

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



Tecnológico Nacional de México

Coordinación Sectorial Académica
Dirección de Estudios de Posgrado e Investigación

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Mecánica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**Análisis Numérico Estático y Dinámico de Sistemas Mecánicos con
Claros**

presentada por

Ing. Javier Cortés Benigno

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Eladio Martínez Rayón

Codirector de tesis

Dr. Dariusz Slawomir Szwedowicz Wasik

Cuernavaca, Morelos, México. Diciembre de 2015.

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Mecánica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**Análisis Numérico Estático y Dinámico de Sistemas Mecánicos
con Claros**

presentada por

Ing. Javier Cortés Benigno

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Eladio Martínez Rayón

Codirector de tesis

Dr. Dariusz Slawomir Szwedowicz Wasik

Jurado

Dr. Claudia Cortés García

Dr. Jorge Colín Ocampo

Dr. Alberto López López

Cuernavaca, Morelos, México. A diciembre de 2015.

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, mor., 03/diciembre/2015

OFICIO No. DIM/281/2015

Asunto: Aceptación de documento de tesis

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

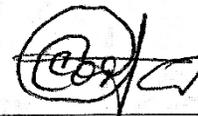
Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Javier Cortés Benigno, con número de control M13CE042, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Análisis numérico estático y dinámico de sistemas mecánicos con claros". Hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS



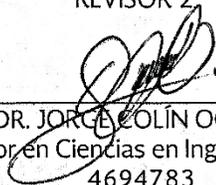
Dr. ELADIO MARTÍNEZ RAYÓN
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
8500740

REVISOR 1



M.C. CLAUDIA CORTÉS GARCÍA
Maestra en Ciencias en Ingeniería Mecánica
3146405

REVISOR 2



DR. JORGE COLÍN OCAMPO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
4694783

REVISOR 3



M. I. ALBERTO LÓPEZ LÓPEZ
Maestro en Ingeniería (Estructuras)
841271

C.p. (Lic. Guadalupe Garrido Rivera).- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
Expediente

Iniciales AAP/mrsr

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Cuernavaca, Mor., 4 de diciembre de 2015
OFICIO No. SAC/236/2015

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. JAVIER CORTÉS BENIGNO
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"Análisis numérico estático y dinámico de sistemas mecánicos con claros"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



CENTRO NACIONAL DE
INVESTIGACIÓN Y
DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr



DEDICATORIAS

A mis papás Valeria y Pascual por su apoyo incondicional y moral. Por su paciencia consejos para la vida y que me ayudaron a concluir esta meta.

A mis hermanas Valeria, Alma, Rocío. Por su apoyo directo e indirecto para lograr culminar esta etapa como profesional.

A mi hermano Lalo que te adelantaste pero te sigo llevando en mi mente y corazón. Por aun seguir protegiéndome.

A mis Tíos y Tías que se alegraban porque seguía superándome

A mis primos y primas espero y sea un ejemplo a seguir para que se sigan superando.

A mi novia Tienes un Encanto Rotundo y Especial que Siempre Adoro.

ADIOS por darme esta maravillosa familia, por permitir que este con vida y lograr una etapa más en mi vida.

Muchas gracias...

AGRADECIMIENTOS

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (*cenidet*), para poder culminar una etapa más de conocimiento.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por brindarme el apoyo económico para lograr terminar mis estudios de Maestría.

A mi director de tesis Dr. Eladio Martínez Rayón y el Dr. Dariusz Sławomir Szwedowicz Wasik, por brindarme el apoyo, la asesoría, la amistad, consejos para el desarrollo de esta tesis.

Al comité revisor Dra. Claudia Cortés García, Dr. Jorge Colín Ocampo y el Dr. Alberto López López, por sus consejos, apoyo y aportaciones durante la revisión de este trabajo de investigación. A los profesores Dr. Efraín Sima, Dr. Arturo Abundez, Dr. Jesús Arce, a la Lic. Patricia por sus palabras de superación. Gracias por sus enseñanzas de cada uno llevo un grato recuerdo y más de los exámenes maratónicos.

Al personal de *cenidet* tanto administrativo, biblioteca entre muchos más que no recuerdo sus nombres pero a Doña Rocío, a Nadia entre varios más.

A mis amigos y compañeros de generación Luis A. Carreño, J. Benjamín Sánchez, J. Armando Fragoso, Elvis Coutiño, Roger Cundapí, Luis M. Sommer, Emmanuel R. D. Salazar, Alberto Cordoba, Carlos M. Lara, Alcudia Zacarías, Víctor H. Espinosa, María de L. Chávez y Polar Hernández. Estoy muy agradecido con ellos, por su apoyo directo e indirecto en transcurso de la Maestría.

A los compañeros de casa a Fernando Castro por sus consejos, Facundo, amigo el Capi Carlos M., Cristian L., Ángel R. V., Fredi M., Nathalie C., Gabriela R., Ramses, Henry y a todos los que rentaban en la casa y a los no tan vecinos pero estaban Manuel y Claudia.

A los compañeros de escuela muchos por nombrar Félix, Erick, Alma J., Manuel, Pepe, Victor, Lalo y muchos que se me pasan.

A mis catedráticos del ITSAL Francisco Barragán y Lino R, Gil.

Resumen

En este trabajo, se presenta el estudio de la influencia en uniones mecánicas como su variación de las frecuencias y formas modales en los elementos estructurales tipo viga, tomando en cuenta el efecto producido por las holguras, además del comportamiento en la concentración de esfuerzos causados por el contacto cilíndrico interior. El modelo utilizado para dicho estudio consta de una viga elástica empotrada en un extremo y unida por un perno en el otro, utilizando un bloque para simular la articulación.

En el modelo se emplea una viga en cantiléver unida por una articulación en el otro extremo, donde se hizo variar el tamaño de holgura del perno, empleando diferentes tipos de ajustes normalizados y analizando el efecto producido por una precarga por flexión; además, se considera que en ningún momento del análisis se tienen impactos, sólo ocurren desplazamientos por contacto.

En el desarrollo del trabajo se utilizaron condiciones donde se le dieron desplazamientos controlados en los intervalos de Δ : 0, 2.5, 5, 7.5 y 10 mm, también se utilizaron ajustes normalizados como el H7/h6, H7/f7 y H7/c11, modificando el coeficiente de fricción de μ : 0 hasta 0.6 con intervalos de 0.05. Los resultados se muestran tablas, gráficas e imágenes del efecto producido, principalmente en los ajustes no normalizados debido a los efectos no lineales del comportamiento.

Los resultados obtenidos del estudio numérico fueron diversos: en la parte estática se observó que los esfuerzos aumentaban en el contacto al incrementar el coeficiente de fricción, así como la variación del ángulo de contacto. Por otra parte, al disminuir el ajuste e incrementar el desplazamiento los efectos en la concentración de esfuerzos son mayores; en la parte dinámica se encontraron efectos producidos por las holguras en uniones, modificando las frecuencias naturales y formas modales y a su vez por el desplazamiento en la articulación; también, se observaron cambios en las frecuencias naturales y formas modales sin y con fricción, en los ajustes no normalizados obtienen efectos peculiares; asimismo, se realizó una comparación con los resultados de un análisis experimental empleando ajustes no normalizados y se obtuvieron resultados similares.

Abstract

In this work, is presented the study of the influence on mechanical connections as your variation of the frequencies and modal forms in the structural elements beam, taking into account the effect produced by clearances, in addition to the behavior in the concentration of stress caused by the interior cylindrical contact. The model used for this study consists of a beam elastic fixed at one end and connected by one pin in the other, using a block to simulate joint.

The model uses a beam in cantilever joined by a joint in another end, where it was made to vary the size of pin clearance, using different types of standard settings and analyzing the effect of a load by bending; also, it is considered that at any time of the analysis have impacts, only occur displacement by contact.

In the development of this work were used conditions where he was given displacement controlled in the intervals of Δ : 0, 2.5, 5, 7.5 and 10 mm, also used settings standard H7/h6, H7/f7 and H7/c11, modifying the friction coefficient of μ : 0 up to 0.6 with intervals of 0.05. The results show tables, graphs and images of the effect produced, principally in the settings not standardized due to the non-linear effects of the behavior.

The results of the numerical study were different: the static part noted that stress increased the contact to increase the coefficient of friction, as well as the variation of the angle contact. On the other hand, decrease the setting and increase the displacement effects on the concentration of stress are higher; the dynamic part found effects produced by the clearances in joints, modifying the natural frequencies and mode shapes by displacement in the joint; also, changes were observed in the natural frequencies and modal forms without and with friction, in the not normalized adjustments they obtain peculiar effects; also, a comparison was realized with the results of an experimental analysis using not normalized adjustments and similar results were obtained.

Índice

Índice de figuras	III
Índice de tablas	V
Nomenclatura.....	VI
Capítulo I Introducción.....	2
1.1 Estado de arte.....	3
1.1.1 Contacto.....	10
1.1.2 Fricción.....	11
1.1.3 Vibraciones mecánicas	11
1.1.4 Frecuencia natural.....	12
1.1.5 Análisis modal.....	13
1.1.6 Elemento finito	13
1.2 Objetivo general	17
1.3 Alcances y limitaciones.....	17
1.4 Justificación.....	17
1.5 Metodología del efecto del claro	18
1.6 Estructura del contenido de la tesis	19
Capítulo 2. Marco teórico.....	22
2.1 Teoría de Hertz	22
2.2 Teoría de Pearson	25
2.3 Análisis de vibraciones mecánicas en una viga empotrada.....	28
2.4 Ecuaciones estáticas de la deflexión de la viga	29
2.5 Conexiones de elemento.....	30
2.6 Condiciones de frontera.....	32
2.6.1 Método de multiplicadores de Lagrange	33
2.6.2 Método de penalización.....	34
Capítulo 3. Análisis estático de la unión mecánica	37
3.1 Metodología.....	37
3.2 Análisis por flexión	38
3.3 Condiciones de frontera.....	40
3.4 Dimensión de malla.....	40
3.5 Resultados del análisis numérico estático con fricción	41
Capítulo 4. Análisis dinámico de la unión mecánica.....	46
4.1 Metodología.....	46
4.2 Análisis numérico sin fricción.....	48
4.3 Análisis numérico con fricción.....	49
4.5 Análisis numérico empleando diferentes configuraciones.....	51
4.6 Resultado del análisis numérico del ajuste H7/h6.....	54
4.7 Resultado del análisis numérico del ajuste H7/f7.....	56
4.8 Resultado del análisis numérico del ajuste H7/c11	58

Capítulo 5. Análisis de resultados	63
5.1 Resultado del ajuste H7/h6	63
5.2 Resultado del ajuste H7/f7	66
5.3 Resultado del ajuste H7/c11	69
5.4 Evaluación iterativa	73
5.4.1 Valor singular	73
5.4.2 Valor con tendencia normal	75
Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones	79
6.1 Observaciones	79
6.2 Conclusiones	82
6.3 Recomendaciones	83
6.4 Trabajos futuros	84
Apéndice A Planos	86
Apéndice B Comprobación de la Ley de Hertz, Pearson y ecuaciones de Euler-Bernoulli	89
Apéndice C Ensamble del modelo	98
Bibliografía	101

Índice de figuras

No.	Nombre de figura	Pág.
1.1	Ejemplo de vibraciones mecánicas	12
1.2	Desplazamiento de una viga con una fuerza concentrada	15
1.3	Diferentes elementos a) Beam, b) Plate y c) Brick	15
2.1	Descripción geométrica de la junta cilíndrica con holgura	22
2.2	Articulaciones cilíndricas con holgura	23
2.3	Geometría y símbolos utilizados	26
2.4	Valores de A para diferentes frecuencias naturales	28
2.5	Conexiones de elementos Beam y elementos planos 2D, a) Momento no es transferido b) Momento es transferido	31
2.6	Unión de los elementos a) nodo 1 y 2 son conectados por enlaces rígidos (no meramente rígidos) y b) una aplicación	31
2.7	Un elemento plano Beam unido a un elemento plano cuadrilátero	32
2.8	Elementos uniformes tipo barra A= sección transversal, E= módulo elásticos b) Ecuaciones globales $KD=R$, con U1 y U2 diferente de 0 (d.o.f)	34
3.1	Modelo esquemático a) modelo estable y b) Modelo deformado	37
3.2	Condiciones de frontera del modelo discreto	38
3.3	Deflexión de una viga	39
3.4	Resultado numérico de la fuerza para deflexionar la viga	39
3.5	Visualización de las condiciones de frontera	40
3.6	Mallado del modelo	40
3.7	Tamaño de malla en la zona de contacto	41
3.8	Medición del ángulo de contacto	42
3.9	Gráfica de la tendencia del efecto en la concentración de esfuerzos en la zona de contacto	44
3.10	Tendencia del coeficiente de fricción con respecto a los esfuerzos	44
4.1	Valor de A para cada frecuencia natural.	46
4.2	Función para activar la no linealidad geométrica	47
4.3	Dimensión de la viga	47
4.4	a) Primera y b) segunda forma modal del modelo sin fricción	48
4.5	a) Tercera y b) cuarta forma modal del modelo sin fricción	48
4.6	a) Primera y b) segunda forma modal con un coeficiente de fricción de 0.3	49
4.7	a) Tercera y b) cuarta forma modal con un coeficiente de fricción de 0.3.	50
4.8	Gráfica de la comparación de las frecuencias naturales sin fricción y con fricción	51
4.9	a) Viga en cantiléver b) Viga empotrada articulada en el otro extremo c) Viga empotrada en ambos extremos pero desplazada 5mm en un extremo	52
4.10	Gráfica de la tendencia de las frecuencias naturales con diferentes configuraciones	54
4.11	Configuración del modelo	55
5.1	Gráfica de las tendencias de las frecuencias para un ajuste H7/h6 sin fricción	64
5.2	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento para un ajuste H7/h6 sin fricción	64

5.3	Gráfica de las tendencias de las frecuencias para un ajuste H7/h6 con una fricción de 0.3	65
5.4	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento para un ajuste H7/h6 con una fricción de 0.3	66
5.5	Gráfica de las tendencias de las frecuencias para un ajuste H7/f7 sin fricción	67
5.6	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento para un ajuste H7/f7 sin fricción	67
5.7	Gráfica de las tendencias de las frecuencias para un ajuste H7/f7 con una fricción de 0.3	68
5.8	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento para un ajuste H7/f7 con una fricción de 0.3	69
5.9	Gráfica de las tendencias de las frecuencias para un ajuste H7/c11 sin fricción	70
5.10	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento para un ajuste H7/c11 sin fricción	71
5.11	Gráfica de las tendencias de las frecuencias para un ajuste H7/c11 con una fricción de 0.3	72
5.12	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento para un ajuste H7/c11 con una fricción de 0.3	72
5.13	Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste intermedio crítico con una fricción de 0.3.	74
5.14	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste intermedio crítico con una fricción de 0.3.	74
5.15	Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste intermedio normalizado con una fricción de 0.3.	76
5.16	Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste intermedio normalizado con una fricción de 0.3.	77
6.1	Frecuencias naturales obtenidas experimentalmente.	79
6.2	Superposición de las imágenes de la primera frecuencia sin fricción y con fricción de 0.3.	82
B.1	Representación del modelo	89
B.2	Secciones divididas del pasador	92
B.3	Condiciones de frontera	92
B.4	Longitud del semi-ancho	92
B.5	Concentración de esfuerzos	93
B.6	Convergencia de malla	94
B.6	Dimensión de la viga	94
B.7	Valor de A para el cálculo de una viga empotrada	95
B.8	Viga sin excitación natural	95
B.9	Primera frecuencia natural y forma modal	96
B.10	Segunda frecuencia natural y forma modal	96
B.11	Tercera frecuencia natural y forma modal	96
B.12	Cuarta frecuencia natural y forma modal	97
C.1	Dimensiones del perfil de la viga	98
C.2	Orientación de la viga	98
C.3	Viga	98
C.4	Conexión tipo Tie	98
C.5	Ensamble del diseño	100

Índice de tablas

No	Nombre de la tabla	Pág.
3.1	Magnitud de la fuerza con respecto al desplazamiento	39
3.2	Comparación de los esfuerzos de contacto variando el coeficiente de fricción	41
3.3	Ángulo de inclinación de la concentración de esfuerzos con respecto el coeficiente de fricción	42
4.1	Resultado de los valores de la Ecuación 2.22.	48
4.2	Comparación de los resultados analíticos y numéricos	49
4.3	Comparación de las frecuencias sin fricción y con fricción	50
4.4	Frecuencias y formas modales de los diferentes ajustes	52
4.4	Frecuencias y formas modales de los diferentes ajustes (continuación)	53
4.5	Comparación de las frecuencias naturales con diferentes ajustes	53
4.6	Diferentes tipos de ajuste con holgura	54
4.7	Resultados del análisis numérico del ajuste H7/h6 con un desplazamiento de 10 mm y un coeficiente de fricción de 0.3	55
4.7	Resultados del análisis numérico del ajuste H7/h6 con un desplazamiento de 10 mm y un coeficiente de fricción de 0.3 (continuación)	56
4.8	Resultados del análisis numérico del ajuste H7/f7 con un desplazamiento de 10 mm y un coeficiente de fricción de 0.3	57
4.9	Resultados del análisis numérico del ajuste H7/c11 con un desplazamiento de 10 mm y un coeficiente de fricción de 0.3	58
4.9	Resultados del análisis numérico del ajuste H7/c11 con un desplazamiento de 10 mm y un coeficiente de fricción de 0.3 (continuación)	59
4.10	Resultados de los ajustes con fricción	59
4.11	Resultados de los ajustes sin fricción	60
5.1	Tabla de las variables independientes y dependientes	63
5.2	Valores del ajuste H7/h6 para diversos desplazamientos sin fricción	63
5.3	Tabla de los valores del ajuste H7/h6 para diversos desplazamientos con un coeficiente de fricción de 0.3	65
5.4	Valores del ajuste H7/f7 para diversos desplazamientos sin fricción	66
5.5	Tabla de los valores del ajuste H7/f7 para diversos desplazamientos con un coeficiente de fricción de 0.3	68
5.6	Valores del ajuste H7/c11 para diversos desplazamientos sin fricción	70
5.7	Tabla de los valores del ajuste H7/c11 para diversos desplazamientos con un coeficiente de fricción de 0.3	71
5.8	Tabla de los valores del ajuste intermedio crítico para diversos desplazamientos con un coeficiente de fricción de 0.3	73
5.9	Tabla de los valores del ajuste intermedio normalizado para diversos desplazamientos con un coeficiente de fricción de 0.3	75
6.1	Comparación del análisis experimental y numérico	80
B.1	Resultado de la iteración para el ángulo de contacto	91
B.2	Resultados comparativos de la concentración de esfuerzos.	93
B.3	Valores de la frecuencia natural	95

Nomenclatura

Latinas

A	Coficiente para la frecuencia natural angular
A	Área (m ² , mm ²)
C ₁	Centro del perno
C ₂	Centro del agujero
D ₁	Diámetro del perno
D ₂	Diámetro del agujero
E	Módulo de Young (Pa)
E ₁	Módulo de Young del perno
E ₂	Módulo de Young del bloque del agujero
F _n	Frecuencia natural del sistema (Hz)
f _{n1}	Primera frecuencia natural del sistema (Hz)
f _{n2}	Segunda frecuencia natural del sistema (Hz)
f _{n3}	Tercera frecuencia natural del sistema (Hz)
f _{n4}	Cuarta frecuencia natural del sistema (Hz)
f _{n5}	Quinta frecuencia natural del sistema (Hz)
H	Altura (m, mm)
I	Momento de inercia (m ⁴)
L	Longitud de la viga (m, mm)
P	Carga por unidad de longitud(N/m ²)
P(x)	Distribución de la presión (N/m ²)
P _o	Presión máxima (N/m ²)
R ₁	Radio del perno
R ₂	Radio del agujero
X	Distancia

Griegas

A	Arco de longitud (°)
Δ	Compresión elástica
Δ	Desplazamiento (m, mm)
ΔR	Diferencia de radios (m, mm)
Ø	Diámetro (m, mm)
M	Coficiente de fricción
N	Relación de Poisson
ν ₁	Relación de Poisson del perno
ν ₂	Relación de Poisson del agujero
P	Densidad (kg/m ³)
Θ	Ángulo de contacto
ω _n	Frecuencia natural angular (rad/s)
ω _{n1}	Primera frecuencia natural angular (rad/s)
ω _{n2}	Segunda frecuencia natural angular (rad/s)
ω _{n3}	Tercera frecuencia natural angular (rad/s)
ω _{n4}	Cuarta frecuencia natural angular (rad/s)
ω _{n5}	Quinta frecuencia natural angular (rad/s)

Capítulo I

Introducción

Capítulo I Introducción

En las uniones mecánicas se presentan ciertas holguras (claros) que al contacto cambian la rigidez geométrica, causando un cambio en la respuesta dinámica y produciendo en la totalidad de los casos vibraciones, además, aumentando los esfuerzos y tensiones (Cruz, 2000).

La mayoría de las vibraciones en todas las máquinas o estructuras son indeseables porque aumentan los esfuerzos y tensiones en sus elementos; por tal motivo deben eliminarse o reducirse al mínimo para evitar fallas o problemas que disminuyan la vida útil de la máquina o sus elementos principales (Guzmán, 2009).

Las holguras existen en las uniones de los mecanismos y son inevitables para su funcionamiento, con el fin de garantizar el correcto movimiento relativo entre los cuerpos conectados. También originan discontinuidades en el comportamiento dinámico causando una respuesta no lineal en el sistema por su condición de contacto (cóncavo-convexo); las uniones perno agujero presentan características de fricción y elasticidad muy particulares, especialmente cuando la diferencia de radios es muy pequeña (Guzmán, 2009).

La viga es el elemento estructural más representativo, el cual puede actuar como elemento de máquina. Además, cuando las vigas se conectan al sistema a través de uniones pernos-agujero se ven afectados por los efectos de los claros en su comportamiento dinámico muy particularmente en sus formas modales y frecuencias naturales.

La presencia de holguras en las articulaciones de los sistemas mecánicos disminuye el buen funcionamiento. Las vibraciones, el ruido y el desgaste se generan como consecuencia de las holguras en la unión. El problema se agrava aún más cuando se aumenta el tamaño de espacio libre (holgura) causando desgaste. Esto ha generado interés en las últimas tres décadas para desarrollar maneras de explicar el efecto de la holgura en la unión. *Mukras et al* (2009) mencionaron que en los primeros estudios en esta área se centraron en modelos simples para obtener información sobre el comportamiento de los sistemas con holguras en la unión.

Debido a la complejidad del sistema se aplicará el método de los elementos finitos (MEF), que es una herramienta numérica que permite la discretización de los sistemas continuos, para transformar las ecuaciones diferenciales que los representan, en un arreglo de matrices (Chandrupatla & Belgundu, 1999).

El utilizar este método para calcular las frecuencias naturales y formas modales del sistema es bastante práctico, porque la solución se resume a la búsqueda iterativa de los valores y vectores propios de la razón de rigidez y masa. En la aplicación del MEF, se involucrarán distintas etapas para el desarrollo del tema, entre ellos el modelo aplicado al sistema y la linealización del mismo.

Los esfuerzos estáticos y dinámicos que involucran el contacto y la fricción, en uniones cilíndricas cóncavo-convexo, producen efectos perjudiciales para el sistema, por lo que es necesario evaluar su efecto.

Para este estudio se utilizará una viga con un extremo empotrado y una unión (perno-agujero) en el otro extremo, variando la holgura, la fricción y desplazamiento para incrementar la tensión por flexión, e implementando las normas de ajuste y tolerancia, además, se encontrarán las frecuencias y formas modales del modelo.

Las frecuencias naturales y las formas modales de una estructura, predicen su frecuencia de resonancia y sus puntos de flexión, con lo que es posible determinar sus puntos débiles justificando su búsqueda por métodos numéricos y experimentales.

1.1 Estado de arte

En las uniones mecánicas se produce contacto entre dos cuerpos, en consecuencia se generan esfuerzos entre éstos, por lo que es importante estudiar dichos esfuerzos. Los modelos de Hertz (1882) y Pearson (1895) son los métodos más comunes para describir el comportamiento del contacto en las uniones cilíndricas con holgura.

