesos modales, basados en los valores de vibración en planos de balanceo, para lo cual requirió de las formas modales de la máquina a balancear, las cuales se calcularon de forma experimental y numérica usando programas de cómputo basados en los métodos de matrices de transición o en el método del elemento finito.

Así mismo, Molina [12] propuso un método de balanceo basado en la teoría de análisis modal y coeficientes de influencia, donde se usa un arreglo de pesos modales de prueba para determinar los coeficientes de influencia en los ejes orientados en las posiciones de $\pm 45^\circ$ del rotor. Para esto desarrolló un modelo numérico basado en el método de elemento finito, que permite calcular diagramas de Campbell, frecuencias naturales, formas modales y respuesta al desbalance, logrando analizar el comportamiento dinámico de rotores asimétricos utilizando especialmente diagramas polares de respuesta.

Ya desde 1996, Preciado, Aguirre y Bannister [13] presentaron el método de los multiplicadores, el cual se deriva del método generalizado de coeficientes de influencia. La ventaja del método de los multiplicadores es que calcula pesos de balanceo cuando no se tiene el mismo número de rodados de prueba que planos de balanceo. Para el caso de los pesos de balanceo se utilizan multiplicadores, que se calculan al invertir la matriz de incremento de vibración. La única condición para la aplicación de este método es que los pesos de prueba que se colocan en diferentes rodados de prueba sean linealmente independientes.

La posibilidad de balancear un rotor sin rodados de prueba la presentan Preciado y Bannister. El procedimiento consiste en la extracción de parámetros modales en resonancia de la corrida inicial, con estos datos, ajustan un modelo de prueba del rotor, del cual obtienen las formas modales.

Al conocer la forma modal, se determina el factor de forma modal en los planos de balanceo, con el cual se calculan los arreglos modales de pesos. Este método plantea la posibilidad de obtener arreglos modales de pesos pero requieren el uso de programas de extracción de parámetros modales y de un modelo numérico del rotor con el que se determina la forma modal.

En vista de lo anterior, Ruiz J. [14] desarrolla un método que aprovecha las ventajas de la matriz de coeficientes de influencia para obtener arreglos modales de pesos sin el uso de programas de extracción de parámetros modales, lo cual evita el cálculo de la forma modal por pruebas experimentales en el rotor o mediante simulación numérica del comportamiento del rotor que tiene la desventaja de tener que desarrollar un modelo numérico del conjunto rotor soporte.

Para equilibrar la maquinaria rotatoria también se han propuestos diversos dispositivos pasivos y activos con el objetivo de atenuar las vibraciones causadas por el desequilibrio o las resonancias.

En el control pasivo el sistema se modifica estando el rotor fuera de línea, es decir, el rotor es parado para realizar el ajuste de alguno o todos sus parámetros tales como, su masa, rigidez y amortiguamiento. Existen diversos métodos para el equilibrado pasivo de maquinaria rotatoria, algunos de estos son el equilibrado en un plano, dos o múltiples planos y el equilibrado modal. Mediante estos métodos se puede estimar cual es la dirección del punto pesado (punto de aparente concentración de todas las fuerzas de desequilibrio).

El control activo de vibración (AVC) por sus siglas en inglés, cambia las propiedades dinámicas del sistema mediante el uso de actuadores, o dispositivos activos durante condiciones de funcionamiento instantáneo medido mediante sensores apropiados. La principal ventaja del control activo (en comparación con el control pasivo), es la versatilidad para adaptarse a diferentes condiciones de carga, perturbaciones y configuraciones de la maquinaria rotatoria, y por lo tanto, se extiende la vida del sistema mientras se reducen grandemente los costos de operación.

Los investigadores Blanco et al. [15] presentan dos propuestas de solución a este problema de atenuación de vibraciones. La primera propuesta consiste en el uso de un cojinete móvil en un rotor Jeffcott como se muestra en la Figura 1.1, de manera que la longitud efectiva del rotor es controlada mediante el uso de un servomecanismo y como consecuencia la rigidez del rotor es modificada, y por ende, la frecuencia natural del sistema, mientras el rotor es acelerado o desacelerado, para evadir la resonancia y así evitar el crecimiento de amplitudes grandes de vibración.

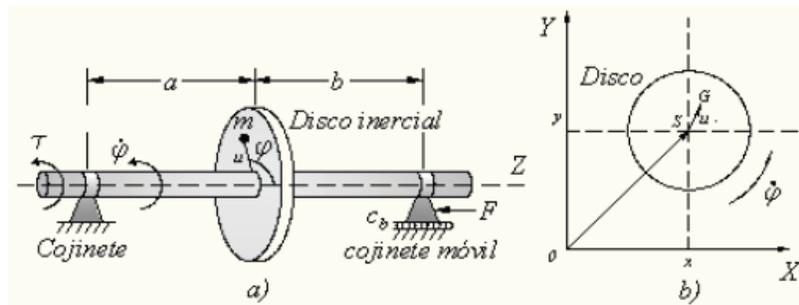


Figura. 1.1. a) Rotor Jeffcott-cojinete móvil, b) Vista lateral del disco inercial [15].

La segunda propuesta consiste en montar un disco equilibrador activo (DEA) sobre el rotor (Figura 1.2), el cual contiene una masa de equilibrado que puede ubicarse en cualquier posición radial y angular dentro del disco para atenuar las vibraciones causadas por el desequilibrio residual, tanto en estado transitorio como en velocidades de operación constante. Estos movimientos pueden obtenerse mediante el uso de un tornillo o husillo para el movimiento radial y con un sistema de engranes cónicos se puede obtener el movimiento angular. El disco equilibrador activo utiliza sólo una masa de equilibrado la cual debe ser posicionada para producir una fuerza centrífuga que se oponga a la masa de desequilibrio del sistema principal. La masa del DEA y la distancia radial son parámetros de diseño del disco y dependerán del tamaño y peso de la máquina rotatoria a equilibrar. Es importante mencionar que se pueden utilizar varios discos activos y combinar con métodos tradicionales de equilibrado para atenuar las vibraciones en rotores flexibles.

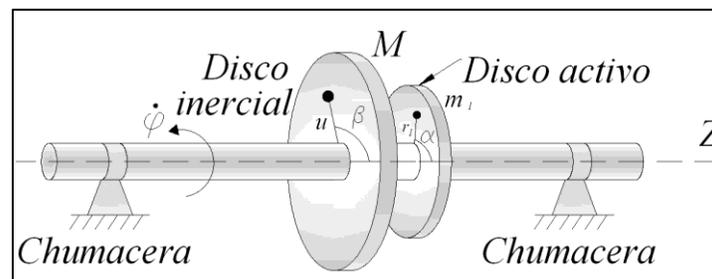


Figura 1.2. Sistema rotor-chumacera con disco equilibrador activo [15].

Puesto que ambas estrategias de control activo requieren información de la excentricidad del rotor, el método de identificación algebraica se utiliza para la estimación en línea de los valores de sus parámetros.

La identificación de parámetros se utiliza para obtener un modelo exacto de un sistema real, y el modelo completado proporciona una plataforma adecuada para el desarrollo del diseño, o la investigación de estrategias de control. Los métodos de identificación de parámetros en línea se utilizan actualmente para estimar parámetros del sistema, monitorear los cambios en los parámetros y características del sistema y para fines de diagnóstico relacionado con una variedad de áreas de la tecnología. Los métodos de identificación pueden utilizarse para actualizar el valor de los parámetros de diseño especificados por los fabricantes.

El problema de la identificación de sistemas, según lo definió Zadeh [16], se puede explicar en un sentido amplio de acuerdo a la Figura 1.3, donde hay tres componentes principales: i) La clase de modelo utilizado; ii) El tipo de señales disponibles; iii) El criterio de estimación. Si el problema está bien diseñado respecto a estos tres factores, los resultados serán satisfactorios. Sobre la base de estos ingredientes se pretende introducir las técnicas de identificación clásicas.

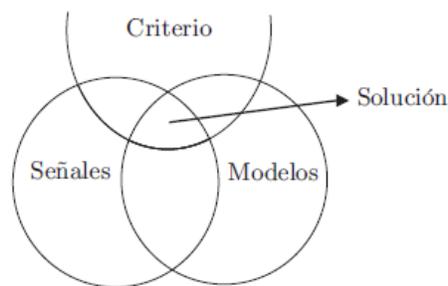


Figura 1.3. El problema de la identificación de sistemas

MODELOS

Así, se tiene los modelos lineales y no lineales. Un modelo general se puede escribir de la siguiente forma:

$$y(t) = G(\sigma)u(t) + H(\sigma)e(t) \quad (1.2)$$

Se llaman modelos paramétricos a aquellos que expresan G y H en términos de un conjunto de números finitos. Generalmente $e(t)$ se supone una perturbación. Con frecuencia, los coeficientes que definen G y H no se conocen, por lo que es necesario estimarlos, es decir, estos coeficientes definidos por θ son parámetros a determinar.

De modo que la descripción del modelo queda:

$$y(t) = G(\sigma, \theta)u(t) + H(\sigma, \theta)e(t) \quad (1.3)$$

Entre los modelos lineales se encuentran:

- ❖ Modelos de función de transferencia [17].
- ❖ Modelos en Espacio de los Estados (EE) [18].

Entre los Modelos no lineales se encuentran [19],[20]:

- ❖ Modelos de Wiener [21] y Hammerstein [22].
- ❖ Modelos Caja Negra no lineales [23].
- ❖ Redes neuronales, wavelets y otros modelos no lineales clásicos [17].

SEÑALES

Aunque la mayoría de los sistemas físicos poseen una naturaleza continua en el tiempo, los avances digitales han contribuido a que la forma en que se mide esa naturaleza continua sea tomando muestras cada cierto periodo. Es decir, se discretiza las señales continuas convirtiéndolas en señales discretas en el tiempo. Esta discretización conlleva un error, ya que entre muestra y muestra no se conoce la evolución de la señal verdadera. Además de estas señales en el dominio del tiempo, gracias a la Transformada Discreta de Fourier (DFT) podemos trasladar estas señales al dominio de la frecuencia. Normalmente esta transformación se realiza más eficientemente mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT), [24]. Se podría decir que, generalmente, se trabaja con señales discretas en el dominio del tiempo o, mediante su FFT, estas señales se pueden trasladar también al dominio de la frecuencia. De forma que se puede encontrar con sistemas físicos continuos en el tiempo, que se tienen que identificar con señales discretas en el tiempo o en el dominio de la frecuencia.

CRITERIOS

Para poder resolver la identificación de un sistema es necesario seleccionar un criterio que sea capaz de ajustar los parámetros del modelo seleccionado al conjunto de datos observados en las señales.

Este criterio se puede materializar en una expresión que nos permita evaluar la habilidad de un modelo para describir el proceso generador de los datos observados. Esto se puede expresar, por ejemplo, mediante el error de predicción de un determinado modelo. Por tanto, es lógico seleccionar los parámetros del modelo que proporcionen un menor error de predicción. Entre los criterios o técnicas clásicas de identificación están:

- ✓ Minimización del error de predicción
- ✓ El método de la variable instrumental
- ✓ Máxima Verosimilitud

Una vez estudiados estos métodos, es importante analizar las relaciones que unen las estimaciones en el dominio del tiempo con el dominio de la frecuencia, ya que en el dominio de la frecuencia se puede analizar las similitudes que existen entre el análisis de series temporales y la identificación de sistemas. Adquieren importancia herramientas típicamente ingenieriles como son los modelos de Espacio de los Estados y el Filtro de Kalman para el análisis de series temporales, y se introducen los modelos de componentes no observables como caso particular de modelos de Espacio de los Estados.

Las técnicas de identificación en tiempo discreto han alcanzado un gran auge dentro de la teoría de la identificación eclipsando la identificación en tiempo continuo. Sin embargo, estas técnicas de identificación en tiempo continuo pueden aportar soluciones ventajosas en algunos problemas.

Como se puede observar en las técnicas de identificación clásicas que se han expuesto anteriormente, el criterio que se utiliza para ajustar los datos al modelo es la minimización del error. Este ejercicio de optimización a su vez se puede afrontar desde el dominio del tiempo o desde el dominio de la frecuencia.

Actualmente, también existe otra línea de identificación con un punto de vista completamente diferente, ya que no se dispone de una función de coste a minimizar de alguna manera sino que, en base al álgebra diferencial y cálculo operacional, se desarrolla una serie de estimadores “a medida”. Además, tampoco se utilizará un marco estocástico, evitando así la necesidad de conocer las distribuciones estadísticas de las perturbaciones. Estas estimaciones se realizan en línea y en tiempo continuo o

discreto [25],[26] y [27]. Este tipo de técnicas poseen una mayor rapidez que las técnicas clásicas.

M. Fliess y H. Sira-Ramírez [28] introducen un procedimiento en lazo cerrado para la identificación paramétrica en tiempo continuo para sistemas lineales constantes. Este enfoque exhibe buenas propiedades de robustez con respecto a una gran variedad de perturbaciones. Varios estudios de casos concretos con simulaciones por ordenador demuestran la esencia del método de identificación en línea. Del marco teórico desarrollado por dichos investigadores se han basado varios de los trabajos que se enuncian en seguida.

J. Becedas et al. [29] describen un procedimiento para la identificación de parámetros utilizando un método de identificación algebraica para un sistema lineal constante de tiempo continuo, haciendo una aplicación específica en la determinación de los parámetros de un sistema masa-resorte-amortiguador.

El método es adecuado para identificar simultáneamente ambos parámetros: la constante del resorte y el coeficiente de amortiguamiento. Encontraron que el método propuesto es computacionalmente rápido y robusto con respecto a ruidos. El algoritmo de identificación fue verificado por los resultados de la simulación. Las estimaciones se llevaron a cabo en línea.

En el artículo citado, se utiliza un método de identificación algebraica en línea en tiempo continuo de naturaleza no-asintótica en un sistema mecánico. Las expresiones resultantes se obtienen a partir de las operaciones algebraicas derivadas, incluyendo la eliminación de las constantes desconocidas a través de derivaciones con respecto a la variable compleja s . Las variables de entrada para el estimador son la fuerza de entrada al sistema y el desplazamiento de la masa. Las ventajas son que se prescinde del conocimiento estadístico de los ruidos; para la estimación no se requieren condiciones iniciales o de dependencia entre el sistema de entrada y de salida, por lo que el enfoque no necesita un diseño específico de las entradas necesarias para estimar los parámetros de planta porque se proponen ecuaciones exactas; por lo tanto, su implementación en sistemas de bucle cerrado es directa sin necesidad de translación entre los dominios de tiempo continuo y discreto; el algoritmo se calcula en línea en un período muy corto de tiempo y se consiguen buenos resultados.

Este método de estimación se puede usar en una amplia gama de aplicaciones en las que aparece el modelo masa-resorte-amortiguador, como en el control de las vibraciones, el impacto dinámico, la estimación de parámetros de contacto, el control en robótica, entre otros.

F. Beltrán et al. [30] describen la aplicación de una metodología para la identificación algebraica en línea para estimación de parámetros y señales en sistemas vibratorios. La identificación algebraica se utiliza para estimar la frecuencia y la amplitud de vibraciones exógenas que afectan a un sistema mecánico, usando únicamente mediciones de posición. La identificación algebraica se combina con un esquema de control por modos deslizantes del tipo adaptable para estabilizar asintóticamente la respuesta del sistema y, simultáneamente, cancelar las vibraciones armónicas. Resultados numéricos y experimentales muestran el desempeño dinámico y robusto de la identificación algebraica y del esquema de control activo.

Los resultados numéricos y experimentales validan la buena respuesta de los métodos de identificación algebraicas en línea de los parámetros desconocidos. Además, se puede demostrar las buenas propiedades de robustez de los identificadores algebraicos contra perturbaciones estocásticas, las mediciones de ruido, variaciones de parámetros y pequeñas no linealidades.

Por otra parte, debido a que el proceso de identificación algebraica se logra rápidamente con un procesador de señales digitales de alta velocidad, entonces cualquier posible singularidad no afecta significativamente a los resultados de la identificación. De lo contrario, cerca de cualquier singularidad o variaciones de la dinámica de sistemas, el identificador algebraico se puede reiniciar.

La principal virtud de la identificación propuesta y esquema de control de modo deslizante adaptativo para sistemas de vibración es que, únicamente las mediciones del comportamiento entrada transitoria / salida se utilizan durante el proceso de identificación, en contraste con la condición de excitación persistente y algoritmos complejos requerido por la mayoría de los métodos de identificación tradicionales.

Andrés, L. [31] presenta un método para la estimación de los coeficientes de fuerza en los rodamientos en sistemas rotor-cojinetes. Menciona que la identificación experimental de los parámetros de la película de fluido en los rodamientos es crítico

para la adecuada interpretación del rendimiento de la maquinaria rotatoria y necesaria para validar o calibrar predicciones de los modelos de cojinetes con película de fluidos.

El método requiere de dos pruebas independientes con distribuciones de masa de desbalance conocidos y la medición del movimiento del rotor (amplitud y fase) en lugares cercanos a los soportes.

El procedimiento se basa en el modelado de la estructura del rotor y se encuentran las fuerzas de transmisión a los cojinetes como una función de cantidades observables. La solución de un simple conjunto de ecuaciones algebraicas identifica la rigidez y los coeficientes de fuerza de amortiguamiento. Las simulaciones numéricas demuestran que la identificación de parámetros es perfecta para un sistema de rotor-cojinete.

Las mediciones de respuesta al desbalance llevadas a cabo con un rotor de dos discos flexibles apoyado en dos cojinetes de película de fluido permiten la validación de las estimaciones que el método de identificación predijo sobre los coeficientes de fuerza en los apoyos. El método no añade complejidad matemática, ni requiere de instrumentación adicional a la ya disponible en la mayoría de la turbomaquinaria de alto rendimiento.

En su tesis doctoral, J. Arenas [32] describe una variedad de técnicas algebraicas y espectrales de identificación de señales armónicas con aplicaciones en los campos de la mecatrónica y economía. El problema de encontrar los parámetros de una onda sinusoidal, es de importancia relevante en numerosas disciplinas científicas y a causa de que es un problema no lineal, esta cuestión cuenta con numerosas soluciones.

El hecho de que haya tantas soluciones indica que en función de los requisitos se debe elegir una u otra metodología. En su tesis, se analizaron los diferentes estimadores de frecuencia, encontrando los filtros adaptativos de ranura entre los más prometedores. Sin embargo, estos filtros necesitaban de varios periodos de la señal sinusoidal para estimar la frecuencia, además había que ajustar unos parámetros de diseño que definían críticamente el estimador. Estos problemas se solventaron mediante la utilización de la novedosa identificación algebraica.

Esta identificación permitía estimar en línea la frecuencia de la onda, incluso su amplitud y fase en un tiempo inferior al periodo de dicha onda, independientemente de las condiciones iniciales y sin realizar ninguna hipótesis del tipo estadístico sobre las perturbaciones de la señal. Además, se verificó el funcionamiento de este estimador comparándolo con otros estimadores muy recientes.

Aunque los resultados obtenidos por todos los estimadores eran muy competitivos, la rapidez del estimador algebraico junto con su robustez al ruido le sitúa en una posición ventajosa para este tipo de aplicaciones.

1.1 CONCLUSIÓN DE LA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

De la revisión bibliográfica realizada, se concluye que el balanceo de rotores asimétricos aún es un reto técnico, a causa de que las posiciones angulares del desbalance afectan no solamente la fase de la respuesta sino también a las amplitudes. Además el balanceo de estos rotores se complica a causa de que el comportamiento vibratorio de un rotor asimétrico depende del factor de asimetría, amortiguamiento del sistema y de la posición angular de la fuerza de excitación. Durante la documentación también se observó que los diagramas polares de respuesta correspondientes a la primera velocidad crítica son elípticos, sin embargo, para la segunda velocidad crítica (segundo modo) los diagramas polares de respuesta son similares a los correspondientes a un rotor simétrico. Se puede apreciar que los métodos propuestos para el balanceo de rotores asimétricos están basados, en su mayoría, en el método de los coeficientes de influencia y en el análisis modal. Algunos autores han considerado por separado cada eje de inercia principal logrando el balanceo en un solo modo de vibración. Otros autores, han propuesto una metodología para balancear varios modos de vibración a la vez utilizando arreglo de pesos modales.

Un aspecto relevante de esta revisión bibliográfica es la reciente atención de la identificación en línea en el campo de la rotodinámica. En los trabajos revisados que abordan los métodos de identificación en línea se deja ver la efectividad que éstos tienen en la estimación de parámetros de sistemas reales en una amplia gama de aplicaciones en distintas áreas de la tecnología, esto a causa de las múltiples ventajas que dichos métodos presentan, tales como: la robustez ante perturbaciones y ruido, independencia de condiciones iniciales y rapidez en la determinación de los parámetros de interés.

Sin embargo no se tienen antecedentes de aplicación del método de identificación algebraica en línea de parámetros para el balanceo de rotores, a excepción del trabajo desarrollado por Blanco et al., op. cit. donde se propone un disco equilibrador activo para el balanceo de un rotor simétrico en un plano considerando un modelo de rotor Jeffcott, donde se parte de la condición de agregar un disco al rotor y cercano al disco principal diseñado de manera que la masa equilibradora se pueda mover en todas las posiciones angulares y radiales dentro del disco. Por lo que se concluye que el método de identificación algebraica en línea de parámetros no ha sido aplicado para el balanceo de rotores asimétricos.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordan conceptos básicos reportados en la literatura [33] que servirán de apoyo para el desarrollo del modelo matemático de un rotor asimétrico con múltiples grados de libertad.

2.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS ELEMENTOS DEL ROTOR

Los elementos básicos de un rotor son el disco, la flecha, los rodamientos, los sellos y las masas de desbalance. Las masas de desbalance no pueden ser evitadas completamente, por lo que también deben ser consideradas. Las expresiones de energía cinética son necesarias para caracterizar el disco, la flecha y la masa de desbalance, asimismo la energía de deformación es necesaria para caracterizar la flecha. Las fuerzas a causa de los rodamientos o sellos se usan para calcular el trabajo virtual desarrollado, y posteriormente se obtienen las fuerzas correspondientes que actúan en la flecha.

En la Figura 2.1, se muestran los elementos del sistema antes mencionados.

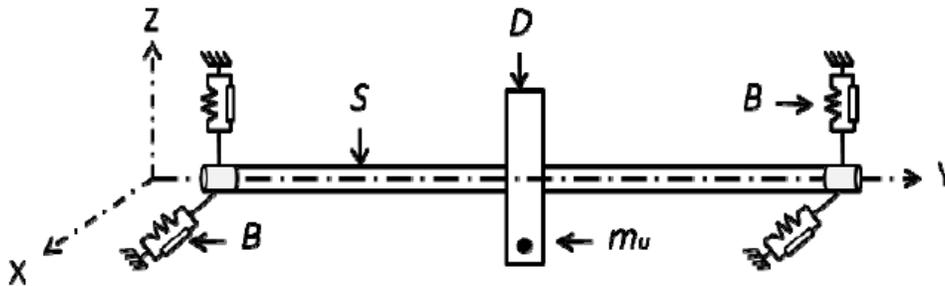


Figura 2.1. Elementos de un rotor [33].

Donde:

S = Flecha con sección transversal simétrica o asimétrica.

D = Disco, el cual representa un conjunto de álabes, un impulsor, etc.

B = Soportes, con propiedades de rigidez y/o amortiguamiento.

m_u = Masa de desbalance.

Las ecuaciones generales del sistema se obtienen a partir de los siguientes pasos:

- ✚ Se calcula la energía cinética T , la energía de deformación U y el trabajo virtual de las fuerzas externas para los elementos del sistema.
- ✚ Se aplican las ecuaciones de Lagrange en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F q_i \quad (2.1)$$

donde $N(1 \leq i \leq N)$ es el número de grados de libertad, q_i son las coordenadas generalizadas independientes, $F q_i$ son las fuerzas generalizadas, y $\dot{}$ denota diferenciación con respecto al tiempo t .

2.1.1 EL DISCO

Se asume que el disco es rígido y por tanto está caracterizado únicamente por su energía cinética.

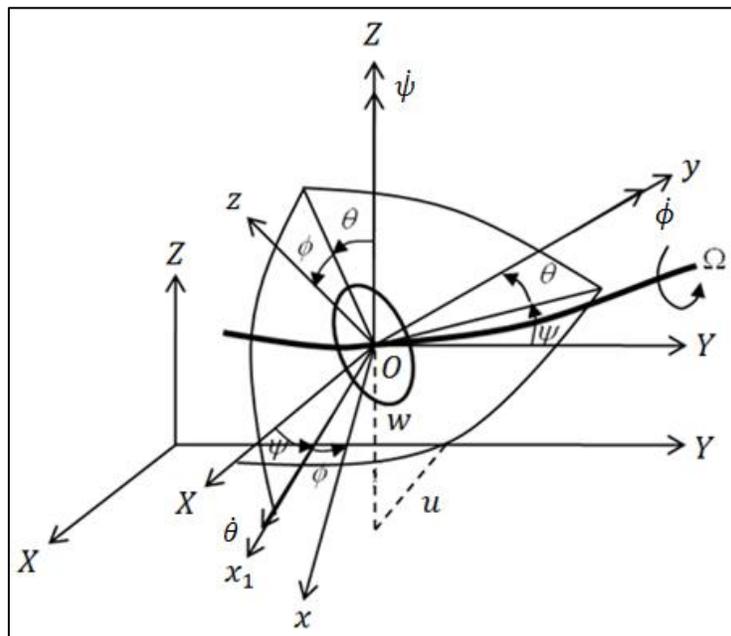


Figura 2.2. Marcos de referencia del disco sobre una flecha girando [33].

En la figura 2.2 se muestran los marcos de referencia considerado en el análisis del disco, $R_o(XYZ)$ es un marco de referencia inercial (marco de referencia fijo), mientras que $R(x, y, z)$ es marco de referencia fijo al disco (marco de referencia rotatorio). El sistema coordenado xyz esta relacionado al sistema XYZ , a través de un conjunto de tres ángulos ψ, θ y ϕ . Para obtener la orientación del disco, primero lo rotamos una cantidad ψ alrededor del eje Z , después una cantidad θ alrededor del nuevo eje x , denotado por x_1 , y por último una cantidad ϕ alrededor del eje final y .

El vector de velocidad angular instantánea respecto al marco de referencia xyz es:

$$\omega_{R/R_o} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \quad (2.2)$$

donde Z, x_1 y y son vectores unitarios a lo largo de los ejes Z, x_1 y y .

La energía cinética del disco respecto de su centro de masa O se calcula usando el marco R . En este sistema el vector de velocidad angular puede expresarse como:

$$\omega_{R/R_o}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Designando u y w a las coordenadas de O en R_o , la coordenada a lo largo del eje Y permanece constante. Además, La masa del disco es M_D y su tensor de inercia en O , cuyas direcciones principales son x, y y z , es:

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La expresión para la energía cinética del disco es:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (2.5)$$

La cual puede ser simplificada si se considera un disco simétrico ($I_{Dx} = I_{Dz}$), además, los ángulos θ y ψ son pequeños y la velocidad angular es constante, esto es $\dot{\phi} = \text{cte}$.

La ecuación (2.5) puede reescribirse como:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\theta) \quad (2.6)$$

Donde el término $\frac{1}{2} I_{Dy} \dot{\phi}^2$, el cual es constante, no tiene influencia en las ecuaciones y representa la energía del disco girando a una velocidad $\dot{\phi}$, todos los otros desplazamientos son cero. El último término $I_{Dy} \dot{\phi}\dot{\psi}\theta$, representa los efectos giroscópicos (Coriolis).

2.1.2 LA FLECHA

La flecha se representa como una viga con sección circular constante y se caracteriza por medio de la energía cinética y de deformación.

2.1.2.1 ENERGÍA CINÉTICA

La ecuación general de la energía cinética de una flecha de longitud L se expresa como:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \dot{\phi}^2 + 2\rho I \dot{\phi} \int_0^L \dot{\psi}\theta dy \quad (2.7)$$

donde ρ es la masa por unidad de volumen, S es el área de la sección transversal de la viga, la cual es constante, e I es el momento de inercia de área de la sección transversal de la flecha a lo largo del eje neutro. La primera integral es la expresión de la energía cinética de una viga en flexión; la segunda integral es el efecto secundario de la inercia rotacional (viga de Timoshenko); el término $\rho I L \dot{\phi}^2$ es constante y no tiene influencia en las ecuaciones; y la última integral representa el efecto giroscópico (Coriolis).

2.1.2.2 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

La energía de deformación de la flecha se obtiene de acuerdo al sistema coordenado mostrado en la Figura 2.3.

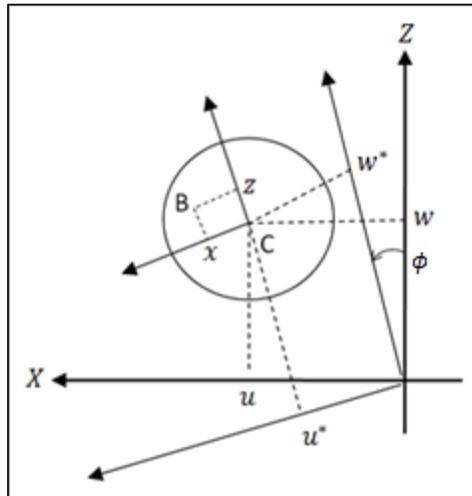


Figura 2.3. Coordenadas del centro geométrico C y un punto arbitrario B en la flecha [33].

Del diagrama de la Figura 2.3, C es el centro geométrico de la flecha, B(x, z) es un punto arbitrario sobre la sección transversal y u^* , w^* son los componentes del desplazamiento del centro geométrico respecto a los ejes inerciales x, z respectivamente.

Si se incluyen los términos de segundo orden, se puede demostrar que la deformación longitudinal del punto B es:

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (2.8)$$

ó

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (2.9)$$

donde ε_l contiene los términos lineales y ε_{nl} los términos no lineales. La energía de la deformación es:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (2.10)$$

donde "T" es el símbolo de la matriz transpuesta. Por otra parte, la relación entre deformación y esfuerzo se define como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.11)$$

Donde E es el módulo de Young, por tanto:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l\varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (2.12)$$

Por la simetría de la sección transversal de la viga respecto a los ejes x y z se tiene que:

$$\int_{\tau} \varepsilon_{nl}\varepsilon_l d\tau = 0 \quad (2.13)$$

El tercer término bajo la integral en la ecuación (2.12) es un término de segundo orden, por lo que se puede despreciar.

Por lo tanto, la energía de deformación es:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_s \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \quad (2.14)$$

Desarrollando la ecuación (2.14), se tiene que:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_s \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy \quad (2.15)$$

A causa de la simetría de la flecha, la integral que corresponde al tercer término en la ecuación(2.15) es nulo.

Si se consideran los momentos de inercia de la sección trasversal con respecto a los ejes x y z se tiene que:

$$I_x = \int_s z^2 ds \quad (2.16)$$

$$I_z = \int_s x^2 ds \quad (2.17)$$

Entonces, la expresión de la energía de deformación queda:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.18)$$

Para el caso de una flecha sujeta a una fuerza axial F_0 constante, la expresión de la energía de deformación está dada como:

$$U_2 = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2.19)$$

Por lo tanto la energía de deformación de la flecha es igual a la suma de $U_s = U_1 + U_2$

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2.20)$$

Con el propósito de evitar términos periódicos dependientes del tiempo a causa de las propiedades de los soportes, la energía de deformación de la flecha se expresa como una función de u y w , que son las componentes de los desplazamientos en R_o . Para este fin se utiliza las siguientes relaciones:

$$u^* = u \cos \phi - w \sin \phi \quad (2.21)$$

$$w^* = u \sin \phi + w \cos \phi \quad (2.22)$$

Las relaciones anteriores se pueden deducir de la Figura 2.3. Sustituyendo las ecuaciones (2.21) y (2.22) en la ecuación (2.20) se tiene:

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \phi \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \phi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \phi \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2.23)$$

Finalmente, para el caso más común de la energía de deformación para una flecha simétrica (es decir, $I_x = I_z = I$) la energía de deformación se convierte en:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2.24)$$

2.1.3 SOPORTES

Para la caracterización de los soportes, los términos de rigidez k y amortiguamiento c se consideran conocidos, y se muestran esquemáticamente en la Figura 2.4.

El trabajo virtual δW de las fuerzas actuando sobre la flecha se determina de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w \\ & -c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \end{aligned} \quad (2.25)$$

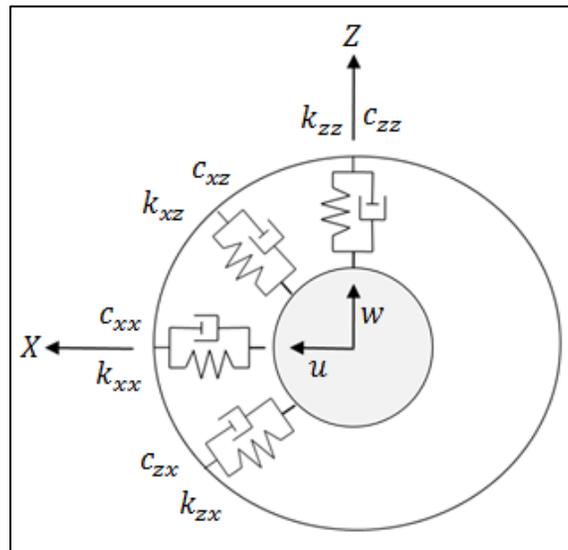


Figura 2.4. Rigidez y amortiguamiento de los soportes [33].

La ecuación (2.25) también se puede expresar como:

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (2.26)$$

donde F_u y F_w son las componentes de la fuerza generalizada. En forma matricial, las ecuaciones (2.25) y (2.26) se expresan como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

2.1.4 MASA DE DESBALANCE

El desbalance se define mediante una masa m_u localizada a una distancia e a partir del centro geométrico de la flecha. La masa permanece en un plano perpendicular al eje y y su coordenada a lo largo de este eje es constante. En la Figura 2.5 se muestra un esquema de la masa de desbalance.

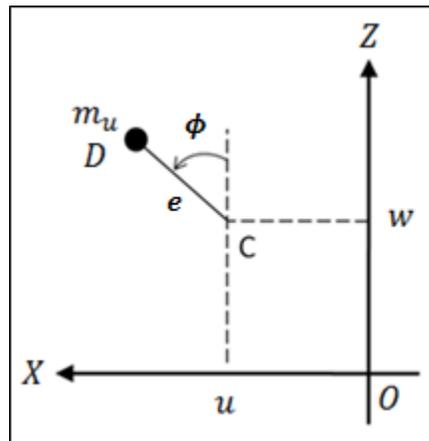


Figura 2.5. Masa de desbalance [33].

Del diagrama de la Figura 2.5, las coordenadas de la masa de desbalance m_u con respecto al sistema coordenado fijo con ejes X y Z se expresan como:

$$OD = \begin{bmatrix} u + e \operatorname{sen} \phi \\ \text{constante} \\ w + e \operatorname{cos} \phi \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Si se deriva la ecuación (2.28) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$V = \frac{d(OD)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + e\dot{\phi} \operatorname{cos} \phi \\ 0 \\ \dot{w} - e\dot{\phi} \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Entonces, la expresión para la energía cinética a causa del desbalance está dada por:

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\phi}^2 e^2 + 2\dot{\phi}e\dot{u} \cos \phi - 2\dot{\phi}e\dot{w} \sin \phi) \quad (2.30)$$

En la ecuación (2.30), el término $m_u \dot{\phi}^2 e^2 / 2$ es una constante y no tiene influencia en las ecuaciones. La masa m_u se considera pequeña con respecto a la masa del rotor, de esta forma la expresión para la energía cinética se puede describir como:

$$T_u \cong m_u \dot{\phi} e (\dot{u} \cos \phi - \dot{w} \sin \phi) \quad (2.31)$$

Al aplicar las ecuaciones de Lagrange a (2.31) se obtiene el vector de fuerza generado por la masa de desbalance.