En el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) se realizaron estudios en uniones mecánicas tipo perno-agujero. Uno de los primeros estudios fue de Cruz (2000) donde realizó una variación en los ajustes de la unión mecánica tipo perno-agujero para analizar la influencia de éste en el comportamiento dinámico del sistema. Cruz (2000) observó que para ajustes finos la aceleración del sistema es menor de la amplitud, mientras que para ajustes sueltos se producen impactos dentro de la unión a causa del aumento del claro. Concluyó que existe una gran influencia de los ajustes en las uniones mecánicas sobre el comportamiento dinámico de los elementos mecánicos que unen y por último el claro influye en los problemas de impacto en la unión, el cual se transmite a todo el sistema (Cruz, 2000)

Guzmán (2009) realizó un análisis experimental y numérico, donde presenta una viga empotrada articulada. La viga está forzada antes del análisis de la respuesta a la vibración. Utilizó el software de elemento finito ALGOR para modelar el sistema utilizando elementos 2D. Obtuvo un incremento de las frecuencias naturales en el experimento, sin embargo no obtuvo las formas modales, en relación por la precarga analizó la respuesta vibratoria transitoria a la función, además la respuesta armónica se obtiene del análisis experimental donde obtuvo la respuesta del sistema.

En el estudio Martínez (2013) dedujo que las cargas causantes de las rigideces de contacto y de fricción son de tres tipos: en el primer caso la carga es externa sobre el centro del perno y no existe deflexión en la viga; en el segundo caso, está causada por un desalineamiento entre el extremo empotrado y el de la articulación, pero al ser el movimiento relativo en la dirección vertical, la viga se tensa en forma longitudinal. Finalmente el tercer caso, en que la carga es causada por los impactos al tener el perno libre movimiento al interior de la articulación, porque no existen causas externas para la carga, realizó un estudio numérico en código de programación donde representaba las rigideces del elemento y los convierte a matrices para la solución del problema.

Szwedowicz *et al* (2003) realizaron un modelo experimental de una unión considerando con resortes y amortiguamiento dentro de ella posteriormente realizaron un modelo numérico donde encontraron y determinaron las frecuencias naturales y formas modales aplicando los resultados de elementos finitos (FE) del contacto estático no lineal realizando un análisis en la unión atornillada, determinando la rigidez de contacto normal y tangencial. Posteriormente realizaron un modelo dinámico FE de la unión atornillada. Para este modelo FE, las frecuencias propias más bajas encontradas numéricamente se comparan con los resultados experimentales obteniendo resultados similares para todas las distancias consideradas. Mediante la aplicación de los procedimientos estáticos y dinámicos FE propuestos para la unión atornillada, la sensibilidad de resonancia del sistema mecánico con conexiones fijadas puede basarse numéricamente con respecto al proceso de desgaste en el contacto.

Aguinaga *et al* (2010) determinaron que las uniones con holgura producen una pérdida de precisión en el posicionamiento de los mecanismos. El error depende de la posición instantánea del mecanismo de las cargas exteriores aplicadas, las cargas iniciales, así como la

magnitud de las holguras; otro efecto, importante que producen las holguras son las discontinuidades en la posición debido a la pérdida de contacto entre los elementos de la unión con holgura. Estas pérdidas de contacto son además fuente indeseable de ruidos y vibraciones. Numerosos autores han desarrollado procedimientos de cálculo del error debido a las holguras. Alguno de ellos evalúa el error máximo o las posiciones más probables del elemento terminal por medio de métodos geométricos o cinemáticos. Además presentaron una metodología de cálculo del error de posición debido a holguras, mediante un análisis determinístico que utiliza ecuaciones dinámicas.

Aginaga y *et al* (2010) calcularon el error de posición del mecanismo plano 5R a lo largo de una trayectoria de *pick-and-place*. El error en la trayectoria depende de la posición instantánea del mecanismo, las cargas exteriores aplicadas y las cargas inerciales. Tratándose de una aplicación en la que se debe maniobrar a gran velocidad, las altas aceleraciones hacen que las cargas inerciales tengan una gran influencia en el error. Una vez calculado el error y con la posición real del mecanismo, observaron que durante la trayectoria se producen saltos causados por la pérdida de contacto entre los componentes de la unión. Esta pérdida de contacto se debe a la alta velocidad de giro en el mecanismo. Al analizar la misma trayectoria para diferentes periodos de ciclos, se observó que son las fuerzas inerciales las que producen discontinuidades en la trayectoria, pero a velocidades menores las pérdidas de contacto desaparecen. Por lo tanto, existe un periodo de ciclo mínimo que garantiza que no se producirán.

Flores y Ambrosio (2004) en su trabajo realizaron un análisis dinámico general donde emplearon un sistema mecánico suponiendo que las articulaciones cinemáticas son ideales o perfectas, es decir, la holgura, deformaciones locales, desgaste y los efectos de lubricación no se consideran. Sin embargo, en un verdadero conjunto cinemático mecánico los claros están siempre presentes. Las holguras son necesarias para permitir el movimiento relativo entre los cuerpos conectados y permitir los componentes de ensamblaje, por ejemplo, en un conjunto de soporte de rodamientos hay un juego radial que permite el movimiento relativo entre el eje y el rodamiento; este espacio es inevitable debido a las tolerancias de mecanizado, desgaste, deformaciones de materiales y las imperfecciones. La presencia de tales holguras conduce al bajo rendimiento de los sistemas mecánicos a causa de las fuerzas de impacto que tienen lugar.

No sólo estas fuerzas de impacto disipan la energía pero también son una fuente de vibraciones y ruidos (Flores & Ambrosio, 2004).

Para los sistemas planares la existencia de una holgura radial en una articulación de giro elimina las dos restricciones cinemáticas asociados con la articulación ideales de revolución, por lo tanto, se introducen dos grados adicionales de libertad. De este modo, el eje puede moverse libremente dentro de los límites de los rodamientos. Cuando el eje llega a la pared de soporte se producen impactos y las fuerzas de contacto se transmiten en la articulación. Permite para los modelos de fuerza de contacto desarrollar una función de las propiedades de elasticidad en las superficies de contacto que tiene en cuenta la disipación de energía durante el proceso de impacto (Flores & Ambrosio, 2004).

Ciavarella y Decuzzi (2000) en su trabajo mencionan que el problema de contacto plano para un pasador articulado en una placa infinita, es un modelo importante para muchas articulaciones de uso común en aplicaciones mecánicas. Por ejemplo, orejetas de fijación del pasador se emplean en montajes de aviones, especialmente cuando otros tipos de fijación como soldadura o pegado no son viables, (Ciavarella & Decuzzi, 2000). El área de contacto se extiende sólo a una pequeña región del dominio circular, la solución hertziana clásica es apropiada, ya que los cuerpos pueden ser considerados localmente como medio-planos y la geometría circular está bien aproximada por un juego parabólico (Jhonson, 1985).

Ciavarella y Decuzzi (2000) dan una evaluación completa de la fuerza del contacto para toda la gama de condiciones de trabajo. La fuerza de los conjuntos disminuye rápidamente si la medida del área de contacto se reduce y finalmente tiende al límite predicho por la teoría de Hertz cuando el arco de contacto es menor de 30° aproximadamente. Las condiciones óptimas se alcanzan por un arco de contacto más pequeño que la limitación de arco ϵ_{lim} : esto significa que no es posible llegar a una configuración de interferencia inicial. Llegaron a la conclusión de una solución de forma completamente cerrada al problema de los cuerpos cilíndricos en contacto, para el caso general de materiales elásticamente similares en contacto sin fricción, que tiene aplicaciones como un modelo para muchas articulaciones utilizados en los componentes mecánicos. Encontraron que el efecto de α es fuerte en la carga en la zona de contacto con relación al tamaño del área, se puede ver en particular y muy claramente en el ángulo límite de

contacto, es decir, el ángulo de contacto con cargas muy altas (o la única posible ángulo de contacto con condiciones limpias ajuste) que varía de aproximadamente 70 a 180 °.

Lui *et al* (2007) en su trabajo mencionan que la articulación cilíndrica es el tipo más común utilizado en muchos mecanismos. A diferencia del caso ideal, una articulación cilíndrica con holgura tiene que ser tratado con un enfoque diferente para considerar la interacción del impacto que tiene lugar en el interior de la articulación. En general, hay dos principales estrategias de modelado para sistema mecánico con juntas de holguras cilíndricas, el enfoque de adición de restricción y el enfoque de fuerza de contacto. En el enfoque de adición de restricción, la holgura en una articulación se modela mediante la adición de un enlace con masa cero que tiene una longitud constante igual a la distancia radial. El enfoque de la fuerza de contacto es más familiar y realista, ya que puede tener en cuenta el proceso de impacto entre dos cuerpos que chocan en las holguras de las articulaciones y la información detallada de las fuerzas de contacto se puede conseguir mediante la simulación dinámica. Una buena revisión sobre el estudio del sistema mecánico con juntas de revoluta.

Respecto al problema de contacto de las juntas cilíndricas con claros Liu *et al* (2007) mencionaron que puede ser modelado como un problema planar (2D) de contactos de esfuerzos entre un pasador (perno) y un agujero en una placa infinita.

La teoría Pearson es muy útil Liu, Ken y Yang (2007) presentaron una solución de forma completamente cerrada para el problema de contacto de las juntas cilíndricas con un aclaramiento. Los siguientes supuestos se introducen en sus investigaciones.

- El acoplamiento entre el desplazamiento radial y el desplazamiento tangencial en región de contacto se descuida.
- La relación entre los desplazamientos radiales en el área de contacto y la máxima penetración normales satisface la condición de rigidez geométrica de un contacto con el cuerpo rígido.

Los puntos en las dos superficies δ_1 y δ_2 que entran en la experiencia de contacto radial y desplazamiento tangencial u_ϕ , u_θ ($i = 1, 2$). Como se describe en la sección anterior, ϕ y ψ son los ángulos que representan los puntos de salida en la interfaz de la línea céntrica. ε es el semi-ángulo de contacto correspondiente al arco de contacto.

Olyaei y Ghazavi (2012) realizaron en su trabajo un análisis de los sistemas mecánicos, mencionaron que las articulaciones son ideales sin holgura, sin embargo, cuando se introducen holguras o claros en las articulaciones, la respuesta dinámica se cambia considerablemente. La disminución del rendimiento dinámico, la reducción de la vida útil a los componentes por fatiga y la generación de las vibraciones no deseadas son como resultado de los impactos de las piezas debido a las uniones con holgura. Más generalmente, las respuestas del sistema tienden a ser caótica e impredecible en lugar de ser periódicas y regulares.

Olyaei y Ghazavi (2012), realizaron un mecanismo de corredera-manivela con una junta articulación con holgura entre la corredera y la varilla de conexión. Se muestra en el sistema un comportamiento caótico en condiciones específicas. En una junta con revoluto con claros en el eje del rodamiento y por la experiencia hay tres tipos de movimiento relativo, en su deducción mencionaron:

- El impacto y rebote (el modo de impacto)
- El apoyo está en contacto continuo entre las dos piezas hay fricción y contacto (puro contacto)
- El equipo se mueve libremente dentro de un círculo de giro o de modo de vuelo libre.

La Teoría de Hertz describe un contacto puramente elástico y que no toma en cuenta la disipación de energía durante el proceso de impacto.

Olyaei y Ghazavi (2012) llegaron a concluir que la respuesta del sistema cambia sustancialmente cuando se introducen holguras en las uniones. Estos cambios se deben principalmente a los impactos y rebotes entre el eje y teniendo en la articulación holguras que causan altos picos en el control deslizante de aceleración y en el momento de arranque.

Cuando un sistema elástico es sometido a una excitación dinámica, responde vibrando y describiendo las formas o modos vibratorios correspondientes a las frecuencias excitadas (Ewins, 2000), (Maia & Silva, 1997). Por otro lado, cuando la frecuencia de la excitación dinámica coincide con las frecuencias naturales, la respuesta se amplifica en grado resonante (Thomson, 1937).

En las estructuras civiles, el sismo es el tipo de excitación preocupante, aunque no se debe desestimar la excitación causada por el tránsito de personas o vehículos, o bien la excitación causada por el viento. Un caso trágico es el puente de Tacoma Narrow que colapsó

por la resonancia inducida por el viento en julio de 1940 (Billah y Scanlan, 1991). En el caso de los mecanismos con articulaciones perno agujero, los analistas se han preocupado por la influencia de los claros en las uniones sobre los impactos y el desgaste del sistema. Un ejemplo son los estudios como los de Schwab, Meijaard y Meijers (2002), donde se comparan diferentes modelos teóricos para representar la respuesta dinámica de sistemas con claros en las uniones. No obstante en su mayoría son planteados desde el punto de vista de cuerpo rígido y cuando se utilizan sistemas elásticos, no se utiliza una metodología de análisis vibratorio.

Los efectos no lineales vibratorios de la fricción se analizan en los textos clásicos (Timoshenko, 1937), (Rao, 1995), (Roca & León, 1981), para los que se han aportado varios métodos de representación. Sin embargo, la mayoría de ellos no son de fácil implementación y para el diseñador implican análisis matemáticos exhaustivos, equipos de cómputo muy poderosos y/o tiempos de cómputo muy extensos. Por tanto, es necesario encontrar una metodología que acorte y/o economice el uso de recursos y que precise menor entrenamiento de parte del diseñador.

Contreras (2009) experimentó utilizando una viga en cantiléver en donde a su extremo libre se le adicionaron elementos de contacto superficial, lineal y puntual con fricción seca. En función de la frecuencia de excitación de la viga, obtuvo ciclos de histéresis a partir de los cuales determinó la rigidez de contacto tangencial para cada tipo de contacto y materiales como acero, bronce y aluminio. *Contreras* observó que esta rigidez aumenta con la disminución de la energía disipada por el sistema montado en cada ciclo. Además, a medida que se aumenta la frecuencia de excitación, la forma de las curvas de histéresis tienden a tener una forma elíptica (Oliván Sánchez, 2015).

Konowalski (2009) mediante un banco de pruebas, determinó la rigidez de contacto normal en uniones con superficie de contacto planas hechas de acero. Encontró que en el rango de pequeñas presiones de contacto la dependencia de las deformaciones de contacto es no lineal. Cuando la variable de rigidez de contacto se introduce al modelo, coincide con la corrida del desplazamiento de contacto obtenida experimentalmente. Sin embargo, el modelo de contacto no lineal no es completamente equivalente hasta donde llegan las velocidades de las deformaciones de contacto. Asumir un valor constante de rigidez de contacto dinámico en los

cálculos da como resultado deflexiones significantes en las corridas de deformación de contacto y en la velocidad en comparación con los resultados obtenidos en los experimentos.

Yang (2014) empleó un modelo para determinar la rigidez de contacto normal en uniones mecánicas, basado en la teoría de geometría fractal y la mecánica de contacto. Mediante este modelo analizó la relación entre la carga aplicada en dirección normal de la unión y la rigidez de contacto normal para diferentes materiales y dimensiones fractales. El resultado mostró que la rigidez de contacto normal de la unión aumenta uniformemente con el incremento de la carga en dirección normal; en el rango plástico de deformación esta relación es fuertemente no lineal.

1.1.1 Contacto

En las uniones mecánicas tipo perno-agujero se produce contacto entre el perno de la articulación, generando esfuerzos y deformaciones que pueden calcularse con la teoría de Hertz y de Pearson. Los problemas de contacto son clasificados como no-conformes si las dimensiones del área de contacto son pequeñas comparadas con el radio de curvatura de las superficies en contacto, de lo contrario se clasifican como conformes. Un problema no-conforme se denomina Hertziano si las superficies de contacto se aproximan a una función cuadrática en la región de contacto. Si la aproximación cuadrática es inválida, el problema es No-Hertziano. Todos los problemas conformes son No-Hertziano.

La mecánica de contacto clásica suele relacionarse con Heinrich Hertz. En 1882 Hertz resolvió el problema del contacto entre dos cuerpos elásticos con superficies curvas. Esta todavía relevante solución clásica supone el fundamento para problemas más modernos de la mecánica de contacto. No fue sino hasta casi cien años después que Johnson, Kendall y Roberts encontraron una solución similar para el caso del contacto adhesivo nombrándola JKR por sus iniciales. Nuevos avances en el campo de la mecánica de contacto en la primera mitad del siglo XX se pueden atribuir a nombres como Bowden y Tabor. Fueron los primeros en destacar la importancia de la rugosidad de la superficie de los cuerpos en contacto. A través de la investigación de la rugosidad de la superficie, se obtuvo que la verdadera área de contacto entre las partes en fricción típicamente es inferior en órdenes de magnitud al área de contacto aparente. Tal comprensión cambió también drásticamente el rumbo de las empresas dedicadas a la tribología. Los trabajos de Bowden y Tabor originaron varias teorías sobre mecánica de contacto

para superficies rugosas. La contribución de Archard (1957) debe ser también mencionada en relación a trabajos pioneros en este campo. Archard concluyó que, incluso para superficies elásticas rugosas, el área de contacto era aproximadamente proporcional a la fuerza normal.

Krolkowski & Szczepek (1993) realizaron un análisis basado en la teoría de Hertz – Mindlin (D. & H., 1953) y en el modelo de Greenwood & Williamson (1966) para deformación elástica de múltiples puntos de contacto. Propusieron un modelo de contacto entre dos superficies elásticas, una de ellas idealmente lisa y plana y la otra nominalmente plana pero, cubierto por muchas asperezas de forma esférica, semejante al modelo de *Greenwood-Williamson*, observaron que la relación entre la rigidez de contacto normal y tangencial es independiente de la función de distribución de altura de la superficie. Además concluyeron que debido a la relación proporcional entre la rigidez de contacto normal y la tangencial, es posible utilizar la cizalladura, así como las ondas ultrasónicas longitudinales en el estudio de contacto mecánico.

1.1.2 Fricción

La fricción es la resistencia al movimiento que se produce cuando un cuerpo se mueve sobre otro y generalmente se define como *la fuerza que actúa entre dos cuerpos en su superficie de contacto, a fin de resistir un deslizamiento uno de otro*. La fricción seca o fricción entre superficies sin lubricación intencional, es un fenómeno muy complejo, a pesar de haberse estudiado ya durante más de un siglo.

Leonardo Da Vinci fue el primero que postuló un acercamiento a la fricción. Da Vinci dedujo la leyes que gobernaban el movimiento de un bloque rectangular deslizándose sobre una superficie plana; también fue el primero en introducir el concepto de coeficiente de fricción.

De acuerdo con Coulomb (1785), la fuerza de fricción se debe a la trabazón de las asperezas de las dos superficies y a la necesidad de deformar las irregularidades cuando los cuerpos pasan uno frente al otro. La tercera ley es con frecuencia atribuida a Coulomb.

1.1.3 Vibraciones mecánicas

Se dice que un cuerpo vibra cuando experimenta cambios alternativos, de tal modo que sus puntos oscilen sincrónicamente en torno a sus posiciones de equilibrio, sin que el campo cambie de lugar. Como otro concepto de vibración, se puede decir que es un intercambio de energía

cinética en cuerpos con rigidez y masa finitas, el cual surge de una entrada de energía dependiente del tiempo.



Figura 1.1 Ejemplo de vibraciones en equipos (SatirNet, 2015).

La frecuencia natural es la frecuencia a la que un sistema mecánico seguirá vibrando, después que se quita la señal de excitación.

En las estructuras hay siempre esfuerzos residuales por el montaje y por esta razón es importante analizar su efecto en la respuesta dinámica. El análisis de las vibraciones mecánicas se ha vuelto cada vez más importante en virtud de la tendencia actual de emplear máquinas de alta velocidad y estructuras más ligeras.

Las propiedades dinámicas de una estructura son función de su masa, rigidez y capacidad de disipación de energía. Un cambio en estas propiedades, ya sea debido a pérdida del material, corrosión, degradación o fatiga del material, erosión o grietas, van a tener una influencia directa en el comportamiento dinámico de la estructura.

1.1.4 Frecuencia natural

La variación de la rigidez en un elemento a causa de la aplicación de una carga axial produce cambios en las frecuencias naturales del elemento. Este tipo de análisis utiliza una matriz de rigidez que depende de las tensiones para calcular las frecuencias naturales y modos propios, puede ser aplicado a cualquier componente sujeto a carga dinámica. Un ejemplo típico es una cuerda de guitarra, al pulsar la cuerda se produce una determinada frecuencia o tono. Si se tensa o se afloja, cambia la frecuencia natural si el área de la sección transversal, la fuerza aplicada,

la longitud y la masa son fijas, este tipo de análisis puede determinar la frecuencia de la cuerda en función de la carga de la tensión aplicada.

Cuando una viga es sometida a una fuerza axial, a tensión o a compresión y a una carga de flexión, la rigidez se modifica por la presencia de la fuerza axial en el elemento; de tal manera que la matriz de rigidez del elemento es la suma de la rigidez elástica más la rigidez geométrica del elemento.

1.1.5 Análisis modal

Es importante garantizar una seguridad y rentabilidad en las estructuras lo cual ha establecido un nuevo reto para los ingenieros y debe satisfacer el entendimiento de las estructura ingenieriles modernas. Las vibraciones de una estructura son de vital importancia, el reto recae directamente en el conocimiento de las propiedades dinámicas usando un método analítico, numérico y experimental. El análisis se ha ido incrementando como una importante herramienta de ingeniería, además es una técnica confiable para investigar y estimar los parámetros que describen el comportamiento dinámico de un sistema, tiene un amplio rango de aplicaciones entre las que pueden encontrar: identificación y evaluación de fenómenos de vibración, como las frecuencias y modos propios del sistema; medición de propiedades específicas, como son el amortiguamiento o la rigidez; validación, corrección y actualización de modelos dinámicos analíticos; desarrollo, corrección o ajuste de modelos dinámicos experimentales; formulación de modelos matemáticos de estructuras, evaluación de la integridad estructural, modificación estructural y detección de fallas; integridad de modelos con otras áreas de dinámica, como acústica y fatiga.

1.1.6 Elemento finito

La representación de un dominio físico con elementos finitos se denomina malla. El método de los elementos finitos considera una malla como una estructura formada por un conjunto de elementos de tamaño finito. La manera como estos elementos se comportan en la estructura se lo determina obteniendo un sistema de ecuaciones algebraicas, las cuales se resuelven utilizando programas matemáticos computacionales (Zienkiewics, 1982).

Los elementos finitos se conforman por mallas y están interconectados en puntos que se denominan nodos. Un nodo es una ubicación en el espacio donde se definen los grados de

libertad, los cuales representan los movimientos posibles de este punto debido a la carga de la estructura. Los grados de libertad también representan que fuerzas y momentos se transfieren desde un elemento al próximo. De la misma manera, los resultados de un análisis por elementos finitos (deflexiones y esfuerzos) se dan comúnmente en los nodos (Hutton, 2004).

Cada nodo tiene seis grados de libertad potenciales que pueden darse por traslación y/o rotación. Traslación se refiere al movimiento de un nodo a lo largo de los ejes X, Y ó Z, mientras que rotación se refiere de un nodo alrededor de los ejes X, Y ó Z (Zienkiewics, 1982).

Elementos planos (2D)

Estos elementos pueden ser:

- Hidrodinámicos
- Cinemáticos
- Sólidos flexibles

Los hidrodinámicos 2D son utilizados en simulaciones que presentan la interacción de sólidos y fluidos, en los que el detalle del flujo no es importante. Por ello, la principal aplicación de este tipo de elementos es simular las cargas generadas por líquidos sobre estructuras. Estos elementos también son usados para formulaciones de mayor orden (nodos intermedios). Tales formulaciones son apropiadas cuando la estructura, interactuando con el fluido experimenta grandes distorsiones. Los elementos hidrodinámicos 2D pueden emplearse en modelos asimétricos (Hutton, 2004).

Los elementos cinemáticos 2D se utilizan para modelar partes de una estructura que experimentan pequeña deformación relativa (deformaciones unitarias no relevantes) durante la aplicación de las cargas. Se les pueden asignar condiciones de contorno y cargas, presión o gravedad. Los elementos cinemáticos poseen masa y pueden transmitir carga, produciendo movimiento y tensiones en los elementos flexibles. La ventaja más importante de los elementos cinemáticos es la capacidad para reducir drásticamente el tiempo de análisis en el software.

Los elementos sólidos flexibles 2D se utilizan para simular el comportamiento de los sólidos estos elementos también se los utiliza para elaborar formulaciones de alto orden, las cuales son apropiadas cuando el sólido experimenta flexión. Los sólidos en 2D pueden incluirse en modelos axisimétricos, de tensión plana o de deformación plana.

Elementos tipo viga (BEAM)

El elemento Beam, es probablemente el más usado. Además de sus aplicaciones obvias en estructuras, muchos otros sistemas, como uniones mecánicas, sistemas de conductos, tuberías y vigas en puentes pueden ser modeladas con el elemento 'beam'.