2.2 MODELO MATEMÁTICO DE UN ROTOR CON 2GDL

A continuación se presentan las ecuaciones de un rotor asimétrico con dos grados de libertad en comparación con las de un rotor simétrico [10]. Para esto, primeramente se dan las ecuaciones diferenciales de movimiento que describen el comportamiento vibratorio de un rotor simétrico, así como su solución analítica en estado estable, y a continuación se presentan las ecuaciones diferenciales de movimiento correspondientes a un rotor asimétrico.

2.2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO DE UN ROTOR SIMÉTRICO CON DESBALANCE

Con referencia a un sistema de coordenadas fijo (x, z) , las ecuaciones de movimiento en forma escalar correspondientes a un rotor simétrico con desbalance, pueden definirse respectivamente como [10]:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_u e \dot{\phi}^2 \cos \phi \quad (2.32)$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m_u e \dot{\phi}^2 \sin \phi \quad (2.33)$$

Donde:

m = masa del sistema

c = amortiguamiento del sistema

k = rigidez del sistema

e = excentricidad del rotor

$\dot{\phi}$ = velocidad de giro del rotor en estado estable ($\dot{\phi} = \text{cte.}$)

Definiendo η como un parámetro complejo, de la forma:

$$\eta = x + jz \quad (2.34)$$

La ecuación de movimiento del sistema en forma compleja puede escribirse como:

$$m\ddot{\eta} + c\dot{\eta} + k\eta = m_u e \dot{\phi}^2 e^{j\phi} \quad (2.35)$$

Suponiendo una solución particular para la ecuación:

$$\eta = \eta_0 e^{j(\phi - \varphi)} \quad (2.36)$$

Donde:

η_0 = amplitud máxima de la vibración.

φ = ángulo de fase de la respuesta con respecto a la posición angular del desbalance.

y sustituyendo (2.36) en (2.35) se encuentra la solución de la ecuación diferencial en *estado estable*. La expresión para el desplazamiento η se encuentra en función de m , k , c , e , $\dot{\phi}$ y φ , que puede simplificarse introduciendo los parámetros Ω para la frecuencia de excitación y ζ para el factor de amortiguamiento mediante las relaciones siguientes:

$$\dot{\phi} = \Omega \dot{\phi}_n \quad (2.37)$$

$$c = \zeta c_c \quad (2.38)$$

Con:

$\dot{\phi}_n = \sqrt{k/m}$, frecuencia natural de oscilación no amortiguada.

$c_c = 2m\dot{\phi}_n$, amortiguamiento crítico.

Entonces, la expresión final en forma adimensional para el desplazamiento η puede expresarse como:

$$\frac{\eta}{e} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} e^{j(\phi - \varphi)} \quad (2.39)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2} \right) \quad (2.40)$$

Las ecuaciones (2.39) y (2.40) indican que la amplitud adimensional $\frac{\eta}{e}$ y la fase φ son funciones únicamente del parámetro Ω y del factor de amortiguamiento ζ del sistema.

2.2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO DE UN ROTOR ASIMÉTRICO CON DESBALANCE

A continuación se presentan las ecuaciones diferenciales de movimiento de un rotor asimétrico con desbalance a causa de una masa excéntrica.

Las condiciones de análisis para el presente estudio son las siguientes: se consideró un modelo simplificado (tipo Jeffcott) de dos grados de libertad de un rotor asimétrico. Las formas modales del sistema son las mismas para ambos ejes de inercia principales del rotor, despreciando de esta manera la rigidez de los soportes (rigidez infinita), además de que la asimetría considerada en el sistema, es la misma en cualquier punto a lo largo del eje axial del rotor.

2.2.2.1 SISTEMA COORDENADO

En la figura 2.6 se muestra la sección transversal de un rotor asimétrico. Para su análisis se supone que el eje **OY** se encuentra perpendicular a la sección transversal del rotor y representa el eje axial del sistema. Por definición los ejes **OXYZ** forman un sistema de coordenadas fijo, en donde el eje **OX** se encuentra en la dirección horizontal y **OZ** sobre la dirección vertical, tal y como se muestra en la figura 2.6. De forma similar, los ejes **OUVZ** forman un sistema de coordenadas rectangulares rotatorio, de tal forma que los ejes **OU** y **OV** giran alrededor del eje **OY** con una velocidad angular $\dot{\phi} = \Omega$ igual a la del rotor. Las direcciones **OU** y **OV** se asocian con los ejes de inercia principales del rotor, es decir se encuentran paralelos a los ejes que contienen las rigideces k_u y k_v de la sección transversal del rotor.

Los puntos **S**, **G** representan el centro geométrico del rotor y el centro de masa respectivamente y están separados por una distancia **e** (excentricidad), α es la posición angular inicial de la fuerza de excitación con respecto al eje que contiene la rigidez k_u de la sección transversal del rotor.

La transformación de un sistema de coordenadas a otro, puede llevarse a cabo mediante la relación siguiente:

$$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Donde **i**, **j** son vectores unitarios en las direcciones de los ejes **OU** y **OV** correspondientes al sistema de referencia rotatorio. Similarmente **I**, **J** son vectores unitarios en la dirección de los ejes **OX**, **OY** y corresponden al sistema de referencia fijo.

Para propósitos del presente análisis, las ecuaciones diferenciales de movimiento se obtuvieron en términos de las coordenadas **X**, **Z**. Sin embargo, si se requiere el desplazamiento relativo a los ejes rotatorios **OUVY**, este puede obtenerse a través de la relación (2.41).

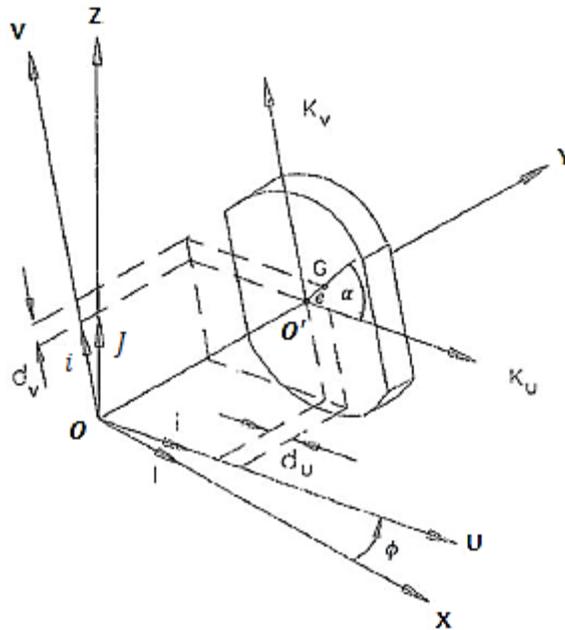


Figura 2.6. Sección transversal de un rotor asimétrico en rotación [10].

ENERGÍA CINÉTICA DEL ROTOR ASIMÉTRICO

Las coordenadas del centro de masa G expresadas con referencia al sistema coordenado fijo (X,Z) se definen como:

$$OG = OO' + O'G \quad (2.42)$$

$$OG = [x + e \cos(\phi + \alpha)]I + [z + e \sin(\phi + \alpha)]J \quad (2.43)$$

La expresión para la velocidad V es:

$$V = \frac{dOG}{dt} = [\dot{x} - e\dot{\phi} \sin(\phi + \alpha)]I + [\dot{z} + e\dot{\phi} \cos(\phi + \alpha)]J \quad (2.44)$$

Entonces, la expresión para la energía cinética es:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + e^2 \dot{\phi}^2 - 2e\dot{\phi}\dot{x} \sin(\phi + \alpha) + 2e\dot{\phi}\dot{z} \cos(\phi + \alpha)] \quad (2.45)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a (2.45) se obtienen las fuerzas de inercia que actúan en las direcciones X y Z respectivamente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = m[\ddot{x} - e\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha) - e\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha)] \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = m[\ddot{z} - e\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) + e\ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] \quad (2.47)$$

FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL ROTOR ASIMÉTRICO

a) Fuerza elástica

La fuerza que actúa sobre el sistema a causa de la rigidez de la flecha, en coordenadas rotatorias puede expresarse como:

$$F_e = -k_u u i - k_v v j \quad (2.48)$$

Aplicando la relación (2.41) a la ecuación (2.48) se encuentran los componentes de fuerza con respecto al sistema de coordenadas fijo:

$$F_e = -k_u(x \cos \phi + z \sin \phi)(\cos \phi I + \sin \phi J) - k_v(z \cos \phi - x \sin \phi)(\cos \phi J - \sin \phi I) \quad (2.49)$$

$$F_e = -\frac{1}{2}[(k_u + k_v)x + (k_u - k_v)x \sin 2\phi + (k_u - k_v)x \cos 2\phi]I - \frac{1}{2}[(k_u + k_v)z + (k_u - k_v)z \sin 2\phi - (k_u - k_v)z \cos 2\phi]J \quad (2.50)$$

b) Fuerza a cuasa del amortiguamiento externo

El amortiguamiento considerado es de tipo viscoso, por lo que es proporcional a la velocidad del centro de giro O' del rotor, ecuaciones (2.37) y (2.38). En el sistema de coordenadas fijo, puede expresarse como:

$$F_a = -c\dot{x} I - c\dot{z} K \quad (2.51)$$

Donde c es el coeficiente de amortiguamiento externo.

Al aplicar la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial de movimiento en forma matricial puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} + \cos(2\phi) \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} + \sin(2\phi) \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = m_u e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos(\phi + \alpha) \\ \sin(\phi + \alpha) \end{bmatrix} + m_u e \ddot{\phi} \begin{bmatrix} \sin(\phi + \alpha) \\ -\cos(\phi + \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

donde:

$$k_1 = \frac{k_u + k_v}{2}$$

$$k_2 = \frac{k_u - k_v}{2}$$

La ecuación matricial (2.52) puede reescribirse para las direcciones respectivas, como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_2[x \cos(2\phi) + z \sin(2\phi)] = m_u e[\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha) + \ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha)] \quad (2.53)$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + k_1z + k_2[-z \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)] = m_u e[\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] \quad (2.54)$$

Se ha mencionado que los rotores asimétricos presentan rigidez diferente en los ejes de inercia principales de la sección transversal del rotor, lo que trae como consecuencia que la fuerza elástica experimentada por el rotor en rotación, dependa de la posición angular del vector de vibración, esto puede apreciarse en el último término del lado izquierdo de las ecuaciones.

La diferencia entre las ecuaciones de movimiento de un rotor simétrico (2.32) y (2.33) y las correspondientes a uno asimétrico (2.53) y (2.54) se da únicamente en el término correspondiente a la fuerza elástica que experimenta el rotor durante la excitación, por lo que, si la rigidez k_u es igual que la rigidez k_v de la sección transversal del rotor, entonces las ecuaciones (2.53) y (2.54) se reducen a (2.32) y (2.33)

A diferencia de un rotor simétrico, la amplitud de la respuesta η y el ángulo de fase α correspondiente a un rotor asimétrico no son funciones únicamente del parámetro Ω y de factor de amortiguamiento ζ del sistema, ahora depende principalmente del factor de asimetría del rotor μ , ecuación (1.1), en forma conjunta con el factor de amortiguamiento ζ .

2.3 MODELADO POR ELEMENTO FINITO DEL ROTOR (MÚLTIPLES GDL)

Se presenta el modelado por el método del elemento finito para cada uno de los elementos del sistema rotor-chumacera [33]. En primera instancia se realizará el modelado de las ecuaciones a velocidad constante $\dot{\phi} = \text{cte.}$, posteriormente se realizará a velocidad variable $\dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$.

Para formular el modelo matemático es necesario determinar las matrices globales de masa, rigidez y efectos giroscópicos representativas del sistema rotodinámico mediante la suma de las matrices locales de cada uno de los elementos finitos en los nodos correspondientes. Estas matrices locales contienen las características geométricas y las propiedades mecánicas de cada uno de los elementos que conforman el sistema: la flecha, los discos, los cojinetes y las masas de desbalance; y serán determinadas a continuación.

2.3.1 MODELADO DEL DISCO

En un nodo dado del rotor se tienen cuatro grados de libertad: dos desplazamientos u y w , y dos rotaciones θ y ψ alrededor de los ejes X y Z respectivamente (ver figura 2.2). Por lo tanto, el vector de desplazamiento nodal δ del centro del disco se expresa como:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (2.55)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a la ecuación (2.6) para la energía cinética del disco, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

donde la primera matriz del miembro derecho de la ecuación (2.56) es la clásica matriz de masa, y la segunda es la matriz de efectos giroscópicos (Coriolis).

2.3.1.1 MODELOS DEL DISCO

De acuerdo con la literatura, los discos de un rotor se pueden modelar de tres formas diferentes [33], ver figura 2.7.

En el modelo 1, el disco se monta o se ensambla sobre un eje ranurado. Para este caso, se considera que el disco no cambia la rigidez del eje, y las características de inercia del disco se concentran en el nodo correspondiente.

En el modelo 2, el disco se considera como un cambio de diámetro de la flecha y se modela con un elemento finito tipo viga, modificando la altura del disco en $h/2$, por consecuencia el disco modifica la rigidez del sistema. El modelo 3, es similar al modelo 2, con la diferencia de que adicionalmente se modifica el espesor del disco en ambos extremos en $h/4$

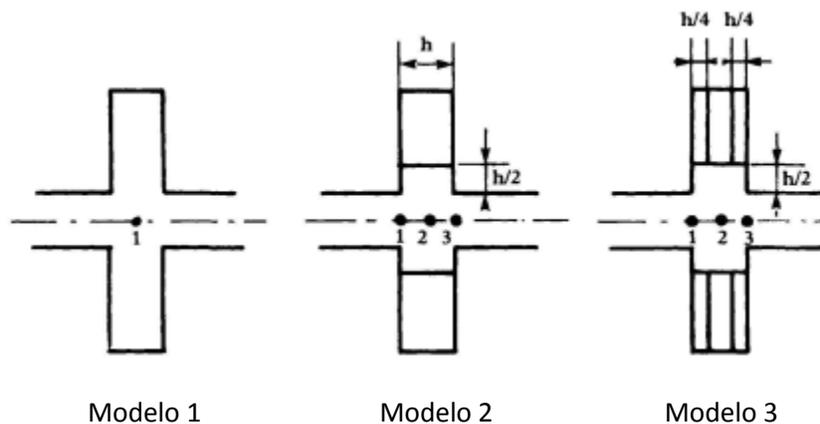


Figura 2.7. Modelos disco-flecha [33].

Lalane-Ferraris [33] recomiendan modelar el disco como se propone en el modelo 1 de la figura 2.7.

2.3.1 MODELADO DE LA FLECHA

La flecha se modela como una viga con una sección transversal simétrica. El elemento finito utilizado en la discretización tiene dos nodos, cada uno con cuatro grados de libertad que en conjunto suman un total de ocho por elemento, los cuales representan cuatro desplazamientos laterales y cuatro rotaciones. Ver figura 2.3 y 2.8.

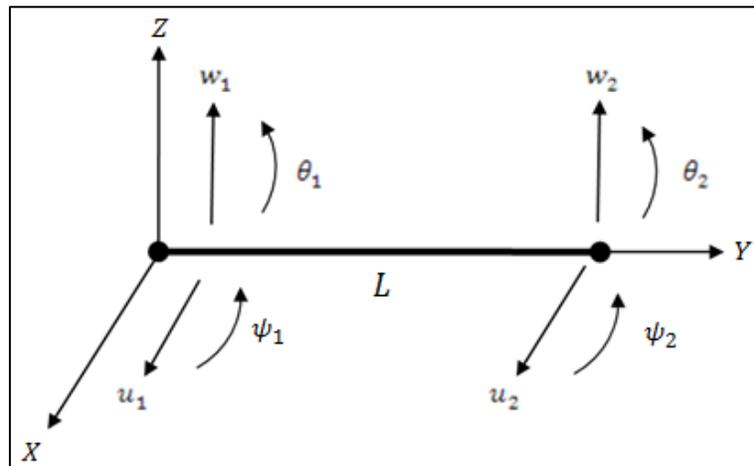


Figura 2.8. Elemento finito de la flecha [33].

Las relaciones entre los desplazamientos y las rotaciones son:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.57)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.58)$$

y el vector de desplazamiento nodal se define como:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (2.59)$$

Donde los desplazamientos correspondientes a los movimientos en las direcciones X y Z respectivamente, se definen como:

$$\delta_u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (2.60)$$

$$\delta_w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (2.61)$$

Al derivar las ecuaciones (2.60) y (2.61) con respecto al tiempo, se obtienen los vectores de velocidad $\dot{\delta}$ y aceleración $\ddot{\delta}$.

Por otra parte, el elemento finito se construye a partir de las siguientes relaciones:

$$u = N_1(y)\delta_u \quad (2.62)$$

$$w = N_2(y)\delta_w \quad (2.63)$$

Donde, $N_1(y)$ y $N_2(y)$ son las funciones de desplazamiento (funciones de forma o de interpolación) típicas de una viga en flexión, las cuales se determinan por:

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} ; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} ; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} ; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.64)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} ; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} ; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} ; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.65)$$

La energía cinética de la flecha se obtiene al sustituir las ecuaciones (2.57), (2.58), (2.62) y (2.63) en la ecuación (2.7).

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w}] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\ & - 2\rho I \dot{\phi} \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ahora, en (2.66) se sustituyen las funciones de forma, ecuaciones (2.64) y (2.65), así como sus derivadas. Posteriormente, se realizan las integraciones correspondientes, de tal forma que la ecuación para la energía cinética de la flecha se puede reescribir como:

$$T = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} + \dot{\phi} \delta \dot{u}^T M_5 \delta w + \rho I L \dot{\phi}^2 \quad (2.67)$$

donde las matrices M_1 y M_2 son las matrices de masa, M_3 y M_4 proporcionan la influencia del efecto secundario de la inercia rotacional, y M_5 aporta los efectos giroscópicos.

De la aplicación de la ecuación de Lagrange a la ecuación (2.67), se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M_T + M_S) \ddot{\delta} + C \dot{\delta} \quad (2.68)$$

En donde M y M_S se obtienen de las matrices M_1 , M_2 y M_3 , M_4 respectivamente y la matriz C de M_5 .

Aquí, M representa la matriz de masa consistente para el movimiento de traslación, la cual esta dada por:

$$[M] = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

donde ρ es la densidad volumétrica del material, S es el área de la sección transversal, y L es la longitud del elemento finito.

Por otra parte, M_S representa la matriz de masa consistente para el movimiento de rotación, la cual se expresa como:

$$[M_S] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

donde I es el segundo momento de área del elemento.

Finalmente C representa la matriz de efectos giroscópicos, la cual está en función de la velocidad de rotación del rotor y se define como:

$$[C] = \frac{\rho I \dot{\phi}}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

donde $\dot{\phi}$ es la velocidad de rotación.

La energía de deformación de la flecha se obtiene al sustituir las ecuaciones (2.62) y (2.63) en la ecuación (2.24), reescribiéndose como:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy \quad (2.72)$$

Ahora, en (2.72) se sustituyen las funciones de forma, ecuaciones (2.64) y (2.65), así como sus derivadas. Posteriormente, se realizan las integraciones correspondientes. Después de la integración U_s se convierte en:

$$U_s = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_4 \delta w \quad (2.73)$$

donde K_1 y K_2 son las matrices clásicas de rigidez, mientras que K_3 y K_4 son las matrices a causa de las fuerzas axiales.

Aplicando la ecuación de Lagrange a la ecuación (2.73) se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = K \delta \quad (2.74)$$

con :

$$K = K_C + K_F \quad (2.75)$$

La influencia de los efectos cortantes proporciona una matriz K_s , matriz que no se obtiene en este desarrollo, sin embargo se considera su influencia en la matriz de rigidez clásica. Por tanto, la matriz de rigidez clásica K_C resulta de las matrices K_1 , K_2 y K_s , mientras que K_F se obtiene de las matrices K_3 y K_4 .

Donde K_C y K_F se expresan como:

$$[K_C] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$[K_F] = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

donde E es el módulo de Young del material y a es el efecto cortante, éste último se determina como:

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (2.78)$$

el módulo a cortante se define:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.79)$$

siendo ν la relación de Poisson del material.

2.3.3 MODELADO DE LOS SOPORTES

Las expresiones de trabajo virtual de los soportes están dadas por las ecuaciones (2.25) y (2.26), las cuales se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} F_u &= -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \\ F_w &= -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Como $F_\theta = F_\psi = 0$, el vector de fuerzas que actúan sobre la flecha es:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

La primera matriz es la matriz de rigidez de los soportes y la segunda es la matriz de amortiguamiento viscoso. Estas matrices generalmente son asimétricas ($k_{xz} \neq k_{zx}$ y $c_{xz} \neq c_{zx}$) y los términos de las matrices pueden variar significativamente como una función de la velocidad de rotación.

2.3.4 MODELADO DE LA MASA DE DESBALANCE

Si se tiene $\dot{\phi} = cte.$, aplicando la ecuación de Lagrange a la ecuación (2.31), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \delta} = -m_u e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

El vector de desplazamiento se expresa como:

$$\delta = [u, w]^T \quad (2.83)$$

La expresión (2.82) corresponde a la masa de desbalance situada en el eje Z (figura 2.5) en $t = 0$. Cuando se estudian los rotores industriales, se debe considerar la influencia de muchas masas de desbalance actuando de manera simultánea. Para una masa de desbalance situada en una posición angular α con respecto al eje Z en $t = 0$, se generan fuerzas a causa de la masa del desbalance que se definen como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \delta} = -m_u e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \sin(\phi + \alpha) \\ \cos(\phi + \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Dichas fuerzas pueden ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = F_2 \operatorname{sen} \dot{\phi} t + F_3 \operatorname{cos} \dot{\phi} t \quad (2.85)$$

donde F_2 y F_3 son las fuerzas producidas por la masa del desbalance en los ejes X, Z , respectivamente, las cuales se determinan como:

$$F_2 = m_u e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix}$$

$$F_3 = m_u e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos} \alpha \end{bmatrix}$$

2.4 RESPUESTA AL DESBALANCE EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

Para el presente análisis es importante conocer lo que sucede cuando un rotor inicia, se detiene o pasa por una velocidad crítica, dichos efectos son conocidos como movimientos transitorios, en donde se considera que la velocidad angular del rotor $\dot{\phi}$ varía en función del tiempo [33], es decir:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}(t) \quad (2.86)$$

2.4.1 DISCO

Al aplicar la ecuación de Lagrange a la ecuación (2.6) para la energía cinética del disco, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = M_D \ddot{\delta} + \dot{\phi} C_D \dot{\delta} + \ddot{\phi} K_{DT} \delta \quad (2.87)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Donde la primera matriz es la matriz clásica de masa, la segunda es la matriz de efectos giroscópicos (Coriolis) y la tercera es una matriz de rigidez K_{DT} , la cual sólo tiene un término y está multiplicada por la aceleración angular.

2.4.2 FLECHA

De la aplicación de la ecuación de Lagrange a la ecuación (2.7) para la energía cinética de la flecha, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + \dot{\phi} C_s \dot{\delta} + \ddot{\phi} K_{ST} \delta \quad (2.89)$$

De forma similar a lo que ocurre con el disco, de la energía cinética de la flecha surge un término adicional que da lugar a la formación de una matriz de rigidez que está multiplicada por la aceleración angular del rotor:

$$K_{ST} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

2.4.3 MASA DE DESBALANCE

Como resultado de considerar la velocidad de rotación del rotor como una función del tiempo $\dot{\phi}(t)$, al aplicar la ecuación de Lagrange a la expresión para la energía cinética de la masa de desbalance (2.31) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \delta} &= m_u e (\ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha)) \\ &\quad - m_u e (\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)) \end{aligned} \quad (2.91)$$

El vector de desplazamiento se expresa como:

$$\delta = [u, w]^T \quad (2.92)$$

Las fuerzas producidas por una masa de desbalance situada en la posición angular α respecto al eje Z en el tiempo $t = 0$, se expresan como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = \dot{\phi}^2 F_1(\phi) + \ddot{\phi} F_2(\phi) \quad (2.93)$$

donde F_1 y F_2 son las fuerzas producidas por el desbalance en los ejes X y Z, respectivamente.

Únicamente las ecuaciones para el cálculo de la energía cinética de los componentes de un sistema rotodinámico se ven afectadas al considerar el movimiento transitorio $\dot{\phi}(t)$.

2.5 RAMPA DE EXCITACIÓN

El término rampa de excitación significa una variación de la frecuencia de excitación de manera continua con una tasa específica con respecto al tiempo y puede ser en sentido ascendente (subidas) o descendente (bajadas).

La frecuencia de excitación de la mayoría de los sistemas rotatorios reales no varía linealmente con el tiempo. Sin embargo, en algunos casos, la variación de frecuencia es lo suficientemente lenta como para aproximarla a una función lineal en un intervalo limitado de frecuencias [10]. La variación de la frecuencia de excitación es de la forma:

$$\dot{\phi}(t) = \omega_0 + \ddot{\phi} t \quad (2.94)$$

Donde:

ω_0 = frecuencia de excitación al inicio de la rampa.

$\ddot{\phi}$ = aceleración o tasa de cambio de la frecuencia de excitación con respecto al tiempo.

2.6 PARÁMETROS QUE INFLUYEN EN LA RESPUESTA VIBRATORIA DE UN ROTOR

De acuerdo con los autores citados en la revisión bibliográfica [10], la respuesta vibratoria de un rotor asimétrico con excitación de frecuencia variable (rampa de excitación) depende principalmente de tres parámetros adimensionales:

a) Factor de amortiguamiento modal del sistema. Este parámetro es diferente para cada modo de vibración del rotor y puede expresarse de la manera siguiente:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega^*} \quad (2.95)$$

Donde ω^* es la frecuencia natural promedio del sistema para un modo de vibración en particular, definiéndose como:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{\omega_u^2 + \omega_v^2}{2}} \quad (2.96)$$

Siendo ω_u y ω_v las frecuencias naturales correspondientes a las rigideces k_u y k_v de la sección transversal del rotor respectivamente.

b) Factor de velocidad de la rampa de excitación:

$$W_a = \frac{\omega^{*2}}{\ddot{\phi}} = 4\pi N \quad (2.97)$$

Donde N es el número de ciclos de la excitación que ocurren al variar la frecuencia de excitación desde cero hasta la frecuencia natural del sistema.

c) **Factor de asimetría modal.** Expresa el grado de asimetría existente en el modo de vibración considerado y está dado por:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\omega_u^2 - \omega_v^2}{\omega_u^2 + \omega_v^2} \quad (2.98)$$

Para que la respuesta vibratoria del rotor asimétrico sea estable, considerando rampas de excitación, debe satisfacerse la relación siguiente:

$$\zeta > \mu \quad (2.99)$$

Si la relación (2.99) no se satisface, se presentará una región de inestabilidad en el sistema en la zona de resonancia.

Para el caso de un rotor simétrico, en los incisos a) y b) $\omega^* = \dot{\phi}_n$, donde $\dot{\phi}_n$ se define por la ecuación (2.37) y el inciso c) no es aplicable ya que el factor de asimetría modal se considera igual a cero.

Un parámetro adimensional de efecto de barrido (rampa de excitación) según Gutiérrez [34] para el análisis de la respuesta vibratoria en la región correspondiente a la zona de resonancia, está definido como:

$$\epsilon = \frac{\ddot{\phi}}{\omega^{*2} \zeta^2} \quad (2.100)$$

La vibración de un rotor simétrico aplicando rampas de excitación puede considerarse aproximadamente igual a la de estado estable si $0 \leq \epsilon \leq 0.04$.

2.7 MÉTODOS DE SOLUCIÓN AL MODELO MATEMÁTICO

2.7.1 SOLUCIÓN EN ESTADO ESTABLE PARA UN ROTOR SIMÉTRICO

Las ecuaciones de movimiento (2.32) y (2.33) correspondientes al rotor simétrico con 2 GDL analizado anteriormente, pueden escribirse de forma general como:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} \quad (2.101)$$

Donde $\{U\}$ es el vector que contiene todos los desplazamientos; $[M]$ es la matriz de masa del sistema, $[C]$ es la matriz de amortiguamiento, $[K]$ es la matriz de rigidez y $\{F(t)\}$ el vector de fuerza.

La ecuación (2.101) se puede solucionar en condiciones de estado estable, la solución provee de la respuesta vibratoria en ambas direcciones simultáneamente.

El desbalance $F(t)$ está determinado por:

$$\{F(t)\} = \{F_1\}\cos \phi + \{F_2\}\sen \phi \quad (2.102)$$

Donde:

$$\{F_1\} = m_u e \phi^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sen \alpha \end{bmatrix}, \quad \{F_2\} = m_u e \phi^2 \begin{bmatrix} -\sen \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Para obtener la respuesta vibratoria a causa del desbalance, se propone una solución para la ecuación (2.101) de la forma:

$$U = u_1 \sen \phi + u_2 \cos \phi \quad (2.103)$$

Sustituyendo la ecuación (2.103) y sus derivadas en la ecuación (2.101), e identificando los términos en $\sen \phi$ y $\cos \phi$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} [K] - \phi^2[M] & \dot{\phi}[C] \\ -\dot{\phi}[C] & [K] - \phi^2[M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

El arreglo matricial (2.104) se resuelve para los valores de la velocidad angular $\dot{\phi}$.

2.7.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

De acuerdo con Bathe [35], los métodos numéricos de integración directa pueden utilizarse para resolver cualquier ecuación diferencial, ya sea lineal o no lineal.

El término “integración directa” se refiere a que no se requiere ninguna transformación de las ecuaciones (como por ejemplo reducción de orden) antes de la integración numérica. Estos métodos integran las ecuaciones, mediante un procedimiento numérico paso a paso y consisten en encontrar una solución a todo el sistema de ecuaciones en cada intervalo discreto de tiempo Δt , en vez de una solución general para cualquier instante de tiempo t , asumiendo una variación de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en cada intervalo de tiempo Δt . Esta última consideración, determina la precisión, estabilidad y esfuerzo de cómputo del procedimiento de solución. Algunos de los métodos de integración directa más populares en el diseño estructural son los de Diferencia Central, Houbolt, Newmark y Wilson θ .

2.7.2.1 INTEGRACIÓN DIRECTA DE NEWMARK

El método de integración directa de Newmark se basa en la suposición de que la aceleración varía linealmente entre dos instantes de tiempo [35]. Las expresiones para la velocidad y el desplazamiento están dadas por:

$${}^{(t+\Delta t)}\dot{U} = {}^{(t)}\dot{U} + [(1 - \delta) {}^{(t)}\ddot{U} + \delta {}^{(t+\Delta t)}\ddot{U}]\Delta t \quad (2.105)$$

$${}^{(t+\Delta t)}U = {}^{(t)}U + {}^{(t)}\dot{U}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^{(t)}\ddot{U} + \alpha {}^{(t+\Delta t)}\ddot{U} \right] \Delta t^2 \quad (2.106)$$

Los parámetros δ y α se eligen para obtener la precisión y la estabilidad deseada en la integración. Cuando $\delta = 1/2$ y $\alpha = 1/4$, corresponde a la suposición de que la aceleración se mantiene constante en un valor promedio de $({}^{(t)}\ddot{U} + {}^{(t+\Delta t)}\ddot{U})/2$.

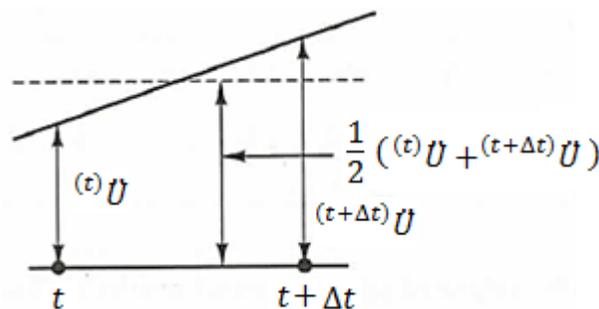


Figura 2.9. Esquema de la aceleración promedio de Newmark [35].

El algoritmo completo utilizando el método de integración numérica de Newmark se muestra en la Tabla 2.1.

(a) Cálculos iniciales:

1. Formular las matrices de rigidez $[K]$, masa $[M]$ y amortiguamiento $[C]$
2. Condiciones iniciales U_0, \dot{U}_0 y \ddot{U}_0 .
3. Seleccionar el paso de tiempo Δt , los parámetros δ y α , y calcular las constantes de integración.

$$\delta \geq 0.5; \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}; a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); a_6 = \Delta t(1 - \delta); a_7 = \delta\Delta t$$

4. Formular la matriz de rigidez efectiva: $[\hat{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$

5. Triangularizar $[\hat{K}]$: $[\hat{K}] = [L][D][L]^T$

(b) Para cada paso de tiempo:

1. Calcular el vector de fuerza efectiva en el tiempo $t + \Delta t$:

$${}^{(t+\Delta t)}\hat{F} = {}^{(t+\Delta t)}F + [M](a_0 {}^{(t)}U + a_2 {}^{(t)}\dot{U} + a_3 {}^{(t)}\ddot{U}) + [C](a_1 {}^{(t)}U + a_4 {}^{(t)}\dot{U} + a_5 {}^{(t)}\ddot{U})$$

2. Resolver para los desplazamientos en el tiempo $t + \Delta t$

$$[\hat{K}]{}^{(t+\Delta t)}U = {}^{(t+\Delta t)}\hat{F}$$

3. Calcular \dot{U} y \ddot{U} en el tiempo $t + \Delta t$:

$${}^{(t+\Delta t)}\ddot{U} = a_0({}^{(t+\Delta t)}U - {}^{(t)}U) - a_2 {}^{(t)}\dot{U} - a_3 {}^{(t)}\ddot{U}$$

$${}^{(t+\Delta t)}\dot{U} = {}^{(t)}\dot{U} + a_6 {}^{(t)}\ddot{U} + a_7 {}^{(t+\Delta t)}\ddot{U}$$

Tabla 2.1 Algoritmo basado en el método de Newmark.

2.8 AMORTIGUAMIENTO ESPECTRAL

El amortiguamiento es una fuente de disipación de energía en la estructura y eso conduce al decaimiento de la amplitud de vibración libre en función del tiempo. Normalmente, es difícil obtener el amortiguamiento global de un sistema, y en general, se debe determinar experimentalmente [36]. En vibraciones libres y análisis modal, el amortiguamiento se puede despreciar o se puede asumir un valor pequeño para el amortiguamiento global del sistema. Esta es una suposición razonable ya que en la práctica el amortiguamiento es lo suficientemente pequeño, y por lo general, se supone del tipo viscoso. En las vibraciones forzadas sin embargo, cuando la frecuencia forzada esta cerca de una de las frecuencias naturales del sistema, la respuesta es dominada por los valores específicos de amortiguamiento. De acuerdo con Malkus et al. [37], el análisis computacional del amortiguamiento puede ser categorizado como:

- Métodos de amortiguamiento fenomenológico, que consisten en modelar el mecanismo de amortiguamiento, el cual puede ser elasto-plástico, histerético, uniones estructurales con fricción, etc.
- Métodos de amortiguamiento espectral, donde se introduce amortiguamiento viscoso a través de fracciones de amortiguamiento crítico exclusivas para un determinado modo de vibración o para un intervalo de frecuencias $(\omega_1 - \omega_2)$.

Los métodos fenomenológicos, requieren modelos detallados para los mecanismos disipativos y casi siempre dan como resultado análisis no lineales, por lo tanto, rara vez se utilizan.