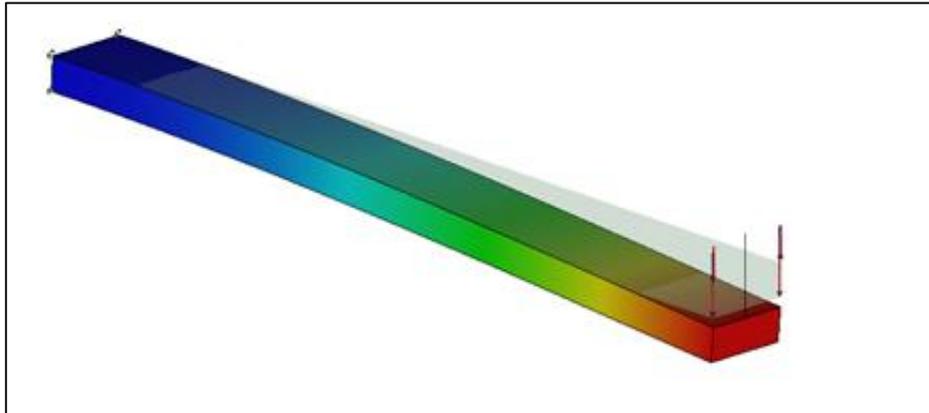


Figura 1.2 Desplazamiento de una viga con una fuerza concentrada (*concentrada, 2015*).

El FEA (Finite Element Analysis) se basa en la reacción de cada elemento finito ante sollicitaciones externas aplicadas en sus nodos. Existen diferentes tipos de elementos finitos que pueden utilizarse para modelar un objeto:

- Elementos lineales (Beams): constan de dos nodos extremos unidos por el elemento.
- Elementos bidimensionales (Plates): constan de 3 nodos (triángulos) o 4 nodos (cuadrángulos) en sus vértices.
- Elementos tridimensionales (Bricks): constan de 4 nodos (tetraedros), 5 nodos (pirámides), 6 nodos (cuñas) u 8 nodos (hexaedros) (*Astorqui, 2010*).

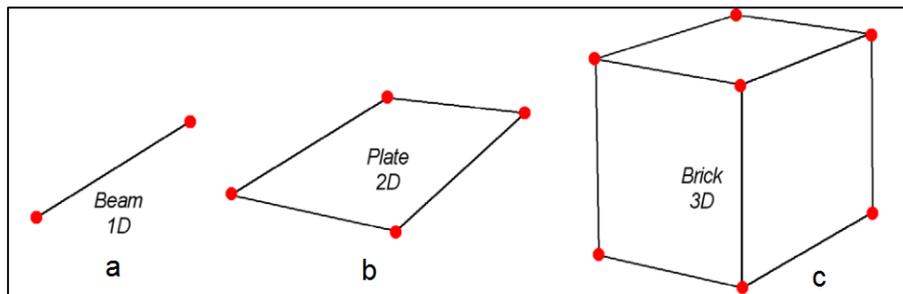


Figura 1.3 Diferentes elementos a) Beam b) Plate y c) Brick (*Astorqui, 2010*)

En consecuencia, las propiedades que rigen la mayoría de los elementos que se utilizarán son estructurales:

- Módulo de rigidez longitudinal o módulo de Young

- Módulo de rigidez transversal o módulo de cortante
- Módulo de Poisson
- Densidad

Estos parámetros se utilizan como un valor específico del material para un análisis lineal. En caso de realizar un análisis no-lineal, dichos parámetros pueden establecerse mediante curvas en función del tiempo o temperatura. El caso más conocido es la determinación de la tensión en función de la deformación, que define el comportamiento elástico y plástico del material; para el estudio se aplicará esta situación (Astorqui, 2010).

La Ingeniería asistida por computadora (CAE, del inglés: Computer aided engineering) es la aplicación de programas computacionales de ingeniería para evaluar componentes o ensambles. Contiene simulación, validación y optimización de productos y herramientas de manufactura. La aplicación principal de CAE, usada en ingeniería civil, mecánica, aeroespacial y electrónica, se trata de FEA al lado del Diseño Asistido por Computador (CAD).

Análisis por elementos finitos

En general, hay tres fases en cualquier tarea asistida por computador:

- Pre-procesamiento. Definir el modelo de elementos finitos y los factores ambientales que influyen en él.
- Solución del análisis. Solucionar el modelo de elementos finitos.
- Post-procesamiento de resultados usando herramientas de visualización.

El análisis de elementos finitos es un método computarizado para predecir cómo un objeto del mundo real va a reaccionar a fuerzas, calor, vibración, etc., en términos de si va a romper, desgastar, o si se trabaja de la manera en la que fue diseñado. El método de elementos finitos divide el comportamiento de cada pequeño elemento, con forma regular; es fácil de predecir por ecuaciones matemáticas establecidas. La computadora agrega todos los comportamientos individuales para predecir el comportamiento del objeto real.

De acuerdo al estudio del estado de arte se busca el efecto producido por las holguras en uniones mecánicas, considerando materiales empleados en la industria, además, de no considerar los efectos de impacto, solamente contacto en la unión mecánica realizado una precarga en la unión y para ello se necesitan materiales elásticos para analizar los esfuerzos

dentro de la unión incluyendo la fricción para los efectos en el cambio de las frecuencias naturales y formas modales.

1.2 Objetivo general

Analizar el efecto del tamaño del claro, la influencia de la fricción y la carga en el interior de las uniones de los sistemas mecánicos, sobre el comportamiento vibratorio en estado estable, para una viga empotrada articulada con cargas por flexión.

1.3 Alcances y limitaciones

- Realizar por método de elemento finito (MEF), el análisis numérico de la unión perno-agujero unida a una viga en un extremo.
- Utilizar las propiedades materiales utilizados en la industria, para este caso es un acero estructural conocido como Acero A36.
- Determinar la influencia de los claros en los sistemas mecánicos de las cargas en el comportamiento estático y los efectos en las frecuencias naturales y formas modales (dinámico).
- Determinar las frecuencias naturales y formas modales del sistema en la viga con la unión en el extremo.
- Se utilizan ajustes normalizados H7/h6, H7/f7 y H7/c11 con un diámetro base de 16 mm.
- El estudio no emplea casos de impacto en el interior de la holgura, sólo es el efecto de contacto puro.

1.4 Justificación

En este trabajo se analiza el efecto de las fuerzas causadas por los claros, el contacto y la fricción en la unión perno-agujero sobre las formas modales y frecuencias naturales de una viga empotrada articulada con cargas por flexión.

El modelo representa el comportamiento de los elementos estructurales típicos en condición de precarga que no son calculables con ecuaciones clásicas donde ya que no se toman en cuenta los efectos no lineales en la unión.

Se utiliza el método de elementos finitos, aprovechando las facilidades que tiene para representar el sistema con las interacciones de contacto y la fricción al interior de la unión con el cálculo de los esfuerzos y deformaciones de los elementos y las formas y frecuencias naturales de la viga. Al precargar la viga con flexión se agrega complejidad al modelo al incrementar la rigidez por deformación y tensión en la viga que son considerados en el mismo modelo.

El estudio de las teorías de contacto de Hertz y Pearsson se emplea en el modelo ideal que es la raíz del estudio en la unión cóncavo-convexo para la solución del modelo a emplear.

Se implementa una metodología para la realización de este proyecto y los pasos a seguir, en la que se debe tener en consideración el estudio de la revisión bibliográfica; a continuación se menciona la metodología.

1.5 Metodología del efecto del claro

Estudio del arte en la revisión bibliográfica

Se buscó la información adecuada para la solución del problema, en la que se mencionaron las diversas teorías, leyes y ecuaciones que son la base fundamental de la solución del trabajo de investigación.

Definir el tipo de estudio

El análisis a resolver se utiliza una viga empotrada unida a un extremo a una unión perno-agujero, empleando un estudio estático y dinámico aplicando las diversas teorías, para determinar el efecto producido en la unión debido a los claros (holgura) por una precarga.

Definir el sistema a evaluar

Se aplica la teoría de Hertz y la de Pearsson para determinar el semiancho de contacto, la concentración de esfuerzos producidos por una fuerza externa y la deflexión de la viga, realizando el ensamble del modelo discreto a emplear, utilizando un software de elemento finito.

Análisis estático y dinámico.

Se empleará elemento finito para el estudio estático para determinar la concentración de esfuerzos; en la parte dinámico para determinar las frecuencias naturales y formas modales producidos por el efecto de las holguras en las uniones.

Análisis numérico estático de acuerdo al sistema

Se aplican la teoría de Hertz para contacto cilíndrico interior y la ley de Pearsson para el semiancho de huella y el esfuerzo concentrado en la zona de contacto y se obtiene los resultados para el análisis de los efectos en las uniones por elemento finito.

Análisis numérico dinámico para el sistema

Se recurren a las teorías de frecuencias naturales y análisis modal de una viga empotrada con un apoyo en el extremo para determinar las frecuencias naturales y formas modales de manera analítica y numérica.

Evaluar el sistema por el método de Elemento Finito en conjunto.

Una vez terminado el estudio analítico se debe constatar los resultados del análisis numérico por elemento finito, considerar las condiciones de frontera y el modelo discreto empleado.

Resultados del estudio numérico y analítico

Comparar los resultados numéricos y analíticos, calcular el porcentaje de diferencia y realizar un análisis de los resultados obtenidos además de presentar un estudio completamente numérico.

1.6 Estructura del contenido de la tesis

En el capítulo I, se describe el estado de arte de los estudios relacionados de la unión mecánica producidos por los efectos de la holgura realizado en el *cenidet*, artículos de los efectos de la holgura en sistemas mecánicos, además información empleada internacionalmente aplicando teorías y conceptos básicos relacionados con el tema.

En el capítulo II, se describen las teorías de manera independiente debido a la complejidad de cada una de ellas, sin embargo, para el modelo se emplea la combinación de cada una.

En el capítulo III, se menciona el modelo a emplear con las características principales que se utilizarán como: propiedades, dimensionamiento, tamaño de malla, restricciones y consideraciones. Se aplica la concentración de los esfuerzos variando el coeficiente de fricción, se muestra el ángulo de inclinación de la concentración de esfuerzos y la combinación de ambas en gráficas y tablas.

En el capítulo IV, en el estudio dinámico con las propiedades mencionadas en el capítulo III se muestran las frecuencias y formas modales para distintos ajustes ($H7/h6$, $H7/f7$ y $H7/c11$) y ajustes no normalizados, donde se observa la tendencia de cada una.

En el capítulo V, se muestran gráficas de los resultados obtenidos a través del estudio numérico, donde se hacen comparaciones para diferentes desplazamientos en los diferentes tipos de ajustes mencionados, el ajuste no normalizado donde se encuentran valores máximos y mínimos.

En el capítulo VI, se mencionan las conclusiones obtenidas, la comparación del estudio numérico y experimental, comparación de las formas modales sin fricción y con fricción y las observaciones en el estudio numérico.

En la parte final se muestran los planos de las piezas, en el apéndice se muestra la comprobación de la teoría de Hertz, así mismo se realizó un trabajo experimental de una viga de 30 cm comprobándose experimental, numérica, analíticamente y un manual para realizar el trabajo en uniones de elementos 2D y Beam.

Capítulo II

Marco teórico

Capítulo 2. Marco teórico

En uniones mecánicas tipo perno-agujero se consideran las siguientes características: la dimensión de los elementos, el tamaño de holgura, la fricción y el esfuerzo sometido. Para el estudio se debe considerar la fricción asociada al contacto interior del elemento aplicando las teorías de Hertz y Pearsson, además de incluir los efectos vibratorios del sistema donde se mencionaras las ecuaciones de Euler-Bernoulli para calcular las frecuencias y formas modales y finalmente las teorías aplicadas en elemento finito.

Las teorías de contacto se clasifican como contacto no Hertziano principalmente porque el contacto es conforme (Jhonson, 1985), además, cita los trabajos de Pearson y Steuermann, para encontrar la frontera de aplicación cuando el semiancho de la zona de contacto es de 28° . Cuando ese ángulo es menor, las ecuaciones de Hertz dan resultados adecuados, para valores mayores la ecuación de Pearsson representa mejor el comportamiento del sistema.

2.1 Teoría de Hertz

El problema de contacto de las juntas cilíndricas con holgura puede ser modelado como un problema planar de contacto entre pasador y el agujero en una placa infinita. R_1 , R_2 se refiere al radio del perno y el agujero en la placa, respectivamente; ($\Delta R = R_2 - R_1$) representa el juego radial de las articulaciones. Tanto el pasador y la placa están hechas de material isotrópico; E_i , ν_i ($i = 1, 2$) son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson; φ y ψ son los ángulos que representan los puntos en la salida de interfaz de la línea de centrado, respectivamente; ε es el semi-ángulo de contacto correspondiente al arco de contacto (Liu, Ke, & Yang, 2007).

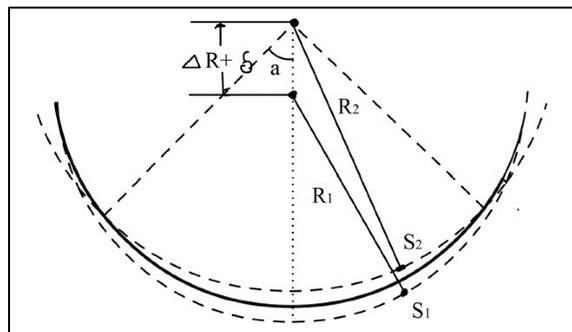


Figura 2.1 Descripción geométrica de la junta cilíndrica con holgura (Liu, Ke, & Yang, 2007).

Para resolver es necesario conseguir el área de contacto y la distribución de la tensión como se observa en la Figura 2. 2; en la teoría de Hertz, el área de contacto se aproxima como

un plano con una larga tira de anchura $2a$ situado paralelamente al eje del cilindro, que puede ser considerado como un límite de contacto elipse. La distribución de la presión $p(x)$ se puede expresar en términos de semi-anchura a y la máxima presión p_0 en el centro de la anchura de contacto.

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

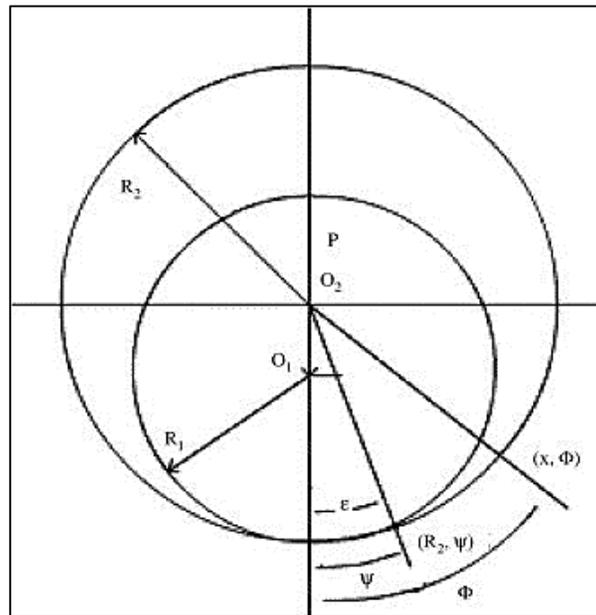


Figura 2.2 Articulaciones cilíndricas con holgura (Liu, Ke, & Yang, 2007).

donde

x : es la distancia del punto desde el que sale el centro del plano de contacto.

La relación de la carga de compresión por unidad de longitud axial P y el semi-ancho de a sería

$$P = \frac{\pi a^2 E^*}{4R} \quad (2.2)$$

$$\text{donde } \frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}, \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.3)$$

La presión máxima se escribe P_{max} se denota de la siguiente manera

$$P_{max} = \frac{2P}{\pi a} = \left(\frac{PE^*}{\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4F}{\pi * a * b} \quad (2.4)$$

Definición de la holgura en una articulación cilíndrica $\Delta R = R_2 - R_1$, la semi-anchura de a se puede expresar como:

$$a^2 = \frac{4PR_1R_2}{\pi E^* \Delta R} = a = 4 \sqrt{\frac{F \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}}{\pi b \left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \right)}} \quad (2.5)$$

Cuando mantienes el mismo número de Poisson se describe de la siguiente manera:

$$a = 2.15 \sqrt{\frac{F \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{b \left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \right)}} \quad (2.6)$$

A diferencia del problema de contacto de cuerpos tridimensionales, la magnitud de la máxima compresión elástica en cuerpos de contacto de dos dimensiones no se puede calcular directamente a partir de las tensiones de contacto. La forma y el tamaño de los cuerpos de contacto en sí, así como la forma en que son compatibles, pueden influir en la relación entre la carga externa y la magnitud de la máxima compresión elástica (Liu, Ke, & Yang, 2007).

Con respecto al problema de contacto de las juntas cilíndricas con holguras, los campos de esfuerzos internos de los dos cuerpos de contacto pueden ser considerados como campos de tensiones planas si la longitud de la articulación cilíndrica es lo suficientemente largo. La magnitud de la máxima compresión elástica se compone de dos partes: una de que es la compresión elástica del pasador δ_1 causado por la distribución de la presión de Hertz en el área de contacto, la otra parte es la compresión de la placa δ_2 causado por el contrafuerza sobre las superficies de contacto, la primera parte δ_1 se expresa como:

$$\delta_1 = \frac{P}{\pi E_1} \left[2 \ln \left(\frac{4R_1}{a} \right) - 1 \right] \quad (2.7)$$

La compresión de un medio en el espacio respecto a un punto a una profundidad d por debajo del centro de una distribución de la presión de contacto, que corresponde a δ_2 , viene dado por:

$$\delta_2 = \frac{P}{\pi E_2} \left[2 \ln \left(\frac{2d}{a} \right) - \nu_2 \right] \quad (2.8)$$

Al tomar $d=R_2$, la compresión de la media-espacio elástico puede ser aproximadamente sustituye por la siguiente:

$$\delta_2 = \frac{P}{\pi E_2} \left[2 \ln \left(\frac{4R_2}{a} \right) - 1 \right] \quad (2.9)$$

El error entre las ecuaciones 2.8 y 2.9 no debe de exceder del 10%, para utilizar la ecuación 2.10 y representar la compresión normal del medio-espacio elástico.

Si el material de los dos cuerpos de contacto son idénticos, $E_1 = E_2 = E^*$, la compresión máxima total se puede escribir como la siguiente fórmula basada en las ecuaciones 2.10.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2P \frac{1}{\pi E^*} \left[\left(\ln \frac{4R_1 R_2}{a^2} \right) - 1 \right] \quad (2.10)$$

La expresión para la relación entre el desplazamiento de compresión máxima total y la carga externa puede ser declarado como

$$\delta = \frac{2P}{\pi E^*} \left[\ln \left(\frac{\pi E^* \Delta R}{P} \right) - 1 \right] \quad (2.11)$$

Algunos autores adoptaron la ecuación 2.11 para representar el comportamiento de contacto en las uniones cilíndricas con holguras. Sin embargo, las condiciones de aplicación de la teoría de Hertz son que las formas de los dos cuerpos de contacto deben ser no conformes y la superficie de contacto debe ser un plano. En cuanto a las articulaciones con holguras cilíndricas, el área de contacto crecerá rápidamente con el radio del pasador en consecuencia del aumento de la carga externa.

2.2 Teoría de Pearson

Cuando la carga aplicada es pequeño o el juego radial es grande, el problema de contacto de Hertz se acerca mucho; el análisis de contacto cilíndrico interior se genera a partir de las ecuaciones de Pearsson descrita por Ciavarella & Decuzzi (2000), suponen un disco de radio R_1 , en el interior de la perforación de radio R_2 en una placa infinita, ambos son de espesor b ,

como se muestra en la Figura 2.3. En el centro del disco se aplica una carga Q . Se introduce una variable ΔR , que es la resta del radio R_2 , menos R_1 , a la que nos referimos como claro.

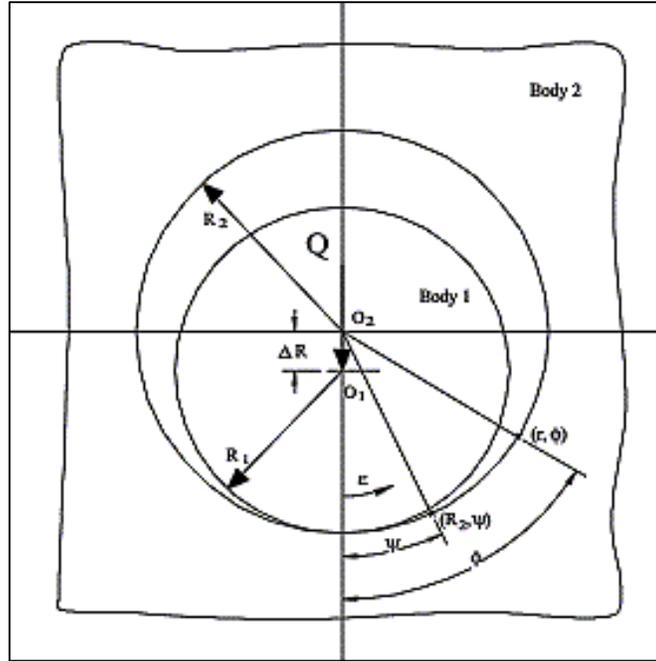


Figura 2.3 Geometría y símbolos utilizados (Ciavarella & Decuzzi, 2000).

Tanto el pasador y la placa están hechas de materiales elásticos isotrópicos. Las siguientes cantidades adimensionales son consideradas por Pearsson (1964):

$E_1^* \Delta R / Q$, parámetro de carga

$\eta = E_1^* / E_2^*$, primer parámetro de material

$\lambda = (1 - \nu_1^*) - \eta(1 - \nu_2^*)$, segundo parámetro de material

Se debe agregar las constantes elásticas para el caso de deformación plana y en el caso de esfuerzo plano.

$$E_i^* = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2}, \nu_i^* = \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \quad (2.12)$$

$$E_i^* = E_i, \nu_i^* = \nu_i \quad (2.13)$$

Para encontrar el semiancho de la zona de contacto ε , la cual se resolvió inicialmente integrando I_b numéricamente y sustituyendo en para encontrar el valor correspondiente:

$$\frac{E^* \Delta R}{Q} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - b^2}{b^2} \right) - \frac{I_b}{\pi^2 b^2 (1 + b^2)} \quad (2.14)$$

$$I_b = \int_{-b}^b \log \frac{\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{b^2 - t^2}}{\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{b^2 - t^2}} \frac{dt}{1 + t^2} \quad (2.15)$$

Donde los parámetros de entrada están en las ecuaciones mostradas, que correspondan a los ángulos de la Ecuación 2.16

Agregando la relación elástica de los materiales se obtiene lo siguiente:

$$y = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad t = \tan\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (2.16)$$

$$\alpha = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (2.17)$$

En el mismo trabajo de Civarella y Decuzzi (2001), se encuentra una simplificación para cuando los dos materiales son similares, de tal modo que pudieron integrar analíticamente para obtener:

$$I_b = -2\pi \log \left[\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right] = \pi \log[1 + b^2] \quad (2.18)$$

De este modo se puede obtener una ecuación, que relaciona el primer parámetro de carga:

$$\frac{E^* \Delta R}{Q} = \frac{(\alpha - 1)(\log[b^2 + 1] + 2b^4) + 2}{\pi(1 + \alpha)(b^2 + 1)b^2} \quad (2.19)$$

Ciaverella y Decuzzi, además encuentran una ecuación para la presión máxima en el centro:

$$q_0 = \frac{2b}{\pi\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{\log[\sqrt{b^2 + 1} + b]}{\pi b^2 (1 + b^2)} \quad (2.20)$$

2.3 Análisis de vibraciones mecánicas en una viga empotrada

Para la solución de una viga empotrada en un extremo se deben emplear ciertas consideraciones para encontrar las frecuencias naturales y formas modales y para su estudio se debe basar en las teorías aplicadas en la de una viga empotrada.

Las ecuaciones se calculan de manera analítica con la ecuación de Euler-Bernoulli, de acuerdo en las ecuaciones de Harris & Piersol (2002).

Frecuencia natural angular

$$\omega_n = A \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \quad (2.21)$$

Donde

E = Módulo de Young

I = Momento de inercia

l = longitud de la viga

μ = masa de la viga

A es el coeficiente de la frecuencia natural para los primeros 5 modos se presenta en la Figura 2.4.

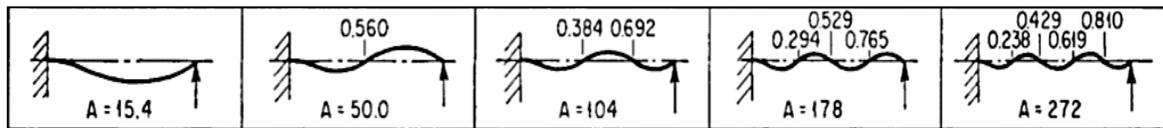


Figura 2.4 Valores de A para diferentes frecuencias naturales

Para este rango de información y el estudio se tomaran las primeras 5 frecuencias naturales.

Se realizan unas conversiones numéricas para adaptar el modelo al sistema internacional (SI), debido a que el libro maneja unidas del Sistema Inglés, como se muestra en la Ecuación 2.22:

$$\omega_n = A_n \sqrt{\frac{EI}{\rho_m A_E l^4}} \quad (2.22)$$

donde:

ρ_m = densidad del material 7850 kg/m³

A_E = sección transversal de la viga

2.4 Ecuaciones estáticas de la deflexión de la viga

Estas condiciones se emplean en la ecuación de Euler-Bernoulli que relaciona el momento flector M de la fuerza aplicada y el radio de curvatura ρ de la barra deformada Beer *et al* (2013)

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (2.23)$$

El radio de curvatura está dada por la siguiente función $y(x)$ es:

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (2.24)$$

Para pequeñas pendientes $(dy/dx)^2 \approx 0$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2.25)$$

Se desprecia el peso de la propia viga, el momento de la fuerza F aplicada en el extremo libre, respecto del punto P (x, y) es $M = F(x_f - x) \approx F(L - x)$ (Beer, Johnston, Dewolf, & Mazurek, 2013)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x) \quad (2.26)$$

Se integra dos veces con las siguientes condiciones iniciales $x=0, y=0, dy/dx=0$.

$$y = \frac{F}{2EI} \left(x^2 - \frac{x^3}{3L} \right) \quad (2.27)$$

El desplazamiento y_f del extremo libre $x=L$ es proporcional a la fuerza F aplicada

$$\Delta = \frac{L^3}{3EI} F \quad (2.28)$$

donde

E : es el módulo de Young del material

I : se denomina momento de inercia de la sección transversal respecto de la fibra neutra

A continuación se realizan los cálculos correspondientes para encontrar la fuerza necesaria para desplazar la viga 10, 7.5, 5 y 2.5 mm, en primer lugar se hace un despeje y se obtiene los resultados Beer *et al* (2013).

$$\frac{\Delta 3EI}{L^3} = F \quad (2.29)$$

2.5 Conexiones de elemento

Los elementos de diferentes tipos se pueden conectar entre sí, pero no de forma totalmente arbitraria, debido a que no hay conexión total, porque un elemento no tiene un nodo igual al otro elemento (Cook, 1995).

La unión de elementos BEAM con elementos 2D planos como se observa en la Figura 2.5-a) el momento no es transferido, sin embargo esta conexión no es recomendable, porque para tal caso debe de esperar las tensiones en el cuerpo del plano y se calcularán con precisión cerca del nodo A debido que se generan grandes esfuerzos en el nodo por tal motivo no es la verdadera forma de unir los elementos. Una forma alternativa de conectar elementos BEAM y elementos planos 2D es como se indica en la Figura 2.5-b), donde el momento es transferido para ambos elementos (Cook, 1995).

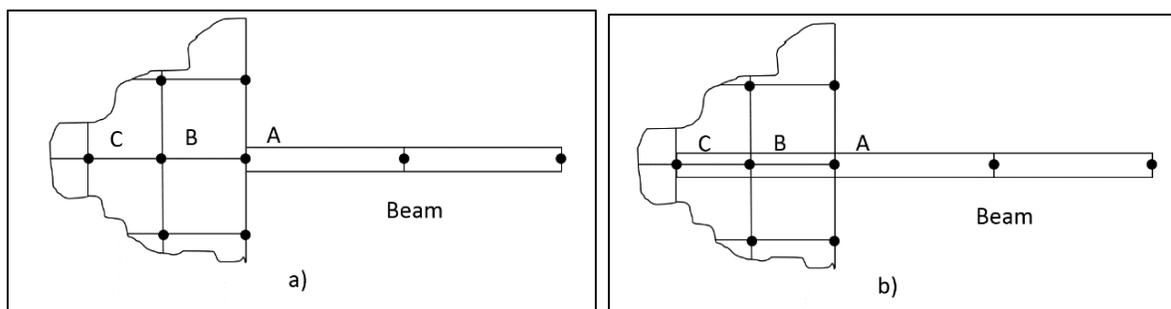


Figura 2.5 Conexión de elementos beam y elementos planos 2D, a) Momento no es transferido b) Momento es transferido (Cook, 1995).

Restricciones

Las restricciones pueden simplemente prescribir un valor numérico de un grado de libertad (d. o. f. por sus siglas en inglés “degree of freedom”) y puede ser entonces llamado un “punto-singular restringido”. El ejemplo más común es la creación de Grados de libertad a cero como una condición de apoyo. A continuación “restricción” se utiliza para significar una relación prescrita entre los Grados de libertad (a veces llamado multipunto restringido) (Cook, 1995).

El problema de la Figura 2.6 es un ejemplo. Es este problema de grados de libertad en los nodos 1 y 2 están restringidos con los nodos 3 y 4 y se sustituyen en los nodos 3 y 4 antes del montaje de los elementos. Una restricción es más o menos lo contrario de la liberación, sin embargo, es una relación de restricción que no necesita ser físicamente adyacentes.

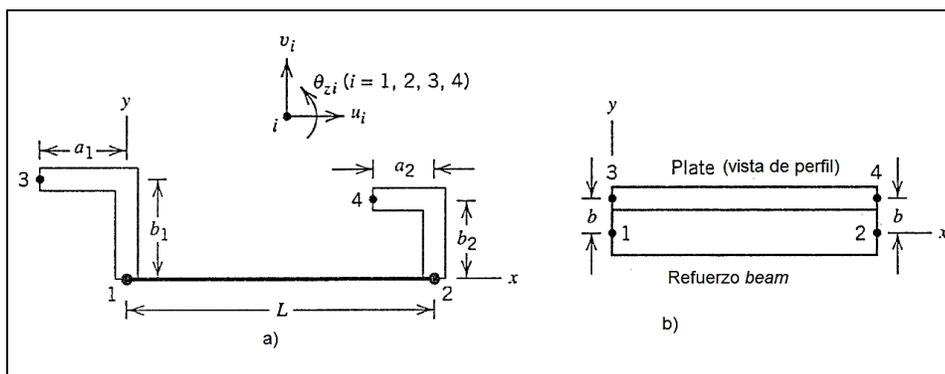


Figura 2.6 Unión de los elementos a) Nodo 1 y 2 son conectados al 3 y 4 por enlaces rígidos (no meramente rígidos) y b) Una aplicación (Cook, 1995).

Una manera de imponer restricción es el uso de transformación, tanto como se describe en la Ecuación 2.1, para eliminar la restricción d. o. f. antes del ensamble de los elementos. Por cada ecuación de restricción, un d. o. f. puede ser eliminado (Cook, 1995).

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_T \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Que se describe como restricción, se puede aplicar ecuaciones globales $\mathbf{KD}=\mathbf{R}$, después de ensamblar los elementos, para anular la relación elástica entre los grados de libertad puede ser restringido. Se describe por dos métodos que se utilizan en el software comercial: El método multiplicador de Langrange, que impone restricciones exactamente, el método de Penalización, que impone restricciones aproximadamente. En primer lugar se ilustraran las ecuaciones de restricción como se menciona (Cook, 1995).

2.6 Condiciones de frontera

Una restricción puede ser usada en un plano del problema de la Figura 2.7. El elemento *beam* tiene movimiento rotacional pero los elementos planos no. Pero se necesita introducir un momento de comunicación en el extremo izquierdo de manera que el nodo 1 no es solo una conexión de articulación.

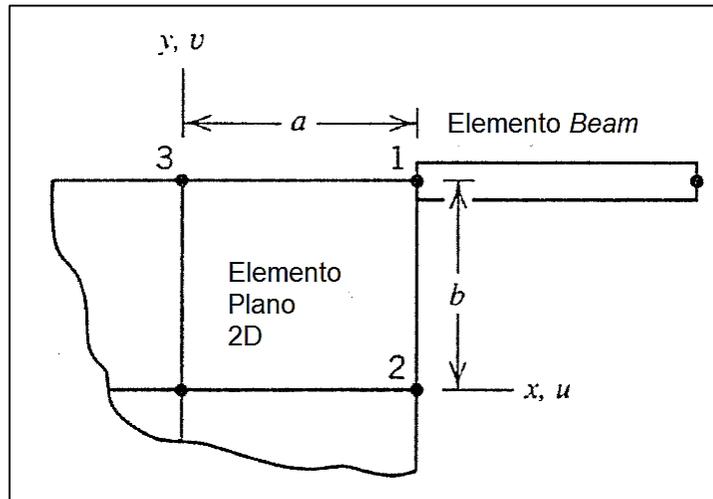


Figura 2.7 Un elemento plano *beam* unido a un elemento plano cuadrilátero (Cook, 1995).

Podremos elegir el nodo 1 y el lado 1-2 tienen la misma rotación, es decir $\theta_{z1} = (u_2 - u_1)/b$. La ecuación de restricción es entonces

$$[1/b \ 0 \ 1 \ -1/b \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]D=0 \quad (2.31)$$

donde $D = [u_1 \ v_1 \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ \dots]^T$ contiene todos los grados de libertad se activan a nivel global (aquí nos ahorramos espacio enumerando solo el d. o. f. necesaria en el ejemplo presente). Es una alternativa, podremos elegir el nodo 1 y lado 3-1 tiene la misma rotación, es decir $\theta_{z1} = (v_1 - v_3)/a$, para la cual la ecuación de restricción es

$$[0 \ -1/a \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1/a \ \dots]D=0 \quad (2.32)$$

Hay muchas alternativas posibles, tal como el uso de u_i y v_i en los nodos 2 y 3 en su lugar, o hacer cumplir la restricción adicional del lado 1-2 y 1-3, que permanecen perpendiculares. Se debe esperar cualquier alternativa proporcionará tensiones exactas cerca del nodo 1 en el cuerpo plano. La ecuación de restricción tiene la forma general

$$CD-Q=0 \quad (2.33)$$

cuando C es una matriz $m \times n$, m es el número de ecuaciones de restricción ($m=1$ en ecuación 2.2 y 2.3), n es el número de grados de libertad en el vector global D . Q es el vector de constantes. A menudo $Q=0$, como es el caso de las ecuaciones 2.32 y 2.33. Se describirán 2 formas de imponer la ecuación 2.6 en la ecuación global $KD=R$ (Cook, 1995).

2.6.1 Método de multiplicadores de Lagrange

Se introduce variables adicionales el multiplicador de Lagrange $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]^T$. Cada ecuación de restricción se escribe de forma homogénea y multiplicando por el correspondiente λ_i , como producto $\lambda^T \{CD-Q\}=0$. A continuación, el lado izquierdo de la ecuación se añade los términos de energía, produciendo una expresión modificada de la energía total (Cook, 1995).

$$\Pi_p = \frac{1}{2} D^T K D - D^T + \lambda^T \{CD-Q\} \quad (2.34)$$

Derivando Π_p con respecto a D_i donde λ_i se convierte en cero, queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ Q \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

La parte inferior indica las particiones de la restricciones de m , si $m=0$ obtenemos el resultado usual de $KD=R$. En la Ecuación 2.35 se resuelve tanto para D y λ . A pesar de una submatriz nula, la solución por eliminación de Gauss no falla si las eliminaciones están

debidamente secuenciadas, porque cuando se introducen las eliminaciones los coeficientes diagonales son diferentes de cero (Cook, 1995).

Como ejemplo, imponemos una restricción $u_1 = u_2$ como se ve en la Figura 2.8-a. Después se introducen todas las condiciones de apoyo, pero no las condiciones de restricción, las ecuaciones globales son como se muestran en la Figura 2.8-b. La ecuación de restricción es

$$C \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{donde } C = [1 \quad -1] \quad (2.36)$$

La ecuación 2.35 se convierte en:

$$\begin{bmatrix} k & -k & 1 \\ -k & 2k & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

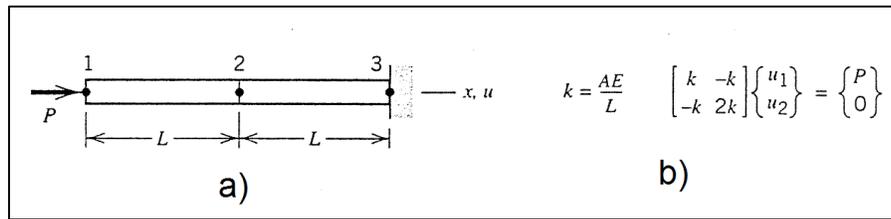


Figura 2.8 a) 2 elementos uniformes tipo barra. A= sección transversal, E= módulo elástico. b) Las ecuaciones globales $KD=R$, con U_1 y U_2 diferente de 0 (d. o. f.)

Resolviendo obtenemos $u_1 = u_2 = P/k$, $\lambda = P$. El signo λ no es significativo, pero es una magnitud considerada como la fuerza de restricción (Cook, 1995).

2.6.2 Método de penalización

Si la ecuación 2.33 es modificada y se escribe $t=CD - Q$, así que $t=0$ implica una satisfacción en la restricción. La expresión de energía análoga de la Ecuación 2.34 es

$$\Pi_p = \frac{1}{2} D^T K D - D^T R + \frac{1}{2} t^T \alpha t \quad (2.38)$$

donde $\alpha = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m]$ es la matriz diagonal “números de penalización” elegido por el analista y de preferencia adimensional. Derivando a Π_p con respecto a $D_1 = 0$, queda como producto

$$[K + C^T \alpha C] D = R + C^T \alpha Q \quad (2.39)$$

donde $C^T \alpha Q$ es llamado “matriz de penalización”. Si $\alpha=0$, la restricción es ignorada. Si α es demasiado grande, la restricción de penalización es violada por ser grande, por lo que la restricción es satisfactoria. Los números de penalización que son demasiados grandes producen una condición numérica inadecuada, que puede ocurrir un resultado de cálculo poco fiable e incluso “bloquear” la malla (Cook, 1995).

Al considerar de nuevo la restricción $u_1 = u_2$ de la Figura 2.8, se obtiene solo una restricción por lo que solo el número de penalización es adimensional, si se elige una matriz de restricción como $C = [\sqrt{k} - \sqrt{k}]$ se convierte en la ecuación

$$\left(\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

que tiene la solución

$$u_1 = \frac{2+\alpha}{1+\alpha} \frac{P}{k} \quad u_2 = \frac{P}{k} \quad (2.41)$$

Si $\alpha = 0$, entonces $u_1 = 2P/k$ y $u_2 = P/k$, que es la solución elástica sin restricciones. Si α es demasiado grande, nos acercamos a la solución de la restricción $u_1 = u_2 = P/k$. Nota si α tiende a infinito, el coeficiente de la matriz en la Ecuación 2.40 sería singular. Así se observa los números de penalización que deben ser suficientemente grandes como para ser eficaz, pero no tan grande para causar dificultades numéricas (Cook, 1995).

Estas teorías mencionadas se emplean para el desarrollo de este trabajo, comprobando las teorías de Hertz y Pearson, las ecuaciones básicas para la comprobación de una viga articulada en el extremo y el método de solución que emplea el método de elemento finito.

Capítulo III

Análisis estático de la unión mecánica

Capítulo 3. Análisis estático de la unión mecánica

El modelo tiene en las siguientes características: una viga de acero estructural A36, con una longitud de 500 mm, sus propiedades con un módulo de Young $E=2 \times 10^{12}$ Pa, módulo de Poisson $\nu=0.26$, límite de fluencia $\delta_f=250$ MPa, además de tener en cuenta las condiciones de frontera, el ajuste, la tolerancia del ensamble y las dimensiones.

Se anexa las condiciones del modelo desplazamiento del bloque en dirección Y, la viga empotrada en un extremo y articulada en el otro extremo, de esta manera se considera el modelo esquemático, como se observa en la Figura 3.1.

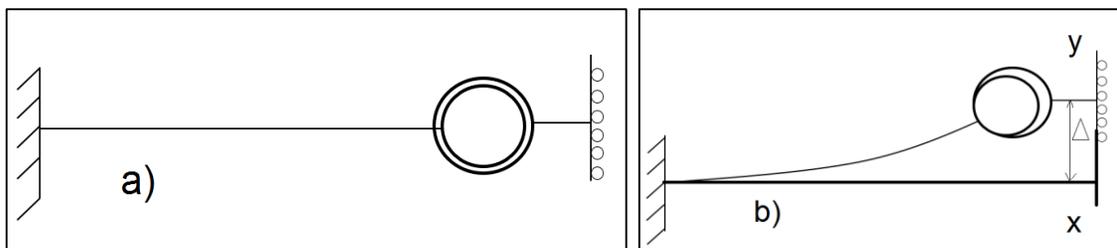


Figura 3.1 Modelo esquemático a) modelo estable y b) modelo deformado.

3.1 Metodología

En el análisis numérico realizado a través del software ABAQUS, se tomaron en cuenta ciertos parámetros y la siguiente metodología:

- 1) El dimensionamiento de las piezas que constituyen el modelo.
- 2) Las propiedades de los materiales: la densidad, el módulo de Young y de Poisson.
- 3) El ensamble de las piezas para el funcionamiento del modelo.
- 4) Las interacciones del modelo: el contacto entre el perno y el bloque, la unión en la viga y el perno (ver anexo C).
- 5) Las condiciones de frontera, el empotre de la viga, el desplazamiento del bloque y las restricciones (ver anexo C).
- 6) El tipo de malla y tamaño de malla, la malla más fina debe ser en la zona de contacto y para el estudio se debe utilizar un mallado de 4×10^{-5} m de longitud entre nodo y nodo vea anexo B.

En el análisis del ensamble se le asigna un desplazamiento de 5 mm como se observa en la Figura 3.2, empotrada en un extremo y articulada en el otro extremo.

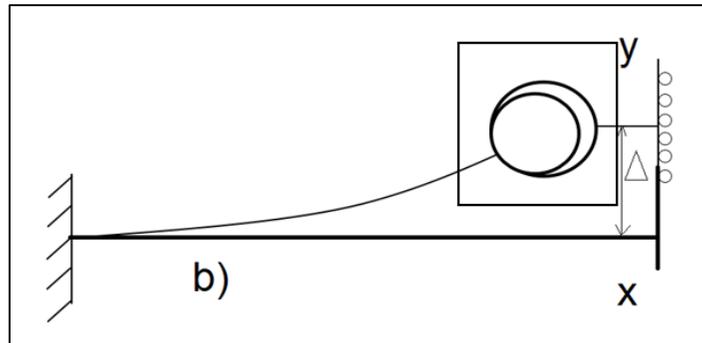


Figura 3.2 Condiciones de frontera del modelo discreto.

3.2 Análisis por flexión

Para determinar la flexión en una viga provocada por una fuerza se debe tener las siguientes consideraciones:

E = módulo de Young del Acero A36 con $E= 2 \times 10^{11}$ Pa

I = Momento de inercia de la sección transversal de la viga es de $6.9358933e^{-11}m^4$

Δ desplazamiento necesario para determinar la fuerza que provoque la deflexión.

El momento de inercia o área de un rectángulo se calcula de la siguiente manera:

$$I = \frac{1}{12} ah^3 \quad (3.1)$$

Se tiene una viga delgada de longitud L en posición horizontal, empotrada por un extremo y sometida a una fuerza vertical F en el extremo libre.

Se determina la deflexión de la viga del extremo libre para pequeñas flexiones de la viga como se observa en la Figura 3.3.

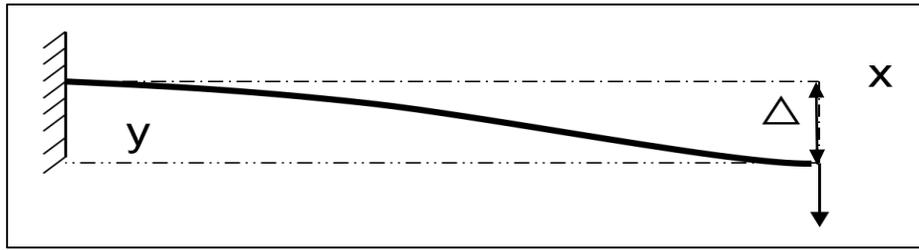


Figura 3.3 Deflexión de la viga.

Considerando

- La viga tiene una longitud L mucho mayor que las dimensiones de su sección transversal, la deformación debida a su propio peso es despreciable.
- La sección de la viga no cambia cuando se dobla. Cuando el espesor de la barra es pequeño comparado con el radio de curvatura, la sección transversal cambia muy poco.

Tabla 3.1 Magnitud de la fuerza con respecto al desplazamiento.

Desplazamiento (mm)	Fuerza (N)
10	3.329
7.5	2.496
5.0	1.664
2.5	0.832

Realizando el análisis numérico se obtiene la fuerza de la flexión como se muestra en la Figura 3.4. La diferencia entre el numérico y analítico es menor a 0.2.

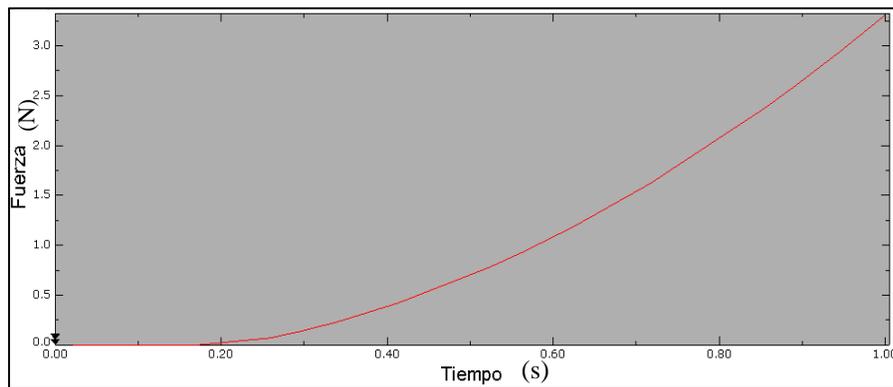


Figura 3.4 Resultado numérico de la fuerza para flexionar la viga.

En este modelo discreto para el ahorro de proceso de cómputo se realiza la viga en tipo *beam* (alambre con las propiedades de una viga), la unión de soldadura entre la viga y el perno,

interacción de contacto entre el perno y el orificio del bloque, por último se empotra en el extremo, véase anexo C.

3.3 Condiciones de frontera

Como se había mencionado anteriormente la viga se empotra en un extremo, se dará un desplazamiento discreto de Δ : 10, 7.5, 5, 2.5 mm al bloque, se restringirá el movimiento en X y la rotación XY , solo se permite el desplazamiento en Y al bloque.

En la Figura 3.5, se observa las condiciones de frontera.



Figura 3.5 Visualización de las condiciones de frontera del diseño.

3.4 Dimensión de malla

El elemento de malla aplicado para el sistema en la zona de contacto es cuadrícula, realizando la comprobación de la teoría de Hertz (vea anexo 2), se determinó la dimensión de la malla, debido a, un estudio de convergencia de malla, se obtuvo la dimensión de 4×10^{-8} m de espacio entre nodo y nodo (0.04mm), para el modelo se contó con 711 nodos en la viga, 18370 nodos en el perno y 20618 nodos en el bloque como se muestra en la Figura 3.6.

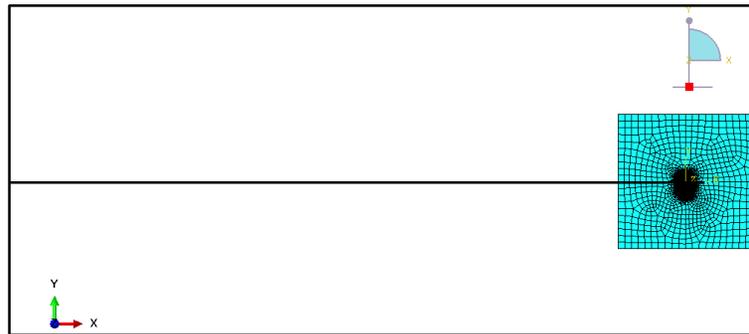


Figura 3.6 Mallado del modelo.

Además como se explicó se necesita una malla fina en la zona de contacto para obtener los valores adecuados, como se aprecia en la Figura 3.7, en esta zona la malla tiene la dimensión descrita anteriormente.