En el método de amortiguamiento espectral se realiza experimentación con la respuesta vibratoria de la estructura para asignar una fracción de amortiguamiento crítico como una función de la frecuencia. Un procedimiento de amortiguamiento espectral conocido como Rayleigh o proporcional, consiste en formar una matriz de amortiguamiento global $[C]$ a partir de una combinación lineal de las matrices de rigidez $[K]$ y masa $[M]$, como se muestra en la ecuación (2.107):

$$[C] = \sigma[K] + \tau[M] \quad (2.107)$$

donde σ y τ son constantes de amortiguamiento proporcional de rigidez y masa respectivamente.

La matriz $[C]$ dada por la ecuación (2.107), es una matriz de amortiguamiento ortogonal, ya que permite que los modos sean desacoplados por los eigenvectores asociados con el sistema sin amortiguamiento. La relación entre σ y τ , y la fracción de amortiguamiento crítico ξ en la frecuencia ω está dada por la siguiente ecuación:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\sigma \omega + \frac{\tau}{\omega} \right) \quad (2.108)$$

Las constantes de amortiguamiento σ y τ , se determinan por la elección de las fracciones de amortiguamiento crítico (ξ_1 y ξ_2), a dos frecuencias diferentes (ω_1 y ω_2) y solucionando las ecuaciones simultáneas para σ y τ . De esta forma se tiene:

$$\sigma = 2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (2.109)$$

$$\tau = 2\omega_1 \omega_2 (\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (2.110)$$

En la Figura 2.10, se muestran las contribuciones de masa y rigidez a la fracción de amortiguamiento crítico en función de la frecuencia. El amortiguamiento atribuible a $\sigma[K]$ aumenta con el incremento de la frecuencia, mientras que el amortiguamiento atribuible a $\tau[M]$ aumenta con el decremento de la frecuencia. Por lo general, ω_1 y ω_2 se eligen para limitar el espectro de diseño. De esta forma, ω_1 se toma como la frecuencia natural más baja de la estructura, y ω_2 es la frecuencia máxima de interés.

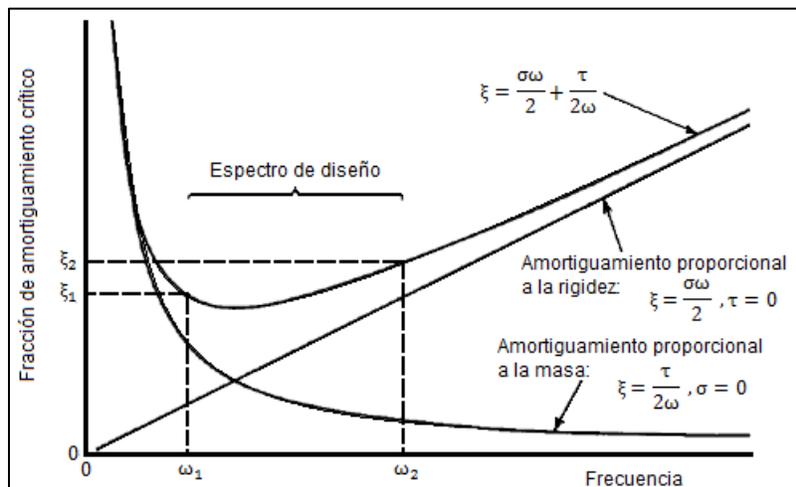


Figura 2.10. Fracción del amortiguamiento crítico en función de la frecuencia para el amortiguamiento de Rayleigh [37].

CAPÍTULO III

MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO DE UN ROTOR ASIMÉTRICO DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

Tomando como base la metodología y el desarrollo del modelo matemático para un rotor simétrico de múltiples grados de libertad presentado por Ferraris y Lalane [33] (ver Capítulo II), con el objetivo de observar los efectos de la asimetría en la respuesta de vibración del sistema, en este capítulo se presenta el desarrollo del modelo matemático propuesto para un rotor asimétrico de múltiples grados de libertad.

La geometría de la sección transversal que se considera para la flecha asimétrica se muestra en la figura 3.1. De acuerdo con Pisarenko [38], los momentos de inercia con respecto al marco de referencia rotatorio I_x y I_z se definen como:

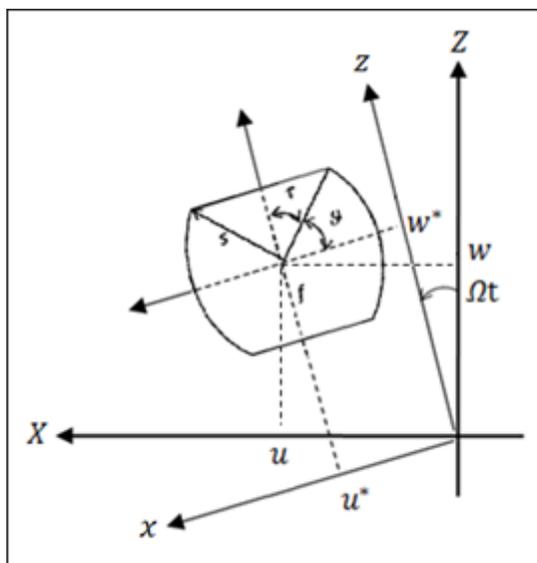


Figura 3.1 Sección transversal asimétrica de la flecha [38].

$$I_x = \frac{(2s)^4}{32} \left(\vartheta - \frac{\text{sen}(4\vartheta)}{4} \right) \quad (3.1)$$

$$I_z = \frac{(2s)^4}{32} \left(\vartheta + \frac{\text{sen}(2\vartheta)}{2} + \frac{\text{sen}(2\vartheta)\cos(\vartheta)^2}{3} \right) \quad (3.2)$$

$$S = s^2(\text{sen}(2\vartheta) + 2\vartheta) \quad (3.3)$$

Donde:

$$\tau = \cos^{-1}\left(1 - \frac{s-f}{s}\right)$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \tau$$

Para el caso de una flecha asimétrica con la geometría que se muestra en la figura 3.1, los momentos de inercia I_x e I_z que se encuentran expresados por definición en las ecuaciones (2.16) y (2.17) del Capítulo II, se determinan mediante las ecuaciones (3.1) y (3.2) respectivamente.

3.1 ENERGÍA CINÉTICA DE LA FLECHA ASIMÉTRICA

Como se mencionó anteriormente, la ecuación de la energía cinética de una flecha proviene de una extensión de la ecuación general del disco, ecuación (2.5), y en su forma más general sin despreciar ningún término en el vector de velocidad angular, ecuación (2.3), ni realizar simplificaciones por geometría, resulta en:

$$\begin{aligned} T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I_x}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 \text{sen}^2 \phi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \text{sen}\phi \cos\phi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi) dy \\ & + \frac{\rho I_y}{2} \int_0^L (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\theta + \dot{\psi}^2 \theta^2) dy \\ & + \frac{\rho I_z}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \text{sen}\phi \cos\phi + \dot{\theta}^2 \text{sen}^2 \phi) dy \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde ρ es la masa por unidad de volumen, S es el área de la sección transversal de la viga, I_x, I_z son los momentos de inercia de área de la sección transversal de la flecha e $I_y = I_x + I_z$ es el momento polar de inercia a lo largo del eje neutro.

La primera integral es la expresión de la energía cinética de una viga en flexión; la segunda y la cuarta integral es el efecto secundario de la inercia rotacional (viga de Timoshenko); el término $\rho I_y L \dot{\phi}^2$ es constante y no tiene influencia en las ecuaciones a causa de que la velocidad angular $\dot{\phi} = cte.$ y el término se anula al aplicar la ecuación de Lagrange, el término $\rho I_y \dot{\psi}^2 \theta^2$ se desprecia por que θ^2 es muy pequeño; finalmente, la tercera integral representa el efecto giroscópico (Coriolis).

3.2 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DE LA FLECHA ASIMÉTRICA

Si se sustituyen todos los términos de la deformación longitudinal (2.8) en la expresión de la energía de deformación dada por la ecuación (2.12) del Capítulo II, la ecuación general de la energía de deformación se expresa como:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_s \left[\left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right)^2 \right] ds dy \quad (3.5)$$

Introduciendo los momentos de inercia de área respecto a los ejes x y z, tal como se definió en las ecuaciones (2.16) y (2.17) respectivamente, así como los productos de inercia, momentos estáticos y área definidos por:

$$I_{xz} = \int_s xz ds \quad (3.6)$$

$$Q_x = \int_s z ds \quad (3.7)$$

$$Q_z = \int_s x ds \quad (3.8)$$

$$S = \int_s ds \quad (3.9)$$

La ecuación (3.5) queda:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2I_{xz} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - \left(Q_x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + Q_z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} S \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right)^2 \right] dy \quad (3.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.21) y (2.22) en la ecuación (3.10) se tiene:

$$\begin{aligned}
U_1 = & \frac{E}{2} \int_0^L \left[(I_z \cos^2 \phi + I_x \sin^2 \phi + I_{xz} \sin(2\phi)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& + (I_z \sin^2 \phi + I_x \cos^2 \phi - I_{xz} \sin(2\phi)) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\
& + [(I_x - I_z) \sin(2\phi) + 2I_{xz} \cos(2\phi)] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& - \left((Q_x \cos \phi + Q_z \sin \phi) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (Q_z \cos \phi - Q_x \sin \phi) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} S \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^2 \Big] dy \tag{3.11}
\end{aligned}$$

De acuerdo con la geometría propuesta para la sección transversal de la flecha del rotor, ésta presenta doble simetría, por tanto el producto de inercia $I_{xz} = 0$, así como los momentos estáticos o primeros momentos de área respecto a los ejes centroidales $Q_x = 0$ y $Q_z = 0$. Por otra parte, el último término de la ecuación (3.11) que multiplica al área S , representa el cuadrado de los desplazamientos y corresponde a la parte no lineal de la deformación ε_{nl} , por lo que este término puede despreciarse.

De acuerdo con lo anterior, la ecuación (3.11) se reduce como:

$$\begin{aligned}
U_S = & \frac{E}{2} \int_0^L \left[(I_z \cos^2 \phi + I_x \sin^2 \phi) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + (I_z \sin^2 \phi + I_x \cos^2 \phi) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& \left. + [(I_x - I_z) \sin(2\phi)] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dy \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes en $\sin^2 \phi$ y $\cos^2 \phi$ se tiene:

$$\begin{aligned}
U_S = & \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \left[I_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \sin^2 \phi + \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \cos^2 \phi \right. \\
& \left. + (I_x - I_z) \sin(2\phi) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dy \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las identidades trigonométricas (3.14) de doble ángulo correspondientes al $\text{sen}^2\phi$ y $\text{cos}^2\phi$ en la ecuación (3.13):

$$\text{sen}^2\phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cos}(2\phi), \quad \text{cos}^2\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{cos}(2\phi) \quad (3.14)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} U_s = & \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \left[I_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cos}(2\phi) \right) \right. \\ & \left. + \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{cos}(2\phi) \right) + (I_x - I_z)\text{sen}(2\phi) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dy \end{aligned} \quad (3.15)$$

Reagrupando términos, la ecuación (3.15) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} U_s = & \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \text{cos}(2\phi) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + (I_x - I_z)\text{sen}(2\phi) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dy \end{aligned} \quad (3.16)$$

Declarando las siguientes relaciones:

$$I_p = \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) \quad I_d = \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \quad (3.17)$$

Finalmente se obtiene la ecuación para la energía de deformación de la flecha asimétrica:

$$\begin{aligned} U_s = & \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ I_p \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + I_d \text{cos}(2\phi) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + 2I_d \text{sen}(2\phi) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dy \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3 MODELADO DE LA FLECHA ASIMÉTRICA

La flecha se modela como una viga con sección transversal asimétrica, ver figura 3.1. De igual forma, el elemento finito utilizado en la discretización tiene dos nodos, cada uno con cuatro grados de libertad los cuales representan cuatro desplazamientos laterales y cuatro rotaciones.

Sustituyendo las ecuaciones (2.57) y (2.58) y sus derivadas correspondientes en la ecuación (3.4), se tiene que la ecuación de la energía cinética se define como:

$$\begin{aligned}
 T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} (I_x \text{sen}^2 \phi + I_z \text{cos}^2 \phi) \int_0^L \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 dy \\
 & + \frac{\rho}{2} (I_x \text{cos}^2 \phi + I_z \text{sen}^2 \phi) \int_0^L \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{\rho}{2} (I_x - I_z) \text{sen} 2\phi \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy \\
 & - \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2}
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Agrupando términos semejantes en $\text{sen}^2 \phi$ y $\text{cos}^2 \phi$ de la ecuación (3.19) se tiene:

$$\begin{aligned}
 T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} \text{sen}^2 \phi \int_0^L \left[I_x \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\
 & + \frac{\rho}{2} \text{cos}^2 \phi \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \frac{\rho}{2} (I_x - I_z) \text{sen} 2\phi \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy \\
 & - \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2}
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.14) en (3.20), T_s queda como:

$$\begin{aligned}
 T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos}(2\phi) \right) \int_0^L \left[I_x \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\
 & + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{cos}(2\phi) \right) \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\
 & + \frac{\rho}{2} (I_x - I_z) \text{sen} 2\phi \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy - \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy \\
 & + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2}
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\
& + \frac{\rho}{2} \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \cos(2\phi) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \frac{\rho}{2} (I_x - I_z) \text{sen}2\phi \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy \\
& - \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.17) en (3.22) finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}
T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho}{2} I_p \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\
& + \frac{\rho}{2} I_a \cos(2\phi) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \rho I_a \text{sen}2\phi \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy \\
& - \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dy + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Retomando la ecuación (3.23) y sustituyendo las relaciones (2.62) y (2.63), esta se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w}] dy + \frac{\rho}{2} I_p \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\
& + \frac{\rho}{2} I_a \cos(2\phi) \int_0^L \left[\delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} - \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} \right] dy \\
& + \rho I_a \text{sen}2\phi \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy - \rho I_y \dot{\phi} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\
& + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las funciones de forma definidas por las ecuaciones (2.64) y (2.65) y sus derivadas correspondientes en (3.24), la ecuación para la energía cinética de la flecha se modifica como:

$$T_s = T_1 + T_2 \tag{3.25}$$

Con:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\rho S}{2} [\delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w}] \\
T_2 &= \frac{\rho}{2} I_p [\delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w}] + \frac{\rho}{2} I_d \cos(2\phi) [\delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} - \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u}] \\
&\quad + \rho I_d \sin 2\phi [\delta \dot{u}^T M_5 \delta \dot{w}] - \rho I_y \dot{\phi} [\delta \dot{u}^T M_5 \delta \dot{w}] + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2}
\end{aligned}$$

Donde:

$$M_1 = \int_0^L N_1^T N_1$$

$$M_2 = \int_0^L N_2^T N_2$$

$$M_3 = \int_0^L \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy}$$

$$M_4 = \int_0^L \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy}$$

$$M_5 = \int_0^L \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy}$$

De las matrices M_1 , M_2 , M_3 , M_4 y M_5 se determina la matriz de masa de translación M , la matriz del efecto secundario de la inercia rotacional M_s y la matriz de los efectos giroscópicos C_s .

Realizando las integraciones correspondientes, se tiene que:

$$M_1 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 3L & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la aplicación de la ecuación de Lagrange a la ecuación (3.25), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + \dot{\phi} C_s \dot{\delta} \quad (3.26)$$

Donde M representa la matriz de masa para el movimiento de translación, M_s la matriz de masa para el movimiento de rotación y C_s la matriz de efectos giroscópicos.

3.3.1 MATRIZ DE MASA DE TRANSLACIÓN

Retomando T_1 de la ecuación (3.25) se tiene que:

$$T_1 = \frac{\rho S}{2} [\delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w}] \quad (3.27)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a (3.27) se encuentra que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\delta}_u} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \delta_u} = \frac{\rho S}{2} [M_1 \delta \ddot{u} + \delta \ddot{u}^T M_1] = \frac{\rho S}{2} [M_1 \delta \ddot{u} + M_1^T \delta \ddot{u}] = \rho S [M_1 \delta \ddot{u}] \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\delta}_w} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \delta_w} = \frac{\rho S}{2} [M_2 \delta \ddot{w} + \delta \ddot{w}^T M_2] = \frac{\rho S}{2} [M_2 \delta \ddot{w} + M_2^T \delta \ddot{w}] = \rho S [M_2 \delta \ddot{w}] \quad (3.29)$$

En (3.28) y (3.29) se utilizó la propiedad $(AB)^T = B^T A^T$, además de $M_1 = M_1^T$, $M_2 = M_2^T$ por ser matrices simétricas, por tanto de forma generalizada (3.28) y (3.29) se puede escribir como.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \delta} = \rho S [M_1 \delta \ddot{u} + M_2 \delta \ddot{w}] \quad (3.30)$$

Sustituyendo las matrices M_1 y M_2 , así como las derivadas de los vectores que contienen los grados de libertad por nodo ecuaciones (2.60) y (2.61) en (3.30) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \delta} &= \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L & 0 & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L & 0 & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{w}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Reagrupando (3.31) de acuerdo con la ecuación (2.59), esta se puede reescribir como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \delta} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{w}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\psi}_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) representa la matriz de masa consistente para el movimiento de traslación, la cual finalmente se define como:

$$M = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

donde ρ denota la densidad volumétrica del material, S el área de la sección transversal de la flecha, y L la longitud del elemento finito tipo viga.

3.3.2 MATRIZ DE MASA DE ROTACIÓN Y MATRIZ DE EFECTOS GIROSCÓPICOS

Para obtener la matriz de masa consistente para el movimiento de rotación y la matriz de efectos giroscópicos, se retoma T_2 de la ecuación (3.25).

$$T_2 = \frac{\rho}{2} I_p [\delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w}] + \frac{\rho}{2} I_d \cos(2\phi) [\delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} - \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u}] \\ + \rho I_d \sin 2\phi [\delta \dot{u}^T M_5 \delta \dot{w}] - \rho I_y \dot{\phi} [\delta \dot{u}^T M_5 \delta w] + \frac{\rho I_y L \dot{\phi}^2}{2} \quad (3.34)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a (3.34), se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial \delta} = \frac{\rho}{2} I_p \frac{d}{dt} ([M_3 \delta \dot{u} + \delta \dot{u}^T M_3] + [M_4 \delta \dot{w} + \delta \dot{w}^T M_4]) \\ + \frac{\rho}{2} I_d \frac{d}{dt} \{ \cos(2\phi) ([M_4 \delta \dot{w} + \delta \dot{w}^T M_4] - [M_3 \delta \dot{u} + \delta \dot{u}^T M_3]) \} \\ + \rho I_d \frac{d}{dt} (\sin 2\phi [M_5 \delta \dot{w} + \delta \dot{u}^T M_5]) - \rho I_y \frac{d}{dt} (\dot{\phi} [M_5 \delta w]) \\ - (-\rho I_y \dot{\phi} [\delta \dot{u}^T M_5]) \quad (3.35)$$

De manera similar que en la ecuación (3.27), en la ecuación (3.35) se usa la propiedad $(AB)^T = B^T A^T$, además de $M_3 = M_3^T$, $M_4 = M_4^T$ por ser matrices simétricas, desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial \delta} &= \rho I_p ([M_3 \delta \ddot{u}] + [M_4 \delta \ddot{w}]) + \rho I_d \cos(2\phi) ([M_4 \delta \ddot{w}] - [M_3 \delta \ddot{u}]) \\ &+ 2\rho I_d \dot{\phi} \sin 2\phi ([M_3 \delta \dot{u}] - [M_4 \delta \dot{w}]) + \rho I_d \sin 2\phi [M_5 \delta \ddot{w} + M_5^T \delta \ddot{u}] \\ &+ 2\rho \dot{\phi} I_d \cos 2\phi [M_5 \delta \dot{w} + M_5^T \delta \dot{u}] - \rho I_y \dot{\phi} [M_5 \delta \dot{w} - M_5^T \delta \dot{u}] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como se mencionó en el Capítulo II, se observa que el término $\rho I_y L \dot{\phi}^2 / 2$ de la ecuación (3.25) se anula al aplicar la ecuación de Lagrange.

Para obtener la matriz de masa de rotación se consideran únicamente los términos de la ecuación (3.36) que contienen los vectores de aceleración $\delta \ddot{u}$ y $\delta \ddot{w}$, luego de sustituir las matrices M_3, M_4 y M_5 se tiene que:

$$\begin{aligned} M_S &= \frac{\rho I_p}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{EI_d \cos(2\phi)}{30L^3} \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{EI_d \sin(2\phi)}{30L^3} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Finalmente sumando las matrices anteriores obtenemos la matriz de inercia rotacional

$$M_s = \frac{\rho}{30L} \begin{bmatrix} 36I_{z'} & 36I_{x'z'} & 3LI_{x'z'} & -3LI_{z'} & -36I_{z'} & -36I_{x'z'} & 3LI_{x'z'} & -3LI_{z'} \\ 36I_{x'z'} & 36I_{x'} & 3LI_{x'} & -3LI_{x'z'} & -36I_{x'z'} & -36I_{x'} & 3LI_{x'} & -3LI_{x'z'} \\ 3LI_{x'z'} & 3LI_{x'} & 4L^2I_{x'} & -4L^2I_{x'z'} & -3LI_{x'z'} & -3LI_{x'} & -L^2I_{x'} & L^2I_{x'z'} \\ -3LI_{z'} & -3LI_{x'z'} & -4L^2I_{x'z'} & 4L^2I_{z'} & 3LI_{z'} & 3LI_{x'z'} & L^2I_{x'z'} & -L^2I_{z'} \\ -36I_{z'} & -36I_{x'z'} & -3LI_{x'z'} & 3LI_{z'} & 36I_{z'} & 36I_{x'z'} & -3LI_{x'z'} & 3LI_{z'} \\ -36I_{x'z'} & -36I_{x'} & -3LI_{x'} & 3LI_{x'z'} & 36I_{x'z'} & 36I_{x'} & -3LI_{x'} & 3LI_{x'z'} \\ 3LI_{x'z'} & 3LI_{x'} & -L^2I_{x'} & L^2I_{x'z'} & -3LI_{x'z'} & -3LI_{x'} & 4L^2I_{x'} & -4L^2I_{x'z'} \\ -3LI_{z'} & -3LI_{x'z'} & L^2I_{x'z'} & -L^2I_{z'} & 3LI_{z'} & 3LI_{x'z'} & -4L^2I_{x'z'} & 4L^2I_{z'} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Con:

$$I_{z'} = \left(\frac{I_x + I_z}{2}\right) - \left(\frac{I_x - I_z}{2}\right) \cos(2\phi) = I_p - I_d \cos(2\phi)$$

$$I_{x'} = \left(\frac{I_x + I_z}{2}\right) + \left(\frac{I_x - I_z}{2}\right) \cos(2\phi) = I_p + I_d \cos(2\phi)$$

$$I_{x'z'} = \frac{1}{2}(I_x - I_z) \sin(2\phi) = I_d \sin(2\phi)$$

Por otra parte, para determinar la matriz de efectos giroscópicos, la cual está en función de la velocidad de rotación del rotor, se toman los términos de la ecuación (3.36) que contienen a los vectores de velocidad $\delta \dot{u}$ y $\delta \dot{w}$, al sustituir las matrices M_3 , M_4 y M_5 según corresponda, se tiene que:

$$C_s = \frac{\rho I_p}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI_d \cos(2\phi)}{15L^3} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI_d \sin(2\phi)}{15L^3} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

De forma análoga a la matriz de masa por efecto de rotación, al sumar las matrices anteriores se obtiene la matriz C_s de efectos giroscópicos para un rotor asimétrico:

$$C_s = \frac{1}{15L} \rho \dot{\phi} \begin{bmatrix} 36I_{x'z'} & -36I_{z'} & -3LI_{z'} & -3LI_{x'z'} & -36I_{x'z'} & 36I_{z'} & -3LI_{z'} & -3LI_{x'z'} \\ 36I_{x'} & -36I_{x'z'} & -3LI_{x'z'} & -3LI_{x'} & -36I_{x'} & 36I_{x'z'} & -3LI_{x'z'} & -3LI_{x'} \\ 3LI_{x'} & -3LI_{x'z'} & -4L^2I_{x'z'} & -4L^2I_{x'} & -3LI_{x'} & 3LI_{x'z'} & L^2I_{x'z'} & L^2I_{x'} \\ -3LI_{x'z'} & 3LI_{z'} & 4L^2I_{z'} & 4L^2I_{x'z'} & 3LI_{x'z'} & -3LI_{z'} & -L^2I_{z'} & -L^2I_{x'z'} \\ -36I_{x'z'} & 36I_{z'} & 3LI_{z'} & 3LI_{x'z'} & 36I_{x'z'} & -36I_{z'} & 3LI_{z'} & 3LI_{x'z'} \\ -36I_{x'} & 36I_{x'z'} & 3LI_{x'z'} & 3LI_{x'} & 36I_{x'} & -36I_{x'z'} & 3LI_{x'z'} & 3LI_{x'} \\ 3LI_{x'} & -3LI_{x'z'} & L^2I_{x'z'} & L^2I_{x'} & -3LI_{x'} & 3LI_{x'z'} & -4L^2I_{x'z'} & -4L^2I_{x'} \\ -3LI_{x'z'} & 3LI_{z'} & -L^2I_{z'} & -L^2I_{x'z'} & 3LI_{x'z'} & -3LI_{z'} & 4L^2I_{z'} & 4L^2I_{x'z'} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \text{Con:} \quad I_{z'} &= \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) - \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \cos(2\phi) = I_p - I_d \cos(2\phi) \\ I_{x'} &= \left(\frac{I_x + I_z}{2} \right) + \left(\frac{I_x - I_z}{2} \right) \cos(2\phi) = I_p + I_d \cos(2\phi) \\ I_{x'z'} &= \frac{1}{2} (I_x - I_z) \sin(2\phi) = I_d \sin(2\phi) \end{aligned}$$

3.3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ

Introduciendo las funciones de forma y sus derivadas a la expresión final de la energía de deformación, y realizando las operaciones necesarias incluyendo las integrales que conllevan a la obtención de matrices parciales y finalmente aplicando la ecuación de Lagrange se obtienen tres matrices de rigidez: la primera acompaña al momento de inercia promedio y es idéntica a la matriz de rigidez correspondiente a un rotor simétrico; las siguientes dos matrices multiplican a la semidiferencia de los momentos de inercia acompañadas por el coseno y seno respectivamente.

Retomando la ecuación (3.18) y sustituyendo las relaciones (2.62) y (2.63), se tiene:

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{E}{2} \left\{ I_p \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \right. \\ &+ I_d \cos(2\phi) \int_0^L \left[\delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w - \delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u \right] dy \\ &\left. + 2I_d \sin(2\phi) \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \right\} \quad (3.41) \end{aligned}$$

O bien:

$$U_s = \frac{E}{2} \{ I_p [\delta u^T k_1 \delta u + \delta w^T k_2 \delta w] + I_d \cos(2\phi) [\delta w^T k_2 \delta w - \delta u^T k_1 \delta u] + 2I_d \sin(2\phi) [\delta u^T k_3 \delta w] \} \quad (3.42)$$

Donde:

$$k_1 = \int_0^L \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2}, \quad k_2 = \int_0^L \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2}, \quad k_3 = \int_0^L \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2}$$

Al realizar las integraciones correspondientes se tienen las siguientes matrices:

$$k_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 0 & 6L & -2L^2 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6L & -2L^2 & 0 & 0 & 6L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a la ecuación (3.42) se obtiene:

$$\frac{\partial U_s}{\partial \delta} = K_S \delta \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial U_S}{\partial \delta} = E \{ I_p [k_1 \delta u + k_2 \delta w] + I_d \cos(2\phi) [k_2 \delta w - k_1 \delta u] + I_d \sin(2\phi) [k_3 \delta w + k_3^T \delta u] \} \quad (3.44)$$

Desarrollando las operaciones correspondientes, se tiene que;

$$K_S = \frac{EI_p}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L-12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI_d \cos(2\phi)}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & -4L^2-6L & 0 & 0 & 0 & -2L^2 \\ 12 & 0 & 0 & -6L-12 & 0 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & -2L^2-6L & 0 & 0 & 0 & -4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI_d \sin(2\phi)}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L-12 & 0 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -4L^2-6L & 0 & 0 & 0 & -2L^2 \\ 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 0 & 6L & -2L^2 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -2L^2-6L & 0 & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -6L & -2L^2 & 0 & 0 & 6L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

La expresión para la matriz de rigidez que resulta de todas las matrices anteriores se puede escribir como:

$$K_S = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 12I_{z'} & 12I_{x'z'} & 6LI_{x'z'} & -6LI_{z'} & -12I_{z'} & -12I_{x'z'} & 6LI_{x'z'} & -6LI_{z'} \\ 12I_{x'z'} & 12I_{x'} & 6LI_{x'} & -6LI_{x'z'} & -12I_{x'z'} & -12I_{x'} & 6LI_{x'} & -6LI_{x'z'} \\ 6LI_{x'z'} & 6LI_{x'} & 4L^2I_{x'} & -4L^2I_{x'z'} & -6LI_{x'z'} & -6LI_{x'} & 2L^2I_{x'} & -2L^2I_{x'z'} \\ -6LI_{z'} & -6LI_{x'z'} & -4L^2I_{x'z'} & 4L^2I_{z'} & 6LI_{z'} & 6LI_{x'z'} & -2L^2I_{x'z'} & 2L^2I_{z'} \\ -12I_{z'} & -12I_{x'z'} & -6LI_{x'z'} & 6LI_{z'} & 12I_{z'} & 12I_{x'z'} & -6LI_{x'z'} & 6LI_{z'} \\ -12I_{x'z'} & -12I_{x'} & -6LI_{x'} & 6LI_{x'z'} & 12I_{x'z'} & 12I_{x'} & -6LI_{x'} & 6LI_{x'z'} \\ 6LI_{x'z'} & 6LI_{x'} & 2L^2I_{x'} & -2L^2I_{x'z'} & -6LI_{x'z'} & -6LI_{x'} & 4L^2I_{x'} & -4L^2I_{x'z'} \\ -6LI_{z'} & -6LI_{x'z'} & -2L^2I_{x'z'} & 2L^2I_{z'} & 6LI_{z'} & 6LI_{x'z'} & -4L^2I_{x'z'} & 4L^2I_{z'} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Donde E es el módulo de Young del material y L es la longitud del elemento finito tipo viga.

Donde los momentos de inercia de rotación se definen como:

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \left(\frac{I_x + I_z}{2}\right) - \left(\frac{I_x - I_z}{2}\right) \cos(2\phi) = I_p - I_d \cos(2\phi) \\ I_{x'} &= \left(\frac{I_x + I_z}{2}\right) + \left(\frac{I_x - I_z}{2}\right) \cos(2\phi) = I_p + I_d \cos(2\phi) \\ I_{x'z'} &= \frac{1}{2}(I_x - I_z) \operatorname{sen}(2\phi) = I_d \operatorname{sen}(2\phi) \end{aligned}$$

3.4 RESPUESTA AL DESBALANCE EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

3.4.1 FLECHA

De la aplicación de la ecuación de Lagrange en la ecuación (3.1) para la energía cinética de la flecha, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + \dot{\phi} C_s \dot{\delta} + \ddot{\phi} K_{ST} \delta \quad (3.47)$$

Al igual que para el disco, de la energía cinética de la flecha ecuación (3.1), surge un término adicional que da lugar a la formación de una matriz de rigidez K_{ST} que está multiplicada por la aceleración angular del rotor:

Aplicando la ecuación de Lagrange al penúltimo término de la ecuación (3.34) $-\rho I_y \dot{\phi} [\delta \dot{u}^T M_5 \delta w]$ se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \frac{d}{dt} (-\rho I_y \dot{\phi} [M_5 \delta w]) - (-\rho I_y \dot{\phi} [M_5^T \delta \dot{u}]) \quad (3.48)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -\rho I_y \dot{\phi} [M_5 \delta \dot{w} - M_5^T \delta \dot{u}] - \rho I_y \ddot{\phi} M_5 \delta w \quad (3.49)$$

Tomando únicamente el término que está acompañado de la aceleración angular $\ddot{\phi}$ el cual resulta al considerar la velocidad angular variable $\dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$, se obtiene la siguiente matriz de rigidez:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \frac{-\rho I_y \ddot{\phi}}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$K_{ST} = \frac{\rho I_y}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Donde:

$$I_y = I_x + I_z \quad (3.52)$$

Nótese que al considerar movimiento transitorio $\dot{\phi}(t)$, se afecta únicamente las ecuaciones correspondientes a la energía cinética de los componentes del sistema rotodinámico, esto a causa de la derivada con respecto al tiempo que presenta la ecuación de Lagrange.

3.5 ECUACIÓN GENERAL DEL SISTEMA ROTOR ASIMÉTRICO-SOPORTES

Como resultado de la aplicación de la ecuación de Lagrange a un sistema rotodinámico, considerando flecha asimétrica, la ecuación diferencial de movimiento generalizada se puede escribir como:

$$M_G \ddot{\delta} + C_G \dot{\delta} + K_G \delta = F(t) \quad (3.53)$$

Donde:

$$C_G = C_B + \dot{\phi} C_R$$

$$K_G = K_B + K_R + \ddot{\phi} K_{ST}$$

$$F = \dot{\phi}^2 F_1(\phi) + \ddot{\phi} F_2(\phi)$$

$$M_G = M_{GP} + M_{GC} \cos(2\phi) + M_{GS} \sin(2\phi)$$

$$C_R = C_{GP} + C_{GC} \cos(2\phi) + C_{GS} \sin(2\phi)$$

$$K_R = K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi)$$

$$F_1 = m_u e (\sin(\phi + \alpha) + \cos(\phi + \alpha))$$

$$F_2 = m_u e (\sin(\phi + \alpha) - \cos(\phi + \alpha))$$

En la ecuación (3.53) el vector δ incluye todos los grados de libertad del rotor pertenecientes a todos los nodos según la discretización del sistema, es decir, es el vector que contiene todos los desplazamientos nodales; M_G es la matriz global de masa del sistema, C_G es la matriz global de amortiguamiento del sistema, que incluye los efectos giroscópicos en función de la velocidad de rotación ($\dot{\phi}C_R$), y C_B que contiene el amortiguamiento atribuible a los soportes. K_G es la matriz global de rigidez del sistema y está formada por: K_R que incluye la rigidez del rotor, K_B que corresponde a la rigidez de los soportes y $\ddot{\phi}K_{ST}$ que es un término de rigidez que está en función de la aceleración angular del rotor, así como F_1 y F_2 , conforman el vector de fuerza causado por una masa de desbalance.

Si en la ecuación (3.53) se hace que $\ddot{\phi} \rightarrow 0$, dicha ecuación se aproximará a la de un rotor cuya velocidad de rotación es constante, es decir, $\dot{\phi} = \text{constante}$.

M_{GP} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales de masa de los discos, primera matriz del miembro derecho de la ecuación (2.56), así como las matrices elementales de masa de translación, ecuación (2.69), y rotación, ecuación (2.70), de las secciones simétricas de la flecha, además de las matrices elementales de masa de translación, ecuación (3.30), y las matrices elementales de rotación que están acompañadas de la semisuma de los momentos de inercia I_p , primera matriz del miembro derecho de la ecuación (3.34), en las secciones asimétricas de la flecha.

M_{GC} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales que están acompañadas por la semidiferencia I_d y la función coseno, segunda matriz del miembro derecho de la ecuación (3.34), en las secciones asimétricas de la flecha.

M_{GS} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales que están acompañadas por la semidiferencia I_d y la función seno, tercera matriz del miembro derecho de la ecuación(3.34), en las secciones asimétricas de la flecha.

C_{GP} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales de efectos giroscópicos: de los discos, segunda matriz del miembro derecho de la ecuación (2.56), de las secciones simétricas de la flecha, ecuación (2.71), y de las matrices que están acompañadas de la semisuma de los momentos de inercia I_p , primera matriz del miembro derecho de la ecuación(3.36), de las secciones asimétricas de la flecha.