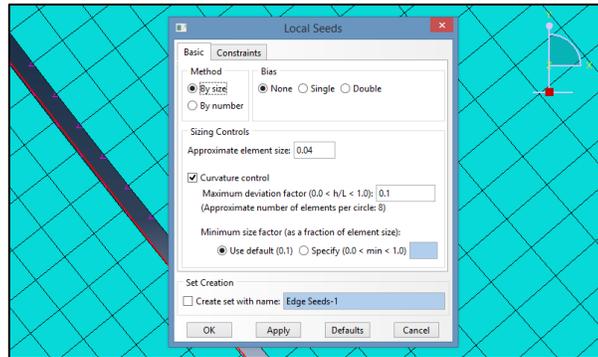


Figura 3.7 Tamaño de la malla en la zona de contacto.

3.5 Resultados del análisis numérico estático con fricción

Al incluir la fricción en los elementos, los resultados mostrados varían en la concentración de esfuerzos de la zona de contacto, debido a, las siguientes características: el modelo con las mismas consideraciones, pero con un coeficiente de fricción variable en la unión, con diferencia de radios $\Delta R= 0.1$ y un desplazamiento de $\Delta= 10$ mm del bloque.

Con los resultados obtenidos se realiza una comparación de los esfuerzos en la zona contacto como se describe en la siguiente Tabla 3.2 de los valores obtenidos, variando el coeficiente de fricción.

Tabla 3.2 Comparación de los esfuerzos de contacto variando el coeficiente de fricción.

Coeficiente de fricción (μ)	Esfuerzos von Mises (MPa)
0.00	0.785
0.05	0.789
0.10	0.798
0.15	0.813
0.20	0.839
0.25	0.875
0.30	0.917
0.35	0.958
0.40	1.002
0.45	1.050
0.50	1.091
0.55	1.135
0.60	1.185

Para medir el ángulo de inclinación se utiliza el software ABAQUS midiendo la tendencia del esfuerzo en la zona de contacto, como se muestra en la Figura 3.8, como se observa el ángulo de contacto debido a la tensión de la viga y la holgura haciendo un contacto puntual.

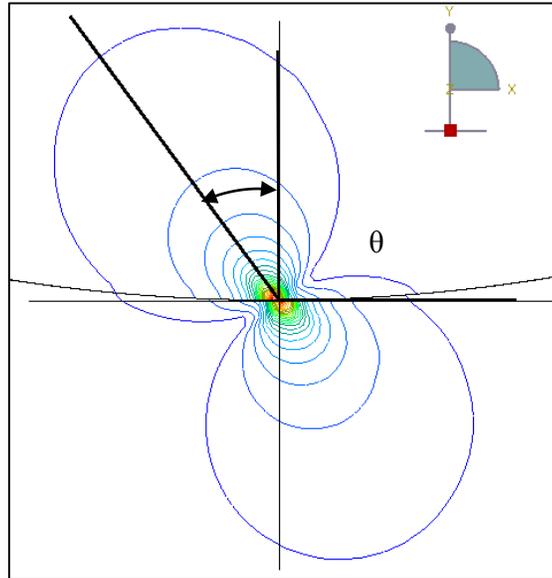


Figura 3.8 Medición del ángulo de contacto.

En la Tabla 3.3 se muestra el cambio de ángulo de la concentración de esfuerzos en la zona de contacto variando el coeficiente de fricción.

Tabla 3.3 Ángulo de inclinación de la concentración de esfuerzos con respecto al coeficiente de fricción.

Von Mises (Pa)	Coefficiente de fricción μ	Diagrama	Ángulo de la concentración de esfuerzos θ (°)
1.185 MPa	0.6		30.01
1.091 MPa	0.5		27.64

Tabla 3.3 Ángulo de inclinación de la concentración de esfuerzos con respecto al coeficiente de fricción.
 (continuación)

1.002 MPa	0.4		22.01
917 kPa	0.3		18.87
839 kPa	0.2		11.02
798 kPa	0.1		5.91
785 kPa	0.0		0

A continuación en la Figura 3.9 se muestra la gráfica de los valores de la concentración de esfuerzos en la zona de contacto y la tendencia de la influencia de la fricción.

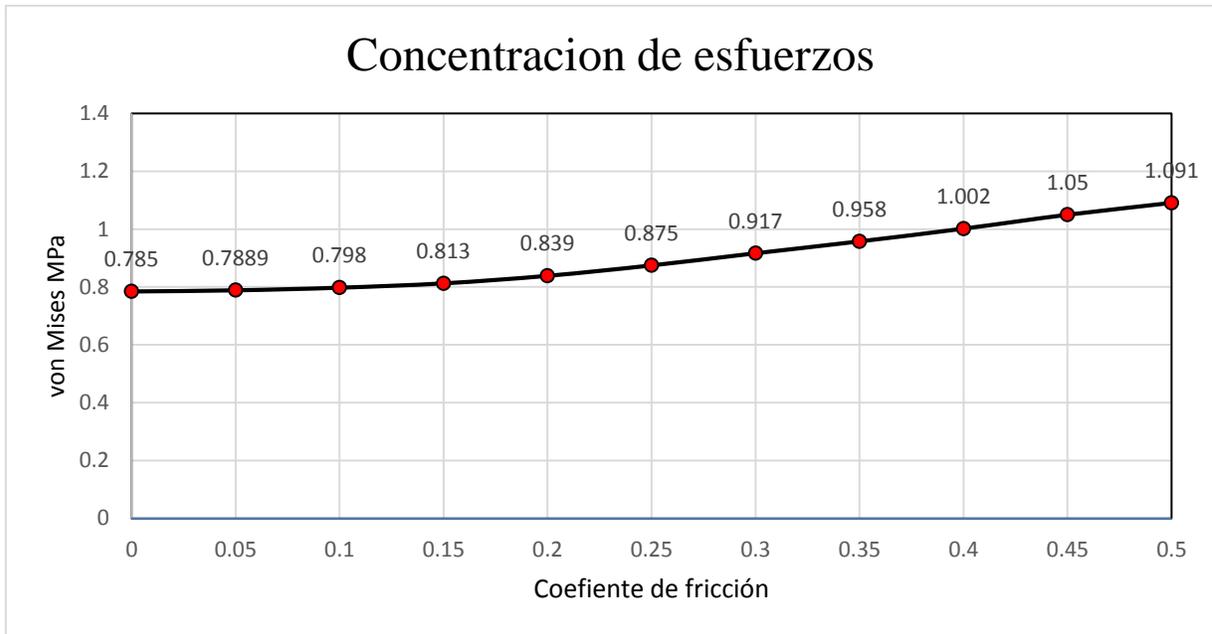


Figura 3.9 Gráfica de la tendencia del efecto de la fricción en la concentración de esfuerzos en la zona de contacto.

En la Figura 3.10 se observa la tendencia del coeficiente de fricción con respecto a los esfuerzos, en la gráfica se observa la relación que existe entre el ángulo y el coeficiente de fricción.

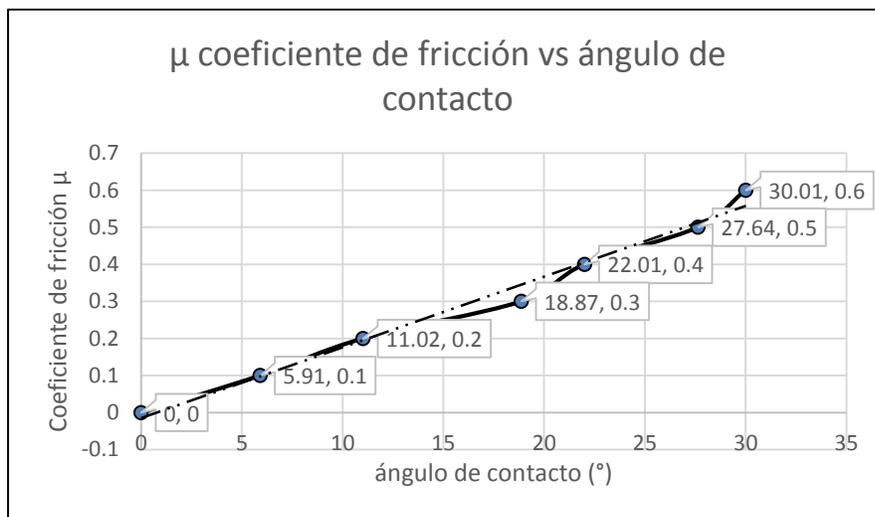


Figura 3.10 Tendencia del coeficiente de fricción con respecto a los esfuerzos

Al incluir la no linealidad geométrica en el modelo se tienen diversos efectos, como se describe en el siguiente capítulo.

Capítulo IV

Análisis dinámico de la unión mecánica

Capítulo 4. Análisis dinámico de la unión mecánica

Al incluir todas las consideraciones en el análisis numérico, para poder obtener todos los valores parecidos a la realidad se debe emplear el software de elemento finito ABAQUS y el cual tiene la opción de incluir la no linealidad geométrica.

El estudio de análisis de frecuencias naturales se ha obtenido a través de las ecuaciones de Euler-Bernoulli (Harris & Piersol, 2002), considerando una viga empotrada y apoyada en el extremo, además de no tener en consideración la fricción, como se denota en la siguiente Ecuación 2.22:

$$\omega_n = A_n \sqrt{\frac{EI}{\rho_m A_E l^4}}$$

donde

ω_n = frecuencia angular natural

A_n = coeficiente para cada frecuencia angular

E = módulo de Young

I = Momento de inercia de la sección transversal de la viga

ρ_m = densidad del material

A_E = Área de sección transversal de la viga

l = longitud de la viga

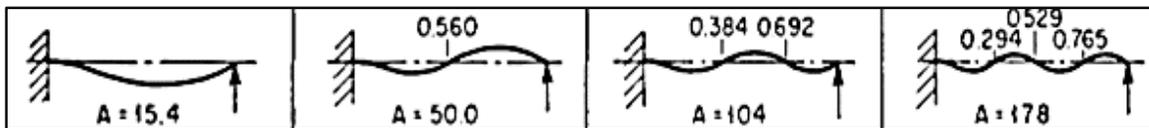


Figura 4.1 Valor de A para cada frecuencia natural

4.1 Metodología

El análisis numérico realizó a través del software Abaqus (2012), para emplear el análisis numérico se debe tener en cuenta ciertos parámetros, además de una metodología idónea que lleva los siguientes puntos:

- 1) El dimensionamiento de las piezas que constituyen el modelo.

- 2) Las propiedades de los materiales, como la densidad, el módulo de Young y de Poisson.
- 3) El ensamble de las piezas para el buen funcionamiento del modelo.
- 4) Las interacciones del modelo como el contacto entre el perno y el bloque y el tipo de unión que existe en la viga y el perno.
- 5) Las condiciones de frontera, el empotre de la pieza, el desplazamiento del bloque y las partes que no se deben mover.
- 6) El tipo y el dimensionamiento de mallado, el cual debes ser más fino en la zona de contacto; para este estudio se debe utilizar un mallado de 4×10^{-5} m de longitud entre nodo y nodo.
- 7) Para el estudio se anexa la siguiente función como se observa en la Figura 4.2.

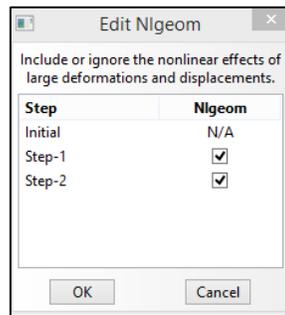


Figura 4.2 Función para activar la no linealidad geométrica.

En la Figura 4.3 se muestran las dimensiones de la utilizada para el modelo.

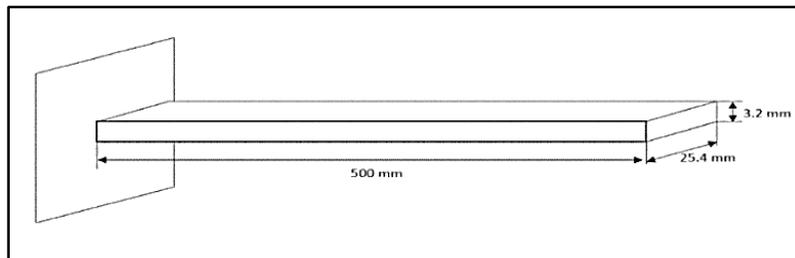


Figura 4.3 Dimensión de la viga.

donde

$$a = 0.0254 \text{ m}$$

$$h = 0.0032 \text{ m}$$

$$\rho_m = \text{densidad del material } 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$A_E = \text{Área de sección transversal de la viga es } 8.125 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$l = \text{longitud de la viga es de } 0.5 \text{ m}$$

Sustituyendo valores en la Ecuación 2.22 se presentan los siguientes resultados mostrados en la Tabla 4.1

Tabla 4.1 Resultado de los valores de la Ecuación 2.22.

Número de frecuencia	Frecuencia angular (rads/s)	Frecuencia (Hz)
1	287.27	45.72
2	932.71	148.44
3	1865.43	308.76
4	3320.47	528.46

4.2 Análisis numérico sin fricción

De acuerdo con la metodología aplicada en el modelo, se obtiene los siguientes valores, considerando que no se tiene fricción como se muestran en la Figura 4.4.

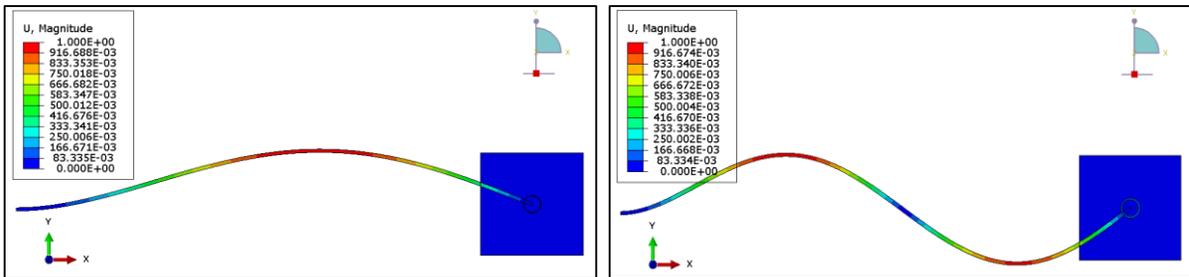


Figura 4.4 a) Primera y b) segunda forma modal del modelo sin fricción.

En la Figura 4.4 a) se muestra la primera frecuencia natural teniendo un valor de 45.071 Hz y la forma modal que se obtiene con respecto a la unión, b) se muestra la segunda forma modal y frecuencia natural de 145.94 Hz.

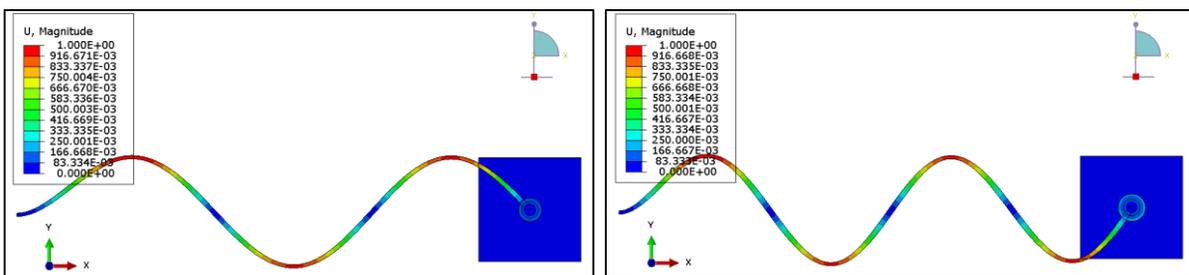


Figura 4.5 a) Tercera y b) cuarta forma modal del modelo sin fricción

En la Figura 4.5 a) se muestra la tercera forma modal y frecuencia natural de 303.51 Hz., y b) la cuarta frecuencia natural de 519.22 Hz y su respectiva forma modal.

Tabla 4.2 Comparación de los resultados analíticos y numéricos.

	Frecuencia natural analítica (Hz)	Frecuencia natural numéricamente (Hz)	Porcentaje de diferencia (%)
f_{n1}	45.72	45.071	1.42
f_{n2}	148.44	145.94	1.68
f_{n3}	308.76	303.51	1.7
f_{n4}	528.46	519.22	1.74

En la Tabla 4.2 se muestran los valores obtenidos de forma numérica y analítica, manteniendo un margen de error de menos del 2% en todos los valores; teniendo en cuenta estas consideraciones el diseño ha comprobado de manera correcta.

4.3 Análisis numérico con fricción

El análisis empleado para el cálculo de frecuencias naturales hasta el momento solo ha sido numérico, para validar las ecuaciones se debe emplear ciertas consideraciones como la influencia de la fricción y la rigidez de la viga para obtener los valores correspondientes.

En la Figura 4.6, a) se muestra la primera frecuencia natural con un coeficiente de fricción de 0.3, con un desplazamiento de 10 mm del bloque en dirección Y con una frecuencia de 64.882 Hz y b) segunda frecuencia natural con 178.68 Hz.

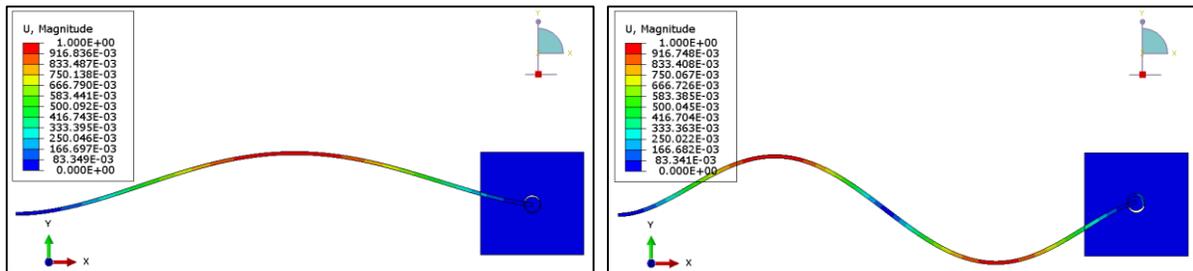


Figura 4.6 a) Primera y b) Segunda forma modal con un coeficiente de fricción de 0.3

En la Figura 4.7 a) se muestra la tercera frecuencia natural y forma modal, con un valor de 349.81 Hz. y b) finalmente se muestra la cuarta frecuencia natural y forma modal con un valor de 577.07 Hz.

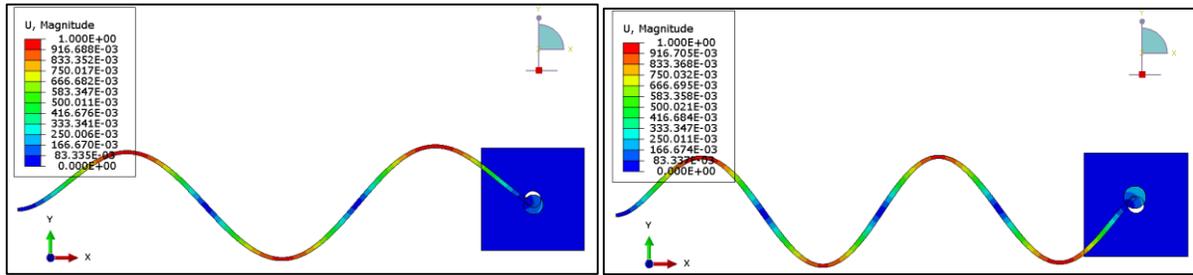


Figura 4.7 a) Tercera y b) Cuarta forma modal con un coeficiente de fricción de 0.3.

4.4 Comparación de resultados de frecuencias con y sin fricción

Al analizar el efecto producido por la fricción en una unión con una holgura de 0.2mm, los resultados esperados son completamente diferentes, para ello se determina el porcentaje de diferencia para verificar la influencia de la fricción.

En la Tabla 4.3, se muestra la diferencia entre los valores de la frecuencia natural sin fricción y con fricción, se debe tener en cuenta que esta relación no es comparable por consecuencia de la fricción en el sistema. Sin embargo, se hace la comparación para mostrar la diferencia entre ellas.

Tabla 4.3 Comparación de las frecuencias sin fricción y con fricción.

	Frecuencia natural numéricamente sin fricción (Hz)	Frecuencia natural numéricamente con fricción (Hz)	Porcentaje de diferencia (%)
f_{n1}	45.071	64.882	30.53
f_{n2}	145.94	178.68	18.32
f_{n3}	304.13	349.81	13.05
f_{n4}	519.22	577.01	10.01

En la Figura 4.8 se muestra la tendencia de los efectos de la frecuencia natural incluyendo la fricción, con respecto al que no tiene fricción. Este parámetro puede incluir un estudio más para determinar el efecto de la fricción en las uniones mecánicas.

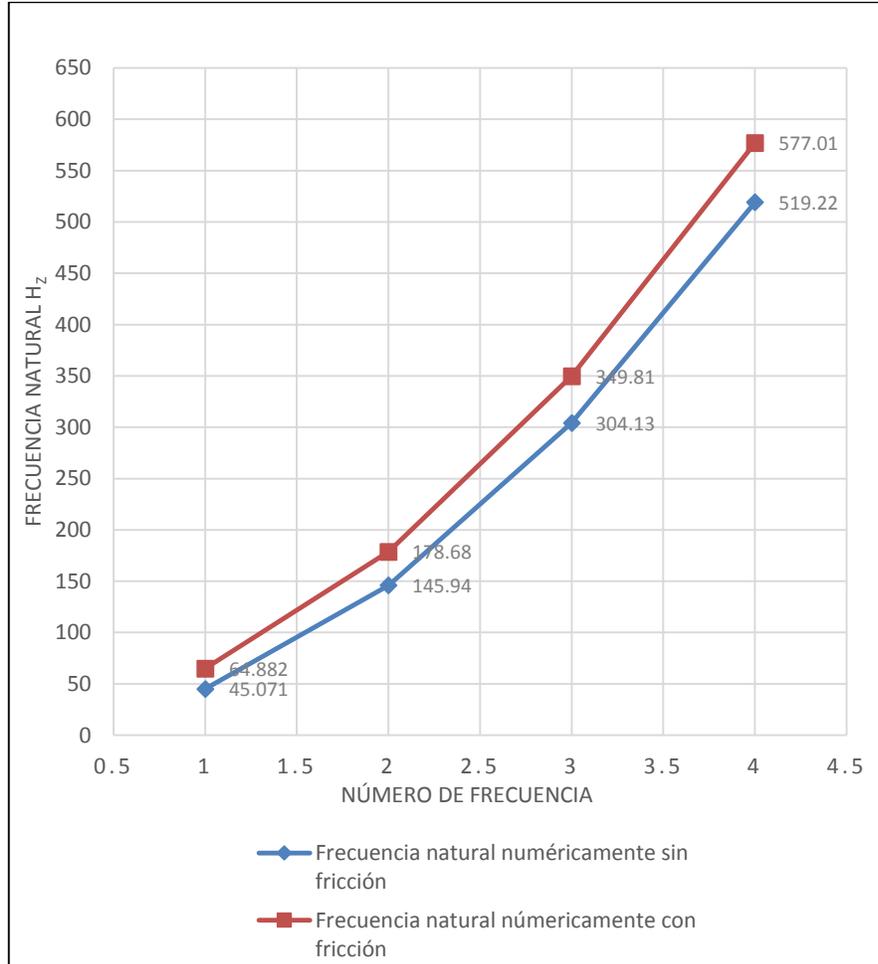


Figura 4.8 Gráfica de la comparación de las frecuencias naturales sin fricción y con fricción.

4.5 Análisis numérico empleando diferentes configuraciones.

Para el estudio de las frecuencias naturales se toman diferentes configuraciones para determinar los límites máximos y mínimos del estudio numérico del modelo, como condiciones iniciales se muestran: a) una viga en voladizo refiriéndose cuando en la unión no hay contacto como se observa en la Figura 4.9a, b) una viga empotrada desplazada en dirección Y $\Delta=5\text{mm}$, articulada en el otro extremo sin fricción como se observa en la Figura 4.9b, y 3) una viga empotrada en ambos extremos pero uno de ellos desplazada en un lado en dirección Y $\Delta=5\text{mm}$ como se observa en la Figura 9.12c.