C_{GC} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales de efectos giroscópicos que están acompañadas por la semidiferencia I_d y la función coseno, segunda matriz del miembro derecho de la ecuación(3.36), en las secciones asimétricas de la flecha.

C_{GS} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales de efectos giroscópicos que están acompañadas por la semidiferencia I_d y la función seno, tercera matriz del miembro derecho de la ecuación(3.36), en las secciones asimétricas de la flecha.

K_{GP} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales de rigidez: de las secciones simétricas de la flecha, ecuación (2.76), y de las matrices que están acompañadas de la semisuma de los momentos de inercia I_p , primera matriz del miembro derecho de la ecuación(3.42), de las secciones asimétricas de la flecha.

K_{GC} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales de rigidez que están acompañadas por la semidiferencia I_d y la función coseno, segunda matriz del miembro derecho de la ecuación(3.42), en las secciones asimétricas de la flecha.

K_{GS} es una matriz global que está compuesta por la suma de las matrices elementales de rigidez que están acompañadas por la semidiferencia I_d y la función seno, tercera matriz del miembro derecho de la ecuación(3.42), en las secciones asimétricas de la flecha.

3.6 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

3.6.1 SOLUCIÓN EN ESTADO ESTABLE

El modelo matemático (3.53) para un rotor asimétrico con múltiples GDL, puede solucionarse en el dominio de la frecuencia considerando al sistema se encuentra en condiciones de estado estable.

De la ecuación (3.53) se debe tener presente que las matrices globales de masa $[M_G]$, amortiguamiento $[C_G]$ y rigidez $[K_G]$ del sistema, son el resultado de la suma de cada una de las matrices elementales que fueron obtenidas anteriormente para los distintos componentes del rotor: disco, soportes y flecha con secciones simétrica y asimétrica según la discretización de ésta última.

De forma análoga siguiendo el desarrollo al realizado en el Capítulo II para un rotor simétrico, se llega al siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} [K_{GP}] + [K_{GC}] + [K_B] - \dot{\phi}^2([M_{GP}] + [M_{GC}]) & \dot{\phi}(\dot{\phi}([C_{GP}] + [C_{GC}]) + C_B) \\ -\dot{\phi}(\dot{\phi}([C_{GP}] - [C_{GC}]) + C_B) & [K_{GP}] - [K_{GC}] + [K_B] - \dot{\phi}^2([M_{GP}] - [M_{GC}]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Con:

$$\begin{aligned} \{u_1\} &= \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{Bmatrix}, & \{u_2\} &= \begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \end{Bmatrix} \\ \{F_1\} &= m_u e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, & \{F_2\} &= m_u e \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.6.2 INTEGRACIÓN DIRECTA DE NEWMARK

Como ya se ha explicado en el Capítulo II, los métodos numéricos de integración directa pueden resolver ecuaciones no lineales de segundo orden, en este caso la ecuación general de movimiento del sistema, ecuación (3.53).

De la tabla 2.1, se observa la ventaja que ofrece el método de integración numérica de Newmark, en este se requiere ingresar las matrices globales de rigidez $[K_G]$, masa $[M_G]$ y amortiguamiento $[C_G]$ del sistema, tal como se encuentran en el modelo matemático.

3.7 SIMULACIÓN DEL SISTEMA ROTOR ASIMÉTRICO-SOPORTES

En esta sección, se presentan los resultados numéricos obtenidos para un sistema rotodinámico cuya configuración pertenece al sistema rotor asimétrico con soportes presentado por Inagaki *et al.* [9], figura 3.2, éste está compuesto por un eje simétrico con una parte asimétrica en el centro, dos discos inerciales localizados a lo largo del eje Y, con soportes colocados cerca de los extremos. Asimismo, se considera que en el rotor, solo existe una masa de desbalance $m_u = 0.0002 \text{ kg}$ con ubicación en la periferia del primer disco $e = 0.05 \text{ m}$, por lo que se tiene una cantidad de desbalance de $m_u e = 1 \times 10^5 \text{ kg.m}$ con una posición angular $\alpha = 45^\circ$ en el plano X-Z medido respecto al eje Z.

3.7.1 DISCRETIZACIÓN DEL SISTEMA A MÚLTIPLES GDL

De acuerdo con Bathe [35] y Malkus *et al.* [37], a mayor número de elementos finitos utilizados en la discretización de un modelo existe una mayor precisión en los resultados, sin embargo, también es importante tomar en cuenta que el número de elementos finitos utilizados afecta en forma directa el esfuerzo de cómputo requerido. De acuerdo con lo anterior, para el análisis se realizaron 3 discretizaciones del rotor usando 7, 14 y 25 elementos finitos, tal como se muestra en las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 respectivamente. La solución se obtuvo utilizando el arreglo matricial de la ecuación (3.54), solución en estado estable.

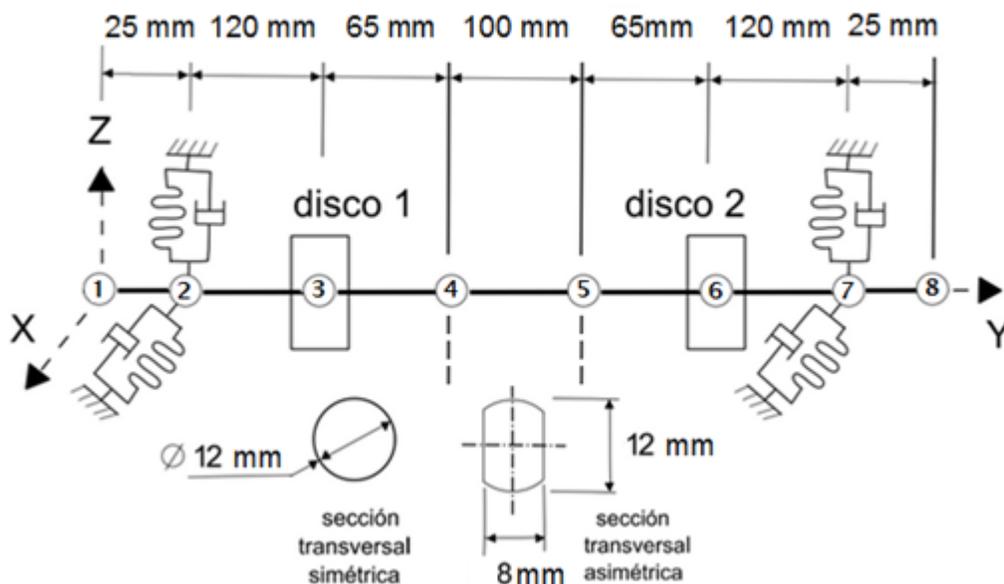


Figura 3.2. Discretización del sistema rotor-soportes en 7 elementos finitos tipo viga [9].

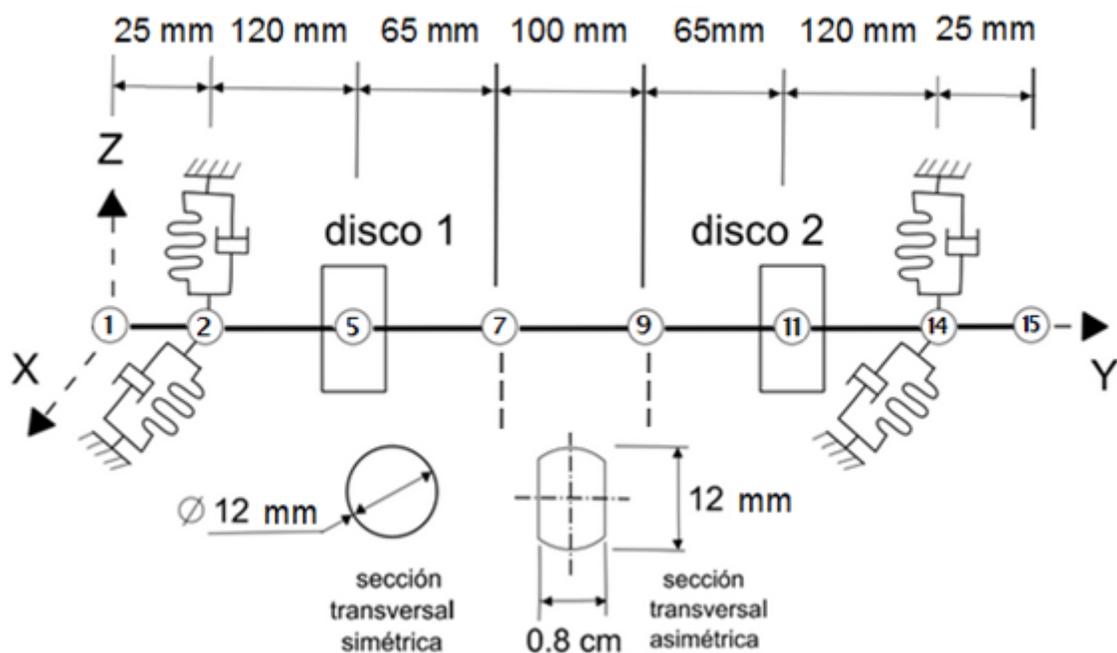


Figura 3.3. Discretización del sistema rotor-soportes en 14 elementos finitos tipo viga [9].

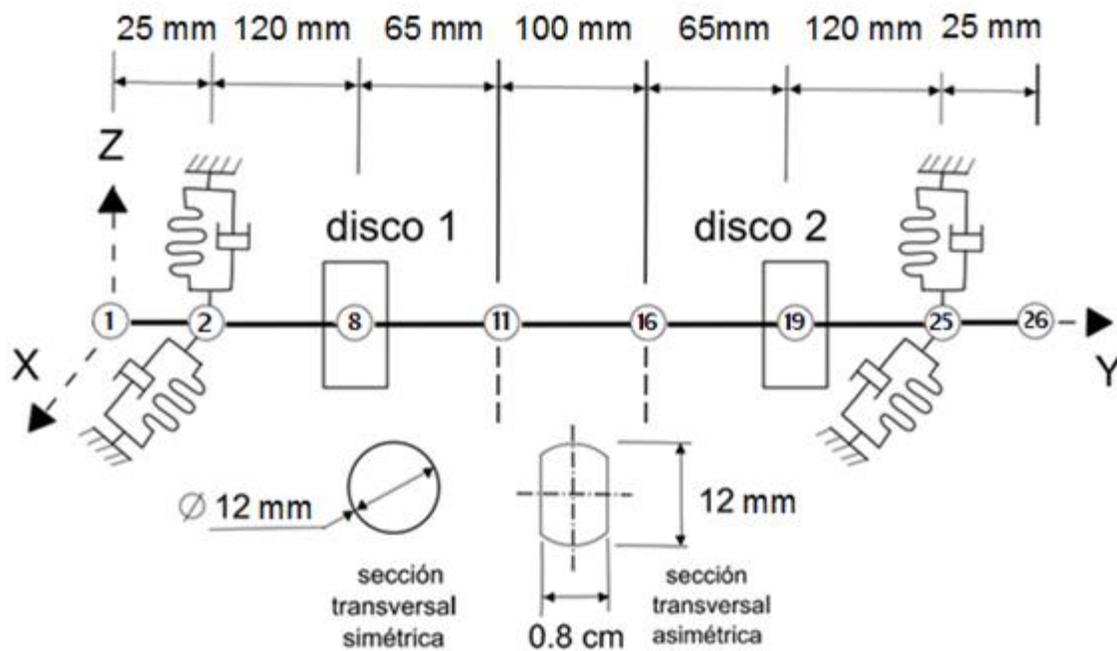


Figura 3.4. Discretización del sistema rotor-soportes en 25 elementos finitos tipo viga [9].

En las Tablas 3.1 y 3.2, se muestran las propiedades mecánicas y geométricas de la flecha y los discos respectivamente.

Tabla 3.1. Propiedades mecánicas y geométricas de la flecha.

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2.0594e11 \text{ N/m}^2$	$s = 0.006 \text{ m}$
$\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$	$f = 0.004 \text{ m}$
$\nu = 0.3$	
$G = 7.9434e10 \text{ N/m}^2$	
$a = 0.89$ (Factor de deformación por cortante)	

Tabla 3.2. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.

Propiedades mecánicas	Geometría		
$E = 2.0594e11 \text{ N/m}^2$	Disco	D_1	D_2
$\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$	e_D (m)	0.02	0.02
$\nu = 0.3$	r_{eD} (m)	0.05	0.05
	r_{iD} (m)	0.006	0.006

En las Tabla 3.3 y 3.4, se muestran las características de rigidez y amortiguamiento viscoso de los soportes, así como los coeficientes para el amortiguamiento espectral.

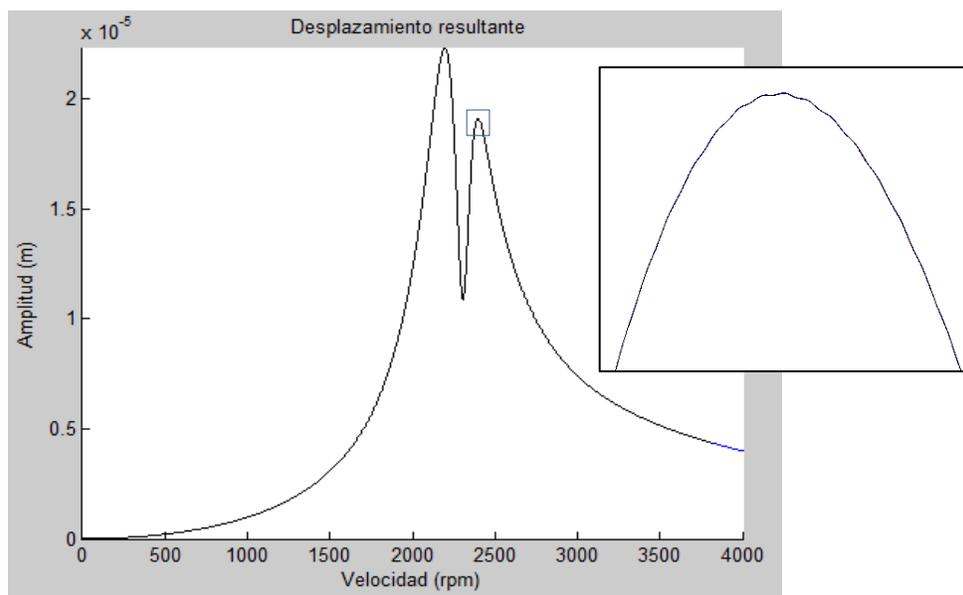
Tabla 3.3. Características de los soportes.

Rigidez	Coefficiente de amortiguamiento
$k_{xx} = 1.2258 \times 10^5 \text{ N/m}$	$c_{xx} = 3.7265 \times 10^4 \text{ N/m/s}$
$k_{zz} = 1.2258 \times 10^5 \text{ N/m}$	$c_{zz} = 3.7265 \times 10^4 \text{ N/m/s}$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$

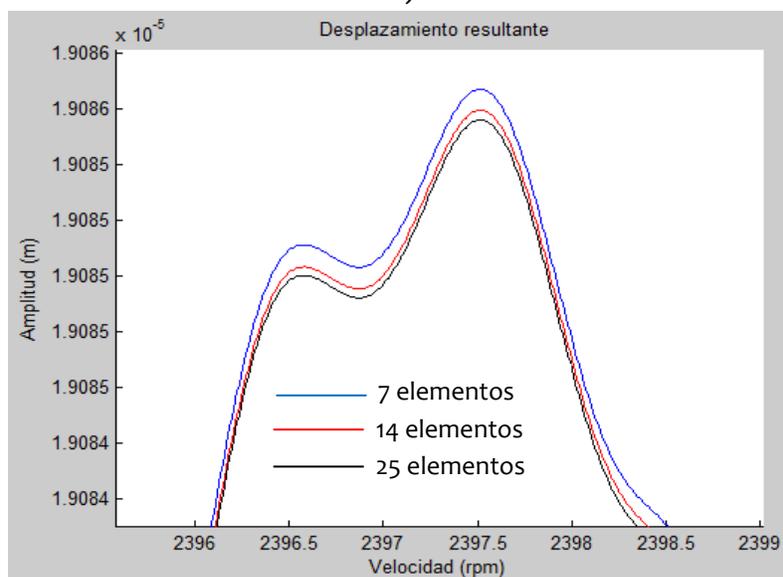
Tabla 3.4. Coeficientes para el amortiguamiento proporcional o espectral de Rayleigh.

Fracción de amortiguamiento crítico	Frecuencia
$\xi_1 = 0$	$\omega_1 = 0 \text{ rad/s}$
$\xi_2 = 0.24$	$\omega_2 = 650 \text{ rad/s}$

En la figura 3.5 a) se muestra la comparación de la respuesta de vibración al desbalance en el primer disco, nodo 3, 5 y 8 para las tres discretizaciones respectivamente. En la figura b) se realizó un zoom de la figura 3.5 a) y se observa que, en general, no existe una diferencia importante entre los resultados obtenidos.



a)



b)

Figura 3.5. a) Amplitud de la respuesta de vibración en el disco 1 en la dirección vertical del rotor para los modelos de 7, 14 y 25 elementos finitos. b) Zoom de la figura 3.5 a).

3.7.2 VALIDACIÓN DEL MÉTODO DE NEWMARK

A continuación se presentan los diagramas de bode de magnitud, de fase y polares de respuesta de vibración del sistema rotor asimétrico-soportes con amortiguamiento proporcional a causa del desbalance (fuerza de excitación).

Para la simulación se consideró el modelo de la figura 3.2 (discretización de 7 elementos finitos), esto se debe a que se observó que, en general, no existe una diferencia importante en los resultados obtenidos al comparar las discretizaciones, sin embargo, el esfuerzo de cómputo requerido en la solución del modelo es menor cuando se considera una discretización de 7 elementos finitos.

En las figuras 3.6 y 3.7 se muestra la amplitud de vibración en función de la velocidad de giro obtenidas por el método de integración directa de Newmark, de la componente real e imaginaria respectivamente para la respuesta en dirección Z.

De ambas figuras, se observan dos señales: la señal en color rojo representa la respuesta de vibración en cualquier instante de tiempo discreto, mientras que la señal en color azul, representa la respuesta de vibración en el instante en que el rotor completa una revolución (señal filtrada).

Para validar los resultados obtenidos con el método de Newmark, éstos se comparan con los resultados obtenidos considerando al sistema en condiciones de estado estable (solución en estado estable). Es importante recordar que la aproximación de ambos métodos será más exacta en tanto la rampa de excitación lineal sea más “lenta”, es decir, cuando la aceleración se acerque más a cero ($\ddot{\phi} \rightarrow 0$). La comparación entre ambos métodos de solución se realizó, usando una rampa de excitación lineal con una aceleración constante de $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ y un incremento de tiempo $dt = 0.0001$, para el método de integración directa de Newmark.

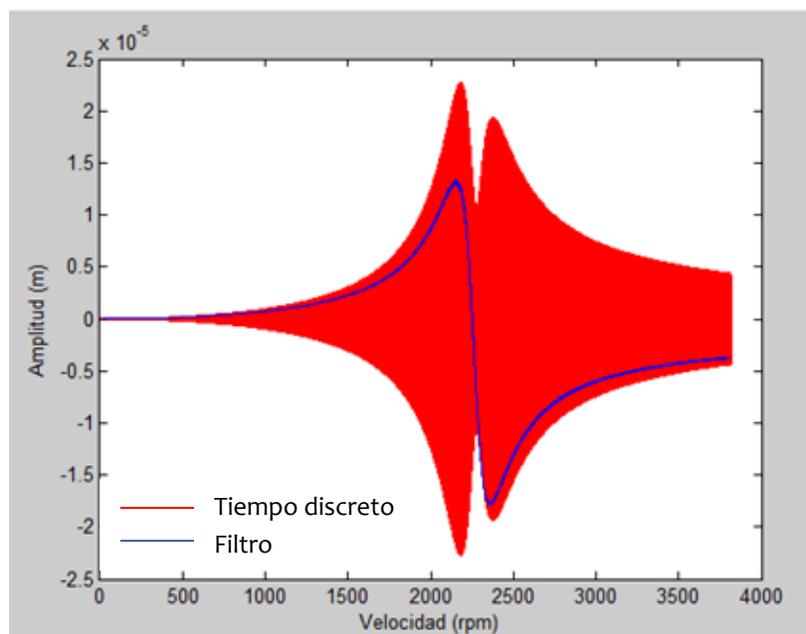


Figura 3.6. Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$

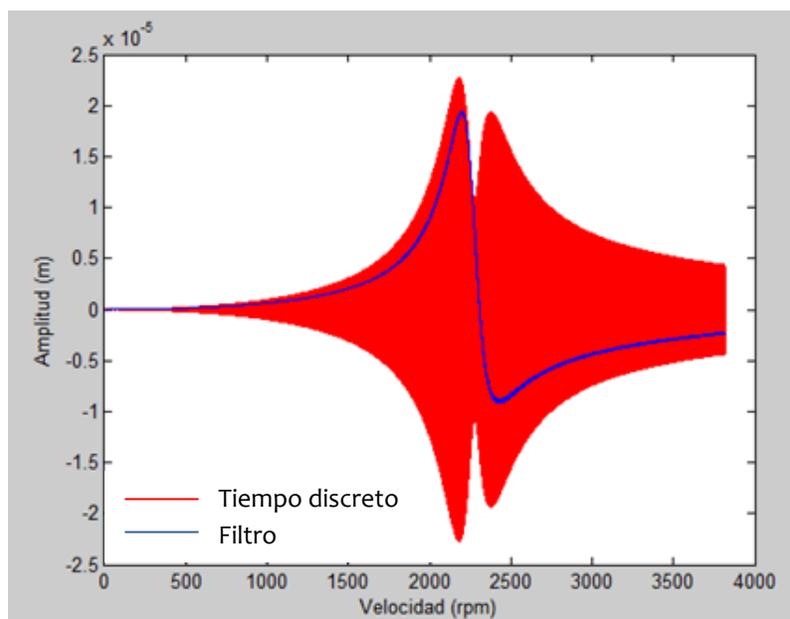


Figura 3.7. Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$

En las figuras 3.8 y 3.9 se compara la respuesta de vibración resultante en dirección Z obtenida por el método de Newmark (color rojo) y la solución en estado estable (color azul), se puede observar que ambas soluciones son similares tanto en comportamiento como amplitud.

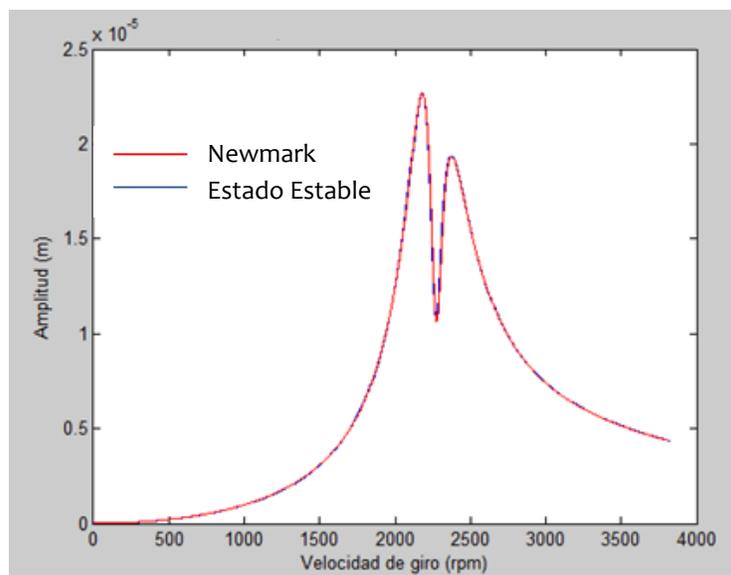


Figura 3.8. Desplazamiento resultante en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$

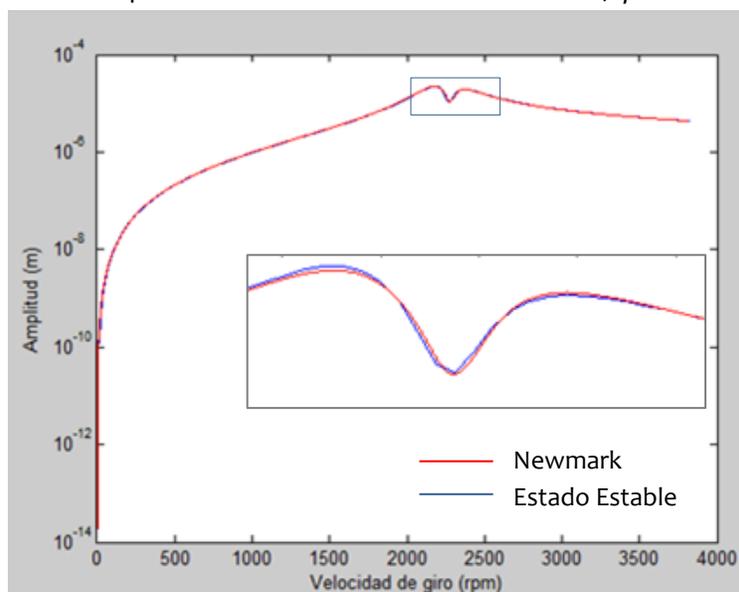


Figura 3.9. Desplazamiento logarítmico resultante en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$

Por otra parte, en la figura 3.10 se muestra el diagrama de fase de la respuesta de vibración en el tiempo discreto (señal en color rojo) obtenida por el método de Newmark. En esta figura se aprecian dos gráficas adicionales que corresponden a la fase de la respuesta de vibración en el instante en que el rotor completa una revolución (señal filtrada) color azul, y la fase obtenida por el método de solución en estado estable (color negro). De la comparación entre ambas gráficas, se puede observar que ambas soluciones son muy similares.

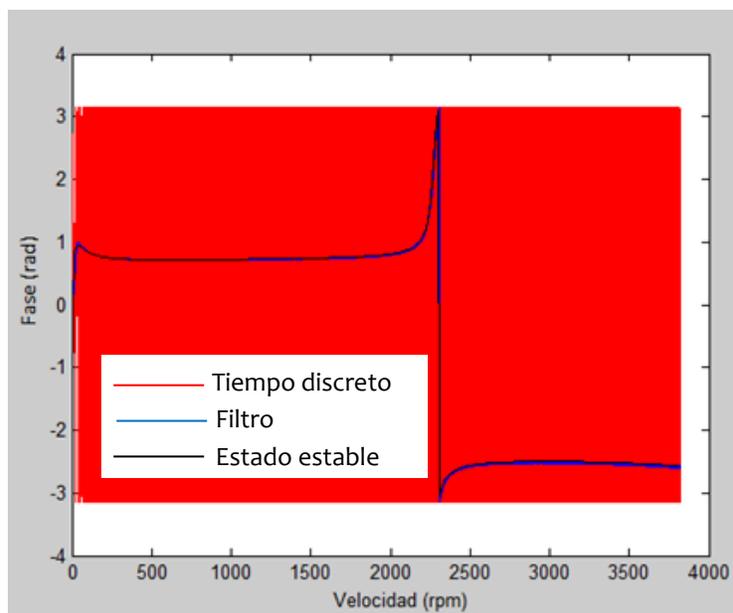


Figura 3.10. Fase en dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$

En la figura 3.11 se muestran los diagramas polares de respuesta a causa de la masa de desbalance colocada en una posición angular de 45° respecto al eje Z. Estos últimos diagramas resultan de graficar la amplitud resultante (figura 3.8) Vs la fase (figura 3.10) de la respuesta de vibración del sistema en dirección Z.

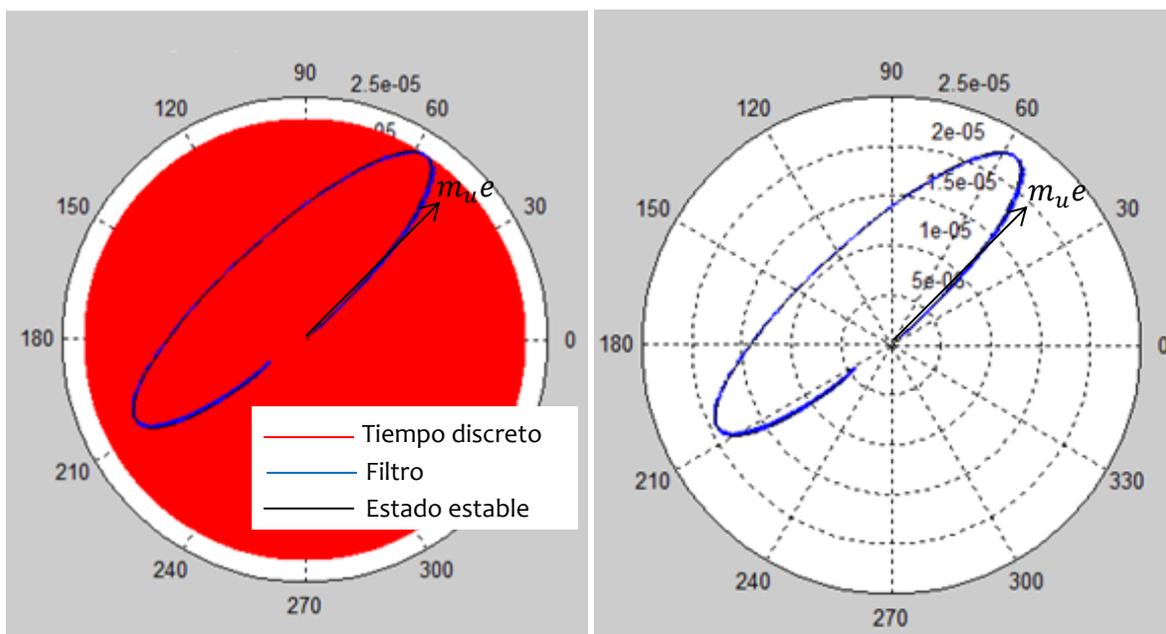


Figura 3.11. Diagramas polares de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45^\circ$, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$

En la figura 3.11 se observa que al comparar el diagrama polar de respuesta obtenido por el método de Newmark correspondientes a la señal filtrada (color azul) de la respuesta vibratoria para cualquier instante de tiempo (color rojo), contra el diagrama polar de respuesta obtenido mediante la solución en estado estable (color negro), estos presentan un comportamiento muy similar, por lo que se puede concluir que el programa desarrollado cuya solución emplea el método de Newmark, ofrece resultados confiables.

Con la intención de observar el segundo modo de vibración del sistema rotodinámico analizado, en la figura 3.12 se muestra la respuesta del sistema para un intervalo de operación de 0 – 12000 *rpm*. En la figura 3.12 a) se presenta el diagrama de bode de amplitud de la respuesta del sistema, mientras que en la figura 3.12 b) se observa el diagrama polar de respuesta. Con ambas gráficas se observa la presencia de un segundo modo de vibración, en la figura 3.12 b) se observa que el diagrama polar de respuesta para el segundo modo de vibración del rotor asimétrico, presenta una forma geométrica circular, tal y como se presenta la respuesta de vibración en un rotor simétrico. Lo anterior se debe a que el amortiguamiento modal del segundo modo de vibración es mucho mayor que la asimetría modal.

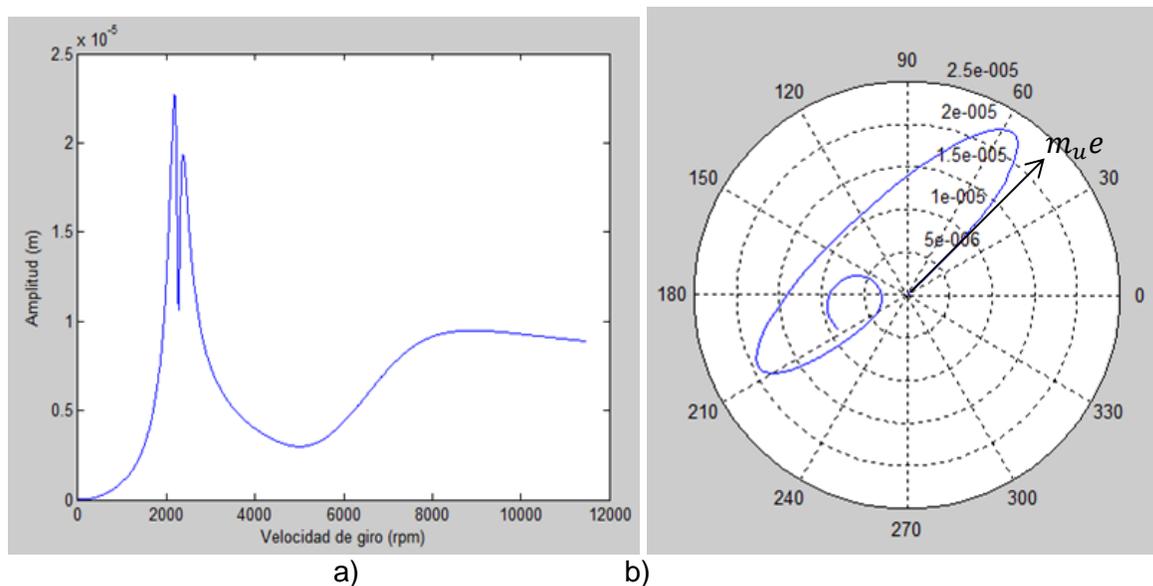


Figura 3.12. a) Desplazamiento en la dirección Z en estado estable, $\alpha = 45$, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$
 b) Diagrama polar en la dirección Z en estado estable, $\alpha = 45$, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$

3.7.3 EFECTOS DE LA ASIMETRÍA DEL ROTOR EN LA RESPUESTA VIBRATORIA DEL SISTEMA ROTODINÁMICO PARA MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

En esta sección se muestra el comportamiento dinámico de la respuesta al desbalance de un rotor asimétrico considerando los efectos de asimetría en las matrices de masa, efectos giroscópicos y rigidez, ecuación (3.53).

$$M_G \ddot{\delta} + C_G \dot{\delta} + K_G \delta = F(t) \quad (3.53)$$

Donde:

$$C_G = C_B + \dot{\phi} C_R$$

$$K_G = K_B + K_R + \ddot{\phi} K_{ST}$$

$$F = \dot{\phi}^2 F_1(\phi) + \ddot{\phi} F_2(\phi)$$

$$M_G = M_{GP} + M_{GC} \cos(2\phi) + M_{GS} \sin(2\phi)$$

$$C_R = C_{GP} + C_{GC} \cos(2\phi) + C_{GS} \sin(2\phi)$$

$$K_R = K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi)$$

$$F_1 = m_u e (\sin(\phi + \alpha) + \cos(\phi + \alpha))$$

$$F_2 = m_u e (\sin(\phi + \alpha) - \cos(\phi + \alpha))$$

Para lo anterior, se utilizó el modelo del rotor que se muestra en la figura 3.2, con masa de desbalance de $m_u e = 1 \text{ kg.m}$ colocada en una posición angular de $\alpha = 45^\circ$ (0.785 rad) respecto al eje Z en el disco D1 correspondiente al nodo 3. Se obtuvo y se analizó la respuesta del rotor para cuatro casos diferentes.

Caso 1: Solución de la ecuación (3.53) considerando sólo el efecto de la rigidez es decir:

$$M_G = M_{GP}$$

$$C_R = C_{GP}$$

$$K_R = K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi)$$

Caso 2: Solución de la ecuación (3.53) considerando sólo el efecto de la rigidez y efectos giroscópicos (EG), es decir:

$$M_G = M_{GP}$$

$$C_R = C_{GP} + C_{GC} \cos(2\phi) + C_{GS} \sin(2\phi)$$

$$K_R = K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi)$$

Caso 3: Solución de la ecuación (3.53) considerando sólo el efecto de la rigidez y la masa del rotor, es decir:

$$M_G = M_{GP} + M_{GC} \cos(2\phi) + M_{GS} \sin(2\phi)$$

$$C_R = C_{GP}$$

$$K_R = K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi)$$

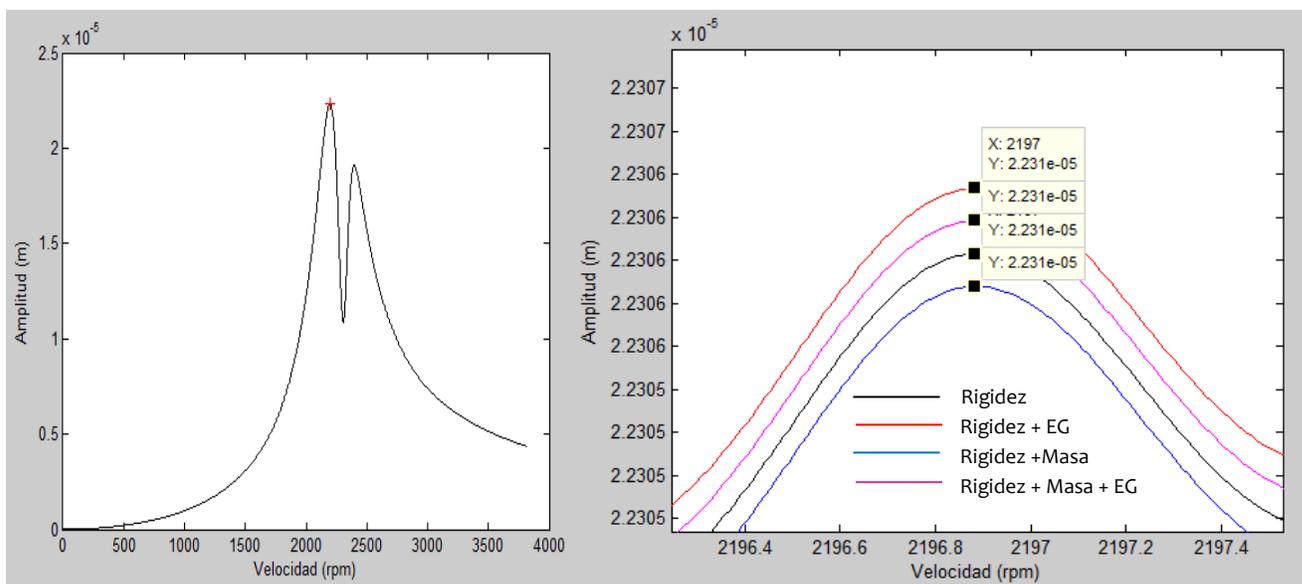
Caso 4: Solución de la ecuación (3.53) considerando el efecto de la rigidez, la masa y efectos giroscópicos del rotor, es decir:

$$M_G = M_{GP} + M_{GC} \cos(2\phi) + M_{GS} \sin(2\phi)$$

$$C_R = C_{GP} + C_{GC} \cos(2\phi) + C_{GS} \sin(2\phi)$$

$$K_R = K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi)$$

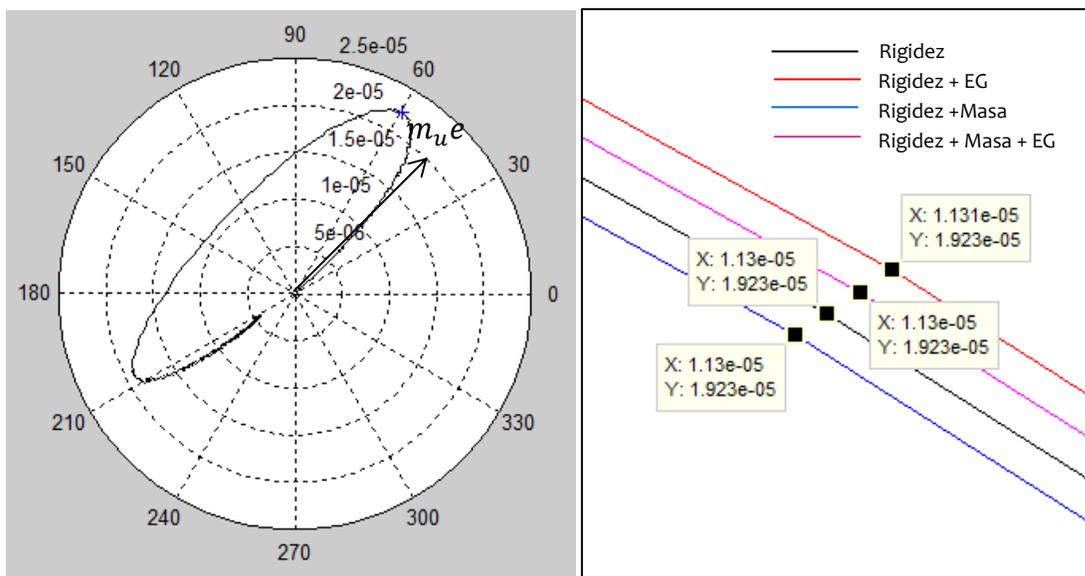
En las figuras 3.13 y 3.14 se muestra la respuesta al desbalance, diagramas de bode y diagramas polares de respuesta respectivamente, para los cuatro casos considerados; aquí, se puede observar que no existen diferencias relevantes en la respuesta del rotor. Asimismo, en las figuras 3.13 b) y 3.14 b) se muestra un zoom para un punto específico marcado con un asterisco en las figuras 3.13 a) y 3.14 a) respectivamente. Tomando como referencia el caso 1, donde se consideran los efectos de la asimetría únicamente en los cambios de rigidez del rotor, se puede apreciar que la respuesta es similar para los casos 2, 3 y 4, esto se debe a que la asimetría de acuerdo a la geometría del rotor del modelo de la figura 3.2, no tiene efectos significativos en las matrices de masa y de efectos giroscópicos. De lo que se concluye, que los efectos importantes de la asimetría en la respuesta, se presentan en los cambios de rigidez del rotor (matriz de rigidez).



a)

b)

Figura 3.13. a) Amplitud resultante de la respuesta de vibración en la dirección vertical del rotor. b) Zoom de la figura 3.13 a).



a)

b)

Figura 3.14. a) Diagrama polar de respuesta al desbalance. b) Zoom de la figura 3.14 a).

CAPÍTULO IV

IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE UN ROTOR ASIMÉTRICO DE MÚLTIPLES GDL

La identificación algebraica, es una técnica que se apoya en el algebra diferencial y el cálculo operacional para el desarrollo de estimadores, que permiten la determinación de parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático.

Una de las características de la identificación algebraica, es proporcionar relaciones de identificación completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema. Las estimaciones se realizan en línea y en tiempo continuo o discreto. Además, de acuerdo con Fliess y Sira-Ramírez [28], esta técnica presenta buenas propiedades de robustez con respecto a una gran variedad de perturbaciones, además de ser eficiente.

La identificación algebraica está basada en las siguientes herramientas, con un carácter algebraico [39], [40]:

- ✚ *Algebra diferencial* [41], [42]: realiza respecto a las ecuaciones diferenciales un papel similar que el álgebra conmutativa con respecto a las ecuaciones algebraicas. Estas técnicas fueron introducidas en la teoría de control no lineal por M. Fliess.
- ✚ *Calculo operacional* [43], [44], [45]: es una herramienta clásica entre los ingenieros de control y mecánicos. Con frecuencia se normaliza mediante la transformada de Laplace.

En este apartado se proporciona una breve nota sobre el desarrollo matemático utilizado en la estimación de parámetros mediante el método derivativo algebraico. Los resultados fundamentales están basados en la *teoría de módulos* para sistemas lineales. (Ver también [46] para un conocimiento general)

4.1 BASE MATEMÁTICA DEL IDENTIFICADOR ALGEBRAICO

La estimación paramétrica se puede formalizar como:

$$y = F(x, \theta) + n \quad (4.1)$$

donde la señal observada y es una función F de la señal verdadera x , que depende de un conjunto θ de parámetros. Por otro lado, el ruido que perturba las observaciones está definido por n .

Encontrar una buena aproximación de los parámetros θ es el objeto de una vasta literatura en varios campos de la matemática aplicada.

Se considera el campo de números reales o complejos descrito por p y se define como $p \left[\frac{d}{dt} \right]$ el anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes en p :

$$\sum_{j=0}^{finite} C_v \frac{d^j}{dt^j}, \quad C_v \in p \quad (4.2)$$

Los anillos de operadores diferenciales lineales también pueden ser llamados anillos diferenciales. Se considera un conjunto finito de indeterminaciones, tal y_1, \dots, y_m en asociación con un anillo de operadores lineales diferenciales.

Estas indeterminaciones representan las variables que describen, en el dominio del tiempo, las señales de donde se obtienen los parámetros desconocidos.

La forma más general en que los parámetros pueden aparecer en los coeficientes de una expresión diferencial incluye expresiones algebraicas involucrando sumas, multiplicaciones, raíces, etc., de dichos parámetros. En otras palabras; las expresiones de los parámetros provienen de las soluciones de las ecuaciones algebraicas que envuelven los parámetros desconocidos.

Un objeto natural adecuado para expresar la complejidad de tales expresiones, que aparecen en los coeficientes de un polinomio diferencial, está dado por una extensión algebraica finita del campo de los números reales o complejos.

Sea $P = p(\Theta)$ una extensión algebraica finita del campo $p = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ de los números complejos o reales generados por un conjunto finito $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ de *parametros constantes desconocidos*.

El conjunto Θ de parámetros desconocidos se dice ser algebraicamente identificable si, y solo si, cualquier componente de Θ es algebraico sobre $p \langle t, y \rangle$. Se dice ser linealmente identificable si, y solo si,

$$Q_1 \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q_2 \quad (4.3)$$

donde

- ✚ Q_1 y Q_2 son matrices $r \times r$ y $r \times 1$
- ✚ las entradas de P y Q pertenecen al rango $p \left[\frac{d}{dt} \right] (1, y)$
- ✚ $\det(P) \neq 0$.

Donde $k \left[\frac{d}{dt} \right] (1, y)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $(1, y_1, \dots, y_m)$ i.e. $D_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^m D_i y_i$. Los coeficientes D_i pertenecen a $p \left[\frac{d}{dt} \right]$. Por tanto, D_i es un operador diferencial de la forma:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\sum_{k=0}^{k_j} a_{k,j} t^k}{\sum_{l=0}^{l_j} b_{l,j} t^l} \right) \frac{d^j}{dt^j} \quad (4.4)$$

Con $a_{k,j}, b_{l,j} \in p$.

4.2 IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA DE LA CANTIDAD Y POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE PARA EL ROTOR ASIMÉTRICO CON SOPORTES, DE MÚLTIPLES GDL

En este Capítulo se desarrolla el modelo matemático de identificación en línea en un rotor asimétrico para determinar la excentricidad y la posición angular de la masa de desbalance, para esto se utiliza el método de identificación algebraica. Para la aplicación del método, se requiere el modelo matemático del sistema representado por la ecuación (3.53).

4.2.1 DESARROLLO DE LOS IDENTIFICADORES

Se considera que el vector de desplazamientos del sistema $\{\delta\}$ definido por (2.59) se conoce, y está disponible para utilizarse en el esquema de identificación. Para un sistema real, $\{\delta\}$ sería la señal que se obtiene a partir de sensores de desplazamiento, localizados en cada uno de los nodos a lo largo de la discretización del rotor. En este caso $\{\delta\}$ se obtiene al solucionar el modelo matemático definido por la ecuación (3.53), mediante el método de integración numérica de Newmark considerando una rampa de aceleración lineal para la velocidad del rotor.

Al considerar el modelo matemático descrito en la ecuación (3.53), debe tenerse en cuenta que las matrices globales de masa M_G , amortiguamiento C_G y rigidez K_G del rotor están integradas a su vez por submatrices acompañadas por los términos que contienen al $\sin(2\phi)$ y $\cos(2\phi)$ de la posición angular del rotor en función del tiempo. Es por ello, que antes del tratamiento matemático propio de la identificación algebraica, es necesario reescribir la ecuación (3.53) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & [M_{GP} + M_{GC} \cos(2\phi) + M_{GS} \sin(2\phi)]\ddot{\delta} + [\dot{\phi}(C_{GP} + C_{GC} \cos(2\phi) + C_{GS} \sin(2\phi)) + C_B]\dot{\delta} \\
 & + [K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi) + K_B + \ddot{\phi}K_{ST}]\delta \\
 & = m_u e [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] \\
 & + m_u e [\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)] \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Donde las matrices $M_{GP}, M_{GC}, M_{GS}, C_{GP}, C_{GC}, C_{GS}, C_B, K_{GP}, K_{GC}, K_{GS}, K_{ST}$ fueron definidas en el Capítulo III.

Multiplicando por t^2 e integrando el resultado dos veces con respecto al tiempo t , se tiene:

$$\begin{aligned}
& \int^{(2)} [M_{GP} + M_{GC} \cos(2\phi) + M_{GS} \sin(2\phi)] t^2 \ddot{\delta} \\
& + [\dot{\phi}(C_{GP} + C_{GC} \cos(2\phi) + C_{GS} \sin(2\phi)) + C_B] t^2 \dot{\delta} \\
& + [K_{GP} + K_{GC} \cos(2\phi) + K_{GS} \sin(2\phi) + K_B + \ddot{\phi} K_{ST}] t^2 \delta \\
& = \int^{(2)} m_u e [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] t^2 \\
& + \int^{(2)} m_u e [\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)] t^2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Realizando las integrales del lado izquierdo de la ecuación (4.6) hasta obtener integrales únicamente en función del vector de desplazamientos $\delta(t)$ en los puntos nodales, haciendo el resultado igual a $b(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
& b(t) \\
& = M_{GP} \left[t^2 \delta(t) - 4 \int_{t_0} \Delta t \delta(t) + 2 \int_{t_0}^{(2)} \delta(t) \right] \\
& + M_{GC} \left[t^2 \delta(t) \cos(2\phi) - 4 \int_{t_0} t \delta(t) \cos(2\phi) + 4 \int_{t_0} \dot{\phi} t^2 \delta(t) \sin(2\phi) + 2 \int_{t_0}^{(2)} \delta(t) \cos(2\phi) \right. \\
& \left. - 8 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t \delta(t) \sin(2\phi) - 2 \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 \delta(t) \sin(2\phi) - 4 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 \delta(t) \sin(2\phi) \right] \\
& + M_{GS} \left[t^2 \delta(t) \sin(2\phi) - 4 \int_{t_0} t \delta(t) \sin(2\phi) - 4 \int_{t_0} \dot{\phi} t^2 \delta(t) \cos(2\phi) + 2 \int_{t_0}^{(2)} \delta(t) \sin(2\phi) \right. \\
& \left. + 8 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t \delta(t) \cos(2\phi) + 2 \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 \delta(t) \cos(2\phi) - 4 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 \delta(t) \sin(2\phi) \right] \\
& + C_{GP} \left[\int_{t_0}^t \dot{\phi} t^2 \delta(t) - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t \delta(t) - \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 \delta(t) \right] \\
& + C_{GC} \left[\int_{t_0} \dot{\phi} t^2 \delta(t) \cos(2\phi) - \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 \delta(t) \cos(2\phi) - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t \delta(t) \cos(2\phi) + 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 \delta(t) \sin(2\phi) \right] \\
& + C_{GS} \left[\int_{t_0} \dot{\phi} t^2 \delta(t) \sin(2\phi) - \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 \delta(t) \sin(2\phi) - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t \delta(t) \sin(2\phi) - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 \delta(t) \cos(2\phi) \right] \\
& + C_B \left[\int_{t_0} t^2 \delta(t) - 2 \int_{t_0}^{(2)} t \delta(t) \right] + [K_{GP} + K_B + \ddot{\phi} K_{ST}] \int_{t_0}^{(2)} \Delta t^2 \delta(t) + K_{GC} \int_{t_0}^{(2)} t^2 \delta(t) \cos(2\phi) \\
& + K_{GS} \int_{t_0}^{(2)} t^2 \delta(t) \sin(2\phi)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

O bien, reagrupando las integrales por orden:

$$\begin{aligned}
b(t) = & (M_{GP}t^2\delta(t) + M_{GC}t^2\delta(t)\cos(2\phi) + M_{GS}t^2\delta(t)\sin(2\phi)) \\
& + \int_{t_0} [-4M_{GP}t\delta(t) + M_{GS}(-4t\delta(t)\sin(2\phi) - 4\dot{\phi}t^2\delta(t)\cos(2\phi)) \\
& + M_{GC}(-4t\delta(t)\cos(2\phi) + 4\dot{\phi}t^2\delta(t)\sin(2\phi)) + C_{GP}\dot{\phi}t^2\delta(t) \\
& + C_{GC}\dot{\phi}t^2\delta(t)\cos(2\phi) + C_{GS}\dot{\phi}t^2\delta(t)\sin(2\phi) + C_Bt^2\delta(t)] \\
& + \int_{t_0}^{(2)} [2M_{GP}\delta(t) \\
& + M_{GS}(2\delta(t)\sin(2\phi) + 8\dot{\phi}t\delta(t)\cos(2\phi) + 2\ddot{\phi}t^2\delta(t)\cos(2\phi) \\
& - 4\dot{\phi}^2t^2\delta(t)\sin(2\phi)) \\
& + M_{GC}(2\delta(t)\cos(2\phi) - 8\dot{\phi}t\delta(t)\sin(2\phi) - 2\ddot{\phi}t^2\delta(t)\sin(2\phi) \\
& - 4\dot{\phi}^2t^2\delta(t)\cos(2\phi)) - C_{GP}(2\dot{\phi}t + \ddot{\phi}t^2)\delta(t) \\
& + C_{GC}(-\ddot{\phi}t^2\delta(t)\cos(2\phi) - 2\dot{\phi}t\delta(t)\cos(2\phi) + 2\dot{\phi}^2t^2\delta(t)\sin(2\phi)) \\
& + C_{GS}(-\ddot{\phi}t^2\delta(t)\sin(2\phi) - 2\dot{\phi}t\delta(t)\sin(2\phi) - 2\dot{\phi}^2t^2\delta(t)\cos(2\phi)) \\
& - 2C_Bt\delta(t) + (K_{GP} + K_B + \ddot{\phi}K_{ST})t^2\delta(t) + K_{GC}t^2\delta(t)\cos(2\phi) \\
& + K_{GS}t^2\delta(t)\sin(2\phi)] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Donde $\int^{(n)} \varphi(t)$ son integrales iteradas de la forma $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} \varphi(\sigma_n) d\sigma_n \dots d\sigma_1$, con $\int \varphi(t) \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$ y n un entero positivo.

La ecuación (4.8) se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
b(t) = & Mt^2\delta(t) + \int_{t_0} [-4Mt - 4\dot{\phi}t^2(M_{GS}\cos(2\phi) - M_{GC}\sin(2\phi)) + (C_B + \dot{\phi}C_R)t^2]\delta(t) \\
& + \int_{t_0}^{(2)} [2M\delta(t) + (8\dot{\phi}t + 2\ddot{\phi}t^2)(M_{GS}\cos(2\phi) - M_{GC}\sin(2\phi)) \\
& - 4\dot{\phi}^2t^2(M_{GS}\sin(2\phi) + M_{GC}\cos(2\phi)) + 2\dot{\phi}^2t^2(C_{GC}\sin(2\phi) - C_{GS}\cos(2\phi)) \\
& - 2(C_B + \dot{\phi}C_R)t - C_R\ddot{\phi}t^2 \\
& + (K_B + K_R + \ddot{\phi}K_{ST})t^2]\delta(t) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las relaciones para C_G y K_G de la ecuaciones (3.53) en la ecuación (4.9), esta se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
b(t) = & Mt^2\delta(t) + \int_{t_0} [-4Mt - 4\dot{\phi}t^2(M_{GS}\cos(2\phi) - M_{GC}\sin(2\phi)) + Ct^2]\delta(t) \\
& + \int_{t_0}^{(2)} [2M + (8\dot{\phi}t + 2\ddot{\phi}t^2)(M_{GS}\cos(2\phi) - M_{GC}\sin(2\phi)) \\
& - 4\dot{\phi}^2t^2(M_{GS}\sin(2\phi) + M_{GC}\cos(2\phi)) + 2\dot{\phi}^2t^2(C_{GC}\sin(2\phi) - C_{GS}\cos(2\phi)) \\
& - 2Ct - C_G\ddot{\phi}t^2 + K_Gt^2]\delta(t) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

De forma análoga se procede a realizar las integrales para el lado derecho de la ecuación (4.6) haciendo el resultado igual a $a(t)$.

El proceso de integración se puede reducir al considerar las siguientes relaciones matemáticas:

$$-\frac{d}{dt}[\dot{\phi}\cos(\phi + \alpha)] = \dot{\phi}^2\sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi}\cos(\phi + \alpha) \tag{4.11}$$

$$\frac{d}{dt}[\dot{\phi}\sin(\phi + \alpha)] = \ddot{\phi}\sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2\cos(\phi + \alpha) \tag{4.12}$$

Ahora, sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (4.6) antes de la integración se tiene:

$$a(t) = -m_u e \int_{t_0}^{(2)} t^2 \frac{d}{dt}[\dot{\phi}\cos(\phi + \alpha)] + m_u e \int_{t_0}^{(2)} t^2 \frac{d}{dt}[\dot{\phi}\sin(\phi + \alpha)] \tag{4.13}$$

O bien:

$$\begin{aligned}
a(t) = & -m_u e \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} (\sigma_2 - t_0)^2 \frac{d}{d\sigma_2}[\dot{\phi}\cos(\phi + \alpha)] d\sigma_2 d\sigma_1 \\
& + m_u e \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} (\sigma_2 - t_0)^2 \frac{d}{d\sigma_2}[\dot{\phi}\sin(\phi + \alpha)] d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Al realizar la primera integración a la ecuación (4.14) se tiene:

$$\begin{aligned}
 a(t) = & -m_u e \int_{t_0}^t \left[(\sigma_1 - t_0)^2 \dot{\phi} \cos(\phi + \alpha) - 2 \int_{t_0}^{\sigma_1} \dot{\phi} (\sigma_2 - t_0) \cos(\phi + \alpha) d\sigma_2 \right] d\sigma_1 \\
 & + m_u e \int_{t_0}^t \left[(\sigma_1 - t_0)^2 \dot{\phi} \sin(\phi + \alpha) \right. \\
 & \left. - 2 \int_{t_0}^{\sigma_1} \dot{\phi} (\sigma_2 - t_0) \sin(\phi + \alpha) d\sigma_2 \right] d\sigma_1 \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Introduciendo las siguientes identidades trigonométricas en la ecuación (4.15):

$$\cos(\phi + \alpha) = \cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \alpha \quad (4.16)$$

$$\sin(\phi + \alpha) = \sin \phi \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha \quad (4.17)$$

Esta se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 a(t) = & -m_u e \left[\cos \alpha \int_{t_0}^t (\sigma_1 - t_0)^2 \dot{\phi} \cos \phi d\sigma_1 - \sin \alpha \int_{t_0}^t (\sigma_1 - t_0)^2 \dot{\phi} \sin \phi d\sigma_1 \right. \\
 & - 2 \cos \alpha \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dot{\phi} (\sigma_2 - t_0) \cos \phi d\sigma_2 d\sigma_1 \\
 & \left. + 2 \sin \alpha \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dot{\phi} (\sigma_2 - t_0) \sin \phi d\sigma_2 d\sigma_1 \right] \\
 & + m_u e \left[\cos \alpha \int_{t_0}^t (\sigma_1 - t_0)^2 \dot{\phi} \sin \phi d\sigma_1 + \sin \alpha \int_{t_0}^t (\sigma_1 - t_0)^2 \dot{\phi} \cos \phi d\sigma_1 \right. \\
 & - 2 \cos \alpha \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dot{\phi} (\sigma_2 - t_0) \sin \phi d\sigma_2 d\sigma_1 \\
 & \left. - 2 \sin \alpha \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dot{\phi} (\sigma_2 - t_0) \cos \phi d\sigma_2 d\sigma_1 \right] \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Finalmente, agrupando los términos de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 a(t) = m_u e & \left\{ -\cos \alpha \left[\int_{t_0} (\Delta t)^2 \dot{\phi} \cos \phi - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}(\Delta t) \cos \phi \right] \right. \\
 & + \sin \alpha \left[\int_{t_0} (\Delta t)^2 \dot{\phi} \sin \phi - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}(\Delta t) \sin \phi \right] \left. \right\} \\
 & + m_u e \left\{ \cos \alpha \left[\int_{t_0} (\Delta t)^2 \dot{\phi} \sin \phi - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}(\Delta t) \sin \phi \right] \right. \\
 & + \sin \alpha \left[\int_{t_0} (\Delta t)^2 \dot{\phi} \cos \phi - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}(\Delta t) \cos \phi \right] \left. \right\} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar mediante un sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$A(t)\theta = B(t) \quad (4.20)$$

donde, $\theta = [m_u e_\eta = m_u e \cos \alpha, m_u e_\zeta = m_u e \sin \alpha]^T$ y denota el vector a ser identificado.

$A(t)$ está dado por:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{12}(t) & a_{11}(t) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 a_{11}(t) &= \int_{t_0} (\Delta t)^2 \dot{\phi} \cos \phi - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}(\Delta t) \cos \phi \\
 a_{12}(t) &= \int_{t_0} (\Delta t)^2 \dot{\phi} \sin \phi - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}(\Delta t) \sin \phi
 \end{aligned}$$

$B(t)$ está dado por:

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Donde $b_1(t)$ y $b_2(t)$ tienen la forma de la ecuación (4.10) y están en función del vector de respuesta de vibración $\delta(t)$, el cual contiene los desplazamientos para los diferentes puntos nodales en las direcciones X y Z respectivamente.

De la ecuación (4.20), se puede concluir que el vector Θ es identificable algebraicamente sí, y solo sí, la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez [28]; es decir, las trayectorias del comportamiento dinámico del sistema satisface la condición $\det[A(t) \neq 0]$. En general, esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño $(t_0, t_0 + \epsilon]$, donde ϵ es un valor positivo y suficientemente pequeño.

De la solución de la ecuación (4.20) se obtiene el identificador algebraico para los parámetros de magnitud de la masa de desbalance y su posición angular de un rotor asimétrico, por tanto se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} m_u e_\eta &= \frac{b_2 a_{12} - b_1 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ m_u e_\zeta &= \frac{b_1 a_{12} + b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ m_u e &= \sqrt{m_u e_\eta^2 + m_u e_\zeta^2} \\ \alpha &= \cos^{-1} \left(\frac{m_u e_\eta}{m_u e} \right) \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon] \quad (4.23)$$

Como se puede observar en (4.23), la identificación algebraica de los parámetros de la cantidad y su posición angular del desbalance del sistema rotodinámico es independiente de las condiciones iniciales, además, solo depende del vector de desplazamientos del sistema en las direcciones X y Z para cada instante del tiempo, así como del tipo de rampa de excitación.

4.2.2 RESULTADOS DE LA IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA DE LA CANTIDAD Y POSICIÓN ANGULAR DE DESBALANCE

Para la simulación de la identificación algebraica de la cantidad y la posición angular de desbalance en un rotor asimétrico, se consideró la configuración del modelo correspondiente a la figura 3.2, donde las propiedades mecánicas y geométricas del rotor se muestran en las tablas 3.2-3.4. Para este caso se consideró un desbalance $m_u e = 1 \times 10^5 \text{ Kg.m}$ en una posición angular $\alpha = 45^\circ$ (0.785 rad) respecto al eje Z, colocado en el nodo 3. Para la simulación se consideró la respuesta del rotor obtenida con una rampa de excitación lineal con aceleración angular $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$. En las figuras 3.6 y 3.7, se muestra la componente real e imaginaria de la respuesta en el tiempo en dirección Z.

En las figuras 4.1 a) y 4.2 a) se muestra el comportamiento en el tiempo de los identificadores de la cantidad de desbalance y su posición angular respectivamente. Por otra parte, en las figuras 4.1 b) y 4.2 b) se muestra la rapidez con que convergen los identificadores en los primeros instantes de tiempo.

En las figuras 4.1 y 4.2, las líneas punteadas corresponden a los valores originales del desbalance y su posición angular respectivamente, mientras que las líneas continuas representan los valores de la estimación algebraica.

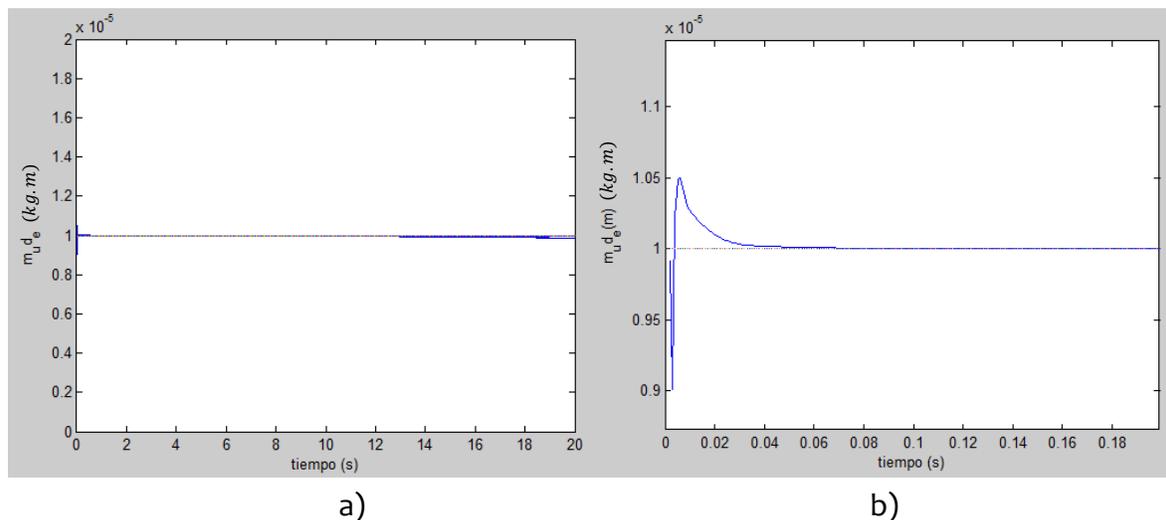


Figura 4.1. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$), $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$.

b) Zoom de la figura de la figura 4.1. a).

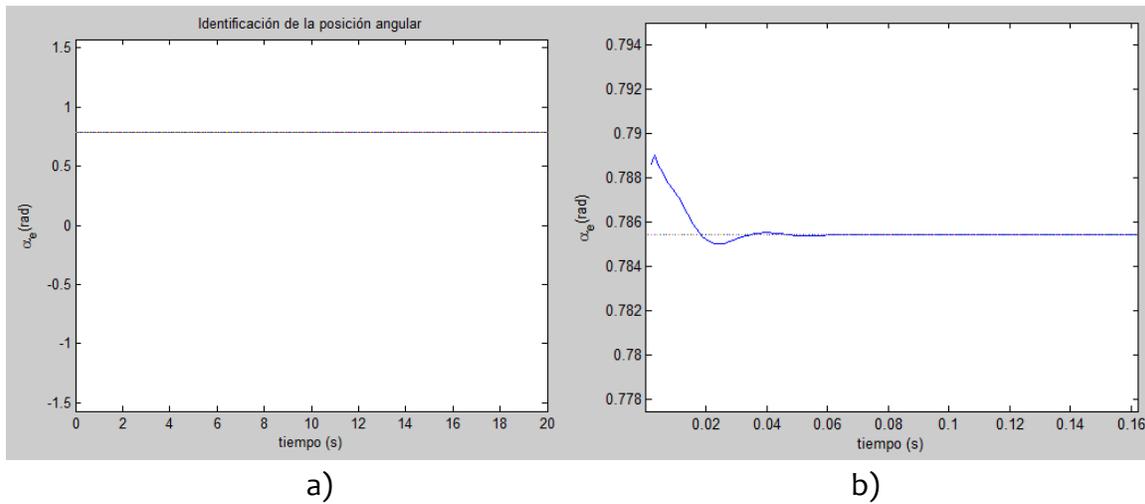


Figura 4.2. Identificación de la posición angular del desbalance (α), $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$. b) Zoom de la figura de la figura 4.2. a).

Como se observa de las figuras, el método de identificación algebraica en línea, identifica los parámetros desconocidos en una fracción de segundo y se mantiene estable en los valores determinados para todo el dominio de tiempo.

En las figuras 4.3 a) y 4.3 b), se muestra la componente real e imaginaria de la respuesta en el tiempo en dirección Z para el nodo 1.

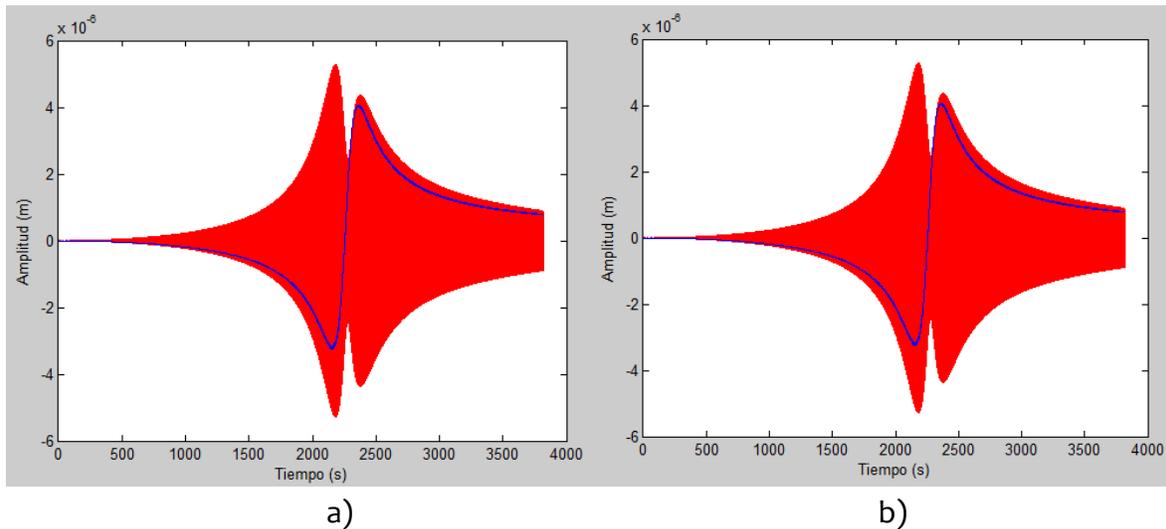
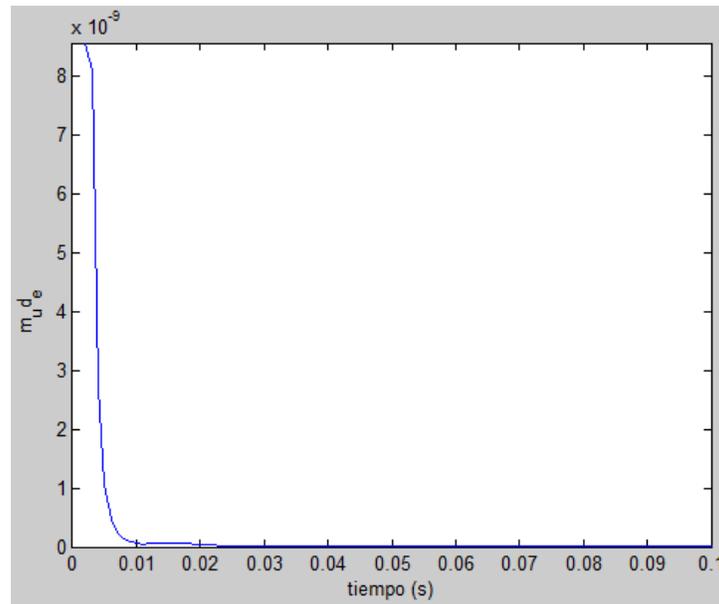
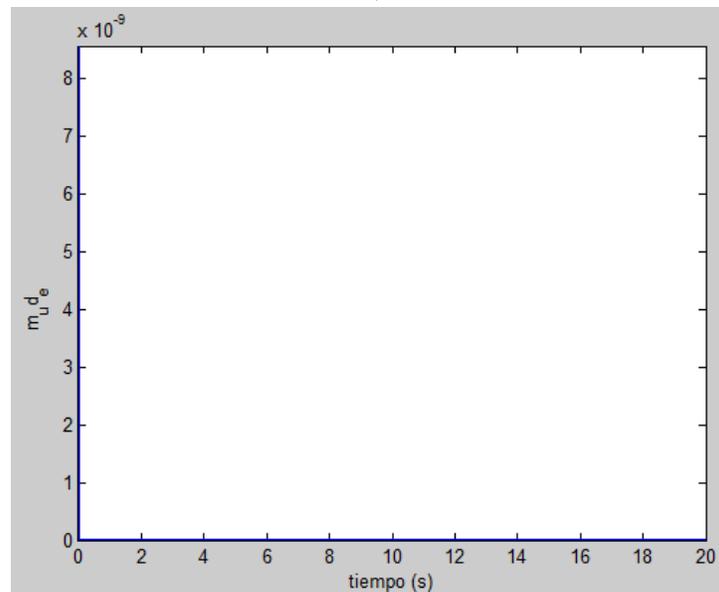


Figura 4.3 a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$
 b) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$, nodo 1

Por otra parte, en las figuras 4.4 y 4.5, se muestran los resultados para el comportamiento en función del tiempo del identificador del desbalance y su posición angular, para un el nodo 1 donde no existe desbalance en el rotor.