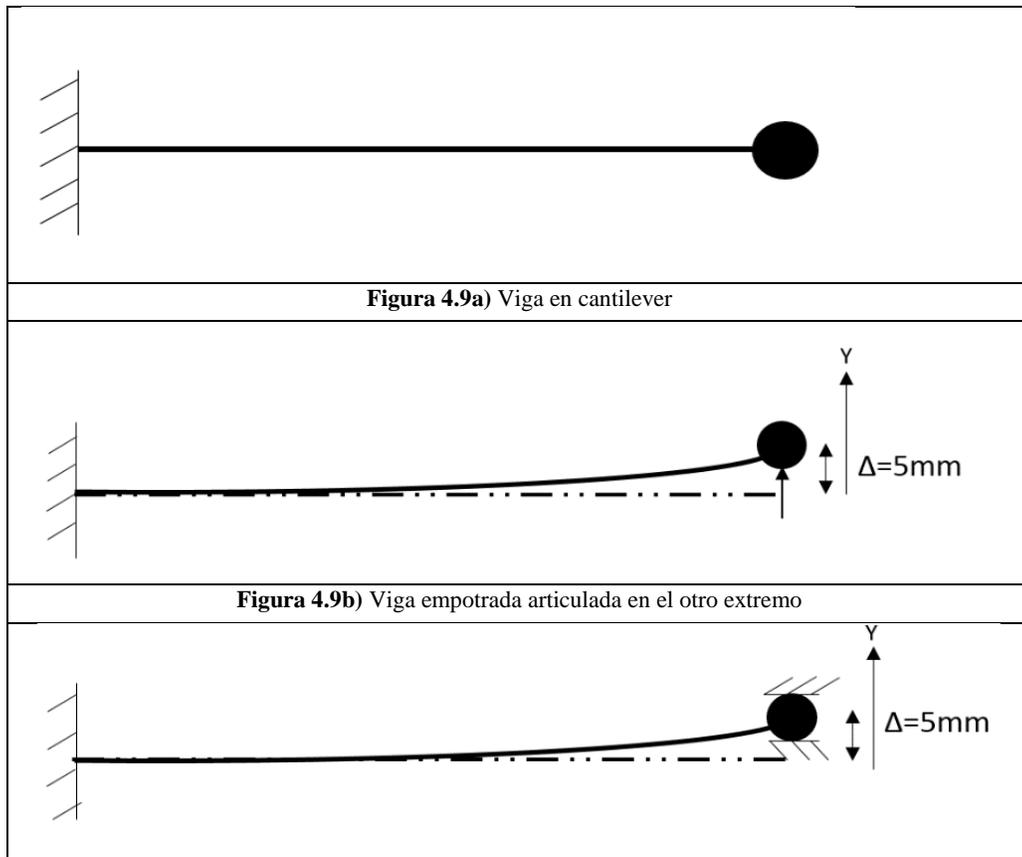


Figura 4.9c) Viga empotrada ambos extremos pero desplazada a 5 mm en un extremo.

En la Tabla 4.4 se muestran los valores obtenidos de acuerdo a las diferentes configuraciones mencionadas anteriormente, se observa la forma modal y la frecuencia de cada una.

Tabla 4.3 Frecuencias y formas modales de los diferentes configuraciones.

fn			
1	<p>U, Magnitude</p> <p>1.000e+00 1.167e-01 6.333e-01 7.299e-01 6.667e-01 3.813e-01 3.000e-01 1.167e-01 3.333e-01 2.299e-01 1.667e-01 1.134e-02 0.000e+00</p> <p>Step: Step-1 Mode 1: Value = 2965.0 Freq = 8.5188 (cycles/time)</p>	<p>U, Magnitude</p> <p>1.000e+00 1.167e-01 6.333e-01 7.299e-01 6.667e-01 3.813e-01 3.000e-01 1.167e-01 3.333e-01 2.299e-01 1.667e-01 1.134e-02 0.000e+00</p> <p>Step: Step-2 Mode 1: Value = 1.82368E+05 Freq = 67.966 (cycles/time)</p>	<p>U, Magnitude</p> <p>1.000e+00 1.167e-01 6.333e-01 7.299e-01 6.667e-01 3.813e-01 3.000e-01 1.167e-01 3.333e-01 2.299e-01 1.667e-01 1.134e-02 0.000e+00</p> <p>Step: Step-3 Mode 1: Value = 2.99531E+05 Freq = 81.080 (cycles/time)</p>
	8.51 Hz	67.966 Hz	81.080 Hz

Tabla 4.3 Frecuencias y formas modales de los diferentes configuraciones.

fn 2			
	56.320 Hz	187.29 Hz	208.65 Hz
fn 3			
	162.41 Hz	366.99 Hz	388.70 Hz
fn 4			
	324.53 Hz	606.29 Hz	630.43 Hz

Para el estudio se realizan diferentes configuraciones que se presentan en la literatura para determinar los límites en los que se encuentran los resultados del modelo. En el estudio de una unión mecánica se observa el comportamiento que tiene con respecto al análisis, a continuación se muestran las gráficas con la tendencia que tienen las frecuencias naturales con respecto al estudio realizado. En la Tabla 4.5 se muestra la comparación de las frecuencias naturales con los diferentes tipos modelos de la viga.

Tabla 4.5 Comparación de la frecuencias con diferentes configuraciones.

	fn1	fn2	fn3	fn4
Libre	8.51	56.32	162.41	324.53
Apoyada 5mm	67.966	187.29	366.99	606.29
Empotrada ambos extremos, un extremo 5mm	81.080	208.65	388.70	630.43

En la Figura 4.10 se observa en la gráfica la tendencia de las frecuencias con diferentes configuraciones.

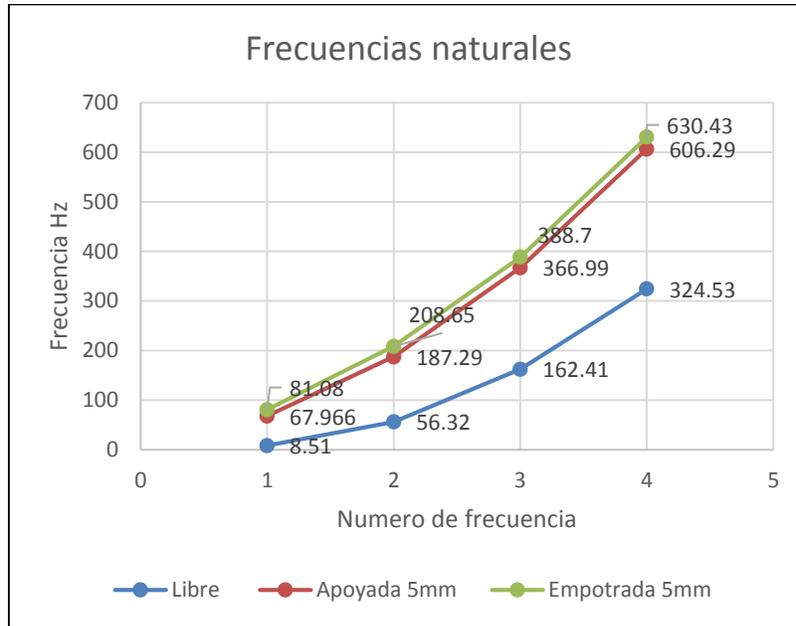


Figura 4.10 Gráfica de la tendencia de las frecuencias con diferentes configuraciones.

4.6 Resultado del análisis numérico del ajuste H7/h6

Para determinar el tamaño de holgura se tomara en cuenta de la Tabla 4.6, de acuerdo a la norma: un ajuste H7/h6 es un ajuste fino en la holgura, proporciona un ajuste firme para la ubicación de partes fijas, tiene un claro mínimo de cero para piezas que requieren exactitud en la fijación pero pueden desensamblarse libremente. El ajuste H7/f7 es un ajuste fino con juego normal, es utilizado para ajustes giratorios con poco juego, se utiliza en bielas y cojinetes. El ajuste H7/c11 es un ajuste con juego amplio, es utilizado para piezas sometidas a mucha diferencia de temperatura o ambiente polvoso (Guzmán, 2009).

Tabla 4.6 Diferentes tipos de ajuste con holgura (Guzmán, 2009).

Ajuste	Ø Agujero (mm)	Ø Perno (mm)	Holgura mínima (mm)	Holgura máxima (mm)
16H7/h6	$16^{+0.018}_{-0.000}$	$16^{+0.000}_{-0.011}$	0	0.011
16H7/f7	$16^{+0.018}_{-0.000}$	$16^{-0.016}_{-0.034}$	0.016	0.052
16H7/c11	$16^{+0.018}_{-0.000}$	$16^{-0.095}_{-0.205}$	0.095	0.223

En la Figura 4.11 se muestra el modelo utilizado.

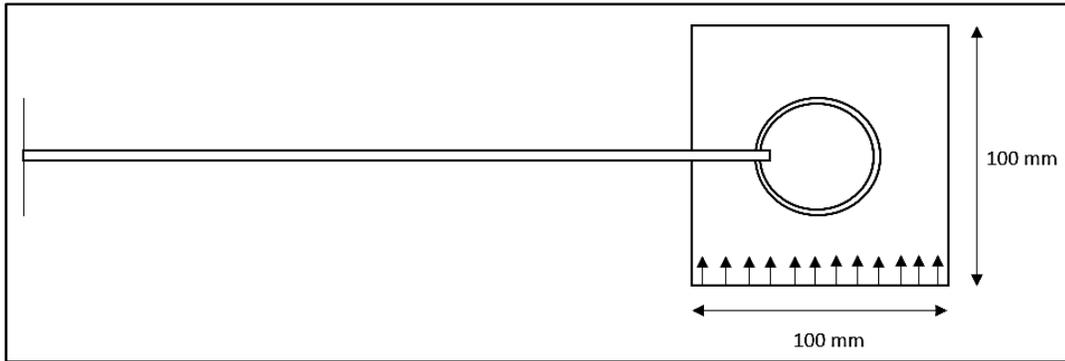


Figura 4.11 Configuración de modelo.

Datos

Ø del agujero 16mm

Ø del perno 15.989 mm

Longitud de la viga 500 mm

Dimensión del bloque 100 x 100 mm

Acero estructural

Módulo de Poisson de 0.26

Módulo de elasticidad 200 GPa

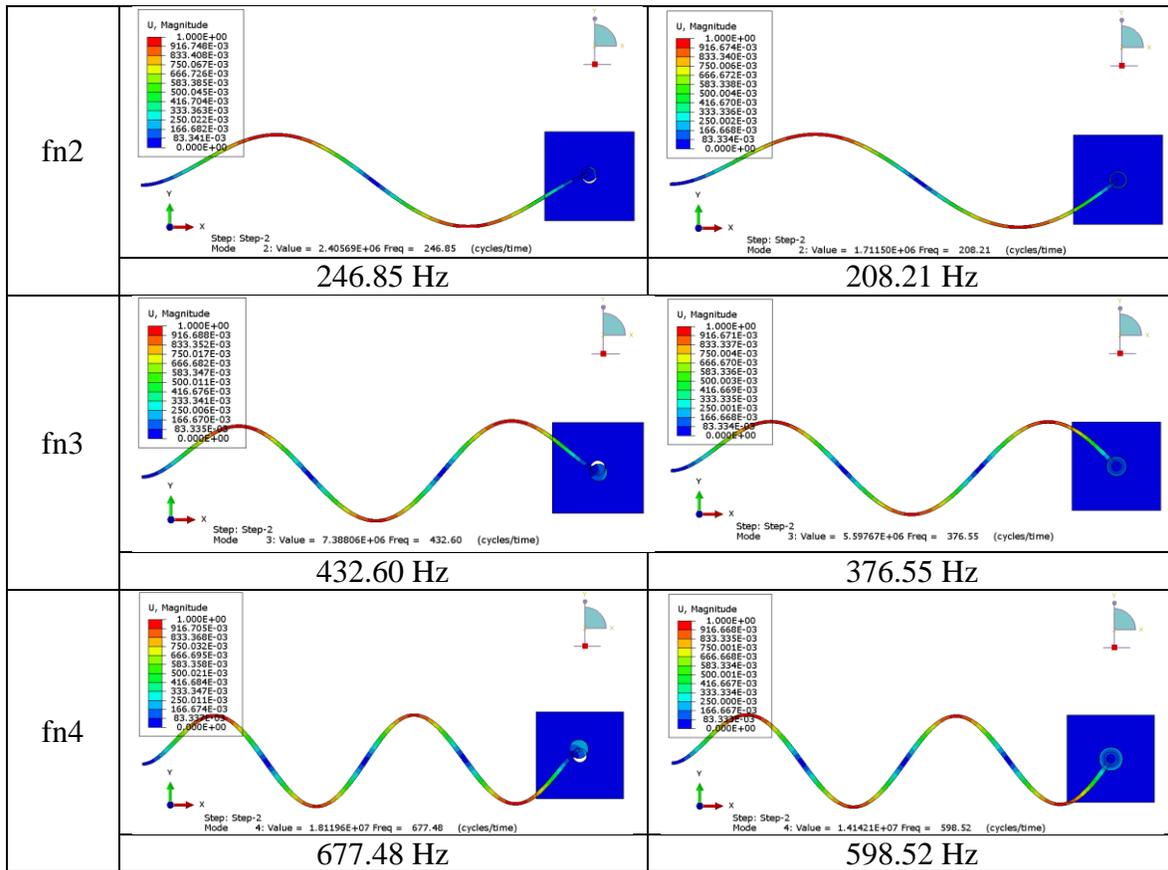
μ = coeficiente de fricción de 0.3

Para el estudio se muestra en la Tabla 4.7 las frecuencias naturales y formas modales del ajuste H/h6 utilizando un coeficiente de fricción de 0.3 con respecto al de sin fricción. Como se observa en la tabla se ve la influencia de la fricción.

Tabla 4.7 Resultados del análisis numérico del ajuste H7/h6 con un desplazamiento de 10 mm y con una fricción de 0.3 y sin fricción.

Ajuste H7/h6		
$\Delta=10$ mm	$\mu=0.3$	$\mu=0$
fn1	<p style="text-align: center;">105.36 Hz</p>	<p style="text-align: center;">87.961 Hz</p>

Tabla 4.7 Resultados del análisis numérico del ajuste H7/h6 con un desplazamiento de 10 mm y con una fricción de 0.3 y sin fricción (continuación).



En esta sección solo se presentan los casos máximos y mínimos del modelo con el ajuste H7/h6, donde se tiene un desplazamiento de $\Delta=10$ mm, además con un coeficiente de fricción de $\mu=0.3$ y sin fricción. En el capítulo V se presentan en graficas con los desplazamientos de 2.5, 5, 7.5 y 10 mm.

4.7 Resultado del análisis numérico del ajuste H7/f7

Para el estudio se debe considerar las siguientes características, el que se modifica es el diámetro del perno, se emplea un agujero base de 16 mm de diámetro.

Datos

Ø del agujero 16mm

Ø del perno 15.97 mm

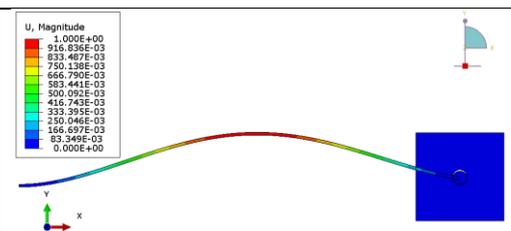
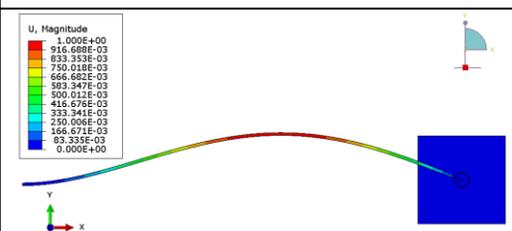
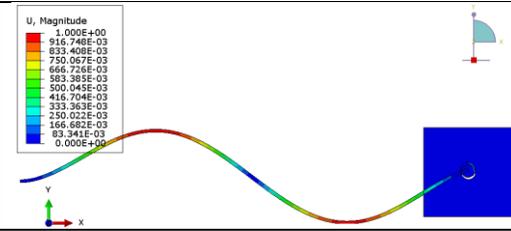
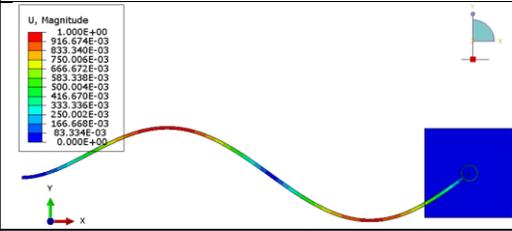
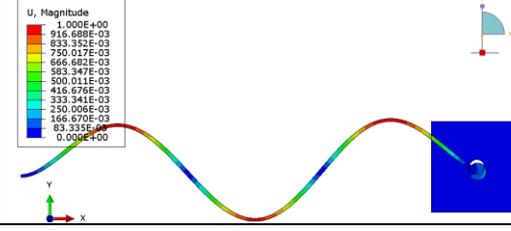
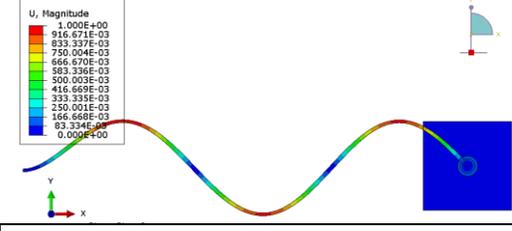
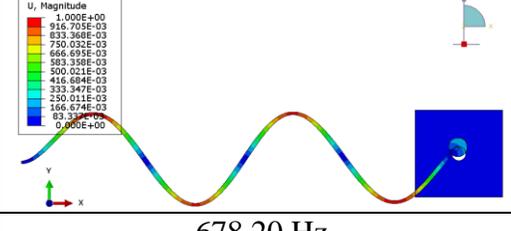
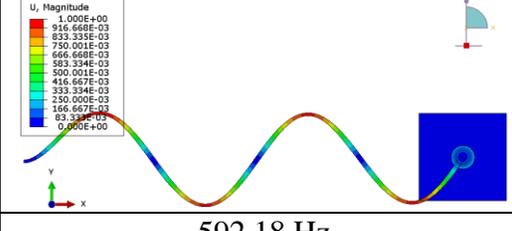
Longitud de la viga 500 mm

Dimensión del bloque 100 x 100 mm

Acero estructural
Módulo de Poisson de 0.26
Módulo de elasticidad 200 GPa
 μ = coeficiente de fricción de 0.3

La metodología es la misma que se ha empleado en el anterior modelo, con las consideraciones de desplazamiento de Δ de 10 mm, un coeficiente de fricción μ de 0.3, solo variando el diámetro del perno; los resultados del ajuste H7/f7 se muestran en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8 Resultados del análisis numérico del ajuste H7/f7 con un desplazamiento de 10 mm y con una fricción de 0.3 y sin fricción.

Ajuste H7/f7		
$\Delta=10$ mm	$\mu=0.3$	$\mu=0$
fn1	 102.06 Hz	 85.152 Hz
	 240.42 Hz	 203.53 Hz
fn3	 425.10 Hz	 370.81 Hz
	 678.20 Hz	 592.18 Hz

4.8 Resultado del análisis numérico del ajuste H7/c11

En el ajuste H7/c11 existe una tolerancia entre 0.095 a 0.223 mm de diferencia entre el agujero base y se tomara un valor intermedio de aproximadamente con una holgura de 0.1 mm, el diámetro de agujero base es de 16mm.

Datos

Ø del agujero 16mm

Ø del perno 15.9 mm

Longitud de la viga 500 mm

Dimensión del bloque 100 x 100 mm

Acero estructural

Módulo de Poisson de 0.26

Módulo de elasticidad 200 GPa

μ = coeficiente de fricción de 0.3

La metodología es la misma que se ha empleado en el anterior modelo, con las consideraciones de desplazamiento de Δ de 10 mm, un coeficiente de fricción μ de 0.3, solo variando el diámetro del perno los resultados se muestran en la Tabla 4.9.

Tabla 4.9 Resultados del análisis numérico del ajuste H7/c11 con un desplazamiento de 10 mm y con una fricción de 0.3 y sin fricción.

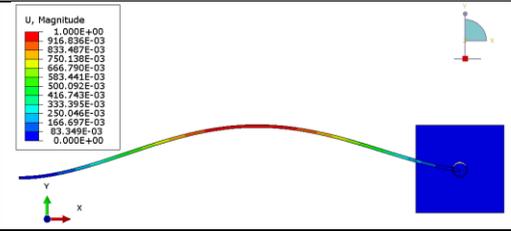
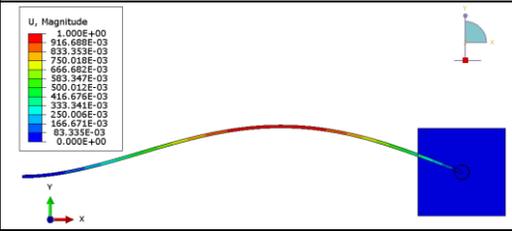
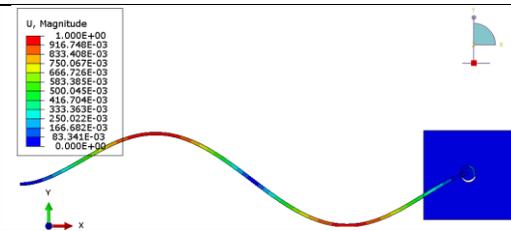
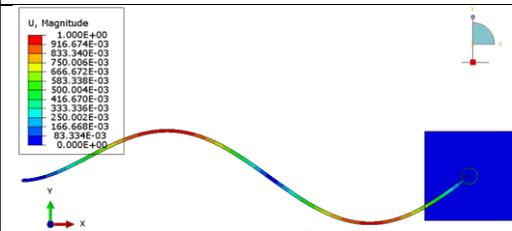
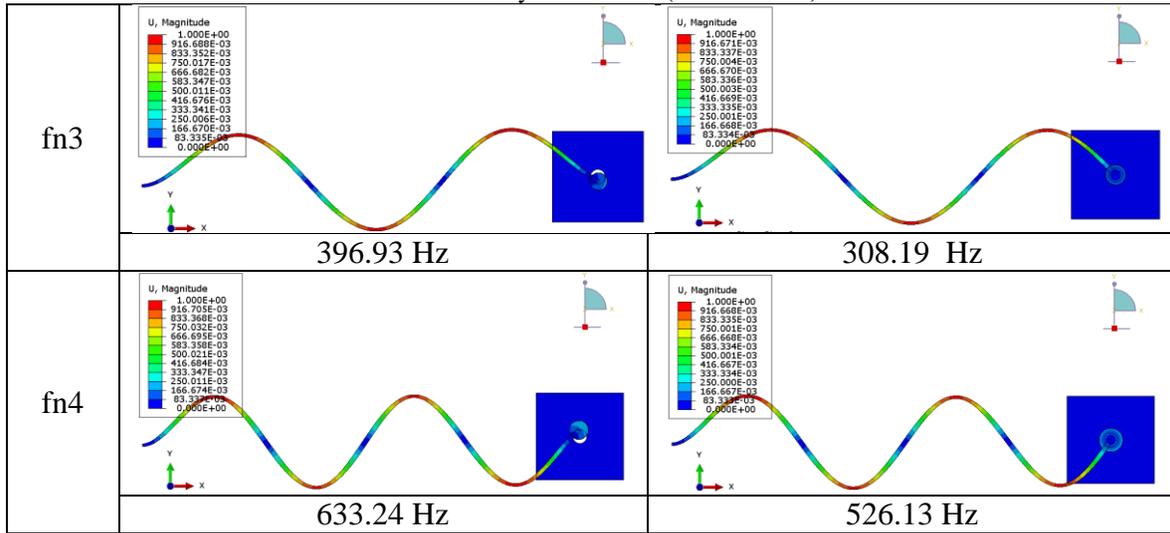
Ajuste H7/c11			
$\Delta=10$ mm	$\mu=0.3$	$\mu=0$	
fn1			
fn2			

Tabla 4.9 Resultados del análisis numérico del ajuste H7/c11 con un desplazamiento de 10 mm y con una fricción de 0.3 y sin fricción (continuación).



Se realiza una comparación a causa del efecto de los cambios en la frecuencia natural al considerar un coeficiente de fricción de $\mu=0.3$ y un desplazamiento de $\Delta=10$ mm.

Tabla 4.10 Resultados de los ajustes con fricción.

$\Delta = 10$ mm/ $\mu=0.3$	H7/h6	H7/f7	H7/c11
fn1 (Hz)	105.36	102.06	90.533
fn2 (Hz)	246.85	240.42	217.46
fn3 (Hz)	432.6	425.1	396.93
fn4 (Hz)	677.48	678.2	633.24

Los valores obtenidos en las frecuencias naturales se hacen con las consideraciones mencionadas anteriormente; en el capítulo V se muestran los valores obtenidos a través de los diferentes desplazamientos tomando en cuenta la fricción para todos los casos y el tipo de ajuste normalizado.

En la Figura 4.12 la gráfica se observa la tendencia que se tiene debido al efecto de la holgura y se ve modifica la frecuencia natural en cada ajuste con un coeficiente de fricción de 0.3.