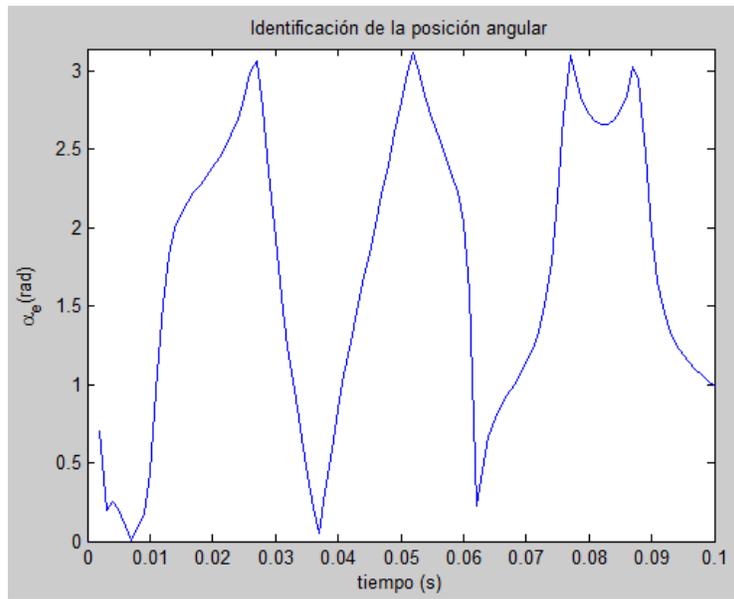


a)

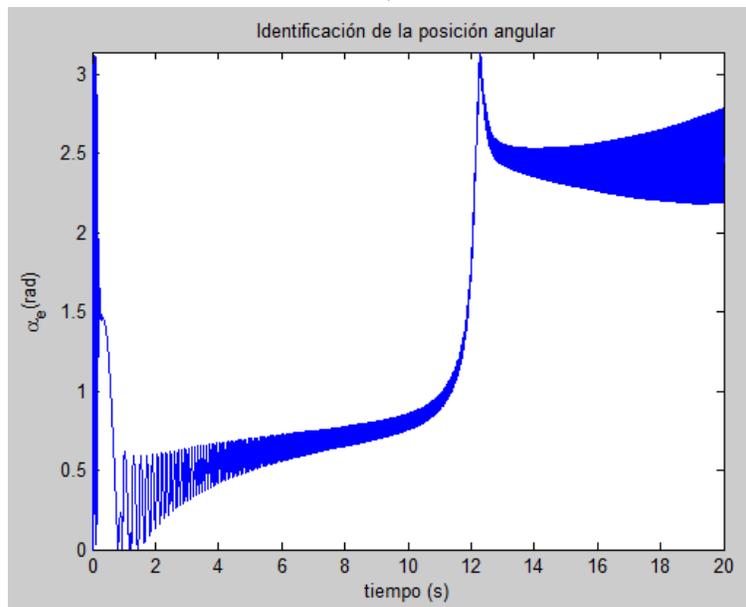


b)

Figura 4.4. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 1, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$.
b) Zoom de la figura de la figura 4.4. a).



a)



b)

Figura 4.5. Identificación de la posición angular del desbalance (α) para el nodo 1, $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad}/s^2$.

b) Zoom de la figura de la figura 4.5. a).

En la figura 4.4 a) se aprecia cómo el identificador del desbalance tiende de forma inmediata a un valor de cero y en la figura 4.4 b) se observa como mantiene esta tendencia a lo largo de todo el dominio de tiempo, esto a causa de que en el nodo 1 no existe masa que cause desequilibrio al sistema.

Asimismo, en la figura 4.5 a) y b) se observa que el identificador correspondiente a la posición angular no converge en un valor fijo, esto también a causa de que en el nodo analizado no existe masa que cause desbalance en el sistema. Cabe mencionar que este comportamiento se presenta en todos los nodos del rotor donde no existe masa de desbalance.

El método de identificación tiene la capacidad de detectar parámetros de desbalance, en cualquier nodo dentro de la discretización del sistema. Además, esta cualidad del método permite encontrar la posición de la(s) masa(s) de desbalance a lo largo del rotor y de esta manera poder encontrar el equilibrio dinámico del sistema (ver apéndice A).

4.3 IDENTIFICADOR ALGEBRAICO VS RAMPA DE EXCITACIÓN

Un problema asociado a la aplicación de los métodos convencionales de balanceo (balanceo modal, coeficientes de influencia), es que éstos requieren de la respuesta de vibración en estado estable para diferentes valores de frecuencia de la excitación, además de la necesidad de llevar al sistema rotatorio hasta su velocidad nominal de operación. Sin embargo, en la práctica la frecuencia de excitación varía de manera continua, lo que impide al sistema alcanzar una vibración completamente estable, limitando la utilidad de los datos de la respuesta de vibración del rotor, por la carencia de métodos de análisis en los que se considere la velocidad de las rampas de excitación.

De acuerdo con lo anterior, se analizó el comportamiento del identificador del desbalance y su posición angular en función del tiempo para diferentes rampas de excitación de tipo lineal para los casos donde $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$ y $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$. Para el análisis se consideró el modelo del rotor de la figura 3.2, con una masa de desbalance de $m_u e = 1E5 \text{ kg.m}$, colocada en el disco 1, en una posición angular $\alpha = 45^\circ$ (0.785 rad) respecto al eje Z.

Para cada uno de los casos, se muestra la señal en el tiempo de las componentes real e imaginaria de la respuesta del rotor en la dirección Z (color rojo), en estas figuras se aprecia una gráfica adicional que corresponde a la señal de vibración filtrada (color azul), es decir, el desplazamiento del rotor cada vez que éste completa una revolución. También se muestra el diagrama polar de respuesta del sistema (línea azul) correspondiente a cada caso, comparado con el diagrama polar obtenido de la solución en estado estable (línea negra).

Asimismo, para cada caso se presenta el comportamiento en el tiempo de los identificadores para el desbalance y su posición angular; aquí, la línea discontinua corresponde al valor del parámetro de referencia, mientras que la línea continua (color azul) corresponde al valor obtenido de la identificación algebraica. En cada gráfica se muestra únicamente hasta 0.1 segundos del dominio de tiempo, ya que esto tarda el identificador en converger al parámetro buscado.

CASO I. $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

En las figuras 4.6 y 4.7, se muestra la respuesta de vibración del sistema rotodinámico para una rampa de excitación de tipo lineal con $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$. En la figura 4.7 se puede apreciar que al aumentar 10 veces la rapidez de la rampa de excitación con respecto al caso donde $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ (sección 4.2.2), la respuesta de vibración del rotor se distorsiona, lo que limita la utilidad de los datos de la respuesta de vibración para el proceso de balanceo.

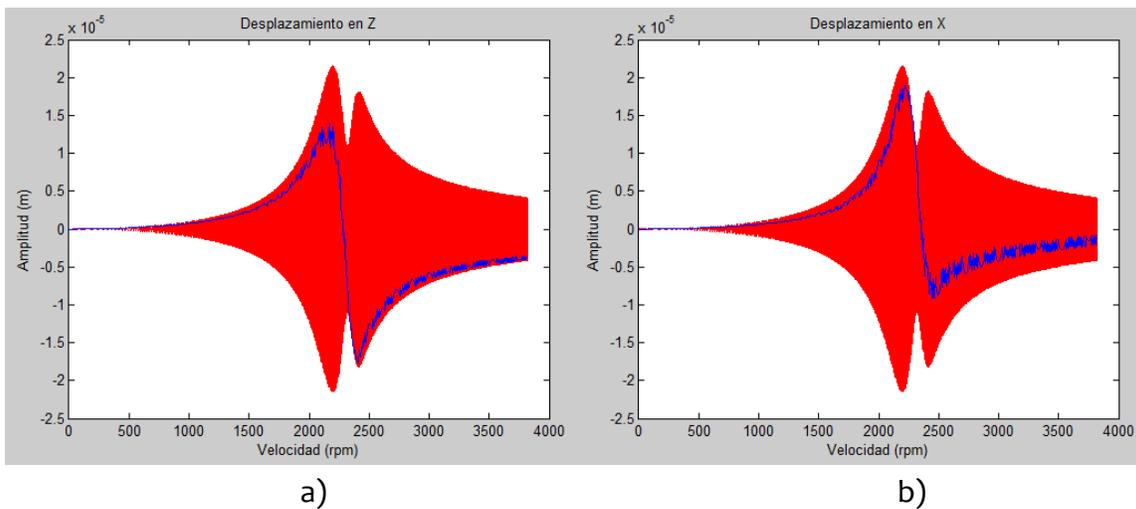


Figura 4.6. a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$
 b) Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$

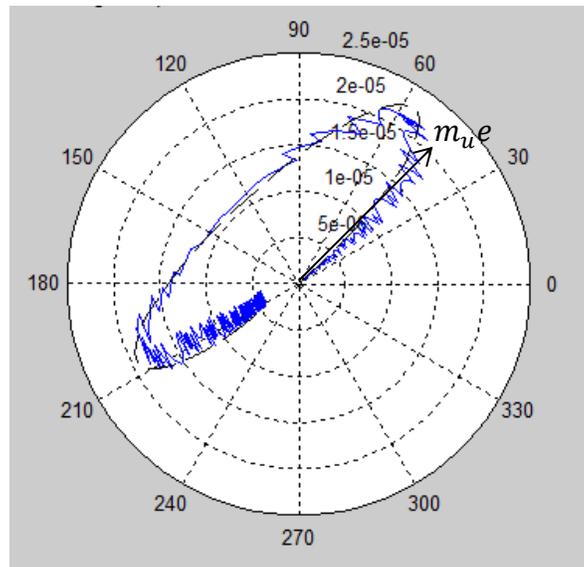


Figura 4.7 Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45$, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

Por otra parte, el comportamiento en el tiempo de los identificadores del desbalance y su posición angular que toman como dato de entrada la señal de las figuras 4.6 a) y b), se muestran en la figura 4.8 a) y b) respectivamente. Se puede apreciar que independientemente de que la rampa de excitación sea más rápida y la señal de la respuesta se encuentre distorsionada, los identificadores convergen rápidamente al valor absoluto buscado y se mantienen constantes en el tiempo.

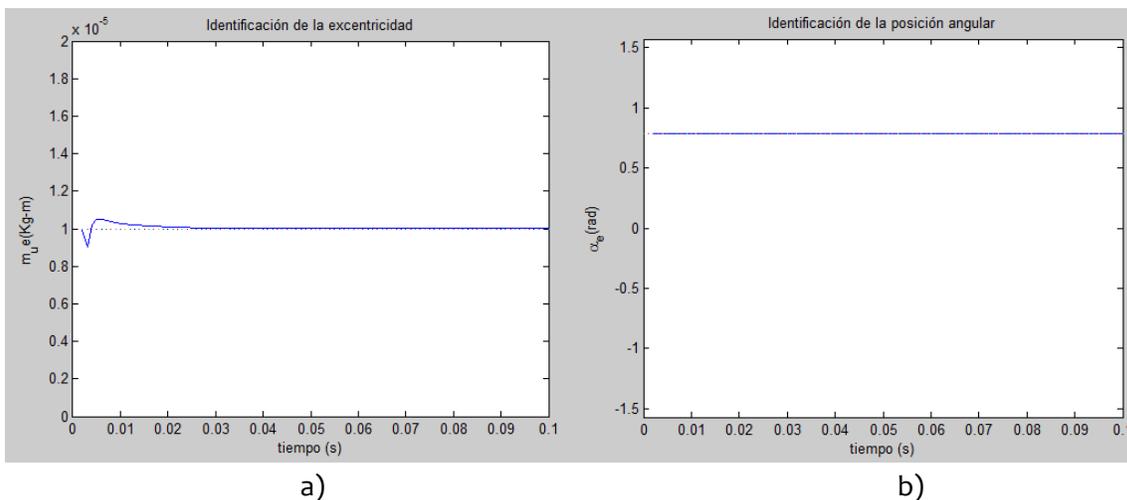


Figura 4.8. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$
 b) Identificación de la posición angular del desbalance (α) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$

CASO II. $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$.

En las figuras 4.9 y 4.10, se presenta la respuesta de vibración del mismo sistema rotodinámico para el caso cuando $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$. En las figuras 4.9 a), 4.9 b) y 4.10 se puede apreciar que al incrementar 10 veces la rapidez de la rampa de excitación con respecto al caso anterior, ó 100 veces para cuando $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ (sección 4.2.2), la respuesta de vibración del rotor presenta un grado de distorsión mayor, lo que complica aún más la interpretación de la señal y su análisis.

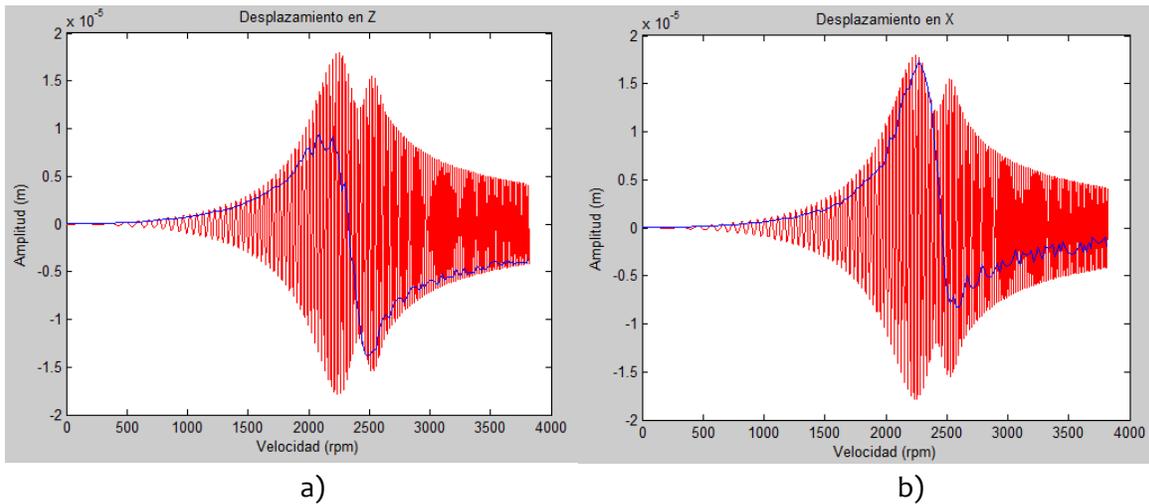


Figura 4.9. a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$
 b) Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$

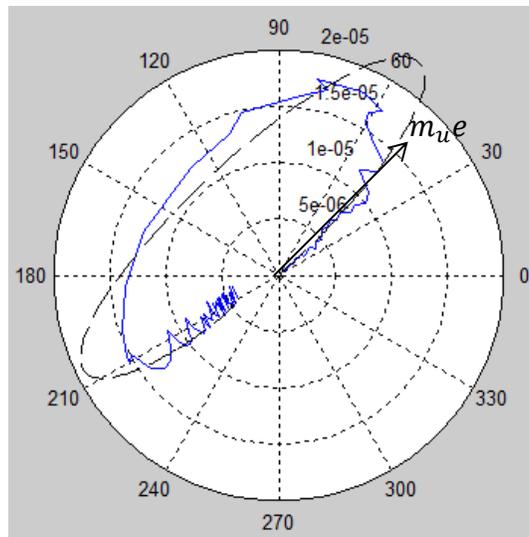


Figura 4.10 Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45$, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$.

Por otra parte, el comportamiento en el tiempo de los identificadores del desbalance y su posición angular, que toman como dato de entrada la señal de las figura 4.9 a) y 4.9 b), se muestran en la figura 4.11 a) y 4.11 b) respectivamente. Se puede apreciar que, independientemente de que la rampa de excitación sea más rápida, y nuevamente la señal de la respuesta se encuentre distorsionada, los identificadores nuevamente convergen rápidamente al valor absoluto buscado y se mantienen constantes en el tiempo.

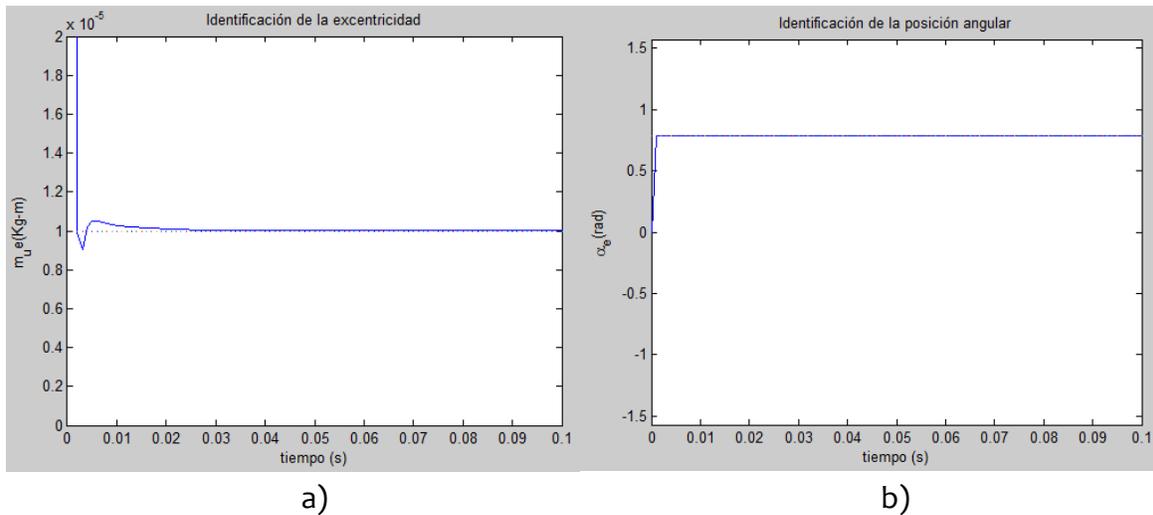


Figura 4.11. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$
 b) Identificación de la posición angular del desbalance (α) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 100 \text{ rad/s}^2$

CASO III. $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$.

En las figuras 4.12 y 4.13, se presenta la respuesta de vibración del sistema rotodinámico, para $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$.

En las figuras 4.12 a), 4.12 b) y 4.13 se puede apreciar que, al incrementar 20 veces la rapidez de la rampa de la rampa de excitación con respecto al caso donde $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$, ó 200 veces para cuando $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ (sección 4.2.2), la respuesta de vibración del rotor presenta un grado de distorsión mucho mayor con respecto a todos los casos estudiados, lo que definitivamente hace prácticamente imposible el análisis de la señal de vibración en la aplicación de los procesos de balanceo.

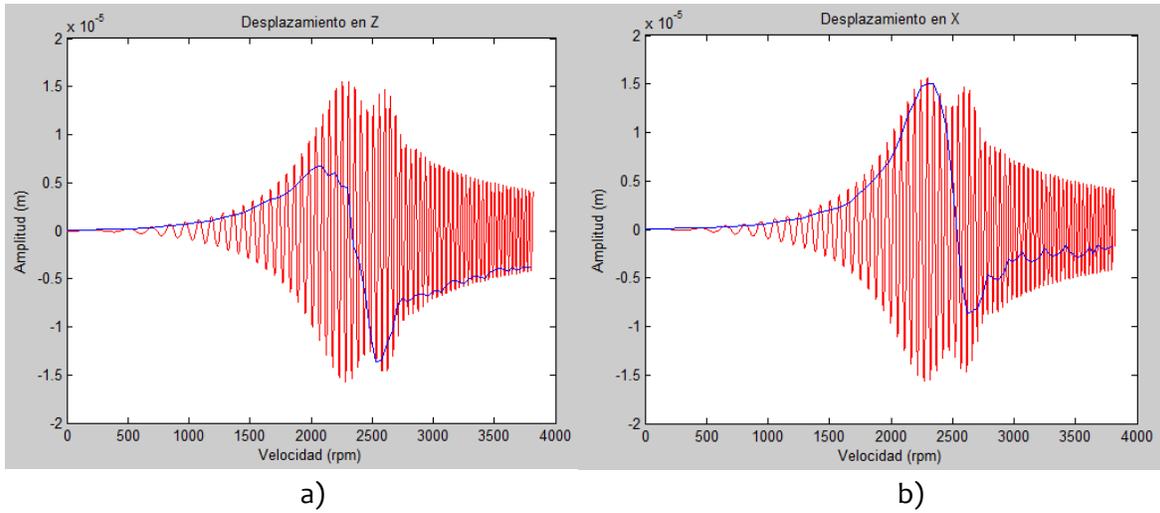


Figura 4.12. a) Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$
 b) Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$

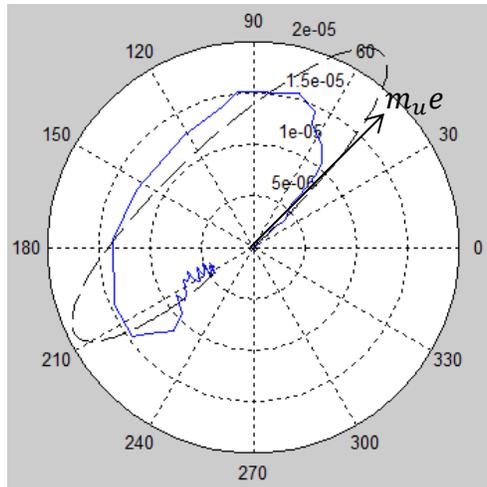


Figura 4.13. Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45^\circ$, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$.

Por otra parte, el comportamiento en el tiempo de los identificadores del desbalance y su posición angular, que toman como dato de entrada la señal de las figuras 4.12 a) y 4.12 b), se muestran en la figura 4.14 a) y 4.14 b) respectivamente. Se puede apreciar que, independientemente de que la rampa de excitación sea más rápida, y que la señal de la respuesta se encuentre completamente distorsionada, los identificadores una vez más convergen rápidamente al valor buscado y se mantienen constantes en el tiempo.

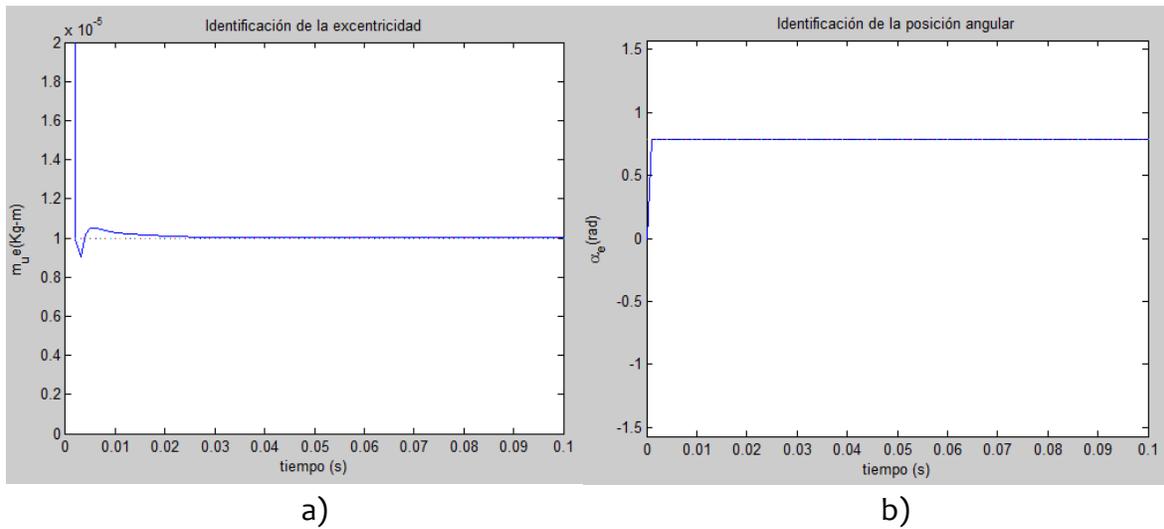


Figura 4.14. a) Identificación de la cantidad del desbalance ($m_u e$) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$
b) Identificación de la posición angular del desbalance (α) para el nodo 3, $\ddot{\phi} = 200 \text{ rad/s}^2$

Nótese que el identificador de parámetros en línea no se ve afectado por la velocidad de la rampa de excitación, ya que este está en función del vector de desplazamientos del sistema para cada instante de tiempo.

CAPÍTULO V

IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE UN ROTOR ASIMÉTRICO DE 2 GDL

5.1 MODELO MATEMÁTICO DE UN ROTOR ASIMÉTRICO DE 2 GDL

En el Capítulo II, se definió el modelo matemático reportado en la literatura [10] para un rotor asimétrico, ecuación (2.52), donde se considera únicamente los efectos de los cambios de rigidez a causa de la asimetría del rotor, en este modelo no está presente la influencia que tiene el sistema a causa de la asimetría en las matrices de masa y efectos giroscópicos en la respuesta vibratoria.

En el Capítulo III se desarrollo el modelo matemático para un rotor asimétrico para multiples grados de libertad donde se incluyeron los efectos de la asimetría del rotor en las matrices de masa, efectos giroscópico y de rigidez, sin embargo no fue posible demostrar la influencia que tiene en la respuesta del rotor al considerar los efectos de forma independiente para cada una de las matrices del sistema rotatorio (sección 3.7.3).

De acuerdo con lo anterior, para observar los efectos mencionados, se redujeron las matrices elementales con dimensiones de 8X8 pertenecientes a un sistema de múltiples grados de libertad ecuación (3.53), a matrices de dimensiones de 2X2. Por lo que el modelo de múltiples grados de libertad de la ecuacion (3.53) se puede simplificar a un sistema de dos grados de libertad 2 GDL de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \cos(2\phi) \begin{bmatrix} -M_2 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \sin(2\phi) \begin{bmatrix} 0 & M_2 \\ M_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} \\
 & + \phi \begin{bmatrix} 0 & -C_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \phi \cos(2\phi) \begin{bmatrix} 0 & C_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \phi \sin(2\phi) \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} + \cos(2\phi) \begin{bmatrix} -K_2 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} + \sin(2\phi) \begin{bmatrix} 0 & K_2 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} \\
 & = m_u e \phi^2 \begin{bmatrix} \cos(\phi + \alpha) \\ \sin(\phi + \alpha) \end{bmatrix} + m_u e \ddot{\phi} \begin{bmatrix} \sin(\phi + \alpha) \\ -\cos(\phi + \alpha) \end{bmatrix} \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Donde:

$$M_1 = \frac{M_x + M_z}{2}, \quad M_2 = \frac{M_x - M_z}{2}$$

$$C_1 = \frac{C_x + C_z}{2}, \quad C_2 = \frac{C_x - C_z}{2}$$

$$K_1 = \frac{K_x + K_z}{2}, \quad K_2 = \frac{K_x - K_z}{2}$$

Los subíndices "x" y "z" que acompañan a la masa (M_x, M_z), rigidez (K_x, K_z) y efectos giroscópicos (C_x, C_z) del rotor, así como rigidez (k_x, k_z) y amortiguamiento viscoso (c_x, c_z) de los soportes corresponden a las direcciones respecto a los ejes x, z del sistema rotatorio de la figura 3.1 respectivamente.

5.2 MÉTODOS DE SOLUCIÓN AL MODELO MATEMÁTICO

5.2.1 SOLUCIÓN EN ESTADO ESTABLE PARA UN ROTOR ASIMÉTRICO

De manera similar que el sistema de múltiples grados de libertad, aplicando la metodología de solución en estado estable a la ecuación (5.1) sin olvidar las condiciones propias del método, es decir $\dot{\phi} = \text{cte.}$, $\ddot{\phi} = 0$, donde $\phi = 2\pi n$ con $n = 1, 2, 3, \dots, N$ vueltas, se tiene el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} [K_p] + [K_d] + [K] - \phi^2([M_p] + [M_d]) & \phi(\phi([C_p] + [C_d]) + C) \\ -\dot{\phi}(\phi([C_p] - [C_d]) + C) & [K_p] - [K_d] + [K] - \phi^2([M_p] - [M_d]) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Donde:

$$[M_p] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}, \quad [M_d] = \begin{bmatrix} -M_2 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$[K_p] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}, \quad [K_d] = \begin{bmatrix} -K_2 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix}$$

$$[C_p] = \begin{bmatrix} 0 & -C_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [C_d] = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_z \end{bmatrix}$$

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1z} \end{Bmatrix}, \quad \{u_2\} = \begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{2z} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_1\} = m_u e \dot{\phi}^2 \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}, \quad \{F_2\} = m_u e \dot{\phi}^2 \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

Los resultados obtenidos mediante la solución en estado estable, ecuación (5.2), se compararán con los resultados obtenidos mediante el método numérico (Newmark).

Es importante hacer notar que con el modelo matemático de dos grados de libertad que se presenta en la ecuación (5.1) es posible observar de manera independiente los efectos de cada una de las matrices del sistema en la respuesta del rotor, ya que en un rotor asimétrico tipo Jeffcott de 2 GDL, tanto la masa como la rigidez y efectos giroscópicos se consideran puntuales e independientes una de otra, mientras que en el sistema de múltiples grados de libertad cada variable es dependiente una de la otra.

5.2.2 MÉTODO NUMÉRICO DE NEWMARK

Se consideran para la solución del modelo de la ecuación (5.1) las matrices de rigidez $[K_p]$, $[K_d]$, masa $[M_p]$, $[M_d]$ y efectos giroscópicos $[C_p]$, $[C_d]$ así como $[k]$ y $[c]$ rigidez y amortiguamiento de los soportes respectivamente. Para la solución se seleccionó una rampa de excitación con $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$ y un incremento de tiempo $dt = 0.001$. De acuerdo con la aceleración que se consideró (rampa de excitación), la respuesta del rotor se puede suponer que es similar a la de un sistema en estado estable, por tanto es posible comparar la solución obtenida con el método numérico de Newmark con la obtenida en la sección 5.2.1 (solución en estado estable).

5.3 SIMULACIÓN: “VALIDACIÓN DEL MÉTODO DE NEWMARK”

La validación del método numérico de Newmark se realizó a través de la comparación de los resultados obtenidos con aquellos arrojados al aplicar el método de solución en estado estable en la solución de la ecuación (5.1). Los valores usados para la simulación son: $K_x = 1.1 \text{ N/m}$, $K_z = 1 \text{ N/m}$, $M_x = 1 \text{ kg}$, $M_z = 1.01 \text{ kg}$, $C_x = 0.17 \text{ N/m/s}$, $C_z = 0.15 \text{ N/m/s}$, $k_x = 0.01 \text{ N/m}$, $k_z = 0.01 \text{ N/m}$, $c_x = 0.1 \text{ N/m/s}$, $c_z = 0.1 \text{ N/m/s}$ aplicando una masa de desbalance de $m_u e = 1 \text{ kg.m}$ colocada en una posición angular $\alpha = 45^\circ$ con respecto al eje Z.

En las figuras 5.1 y 5.2 se muestra la respuesta de vibración (desplazamiento) del sistema vibratorio, de la componente real e imaginaria para la respuesta en dirección Z obtenidas por el método de Newmark. De ambas figuras, se observan dos señales en cada figura, la señal en color rojo representa la respuesta de vibración en cualquier instante de tiempo discreto en las direcciones Z y X respectivamente, mientras que la señal en color azul, representa la respuesta de vibración en el instante en que el rotor completa una revolución (señal filtrada).

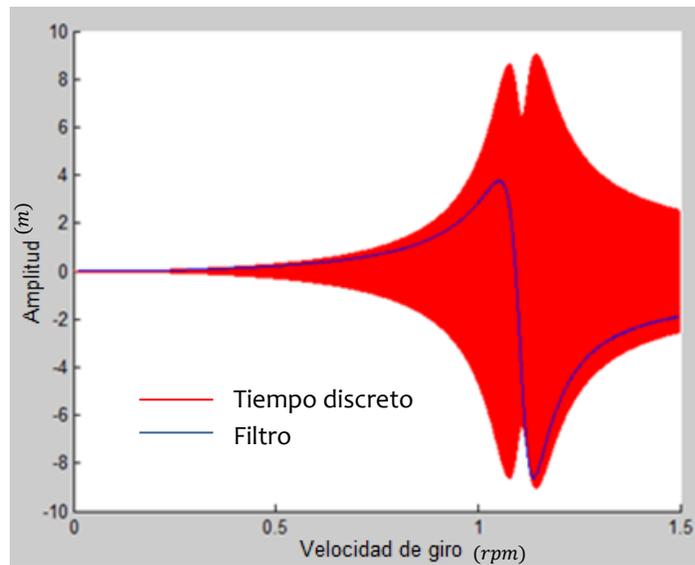


Figura 5.1. Componente real de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$

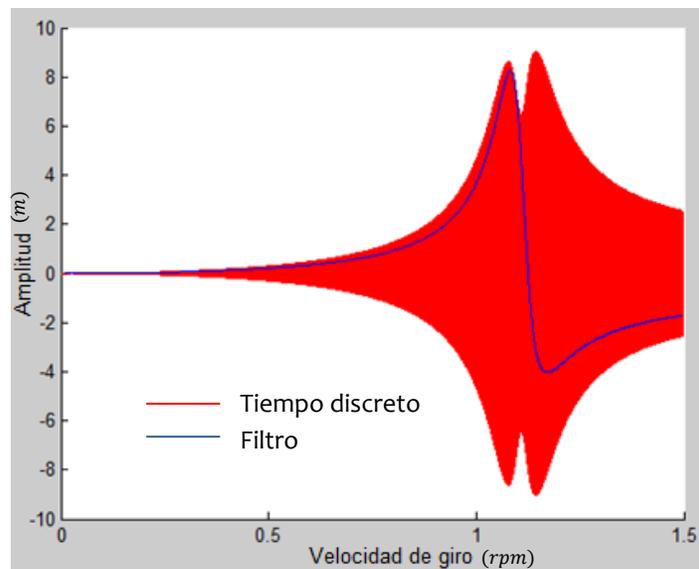


Figura 5.2. Componente imaginaria de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$

Asimismo en la figura 5.3 se muestra el diagrama de Bode resultante de la respuesta de vibración del sistema en la dirección Z. Este se obtiene de elevar al cuadrado la amplitud de las señales filtradas (señales color azul) de las figuras 5.1 y 5.2 respectivamente, posteriormente se suman y se saca la raíz cuadrada.

En esta misma figura, se compara el diagrama de Bode obtenido por el método de Newmark (color azul) con el diagrama de Bode obtenido con la solución en estado estable (color negro). De la figura se puede observar que ambos métodos arrojan soluciones muy similares tanto en amplitud como en frecuencia.

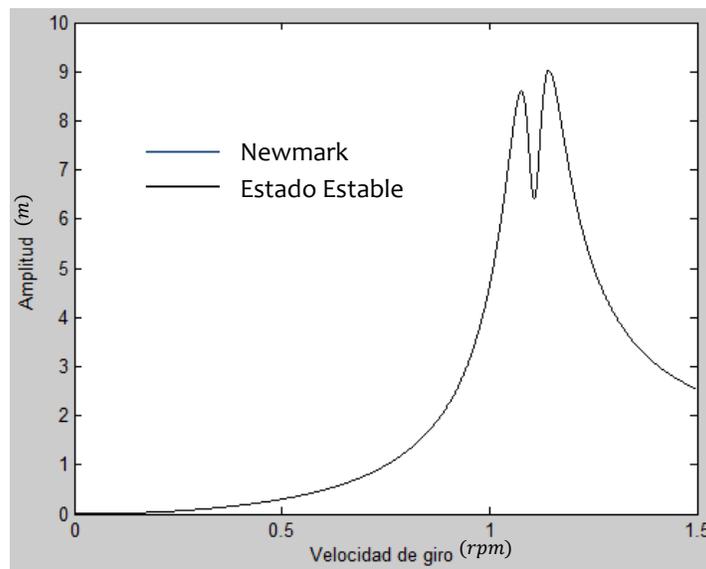


Figura 5.3. Desplazamiento resultante de la respuesta vibratoria en la dirección Z, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$

En la figura 5.4 se compara el diagrama polar de respuesta obtenido por el método de Newmark (color azul) con el diagrama polar de respuesta obtenido con la solución en estado estable (color negro). De la figura se puede observar que ambos métodos arrojan soluciones muy similares tanto en amplitud de respuesta como fase.

De lo anterior, se puede concluir que el programa desarrollado cuya solución emplea el método de Newmark ofrece resultados confiables.

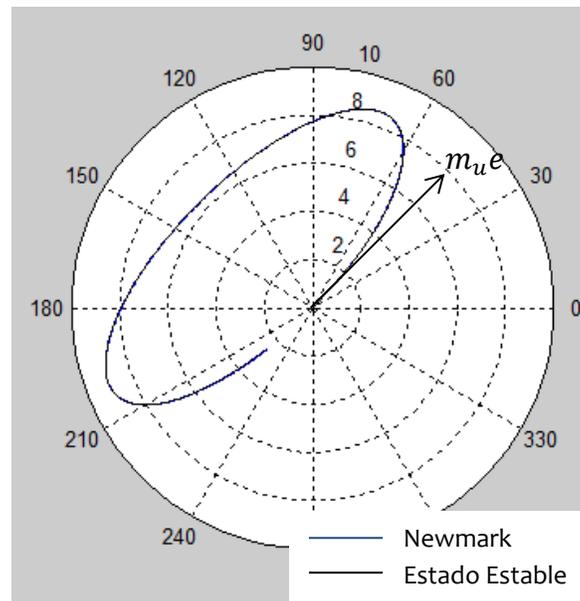


Figura 5.4. Diagrama polar de respuesta al desbalance en la dirección Z, $\alpha = 45^\circ$, $\ddot{\phi} = 0.0001 \text{ rad/s}^2$.

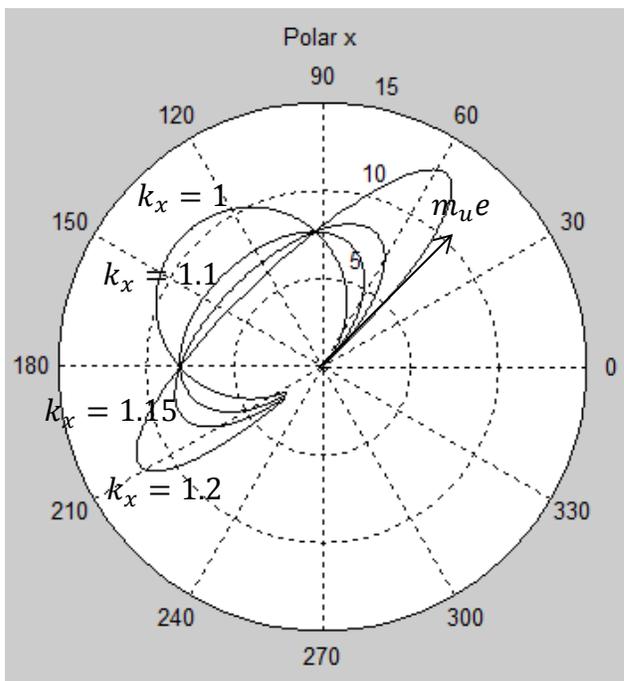
5.4 EFECTOS DE LA ASIMETRÍA DEL ROTOR EN LOS DIAGRAMAS POLARES DE RESPUESTA

En las figuras 5.5 a 5.7 se muestra la influencia de la asimetría de la flecha en la respuesta de vibración del rotor (diagramas polares de respuesta) considerando los efectos en las matrices de rigidez, masa y efectos giroscópicos. Para lo anterior, se considera en el sistema una cantidad de desbalance de $m_u e = 1 \text{ kg.m}$ colocada en una posición angular de $\alpha = 45^\circ$ (0.785 rad) respecto al eje Z

Cabe recordar que la respuesta de vibración en rotor asimétrico a causa de una masa excéntrica (masa de desbalance) depende principalmente del factor de asimetría y del factor de amortiguamiento por lo que se debe cumplir que el factor de amortiguamiento siempre tiene que ser mayor que el factor de asimetría, ecuación (2.99), para evitar inestabilidad en la respuesta en la zona de resonancia. Lo anterior se cumple en las gráficas de las figuras 5.5 a 5.7.

En las figuras se muestra la variación de cada uno de los parámetros del rotor con el objetivo de observar la influencia de la asimetría de forma independiente en la respuesta del rotor, por lo que el resto de los parámetros se consideran igual a la unidad.

En la figura 5.5 se muestran los efectos de manera independiente que tienen las matrices de rigidez que se ven afectadas por la asimetría del rotor, es decir, las matrices de rigidez acompañadas por las funciones de $\sin(2\phi)$ y $\cos(2\phi)$ en la ecuación (5.1). En la figura se puede observar que cuando el rotor tiene la misma rigidez en los ejes principales $K_x = K_z$, el diagrama polar de respuesta del rotor presenta una geometría circular (respuesta de un rotor simétrico), por otra parte, conforme se aumenta la asimetría del rotor, es decir se aumenta la rigidez K_x con respecto a K_z el diagrama polar de respuesta presenta una geometría elíptica y la amplitud de la vibración se incrementa, provocando que la elipse generada por la respuesta sea más pronunciada.



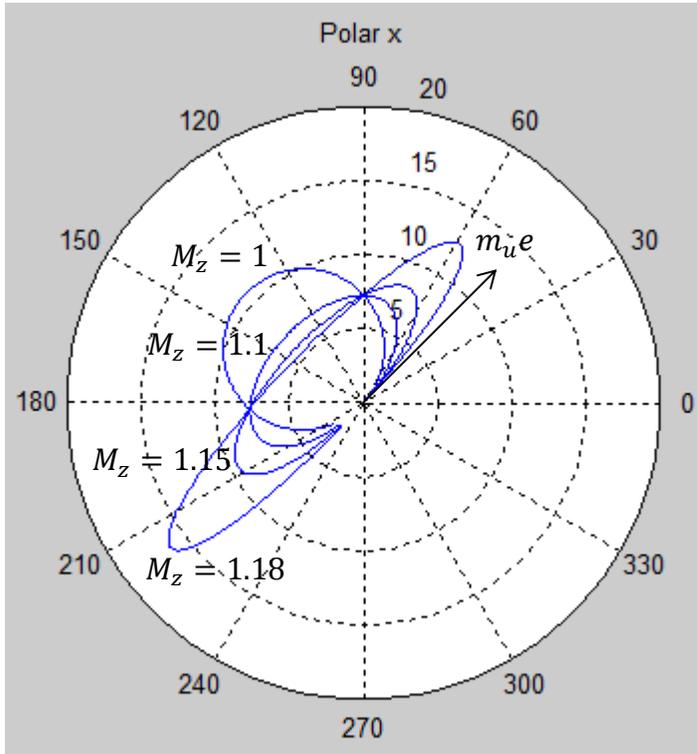
Datos:

$$\begin{aligned}
 K_x &= 1, & K_z &= 1, \\
 K_x &= 1.1, & K_z &= 1, \\
 K_x &= 1.15, & K_z &= 1, \\
 K_x &= 1.2, & K_z &= 1,
 \end{aligned}$$

Figura 5.5. Respuesta de vibración a causa de un desbalance en 45° , considerando únicamente cambios de rigidez.

En la figura 5.6 se muestran los efectos de manera independiente que tienen las matrices de masa que se ven afectadas por la asimetría del rotor, matrices de masa acompañadas por las funciones de $\sin(2\phi)$ y $\cos(2\phi)$ en la ecuación (5.1). En la figura se puede observar que cuando el rotor tiene la misma rigidez en los ejes principales $M_x = M_z$, el diagrama polar de respuesta del rotor presenta una geometría circular (respuesta de un rotor simétrico), por otra parte, conforme se aumenta la asimetría del rotor, es decir se aumenta la masa M_z con respecto a M_x el diagrama polar de respuesta presenta una geometría elíptica y la amplitud de de la vibración se incrementa, provocando que la elipse generada por la respuesta sea más pronunciada.

Tomando como referencia la gráfica 5.5, el comportamiento de los diagramas polares de respuesta de la figura 5.6 es diferente, ya que los cambios en las amplitudes de la vibración en 5.6 son mayores.



Datos:

$$M_x = 1, \quad M_z = 1$$

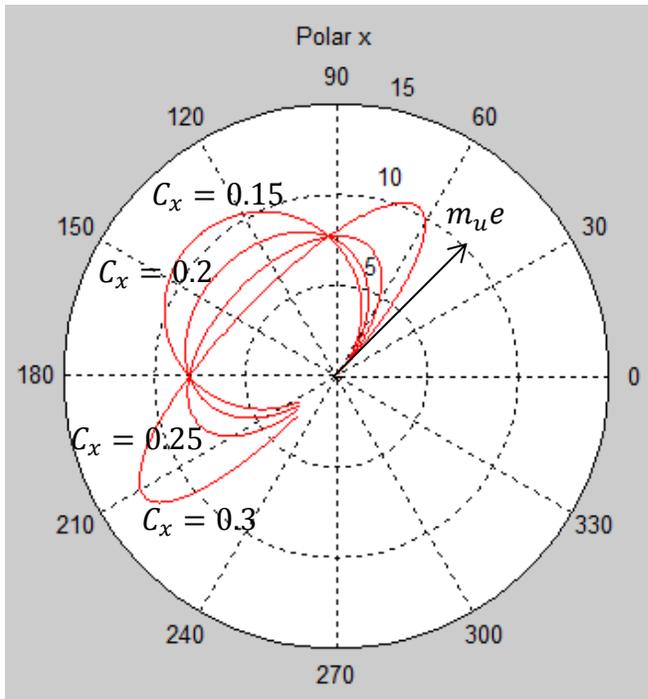
$$M_x = 1, \quad M_z = 1.1$$

$$M_x = 1, \quad M_z = 1.15$$

$$M_x = 1, \quad M_z = 1.18$$

Figura 5.6. Respuesta de vibración a causa de un desbalance en 45° , considerando únicamente cambios de masa.

Por otra parte, en la figura 5.7 se muestran los efectos de manera independiente que tienen las matrices de efectos giroscópicos que se ven afectadas por la asimetría del rotor, matrices de efectos giroscópicos acompañadas por las funciones de $\sin(2\phi)$ y $\cos(2\phi)$ en la ecuación (5.1). En la figura se puede observar que cuando el rotor tiene los mismos efectos giroscópicos en los ejes principales $C_x = C_z$, el diagrama polar de respuesta del rotor presenta una geometría circular (respuesta de un rotor simétrico), por otra parte, conforme se aumenta la asimetría del rotor, es decir se aumenta C_x con respecto a C_z el diagrama polar de respuesta presenta una geometría elíptica y la amplitud de la vibración se incrementa, provocando que la elipse generada por la respuesta sea más pronunciada. Tomando como referencia la gráfica 5.5, el comportamiento de los diagramas polares de respuesta de la figura 5.7 son muy similares.



Datos:

$$C_x = 0.15, \quad C_z = 0.15$$

$$C_x = 0.2, \quad C_z = 0.15$$

$$C_x = 0.25, \quad C_z = 0.15$$

$$C_x = 0.3, \quad C_z = 0.15$$

Figura 5.7. Respuesta de vibración a causa de un desbalance en 45° , considerando únicamente cambios en los efectos giroscópicos.

Finalmente, en la figura 5.8 se muestra la evolución del diagrama polar de respuesta de un rotor asimétrico partiendo de considerar únicamente los efectos de las matrices de rigidez del sistema rotodinámico, hasta presentar un diagrama polar de respuesta con todos los efectos integrados, es decir, con la influencia de los efectos de rigidez, más los efectos giroscópicos (EG), más los efectos de masa. En la figura se puede observar la diferencia entre un diagrama polar de respuesta con cambios únicamente de rigidez con un diagrama polar de respuesta incluyendo todos los efectos.

Es importante mencionar que en un sistema real de múltiples GDL, dependiendo de las características que presenten los elementos que lo conforman, como son: discos, soportes, flecha con secciones simétricas y asimétricas, serán más o menos notorios los cambios en los diagramas polares de respuesta a causa de las matrices de rigidez, de masa y efectos giroscópicos, puesto que la asimetría pudiera solo presentarse en una sección de la flecha, como es el caso del sistema presentado en el Capítulo III (ver figura 3.2).

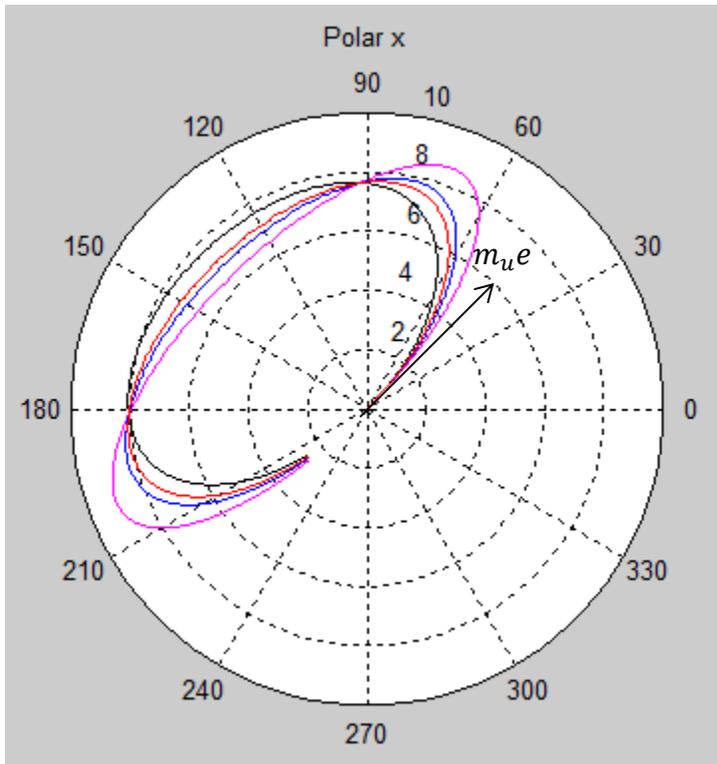


Figura 5.8 . Respuesta de vibración a causa de un desbalance en 45° , considerando cambios en la masa, rigidez y efectos giroscópicos (EG).

5.5 IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA DE LA CANTIDAD Y ÁNGULO DE DESBALANCE PARA UN ROTOR ASIMÉTRICO CON 2 GDL

A continuación se aplicará la metodología de identificación algebraica al modelo de 2 GDL para un rotor asimétrico con soportes, ecuación (5.1). El objetivo es la identificación de los parámetros del desbalance y su posición angular en un rotor asimétrico con la influencia de los efectos de asimetría en las matrices de masa, efectos giroscópicos y rigidez.

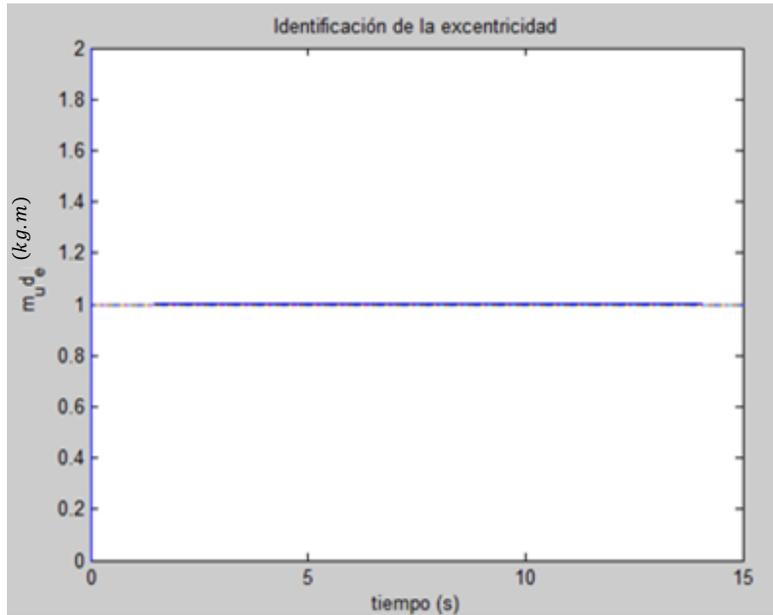
5.5.1 DESARROLLO DE LOS ESTIMADORES (MODELOS DE IDENTIFICACIÓN EN LÍNEA)

Se considera que el vector de desplazamientos del sistema $\delta = \{x, z\}^T$ se conoce, y está disponible para utilizarse como datos de entrada para el modelo de identificación. Debe observarse que el modelo matemático definido por la ecuación (5.1) tiene la forma de la ecuación (4.5) que corresponde a un sistema de múltiples grados de libertad en donde, las matrices globales se han reemplazado por matrices de dimensiones de 2×2 , y el vector de desplazamientos nodales δ únicamente cuenta con los desplazamientos lineales para las direcciones X y Z conforme el sistema coordinado de la figura (3.1). Por lo tanto, el proceso de obtención de los identificadores para 2 GDL es el mismo al que se desarrolló para el sistema de múltiples GDL (ver Capítulo IV).

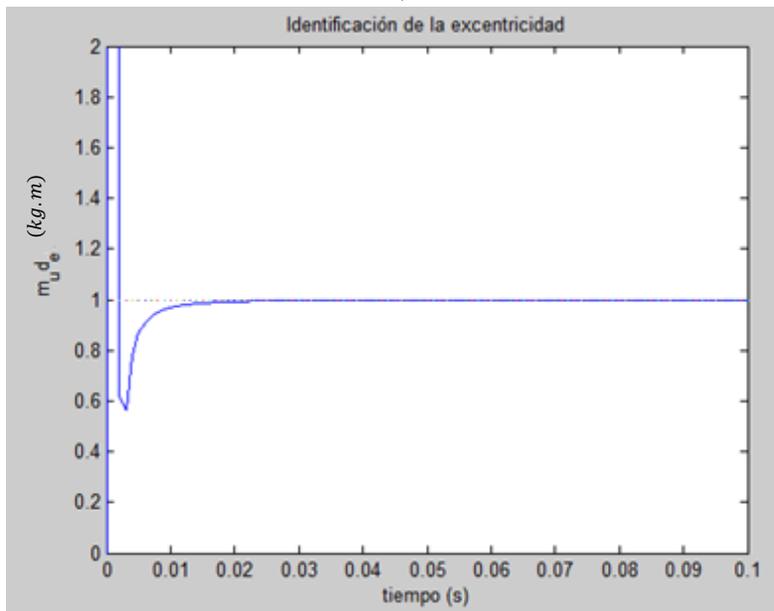
La identificación de los parámetros correspondientes, se realiza tomando como datos de entrada en el modelo del identificador las respuestas del rotor para las direcciones X y Z respectivamente, de las figuras 5.1 y 5.2. Para lo anterior, se considera en el sistema una cantidad de desbalance de $m_u e = 1 \text{ kg.m}$ colocada en una posición angular de $\alpha = 45^\circ$ (0.785 rad) respecto al eje Z. Asimismo, se utilizó una rampa de excitación lineal con una aceleración de $\ddot{\phi} = 0.1 \text{ rad/s}^2$ y un incremento de tiempo $dt = 0.01 \text{ s}$.

En las Figuras 5.9 a) y 5.10 a) se muestra el comportamiento de los identificadores en función del tiempo, donde la línea punteada corresponden a los valores del desbalance y posición angular reales asignados, mientras que la línea continua representan los valores obtenidos de la estimación algebraica. De estas figuras se puede observar que la identificación tanto de la cantidad del desbalance como de su posición angular se tiene que el tiempo de muestreo de la señal es menor a 0.1 segundos y una vez identificado el parámetro, éste se mantiene constante a lo largo del tiempo hasta alcanzar la velocidad nominal de operación del rotor en un tiempo de 15 segundos.

Para un mejor análisis del comportamiento del identificador, en las figuras 5.9 b) y 5.10 b) también se muestran los resultados para un tiempo de 0.1 segundos, ya que es importante observar el tiempo que requiere el identificador en línea para converger al valor estimado.



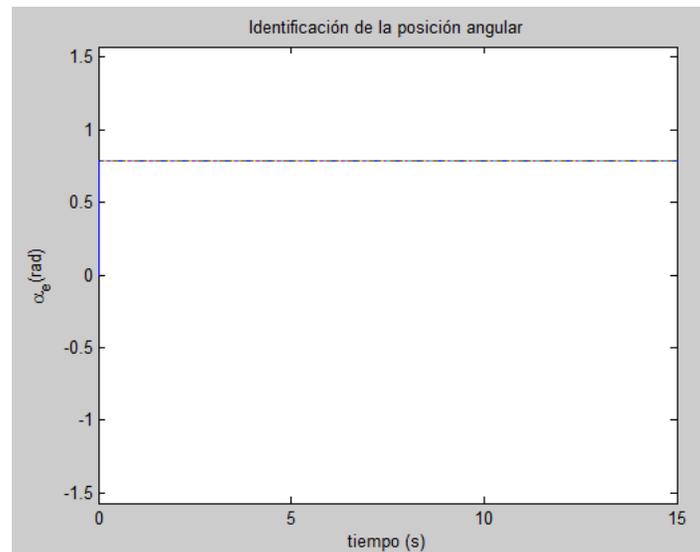
a)



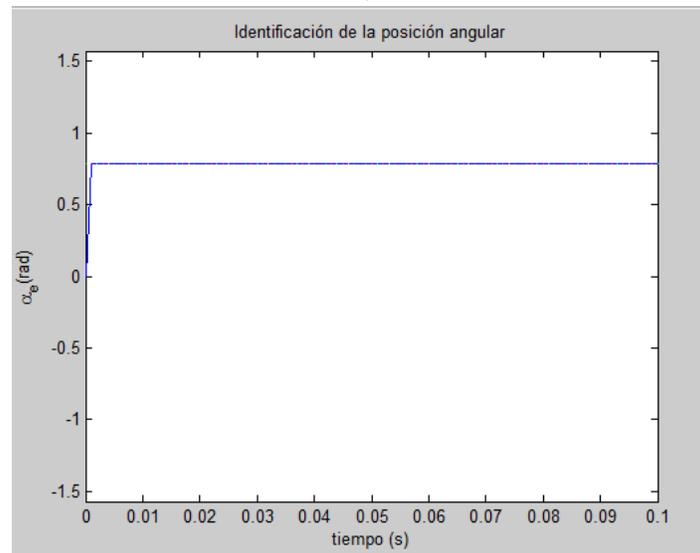
b)

Figura 5.9. a) Identificación de la cantidad del desbalance (m_{ue}).

b) Zoom de la figura 5.9. a)



a)



b)

Figura 5.10. Identificación de la posición angular del desbalance (α).

b) Zoom de la figura 5.10. a)

De las figuras 5.9 y 5.10 se puede observar que la importancia de la asimetría en las matrices de masa, efectos giroscópicos y rigidez en la respuesta del rotor no afecta el comportamiento del identificador, por tanto se espera que para un sistema de múltiples grados de libertad donde la influencia de los efectos de la asimetría en las matrices y por consecuencia en la respuesta del rotor sean importantes, la identificación de los parámetros para el balanceo se realice de manera satisfactoria.

5.6 IDENTIFICACIÓN ALGEBRAICA EN LÍNEA DE LA MASA, RIGIDEZ, EFECTOS GIROSCÓPICOS Y ASIMETRÍA DE UN ROTOR ASIMÉTRICO CON 2GDL

El principal objetivo de esta sección es demostrar que con la metodología para la identificación de parámetros en línea es posible realizar el tratamiento matemático correspondiente al modelo matemático del rotor para identificar diferentes parámetros del sistema.

Para este caso en particular se muestra la metodología para la identificación de la masa, rigidez y efectos giroscópicos del sistema rotatorio para un rotor asimétrico. Por tratarse de un sistema de 2 GDL, el arreglo matricial definido por la ecuación (5.1), origina 2 ecuaciones de movimiento para las direcciones X y Z, las cuales se escriben como:

$$\begin{aligned}
 M_1\ddot{x} + M_2(\dot{y}\sin(2\phi) - \ddot{x}\cos(2\phi)) - \dot{\phi}C_1\dot{y} + \dot{\phi}C_2(\dot{x}\sin(2\phi) + \dot{y}\cos(2\phi)) + c_x\dot{x} \\
 + k_1x + k_2(y\sin(2\phi) - x\cos(2\phi)) + k_x x \\
 = m_u e [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)]
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 M_1\ddot{z} + M_2(\ddot{z}\cos(2\phi) + \ddot{x}\sin(2\phi)) + \dot{\phi}C_1\dot{x} + \dot{\phi}C_2(\dot{x}\cos(2\phi) - \dot{z}\sin(2\phi)) + c_z\dot{z} + k_1z \\
 + k_2(z\cos(2\phi) + x\sin(2\phi)) + k_z z \\
 = m_u e [\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)]
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Multiplicando (5.3) y (5.4), por t^2 e integrando el resultado dos veces con respecto al tiempo t , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int^{(2)} [M_1\ddot{x} + M_2(\ddot{z}\sin(2\phi) - \ddot{x}\cos(2\phi)) - \dot{\phi}C_1\dot{z} + \dot{\phi}C_2(\dot{x}\sin(2\phi) + \dot{z}\cos(2\phi)) + c_x\dot{x} \\
 + k_1x + k_2(z\sin(2\phi) - x\cos(2\phi)) + k_x x] t^2 \\
 = m_u e \int^{(2)} [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] t^2
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 \int^{(2)} [M_1\ddot{z} + M_2(\ddot{z}\cos(2\phi) + \ddot{x}\sin(2\phi)) + \dot{\phi}C_1\dot{x} + \dot{\phi}C_2(\dot{x}\cos(2\phi) - \dot{z}\sin(2\phi)) + c_z\dot{z} \\
 + k_1z + k_2(z\cos(2\phi) + x\sin(2\phi)) + k_z z] t^2 \\
 = m_u e \int^{(2)} [m_u e [\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)]] t^2
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde:

$\int^{(2)} \varphi(t)$ son integrales iteradas de la forma $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} \varphi(\sigma_n) d\sigma_n \dots d\sigma_1$, con $\int \varphi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$ y n un entero positivo.

Al realizar las integrales por partes de las ecuaciones (5.5) y (5.6), hasta reducir los términos de velocidades $\dot{\delta}$ y aceleraciones $\ddot{\delta}$ nodales a desplazamientos δ en las direcciones x , y se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 & M_1 \left[t^2 x(t) - 4 \int_{t_0}^t t x(t) + 2 \int_{t_0}^{(2)} x(t) \right] \\
 & + M_2 \left[-t^2 x(t) \cos(2\phi) + 4 \int_{t_0}^t t x(t) \cos(2\phi) - 4 \int_{t_0}^t \dot{\phi} t^2 x(t) \sin(2\phi) - 2 \right. \\
 & + 8 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t x(t) \sin(2\phi) + 2 \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) \sin(2\phi) + 4 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 x(t) \cos(2\phi) \\
 & + t^2 z(t) \sin(2\phi) - 4 \int_{t_0}^t t z(t) \sin(2\phi) - 4 \int_{t_0}^t \dot{\phi} t^2 z(t) \cos(2\phi) + 2 \int_{t_0}^{(2)} z(t) \sin(2\phi) \\
 & + 8 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t z(t) \cos(2\phi) + 2 \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) \cos(2\phi) - 4 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 z(t) \sin(2\phi) \left. \right] \\
 & + C_1 \left[- \int_{t_0}^t \dot{\phi} t^2 z(t) + 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t z(t) + \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) \right] \\
 & + C_2 \left[\int_{t_0}^t \dot{\phi} t^2 x(t) \sin(2\phi) - \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) \sin(2\phi) - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t x(t) \sin(2\phi) \right. \\
 & - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 x(t) \sin(2\phi) + \int_{t_0}^t \dot{\phi} t^2 z(t) \cos(2\phi) - \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) \cos(2\phi) \\
 & \left. - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t z(t) \cos(2\phi) + 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 z(t) \sin(2\phi) \right] + C_x \left[\int_{t_0}^t t^2 x(t) - 2 \int_{t_0}^{(2)} t x(t) \right] \\
 & + (K_1 + k_x) \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) + K_2 \left[\int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) \sin(2\phi) - \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) \cos(2\phi) \right] = \\
 & = m_u e \int^{(2)} \left[\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha) \right] t^2 \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & M_1 \left[t^2 z(t) - 4 \int_{t_0} t z(t) + 2 \int_{t_0}^{(2)} z(t) \right] \\
 & + M_2 \left[t^2 z(t) \cos(2\phi) - 4 \int_{t_0} t z(t) \cos(2\phi) + 4 \int_{t_0} \dot{\phi} t^2 z(t) \sin(2\phi) \right. \\
 & + 2 \int_{t_0}^{(2)} z(t) \cos(2\phi) - 8 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t z(t) \sin(2\phi) - 2 \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) \sin(2\phi) \\
 & - 4 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 z(t) \cos(2\phi) + t^2 x(t) \sin(2\phi) - 4 \int_{t_0} t x(t) \sin(2\phi) \\
 & - 4 \int_{t_0} \dot{\phi} t^2 x(t) \cos(2\phi) + 2 \int_{t_0}^{(2)} x(t) \sin(2\phi) + 8 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t x(t) \cos(2\phi) \\
 & \left. + 2 \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) \cos(2\phi) - 4 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 x(t) \sin(2\phi) \right] \\
 & + C_1 \left[\int_{t_0}^t \dot{\phi} t^2 x(t) - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t x(t) - \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) \right] \\
 & + C_2 \left[\int_{t_0} \dot{\phi} t^2 x(t) \cos(2\phi) - \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) \cos(2\phi) - 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t x(t) \cos(2\phi) \right. \\
 & + 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 x(t) \sin(2\phi) - \int_{t_0} \dot{\phi} t^2 z(t) \sin(2\phi) + \ddot{\phi} \int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) \sin(2\phi) \\
 & \left. + 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi} t z(t) \sin(2\phi) + 2 \int_{t_0}^{(2)} \dot{\phi}^2 t^2 z(t) \cos(2\phi) \right] + C_z \left[\int_{t_0} t^2 z(t) - 2 \int_{t_0}^{(2)} t z(t) \right] \\
 & + (K_1 + k_z) \int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) + K_2 \left[\int_{t_0}^{(2)} t^2 z(t) \cos(2\phi) + \int_{t_0}^{(2)} t^2 x(t) \sin(2\phi) \right] \\
 & = m_u e \int^{(2)} \left[m_u e \left[\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha) \right] \right] t^2 \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

Como se cuentan únicamente con 2 ecuaciones (5.7) y (5.8), éstas se deben integrar tantas veces sea necesario para igual el número de ecuaciones al número de incógnitas que quieran determinarse. En este caso se tienen 6 parámetros a identificar: $M_1, M_2, C_1, C_2, K_1, K_2$ por lo que las ecuaciones (5.7) y (5.8) se deben integrar 2 veces más, de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 & c_{11}M_1 + c_{12}M_2 + c_{13}C_1 + c_{14}C_2 + c_{15}K_1 + c_{16}K_2 = f_1 \\
 & c_{21}M_1 + c_{22}M_2 + c_{23}C_1 + c_{24}C_2 + c_{25}K_1 + c_{26}K_2 = f_2 \\
 & + \dots \\
 & \vdots \\
 & c_{61}M_1 + c_{62}M_2 + c_{63}C_1 + c_{64}C_2 + c_{65}K_1 + c_{66}K_2 = f_6 \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Aquí, los coeficientes $c_{11} \dots c_{66}$ representan las integrales iteradas en función del tiempo que acompañan a los parámetros de interés las cuales aumentarán de orden tantas veces se integren las ecuaciones.

El sistema de ecuaciones anterior, ecuación (5.9) se puede expresar como un arreglo matricial de la siguiente forma:

$$C_0(t)\Theta = F(t) \quad (5.10)$$

Con:

$$C_0(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{61} & \cdots & c_{66} \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix}$$

Donde $\Theta = [M_1, M_2, C_1, C_2, K_1, K_2]^T$ denota el vector de parámetros a ser identificados, mientras $C_0(t)$ y $F(t)$ son matrices con dimensiones de 6×6 y 6×1 respectivamente. La primera, contiene los grados de libertad de traslación de cada nodo en las direcciones x y z , la segunda contiene los términos de la cantidad y posición de desbalance anteriormente identificados, y cuyos valores deben ser conocidos.

De la ecuación (5.10), se puede concluir que el vector Θ es identificable algebraicamente sí, y solo sí, la trayectoria del sistema dinámico describe el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez [28]; es decir, las trayectorias o el comportamiento dinámico del sistema satisface la condición $\det[A(t) \neq 0]$. En general, esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño $(t_0, t_0 + \varepsilon]$, donde ε es un valor positivo y suficientemente pequeño.

Al solucionar la ecuación (5.10) se pueden obtener los identificadores algebraicos para los parámetros buscados.

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad M_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ C_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad C_2 = \frac{\Delta_4}{\Delta} \\ K_1 = \frac{\Delta_5}{\Delta} \quad K_2 = \frac{\Delta_6}{\Delta} \end{array} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon] \quad (5.11)$$

En las Figuras 5.11 – 5.16 se muestra el comportamiento de los identificadores en función del tiempo para cada uno de los parámetros del vector $\theta = [M_1, M_2, C_1, C_2, K_1, K_2]^T$ respectivamente, donde la línea punteada corresponde a los parámetros reales, mientras que la línea continua representan los valores obtenidos de la estimación algebraica. Asimismo, se utilizó una rampa de excitación lineal con una aceleración de $\ddot{\phi} = 1 \text{ rad/s}^2$ y un incremento de tiempo $dt = 0.0001 \text{ s}$.

De estas figuras se puede observar que en la identificación de los parámetros se tiene que el tiempo de muestreo de la señal es menor a 0.5 segundos y una vez identificado el parámetro, éste se mantiene constante a lo largo del tiempo hasta alcanzar la velocidad nominal de operación del rotor en un tiempo de 1.5 segundos.