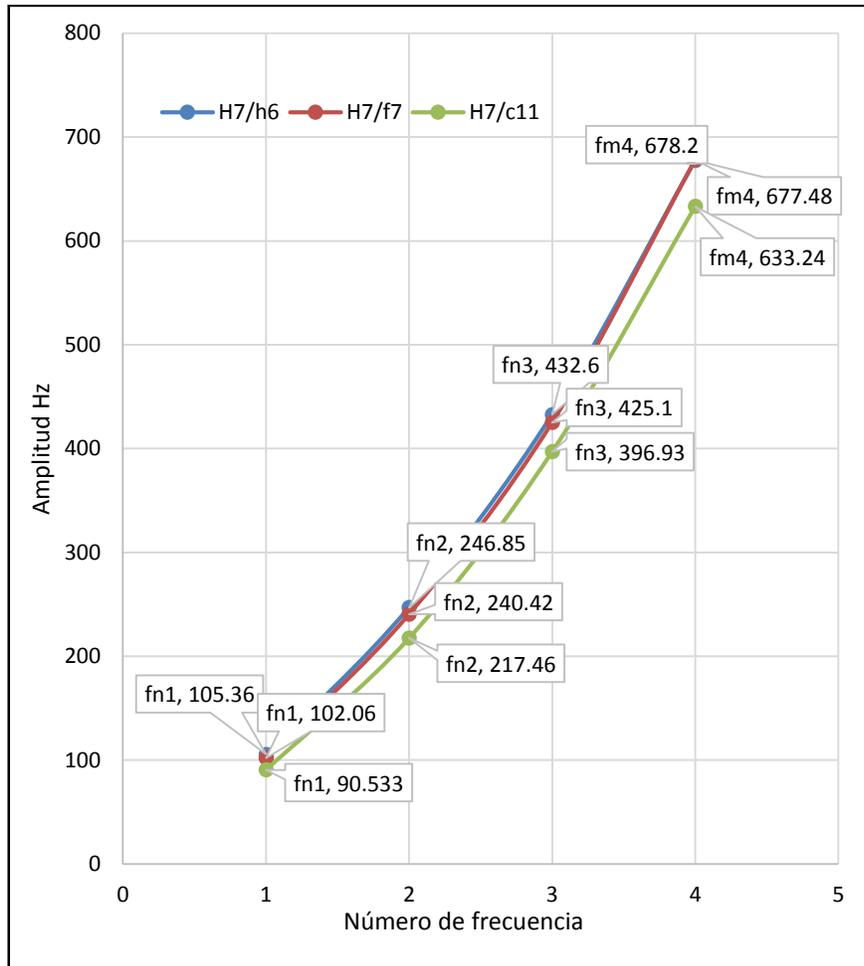


Figura 4.12 Comparación de las frecuencias naturales para los diferentes ajustes con un coeficiente de fricción de 0.3.

El cambio producido causado por el efecto de la fricción se ve reflejado en la siguiente gráfica, tiene el mismo desplazamiento pero sin fricción las frecuencias naturales disminuyen y más aún en el ajuste H7/c11, como se observa en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11 Resultados de los ajuste sin fricción.

$\Delta = 10 \text{ mm}/$ $\mu=0$	H7/h6	H7/f7	H7/c11
fn1	87.961	85.152	45.682
fn2	208.21	203.53	147.87
fn3	376.55	370.81	308.19
fn4	598.52	592.18	526.13

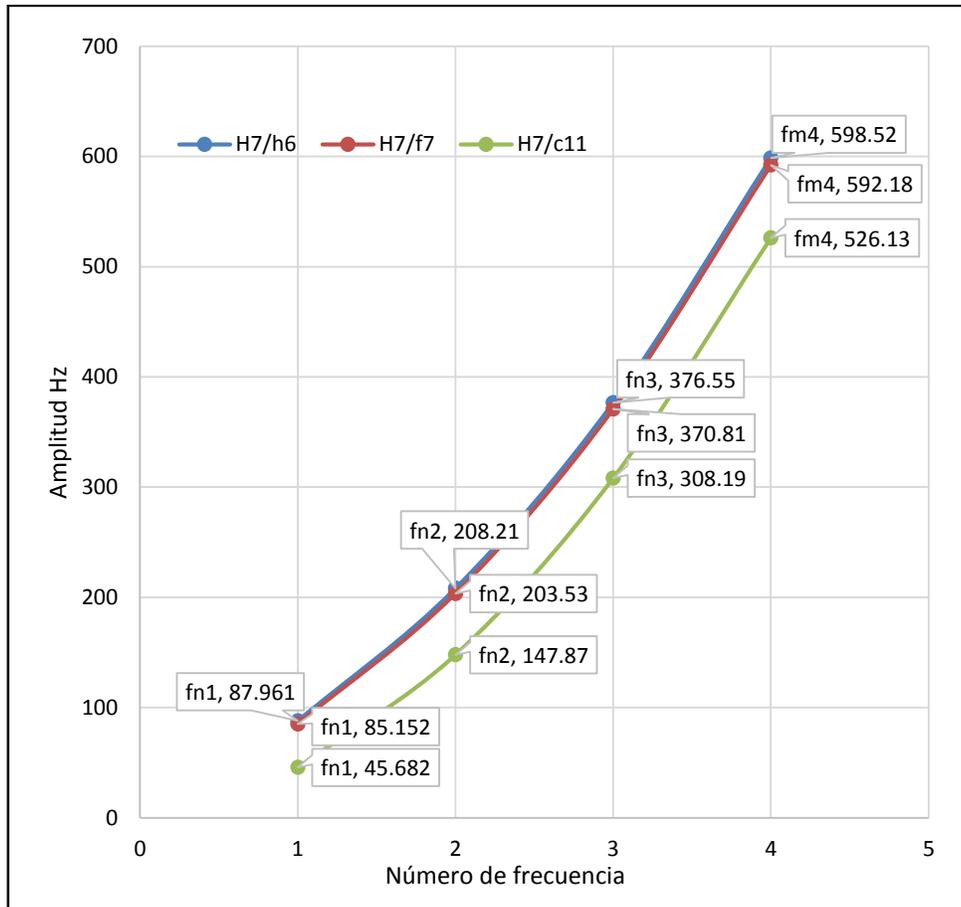


Figura 4.13 Comparación de las frecuencias naturales para los diferentes ajustes sin fricción.

Como resultado en las frecuencias se observa que en los ajustes H7/h6 y H7/f7 mantienen un valor parecido, sin embargo, en el ajuste H7/h6 el valor mostrado se aleja de los resultados comparativos, a continuación en el siguiente capítulo se muestran los resultados de todas las frecuencias causados por el desplazamiento y ajustes donde los valores son confusos.

Capítulo V

Análisis de resultados

Capítulo 5. Análisis de resultados

En este apartado se muestran las tablas y gráficas del comportamiento de la viga producido por el efecto de la holgura y el desplazamiento, donde se toman en consideración las variables mostradas en la tabla 5.1:

Tabla 5.1 Tabla de las variables independientes y dependientes.

Independientes	Dependientes
Longitud de la viga	Frecuencias Naturales
Módulo de Young y momento de inercia E, I	Formas modales
R1, R2 y ΔR , Diferencia de radios	Esfuerzos de contacto
Δ , desplazamiento	Movimiento angular
μ , coeficiente de fricción	
E^* , ν , para contacto (módulo de Young y Poisson)	

Para el estudio se observa el cambio de la frecuencia con respecto al desplazamiento, a continuación se muestran los resultados de los ajustes normalizados.

5.1 Resultado del ajuste H7/h6

Resultado del comportamiento de las frecuencias naturales con respecto al desplazamiento de la unión.

Tabla 5.2 Valores del ajuste H7/h6 para diversos desplazamientos sin fricción.

Holgura H7/h6, $\mu=0$				
Frecuencias Desplazamiento	fn1	fn2	fn3	fn4
10	87.961	208.21	376.55	598.52
7.5	72.748	183.79	347.47	567.02
5	58.95	163.51	324.62	542.93
2.5	47.609	149.21	309.11	526.14

En la Tabla 5.2 se observa el comportamiento que tiene el ajuste cuando se le da un desplazamiento, la diferencia que existe entre el máximo desplazamiento y el mínimo es de 40 Hz.

En la Figura 5.1 se muestra en la gráfica la tendencia que tienen las frecuencias, sin incluir la fricción.

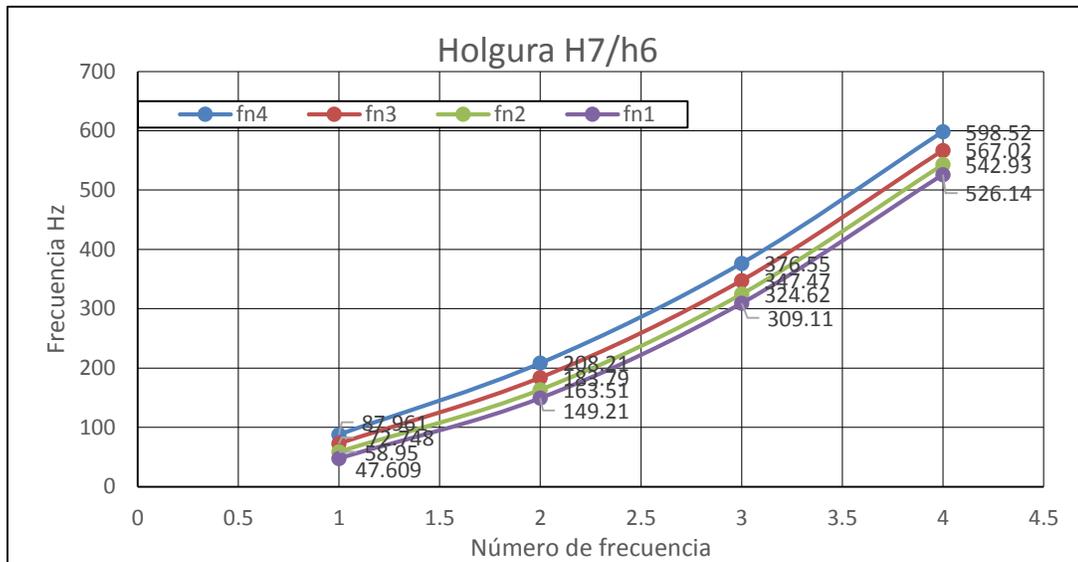


Figura 5.1 Gráfica de las tendencias de las frecuencias para un ajuste H7/h6 sin fricción.

En la Figura 5.2 en la gráfica se observa el incremento de las frecuencias y la tendencia al aumentar el desplazamiento, al utilizar un ajuste H7/h6 en la que sería de manera ideal al no incluir la fricción, sin embargo, no sucede en la vida real.

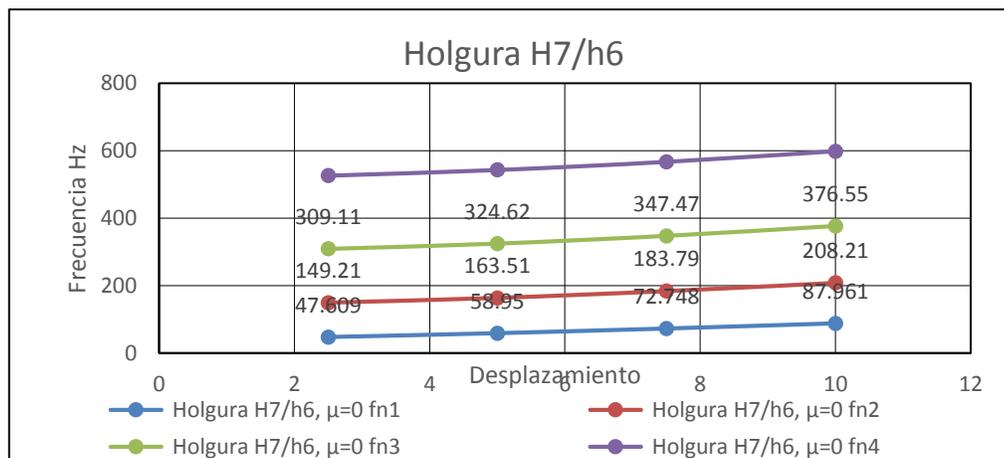


Figura 5.2 Gráfica de las Tendencia de las frecuencias variando el desplazamiento para el ajuste H7/h6 sin fricción.

En la Tabla 5.3 se muestra los valores del ajuste H7/h6 con un coeficiente de fricción 0.3, en la Figura 5.3 la gráfica se observa la tendencia que tiene al incluir el desplazamiento y un coeficiente de fricción de $\mu=0.3$, se aplican para los desplazamientos de 2.5, 5, 7.5 y 10 mm respectivamente.

Holgura H7/h6, $\mu=0.3$				
Frecuencias	fn1	fn2	fn3	fn4
Desplazamiento				
10	105.36	246.85	432.6	677.48
7.5	90.384	221.77	403.07	644.26
5	77.499	200.51	379.47	617.87
2.5	65.918	177.81	350.59	579.86

Tabla 5.3 Tabla de los valores del ajuste H7/h6 con un coeficiente de fricción 0.3.

En la Figura 5.3 en la gráfica se observa la influencia de la fricción, al ver el comportamiento de las líneas de tendencia, se asimilan a las de sin fricción, sin embargo, la magnitud es mayor para cada una de ellas.

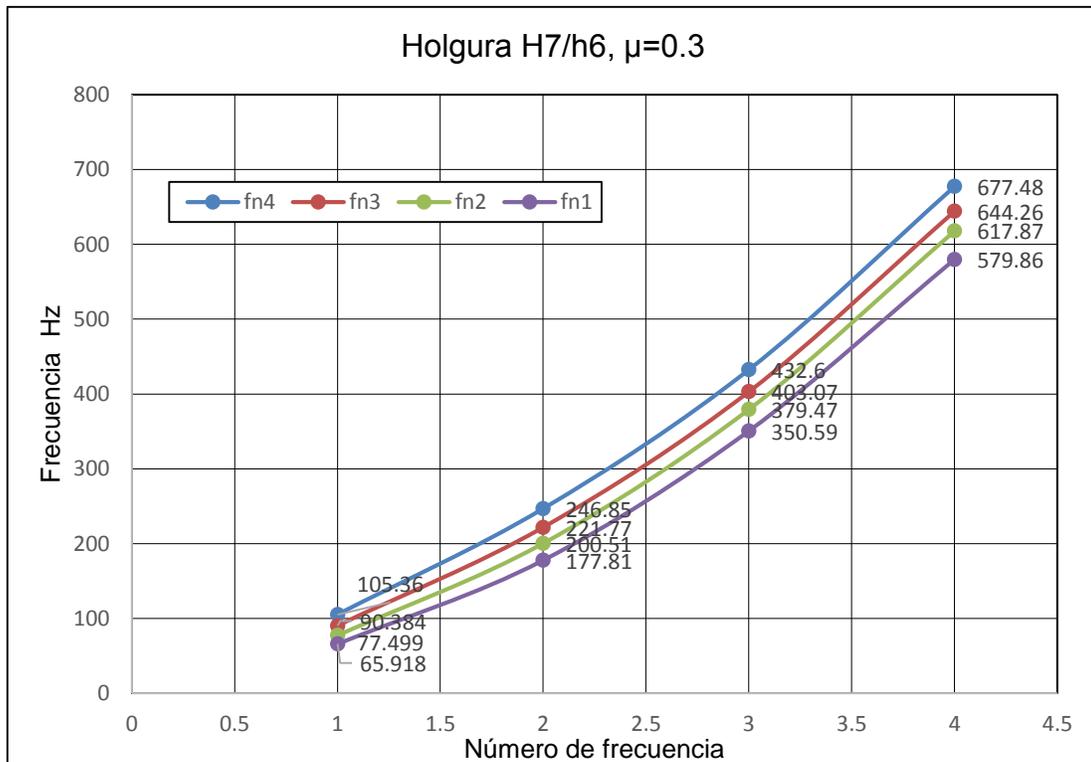


Figura 5.3 Gráfica de las tendencias de las frecuencias para el ajuste H7/h6 con una fricción de 0.3.

En la Figura 5.4 se muestra en la gráfica la influencia del desplazamiento para el cambio de las frecuencias naturales.

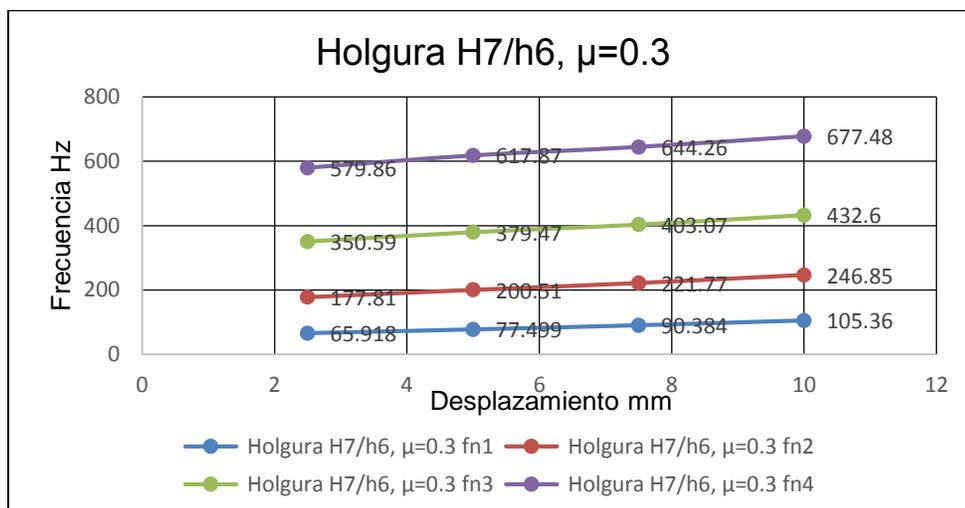


Figura 5.4 Gráfica de las Tendencia de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste H7/h6 con una fricción de 0.3.

5.2 Resultado del ajuste H7/f7

En la Tabla 5.4 los resultados obtenidos en el ajuste H7/f7, en comparación con los resultados obtenido del ajuste H7/h6 no hay demasiados cambios debido a la holgura de las piezas, sin embargo los efectos si son considerados, en la tabla se muestran los resultados obtenidos en el ajuste H7/f7.

Tabla 5.4 Valores del ajuste H7/f7 para diversos desplazamientos sin fricción.

Holgura H7/f7, $\mu=0$				
Desplazamiento	fn1	fn2	fn3	fn4
10	85.152	203.53	370.81	592.18
7.5	69.398	178.5	341.28	560.34
5	54.958	157.57	318	535.79
2.5	45.723	147.8	308.16	525.89

En la tabla se observa un valor conocido, de acuerdo el estudio del análisis analítico se obtuvo el valor de 45.72 Hz, donde se aplican las ecuaciones de Euler-Bernoulli del libro (Harris & Piersol, 2002), en la holgura H7/f7 con un desplazamiento de 2.5 mm se asimilan a los

resultados de la ecuación analítica, cabe mencionar que se está cumpliendo las ecuaciones de la teoría.

En la Figura 5.5 en la gráfica se observa la tendencia de las frecuencias con respecto al desplazamiento del ajuste H7/f7.

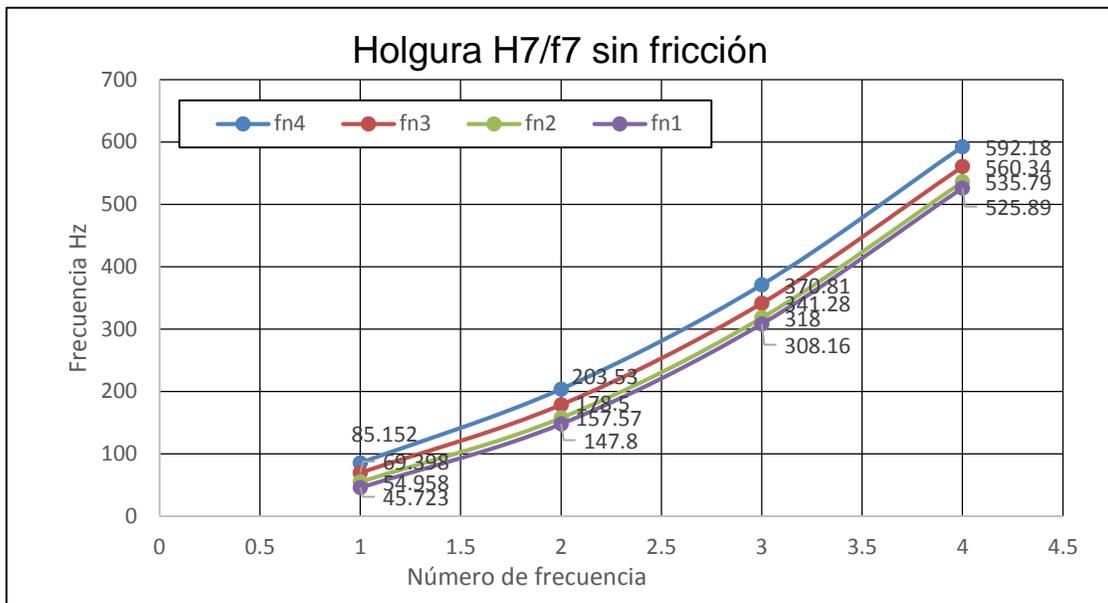


Figura 5.5 Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste H7/f7 sin fricción.

En la Figura 5.6 se muestra la gráfica de los resultados H7/f7, los valores son similares al ajuste H7/h6, cabe mencionar que es sin fricción y el mismo desplazamiento dado en la articulación.

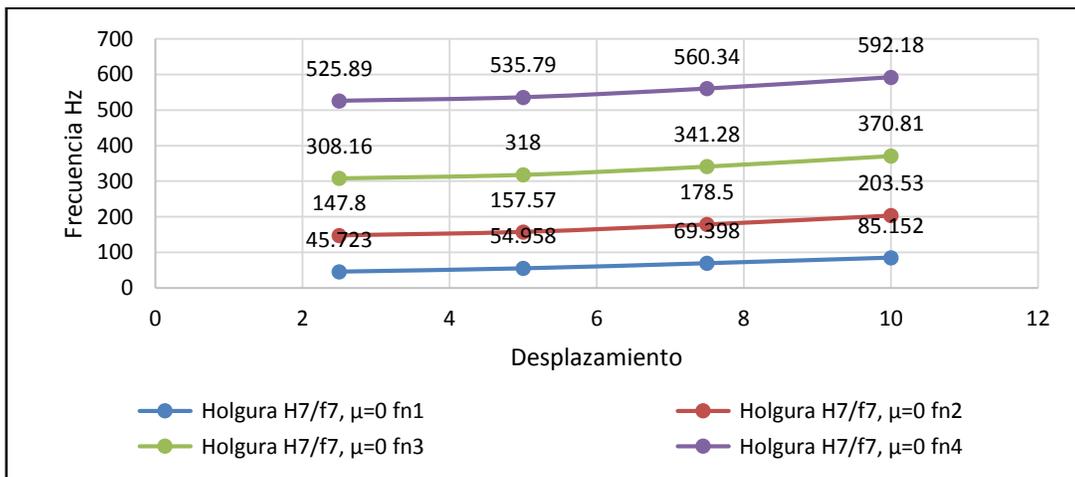


Figura 5.6 Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste H7/f7 variando el desplazamiento sin fricción.

Al incluir la fricción el efecto es mayor de acuerdo a los datos obtenidos de manera numérica, En la Tabla 5.5 se muestran los resultados obtenidos para una holgura H7/f7, las características de los resultados son muy similares al ajuste H7/h6 como se aprecia no hay cambios significativos.

Tabla 5.5 Valores del ajuste H7/f7 para diversos desplazamientos con una fricción de 0.3.

Holgura H7/f7, $\mu=0.3$				
Desplazamiento \ Frecuencias	fn1 Hz	fn2 Hz	fn3 Hz	fn4 Hz
10 mm	102.06	240.42	425.1	668.2
7.5 mm	86.691	214.35	394.53	633.57
5.0 mm	73.37	191.72	368.55	603.62
2.5 mm	63.023	181.59	352.86	585.23

Se muestra en la Figura 5.7 la tendencia de las frecuencias naturales de los efectos producidos por la holgura y el incremento de las frecuencias.