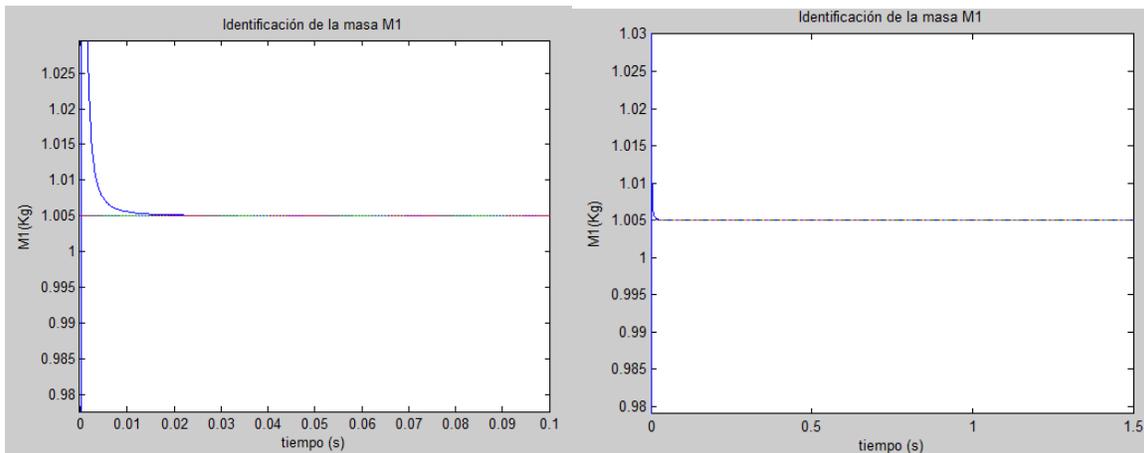


Figura 5.11. Identificación de la masa $M_1 = 1.005 \text{ kg}$.

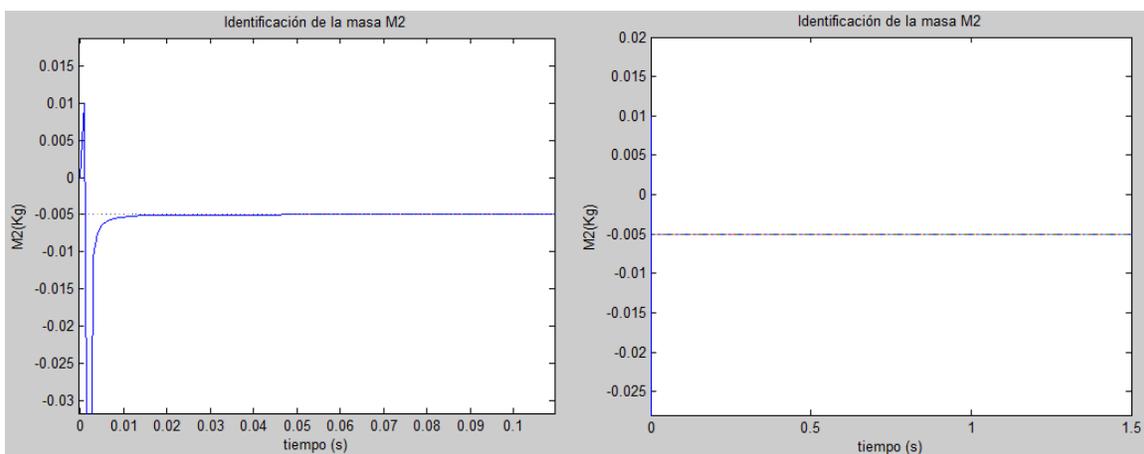


Figura 5.12. Identificación de la masa $M_2 = -0.005 \text{ kg}$.

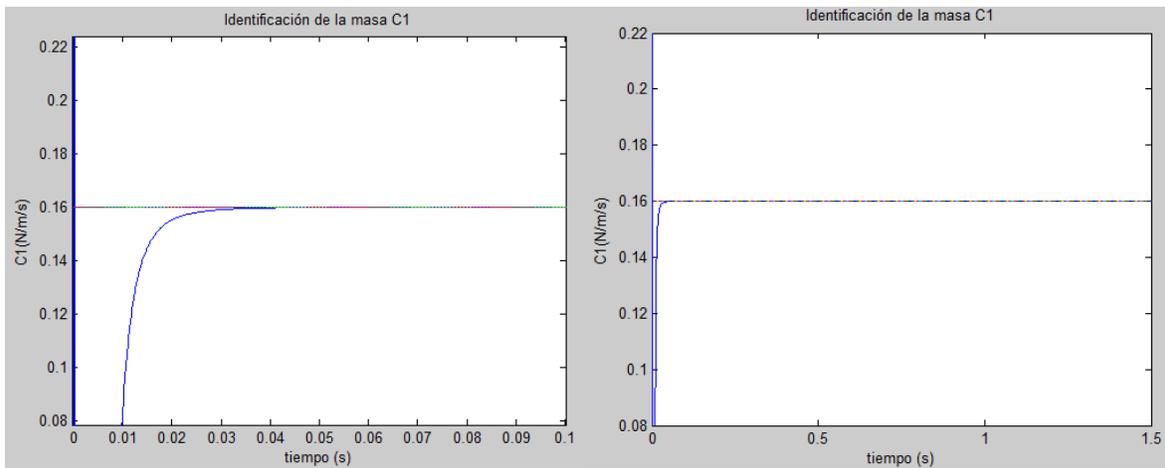


Figura 5.13. Identificación del amortiguamiento $C_1 = 0.16 N/m/s$.

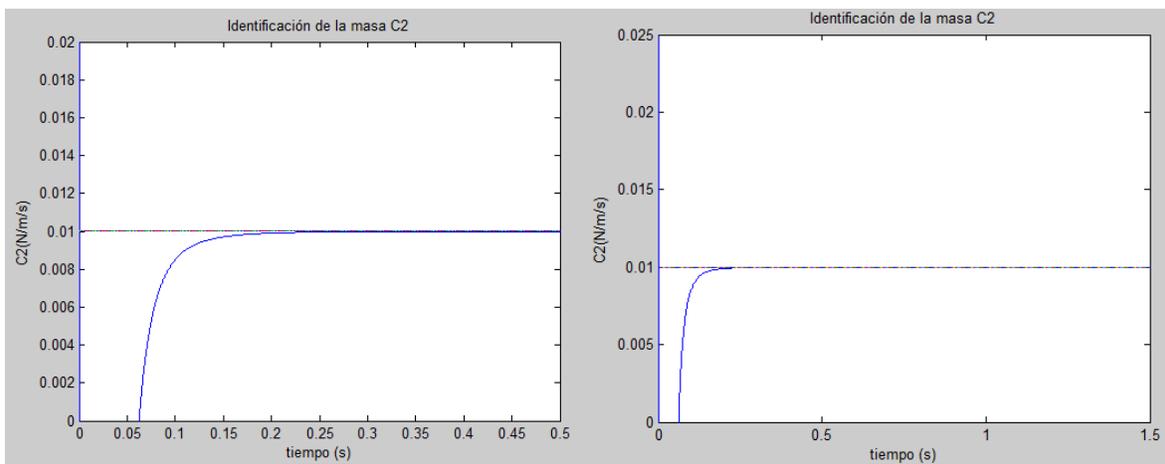


Figura 5.14. Identificación del amortiguamiento $C_2 = 0.01 N/m/s$.

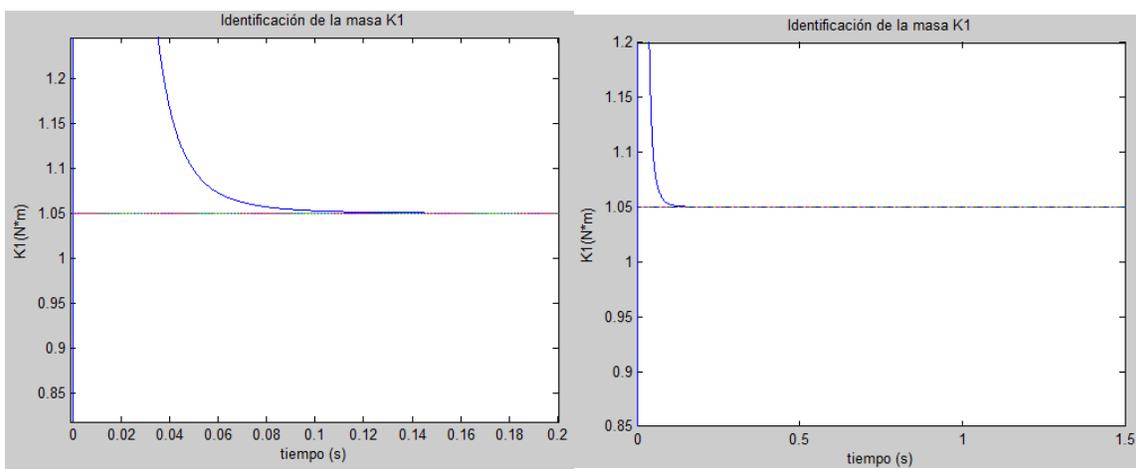


Figura 5.15. Identificación de la rigidez $K_1 = 1.05 N/m/s$.

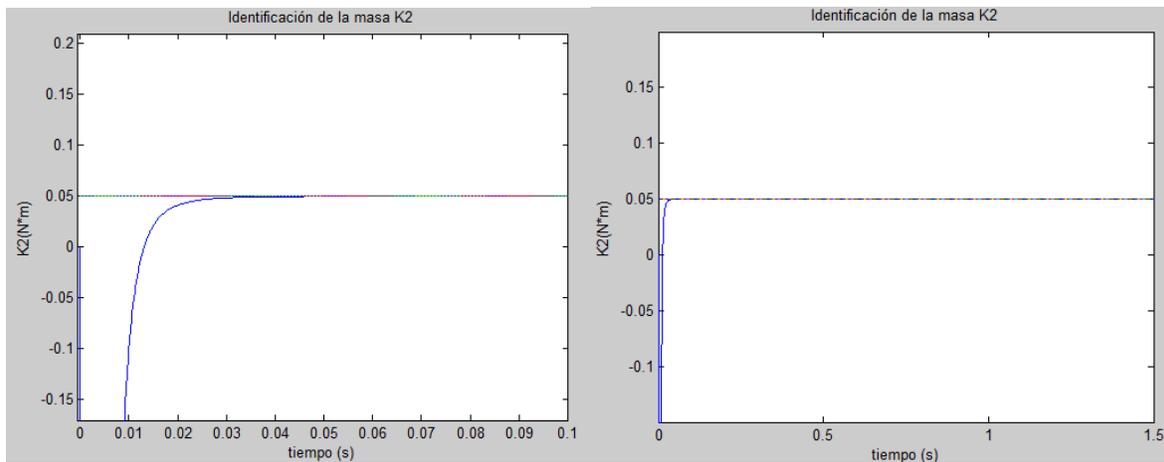


Figura 5.16. Identificación de la rigidez $K_2 = 0.05 \text{ N/m/s}$.

Una vez identificados los parámetros M_1, M_2, C_1, C_2, K_1 y K_2 , se pueden encontrar la masa, rigidez y efectos giroscópicos del sistema 2 GDL en las direcciones X y Z, mediante las relaciones presentadas en la ecuación (5.1):

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{M_x + M_z}{2}, & M_2 &= \frac{M_x - M_z}{2} \\
 C_1 &= \frac{C_x + C_z}{2}, & C_2 &= \frac{C_x - C_z}{2} \\
 K_1 &= \frac{K_x + K_z}{2}, & K_2 &= \frac{K_x - K_z}{2}
 \end{aligned}$$

Al resolver las relaciones anteriores se tiene:

$$M_x = 1 \text{ kg}, M_z = 1.01 \text{ kg}, C_x = 0.17 \text{ N/m/s}, C_z = 0.15 \text{ N/m/s}, K_x = 1.1 \text{ N/m} \text{ y } K_z = 1 \text{ N/m}$$

Donde los valores de M_x, M_z, C_x, C_z, K_x y K_z que se calcularon a partir de los parámetros M_1, M_2, C_1, C_2, K_1 y K_2 determinados por los identificadores corresponden a los valores de entrada usados en la simulación (Sección 5.3)

Finalmente, conocidos los valores de masa, rigidez y efectos giroscópicos del sistema en ambas direcciones X y Z, se pueden determinar otros parámetros de importancia como son: la asimetría modal (ecuación 1.1) y factor de amortiguamiento del sistema.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló un modelo matemático de múltiples grados de libertad para un rotor asimétrico, donde se incluyen los efectos de asimetría en las matrices de masa, efectos giroscópico y de rigidez con respecto a un marco de referencia fijo. El modelo rotor asimétrico-soportes se obtuvo mediante la técnica de elemento finito, donde se consideró un elemento tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo para la flecha del rotor. En este modelo se consideraron los momentos de inercia rotacional, efectos giroscópicos y amortiguamiento. Asimismo, se propone un identificador algebraico en línea para determinar el desbalance y su posición angular de un rotor asimétrico, tomando como referencia el modelo de múltiples grados de libertad desarrollado donde se consideraron rampas de excitación de tipo lineal.

Las conclusiones generadas de los resultados del trabajo realizado se resumen a continuación.

- 1) En el desarrollo del modelo matemático para el rotor asimétrico, se demuestra que la asimetría de la flecha afecta a las matrices de masa rotatoria, efectos giroscópicos y rigidez. Cabe mencionar que en el modelo de múltiples grados de libertad no se pudo observar los efectos de manera independiente de cada una de las matrices en la respuesta del rotor, ya que estos son función directamente de la configuración del rotor utilizado como son: diámetro de la flecha, longitud de la flecha, asimetría de la flecha, amortiguamiento del sistema, etc.
- 2) Se redujo el modelo matemático de múltiples grados de libertad, a un sistema de dos grados de libertad y se propuso cambios de masa, efectos giroscópicos y rigidez de manera independiente. De los resultados obtenidos, se observó que los cambios de masa y efectos giroscópicos en la respuesta del rotor, son similares a los efectos observados en la respuesta del rotor cuando se consideran únicamente cambios de rigidez, es decir, los diagramas polares de respuesta obtenidos presentan una forma geométrica elíptica. Sin embargo, es importante considerar los efectos de todas las matrices en la respuesta del rotor al realizar la simulación numérica, ya que si no se hace, es posible que cuando se realiza el análisis experimental presente inestabilidad en la respuesta de vibración al desbalance del sistema.

- 3) Se resolvió el modelo de dos y múltiples grados de libertad del modelo desarrollado mediante el método numérico de Newmark con rampas de excitación de tipo lineal y el método de solución en estado estable. De la comparación de los resultados obtenidos, se observó que para rampas de excitación muy lentas, la respuesta del rotor es muy similar en ambos casos.
- 4) Se presenta la aplicación de la técnica de identificación algebraica en línea y se implementa en la identificación de parámetros para el balanceo de rotores asimétricos.
 - a) Se propone un modelo matemático de un identificador en línea para un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad para determinar el desbalance y su posición angular en diferentes puntos a lo largo del rotor. Los identificadores propuestos, requieren como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor en función del tiempo, así como el tipo de rampa de excitación.
 - b) Se propone un modelo matemático de un identificador en línea para un sistema rotodinámico de dos grados de libertad para determinar el desbalance y su posición angular, así como, rigidez, masa y efectos giroscópicos del sistema.
- 5) Se evaluó y analizó el comportamiento en el tiempo del identificador propuesto para una distribución de masa de desbalance en diferentes nodos a lo largo del rotor, tomando como dato de entrada la respuesta de vibración obtenida de la simulación del sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad, con diferentes rampas de excitación de tipo lineal. Los resultados numéricos muestran la rapidez y convergencia en la identificación de los parámetros en fracciones de segundos, independientemente de la velocidad de la rampa de excitación utilizada.

Es importante hacer notar que, para la identificación del desbalance y su posición angular por medio de la técnica de identificación algebraica en línea es necesario adquirir solo un mínimo de datos de la respuesta de vibración del rotor durante la rampa de excitación sin pasar la zona de resonancia ni llegar a la velocidad nominal de rotación del rotor, como es el caso de la mayoría de las técnicas de balanceo. La determinación del desbalance y su posición angular mediante la técnica de identificación algebraica en línea aquí propuesto, puede aplicarse al balanceo de rotores asimétricos industriales y haciendo las simplificaciones necesarias también en rotores simétricos.

APÉNDICE

IDENTIFICADORES PARA UN SISTEMA ROTOR ASIMÉTRICO-SOPORTES CON VARIAS MASAS DE DESBALANCE

A continuación se presentan los identificadores para determinar la cantidad de desbalance y posición angular de las masas de desbalance en un sistema rotodinámico cuya configuración pertenece al sistema rotor asimétrico con soportes de Inagaki *et al.* [9], figura 3.2, presentado en el Capítulo III. Éste está compuesto por un eje simétrico con una parte asimétrica en el centro, dos discos inerciales localizados a lo largo del eje Y, con soportes colocados cerca de los extremos. Asimismo, se considera que en el rotor existen dos masas de desbalance: la primera se ubica en la periferia del primer disco $e_1 = 0.05 \text{ m}$ con una magnitud de $m_{1u} = 0.0005 \text{ kg}$, por lo que se tiene una cantidad de desbalance de $m_{1u}e_1 = 2.5 \times 10^5 \text{ kg.m}$ con una posición angular $\alpha_1 = 45^\circ$ en el plano X-Z medido respecto al eje Z. La segunda con ubicación en la periferia del segundo disco $e_2 = 0.05 \text{ m}$ con una magnitud de $m_{2u} = 0.0001 \text{ kg}$, a lo que el desbalance $m_{2u}e_2 = 1 \times 10^5 \text{ kg.m}$ con un ángulo de $\alpha_2 = 45^\circ$.

En la figura A 1.1 se presenta el diagrama de bode de magnitud de la respuesta vibratoria para cada uno de los 8 nodos según la discretización del sistema (ver figura 3.2).

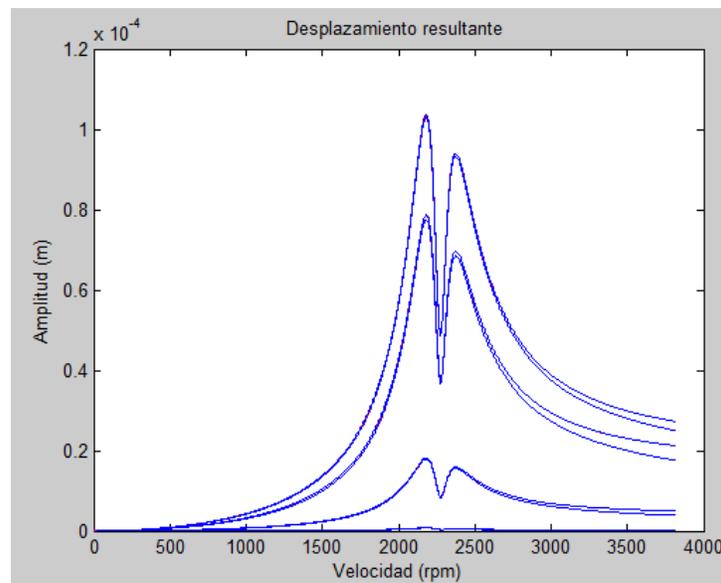
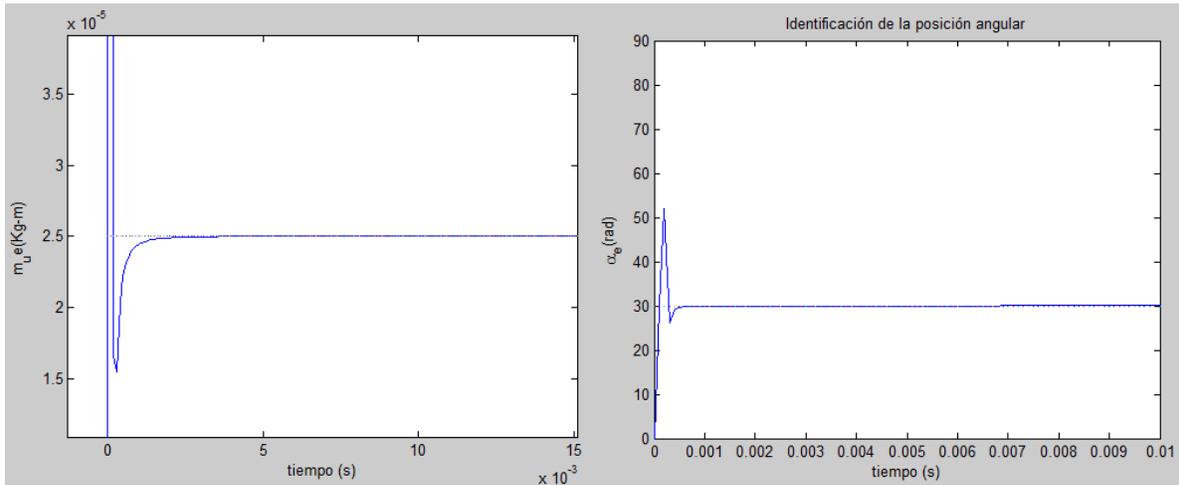


Figura A 1.1 Respuesta vibratoria resultante del sistema con $\ddot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

En las figuras A 1.2 y A 1.3 se muestra la identificación la magnitud desbalance y posición angular para los nodos 3 y 6 en los cuales se colocaron masas de desbalance.

NODO 3



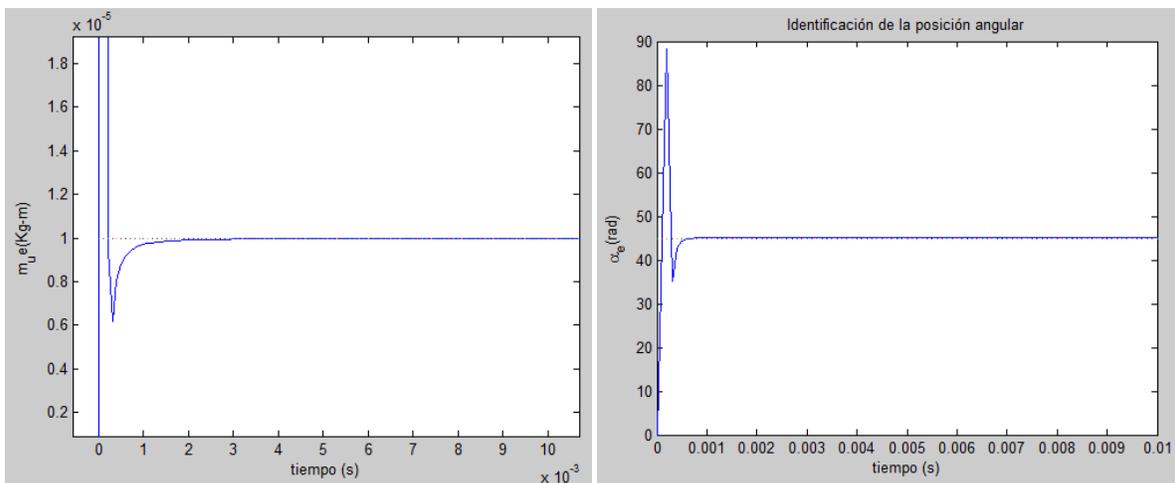
a)

b)

Figura A 1.2 a) Identificación de la masa de desbalance $m_{1u}e_1 = 2.5 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}$

b) Identificación de la posición angular del desbalance $\alpha_1 = 30^\circ$

NODO 6



a)

b)

Figura A 1.3 a) Identificación de la masa de desbalance $m_{2u}e_2 = 1 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}$

b) Identificación de la posición angular del desbalance $\alpha_1 = 45^\circ$

En las figuras A 1.4 y A 1.5 se muestra la identificación la magnitud del desbalance y su posición angular para los nodos 1 y 2, correspondientes a los extremos del rotor.

NODO 1

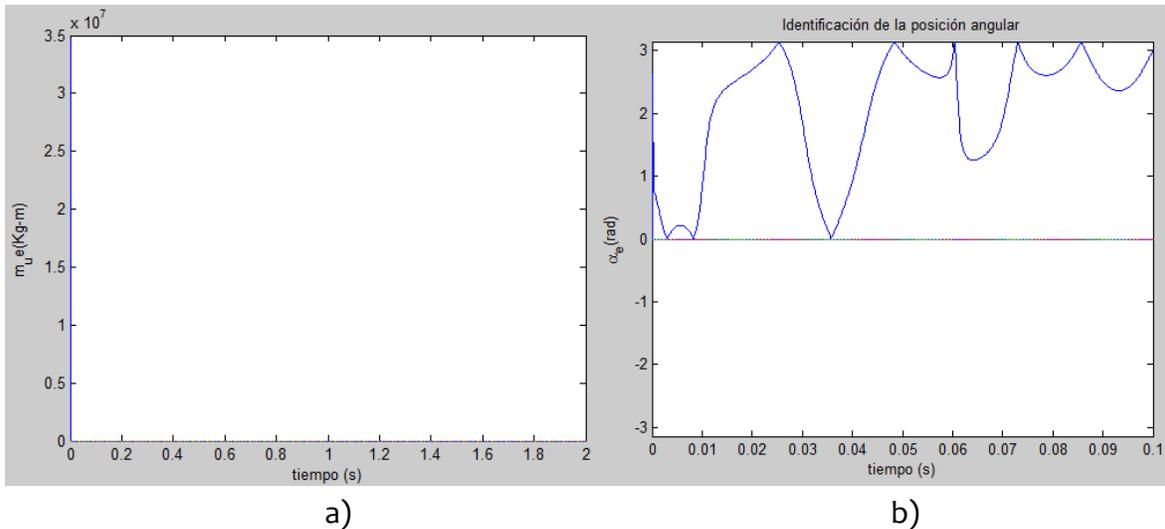


Figura A 1.4 a) Identificación de la masa de desbalance del nodo 1
b) Identificación de posición angular del desbalance del nodo 1

NODO 8

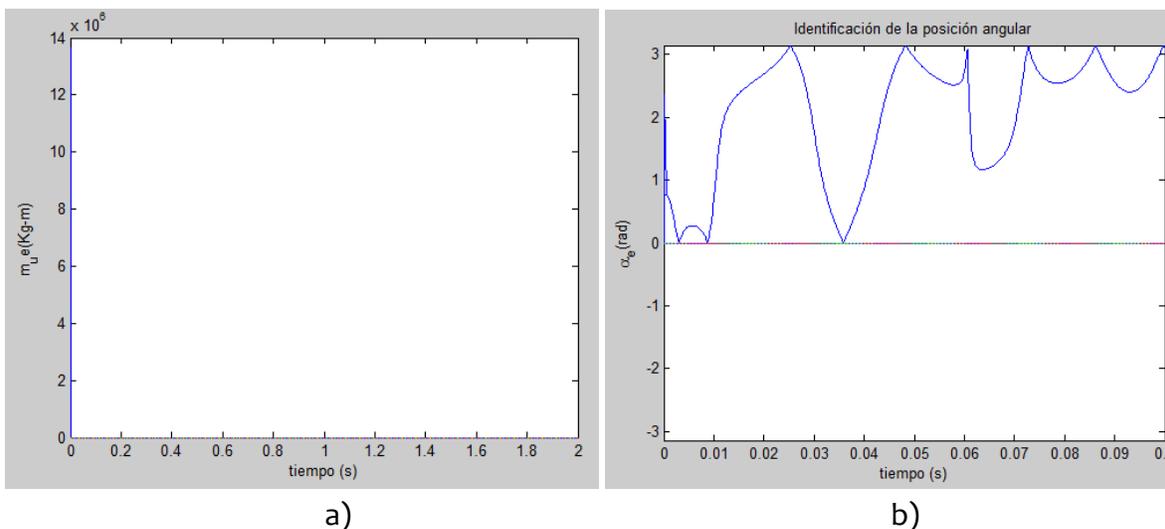


Figura A 1.5 a) Identificación de la masa de desbalance del nodo 8
b) Identificación de posición angular del desbalance del nodo 8

En las figuras anteriores se observa que los identificadores convergen únicamente en los nodos donde se colocaron las masas de desbalance.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **Jeffcott H. H., 1919.** “*The Lateral Vibrations of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed*”, *Philosophical Magazine*, Vol. 37, pp. 304.
- [2] **Taylor H. D., 1940.** “*Critical Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts*”, *ASME, Journal of Applied Mechanics*.
- [3] **Bishop R. E. D., Parkinson A. G., 1965.** “*Second Order Vibrations of Flexible Shafts*”, *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, Vol. 259, No. 1095.
- [4] **Parkinson A. G., 1966.** “*On the Balancing of Shafts with Axial Asymmetry*”, *Proceeding of the Royal Society*, A 294, 66.
- [5] **Shiraki K., Kanki H., 1974.** “*New Field Balancing Method of Tandem Connected Multispan Flexible Rotors System*”, *International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Dynamics of Rotor Symposium*, Lyngby, Denmark.
- [6] **Iwatsubo T., Nakamura M., 1968.** “*Balancing of Flexible Rotors with Asymmetric Stiffness*”, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University*.
- [7] **Matsukura Y. T., Inoue. Kiso M., Tomisawa M., 1979.** “*On the Balancing Convergence of Flexible Rotors, with Especial Reference to Asymmetric*”, *Journal of Sound and Vibrations* 63(3), p. 419-428.
- [8] **Songbo X., Yacai P., 1975.** “*A new balance method for flexible rotors with asymmetric principal stiffnesses*”.
- [9] **Inagaki T., Kanki H., Shiraki K.** “*Response Analysis of a General Asymmetric Rotor-Bearing System*”, *ASME, Paper No. 79-DET-84*.
- [10] **Colín J., 1996.** “*Balaneo de Rotores Asimétricos*”, *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Tesis de Maestría*.
- [11] **Muñoz R., 1992.** “*Metodología de construcción de Arreglo de Pesos Modales para el Balanceo de Rotores*”, *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Tesis de Maestría*.

- [12] **Molina J., 2009.** “Arreglo de Pesos Modales para el Balanceo de Rotores Asimétricos”, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Tesis de Maestría.
- [13] **Preciado D. E., Aguirre R. J., Bannister, R.H., 1996.** “Influence Coefficients Method for Rotor Balancing Using Multiple Trial Mass Sets”, Procc. 6° Conf. on Vibration in Rotating Machinery; Oxford, England; Septiembre, pp. 491-506.
- [14] **Ruiz J., 2007.** “Obtención de Arreglo de Pesos Modales para el Balanceo de Rotores, a partir de Matrices de Coeficientes de Influencia”, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Tesis de Maestría.
- [15] **Blanco-Ortega, A., Beltrán-Carbajal, F., Silva-Navarro, G., H. Méndez A, 2010.** “Control de Vibraciones en Maquinaria Rotatoria”. Revista iberoamericana de automática e informática industrial.
- [16] **Zadeh, L. A., 1962.** “From circuit theory to system theory”. Proc. IRE, 50:856–865.
- [17] **Ljung, L., 1999.** “System Identification, Theory for the user”. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice Hall, 2a ed.
- [18] **Kalman, R. E., 1960.** “On the general theory of control systems”. En First IFAC Congress, Moscow, págs. 481–492.
- [19] **Haber, R., Unbehauen, H., 1990.** “Structure identification of nonlinear dynamic systems - a survey on input/output approaches”. Automatica, 26:177–202.
- [20] **Giannakis, G. B., Serpedin, E., 2001.** “A bibliography of non linear system identification. Signal Processing”, 81:553–580.
- [21] **Kalafatis, A., Wang, L., Cluett, W. R., 1997.** “Identification of wiener-type nonlinear systems in a noisy environment”. International Journal of Control, 66:923–941.
- [22] **Narendra, K. S., Gallman, P. G., 1966.** “An iterative method for identification of nonlinear systems using a hammersteing model”. IEEE Transactions on Automatic Control, 11:546–550.
- [23] **Leontaritis, I. J., Billings, S. A., 1985.** “Input-output parametric models for nonlinear systems”. International Journal of Control, 41:303–344.

- [24] **Pintelon, R., Schoukens, J., 2001.** “*System Identification. A Frequency Domain Approach*”. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. New York.
- [25] **Sira-Ramírez, H., Fliess, M., 2002.** “*On discrete-time uncertain visual based control of planar manipulators: an on-line algebraic identification approach*”. En Proc. IEEE CDC, Las Vegas.
- [26] **Fuchshumer, S.** “*Algebraic linear identification, modelling, and applications of flatnessbased control*”. Tesis Doctoral, Johannes Kepler Universität, Linz, 2006.
- [27] **Fliess, M., Fuchshumer, S., Schlacher, D., y Sira-Ramírez, H.** “*Discrete-time linear parametric identification: An algebraic approach*”. En JIME’2006, Poitiers, France. 2006.
- [28] **Fliess, M. & H. Sira-Ramírez, 2003.** “*An algebraic framework for linear identification*”, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 9, 151-168. ISSN: 1292- 8119.
- [29] **J. Becedas*, G. Mamani*, V. Feliu-Batlle *, H. Sira-Ramírez, 2007.** “*Algebraic Identification Method for Mass-Spring-Damper System*”. Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science, WCECS 2007, October 24-26, 2007, San Francisco, USA.
- [30] **Beltrán-Carbajal, F.; G. Silva-Navarro, H. Sira-Ramírez, A. Blanco-Ortega, 2010.** “*Active Vibration Control Using On-line Algebraic Identification and Sliding Modes*”. *Computación y Sistemas*, Vol. 13, No. 3, 313-330. ISSN 1405-5546.
- [31] **San Andrés L., 2003.** “*A Method for Identification of force Coefficients in Flexible Rotor Bearing Systems*”. Texas A&M University.
- [32] **Trapero Arenas J, R., 2008.** “*Técnicas de identificación algebraicas y espectrales de señales armónicas. Aplicaciones en mecatrónica y economía*. Ed. Universidad de castilla-La Mancha, Cuenca.
- [33] **Lalanne, M. y Ferraris, G., 1990.** “*Rotordynamics Prediction in Engineering*”. John Wiley and Sons.
- [34] **E. S. G. Wing, 1995.** “*Influencia de la Variación de la Frecuencia de Excitación Sobre la Detección de Paidmetros Modales de Sistemas Vibratorios*”. CENIDET, Cuernava Mor., Tesis de Maestría.

- [35] **Klaus-Jürgen Bathe, 1996.** *"Finite Element Procedures"*. Prentice Hall.
- [36] **Kareem, A. and Gurley, K., 1996.** "Damping in structures: its evaluation and treatment of Uncertainty", *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, pp. 59, 131 – 157.
- [37] **Cook Robert D., Malkus S. David, Plesha Michael E., 1989.** "Concepts and Applications of Finite Element Analysis". John Wiley and Sons. ISBN 0-47184788-7.
- [38] **Pisarenko, G. S. Yákovlev A.P., Matvéev, V.V., 1979.** *Manual de Resistencia de materiales*. Editorial Mir Moscú, pp. 70 y 71.
- [39] **Fliess, M., Mboup, M., Mounier, H., y Sira-Ramírez, H., 2003.** "Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples". Cap.1. Innovacion Editorial Lagares, Mexico City.
- [40] **Mboup, M.** "Parameter estimation via differential algebra and operational Calculus". In preparation.
- [41] **Buium, A., 1994.** *"Differential Algebra and Diophantine Geometry"*. Hermann, Paris.
- [42] **Kolchin, E., 1973.** *"Differential Algebra and Algebraic Groups"*. Academic Press, New York.
- [43] **Mikusinski, J., 1973.** *"Operational Calculus"*, Vol. 1. PWN Varsovie & Oxford University Press, Oxford.
- [44] **Mikusinski, J., Boehme, T. K., 1987.** *"Operational Calculus"*, Vol. 2. PWN Varsovie & Oxford University Press, Oxford.
- [45] **Yosida, K., 1984.** *"Operation Calculus - A Theory of Hyperfunctions"*. Springer, New York.
- [46] **Fliess, M., Glad, T., 1993.** "An algebraic approach to linear and nonlinear control. H. Trentelman, J. Willems (Eds.), *Essays in Control: Perspective in the Theory and its Applications*, Birkhauser", págs. 223–267.