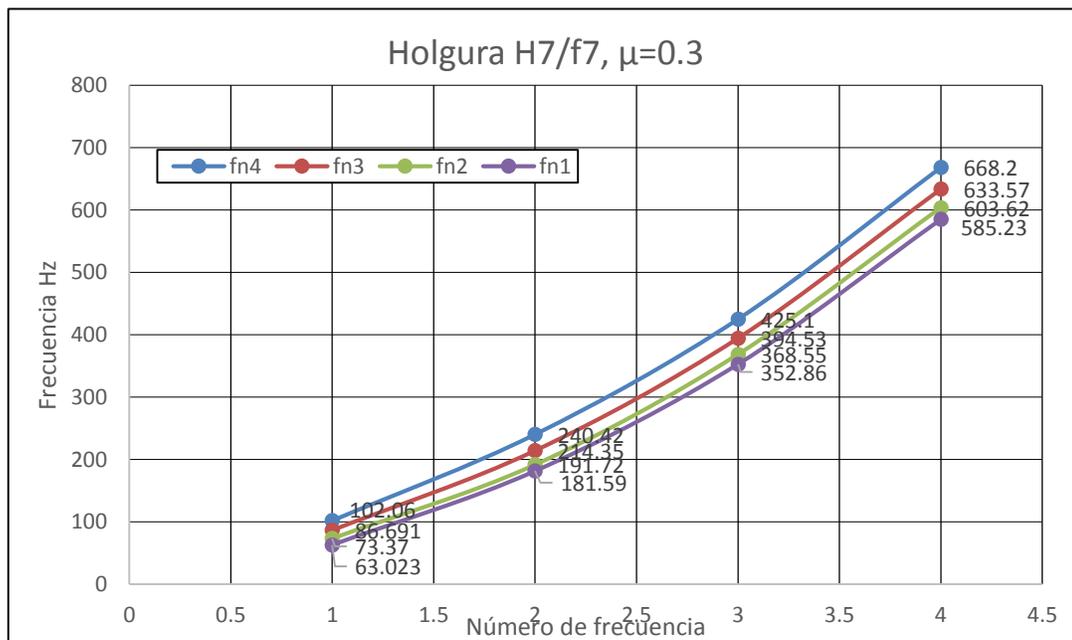


Figura 5.7 Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste H7/f7 con una fricción de 0.3.

Se observa en la gráfica entre la primera y segunda frecuencia que son similares.

Finalmente en la Figura 5.8 se observa con el desplazamiento la tendencia del incremento de las frecuencias naturales.

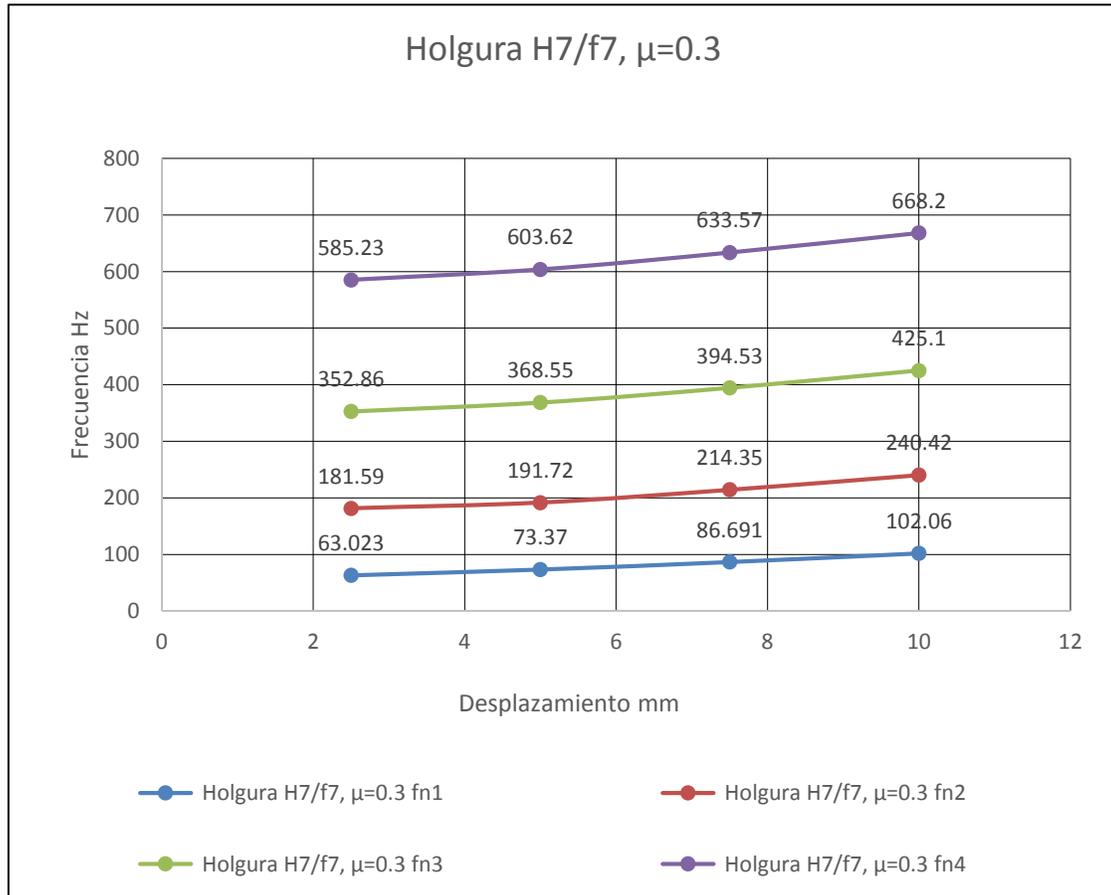


Figura 5.8 Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste H7/f7 con una fricción de 0.3.

5.3 Resultado del ajuste H7/c11

En esta sección se menciona y se demuestra el efecto de la holgura con respecto a las frecuencias provocando cambios de manera significativa en el estudio. A continuación se muestra en la Tabla 5.6 los resultados de una holgura H7/c11 sin considerar la fricción y donde se obtiene los resultados de acuerdo a las ecuaciones de la literatura.

Tabla 5.6 Tabla de los valores del ajuste H7/c11 para diversos desplazamientos sin fricción.

Holgura H7/c11, sin fricción				
Frecuencias Desplazamiento	fn1 Hz	fn2 Hz	fn3 Hz	fn4 Hz
10 mm	74.316	185.67	349.26	568.57
7.5 mm	57.109	153.38	318.16	535.11
5.0 mm	45.836	147.73	308.3	525.81
2.5 mm	45.682	147.86	308.19	526.13

De acuerdo al estudio realizado entre mayor sea la holgura, los valores se aproximan al resultado analítico aplicando las ecuaciones de Euler-Bernoulli (Harris & Piersol, 2002), al dar un desplazamiento de 5 mm el resultado obtenido es de 45.72 Hz aproximadamente, el mismo valor obtenido numéricamente dentro del rango aproximado.

En la Figura 5.9 se muestra la gráfica correspondiente al incremento de las frecuencias con respecto al desplazamiento, se puede observar que las 3 primeras frecuencias tienen un valor similar, causado por la holgura que existe entre ellas y sin fricción en la unión.

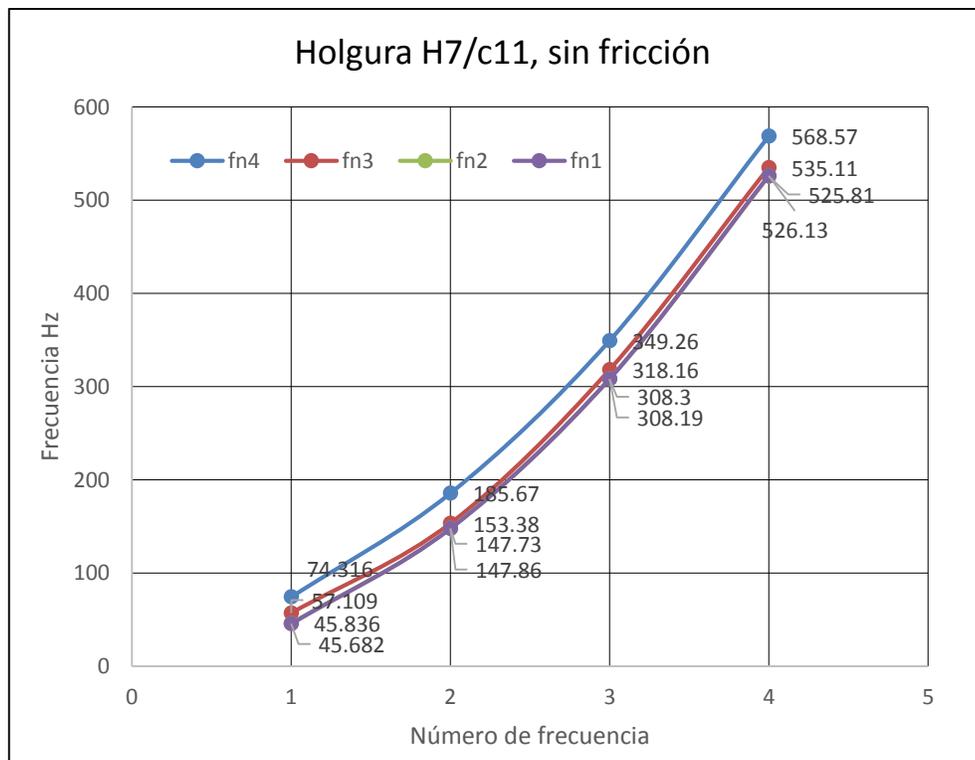


Figura 5.9 Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste H7/t7 sin fricción

En la Figura 5.10 en la gráfica se observa el efecto del cambio de las frecuencias naturales con respecto al desplazamiento dado.

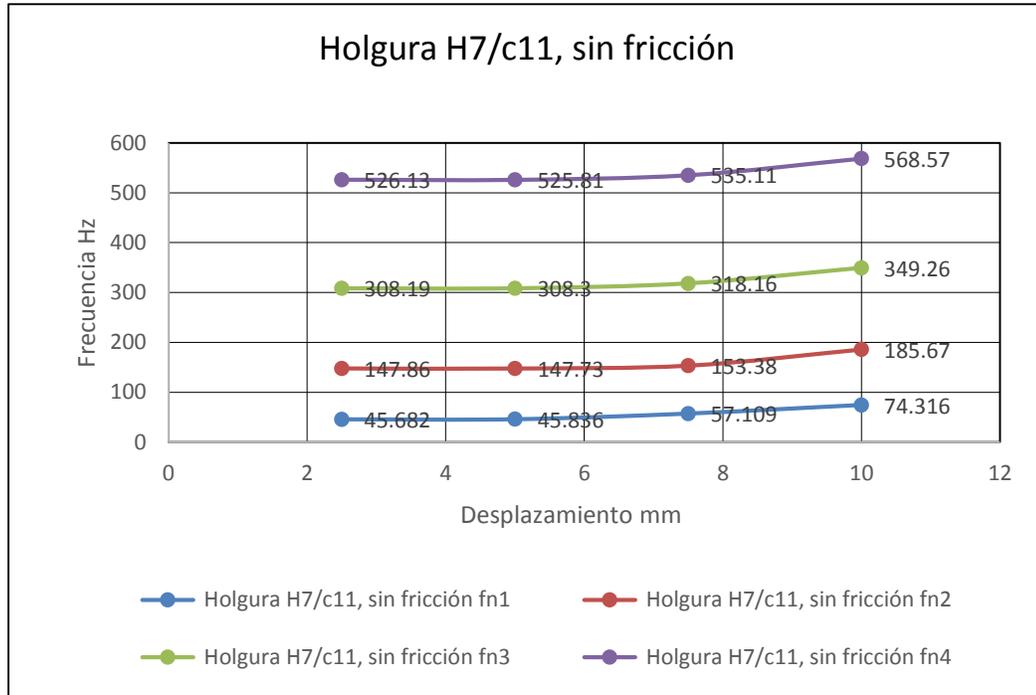


Figura 5.10 Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste H7/f7 sin fricción.

En la Tabla 5.7 se muestra el efecto producido por la holgura y la fricción de 0.3, se presenta una característica, donde la frecuencia con un desplazamiento de 5 mm es menor que la frecuencia encontrada con un desplazamiento de 2.5 mm.

Holgura H7/c11, $\mu=0.3$				
Frecuencias Desplazamiento	fn1 Hz	fn2 Hz	fn3 Hz	fn4 Hz
10 mm	90.536	217.46	396.93	633.24
7.5 mm	72.224	184.04	354.43	583.09
5.0 mm	60.178	182.12	350.62	584.29
2.5 mm	63.598	182.25	325.92	586.22

Tabla 5.7 Tabla de los valores del ajuste H7/f7 con una fricción de 0.3.

A continuación en la Figura 5.11 se presenta la gráfica donde se tienen los efectos de la holgura con la respuesta de las frecuencias, teniendo una similitud con respecto a la de sin fricción pero con una mayor magnitud.

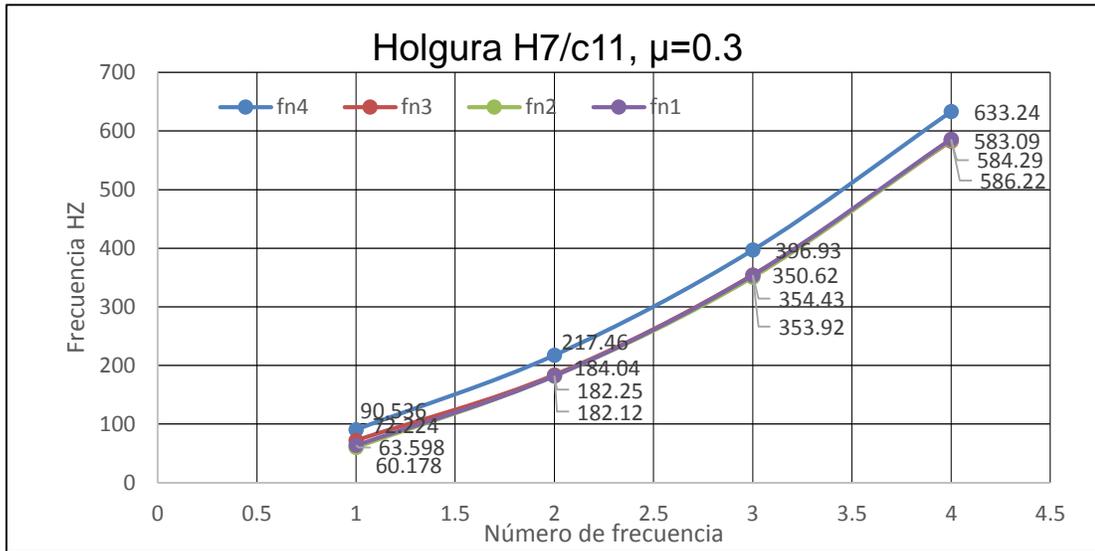


Figura 5.11 Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste H7/f7 con una fricción de 0.3.

Como se observa al tener más holgura los resultados obtenidos tienden a ser muy parecidos así como se muestra en los desplazamientos de 7.5 mm, a 2.5 mm la frecuencia es parecida en los tres casos.

Se presenta en la Figura 5.12 una gráfica que permite realizar un estudio y buscar en qué tamaño de holgura las frecuencias tiende a subir conforme se incrementa el desplazamiento.

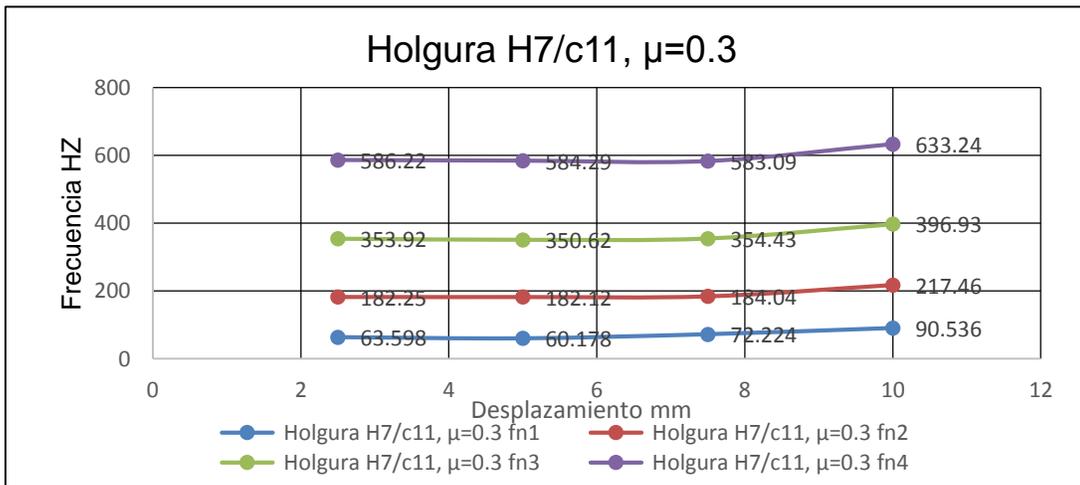


Figura 5.12 Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste H7/f7 sin fricción.

El estudio lleva a una búsqueda iterativa para encontrar el tamaño de holgura donde no hayan cambios, se evaluó el análisis y se tomó un rango de 0.2 mm de holgura a 0.04 mm, se encontró el valor crítico de los resultados y solo se tomaron los valores entre 2.5 mm a 7.5 mm de desplazamiento.

5.4 Evaluación iterativa

En el estudio se encontraron valores de importancia y uno de ellos fue un valor crítico, este cambio lleva al estudio numérico entre los ajustes H7/h6 y H7/f7 hasta que se tenga la misma tendencia, con respecto al incremento del desplazamiento, se debe aumentar las frecuencias, cuya respuesta están dada en el ejemplo de las cuerdas de la guitarra, mediante más se tensa se cambian las frecuencias.

5.4.1 Valor singular

El valor crítico se encontró en un valor intermedio dentro de los ajustes H7/f7 y H7/c11, donde se observa que es un ajuste intermedio en los valores y es un radio de 7.97 mm, aquí se obtiene el valor más crítico donde la segunda frecuencia con un desplazamiento de 5 mm es aún menor que el de 2.5 mm, como se muestra en la Tabla 5.8, los valores de desplazamiento son de 2.5 a 7.5 mm.

Tabla 5.8 Tabla de los valores del ajuste intermedia crítica con una fricción de 0.3.

Holgura intermedia singular, $\mu=0.3$				
Frecuencias Desplazamiento	fn1 Hz	fn2 Hz	fn3 Hz	fn4 Hz
7.5 mm	81.052	202.48	379.79	614.78
5.0 mm	51.844	165.75	327.13	553.32
2.5 mm	63.55	182.28	354.03	586.57

En la Tabla 5.8, se aprecia que la frecuencia con respecto al desplazamiento de 2.5 mm es mayor a la de 5 mm, en la Figura 5.13 en la gráfica se observa la tendencia de las frecuencias.

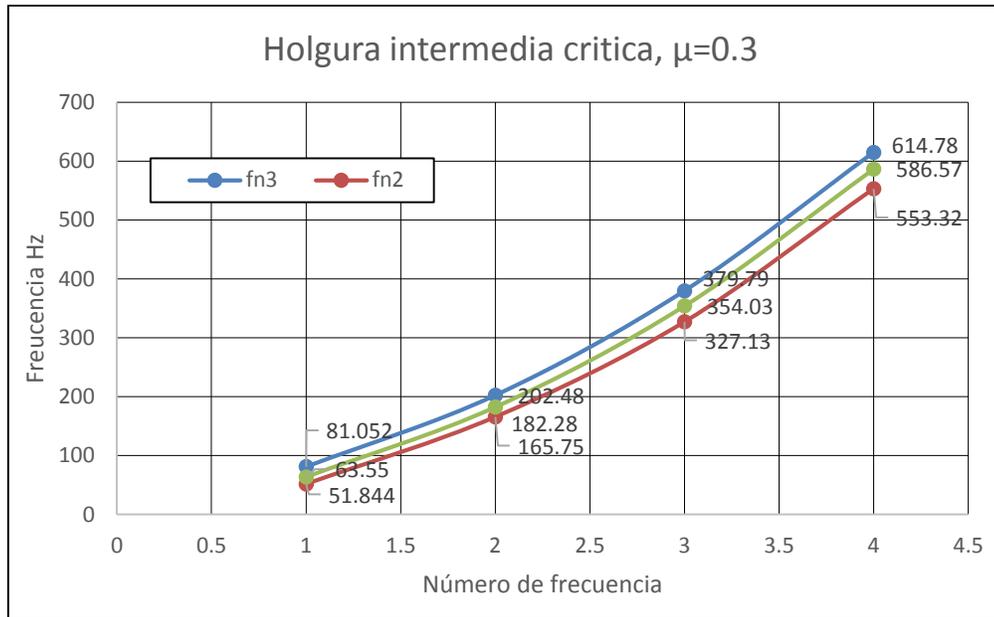


Figura 5.13 Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste intermedia crítica con una fricción de 0.3.

La frecuencia del desplazamiento de 5 mm tiende a ser menor que la del desplazamiento de 2.5 mm, estos resultados se aprecian con mayor claridad en la Figura 5.14 donde se muestra el comportamiento de las frecuencias del desplazamiento de 5 mm.

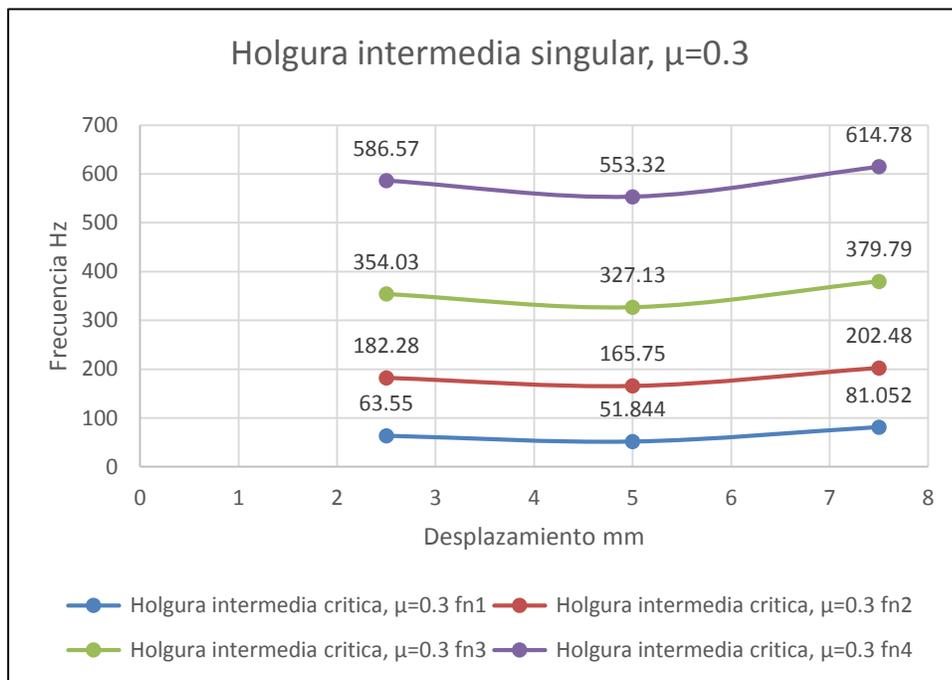


Figura 5.14 Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste intermedia crítica con una fricción 0.3.

Este efecto se obtiene cuando el radio del perno es de 7.97 mm y durante el desplazamiento del bloque a 5 mm, cabe mencionar que se realizó iterativamente hasta encontrar el valor más crítico.

5.4.2 Valor con tendencia normal

El estudio de encontrar y determinar la unión mecánica se asimila al ejemplo ya mencionado de las cuerdas de la guitarra donde sí se tensa las frecuencias se ven afectadas, es decir, aumentan las frecuencias naturales, pero cabe mencionar que la holgura juega un papel muy importante, debido que entre más se tensa es menos el movimiento, además es muy diferente cuando se realiza un ajuste H7/h6 donde sea el desplazamiento se tiene una tensión debido al poco juego o ninguno.

En el estudio de este valor se encontró a 7.98mm, se puede decir que la viga se empieza a tensar y por deducción empiezan aumentar las frecuencias naturales, se puede observar en la Tabla 5.9 los datos, sin embargo, los valores obtenidos no son ajustes normalizados quedando como holguras intermedias, pueden ser de gran utilidad para el uso de uniones mecánicas móviles.

En la Tabla 5.9 se muestran los resultados donde se incrementa las frecuencias con respecto al desplazamiento mayor.

Tabla 5.9 Valores del ajuste intermedia normalizado con una fricción de 0.3.

Holgura intermedia normalizado, $\mu=0.3$				
Frecuencias Desplazamiento	fn1	fn2	fn3	fn4
7.5	84.831	210.47	389.9	627.72
5	70.397	184.21	357.76	586.28
2.5	63.366	182.06	353.7	586.28

Como se observa en la Tabla 5.9 las frecuencias naturales llevan la tendencia descrita del ejemplo: mientras se incrementa la tensión aumentan las frecuencias naturales. En la Figura

5.15 se observa el incremento de las frecuencias conforme se amplía el desplazamiento se ve afectado los resultados.

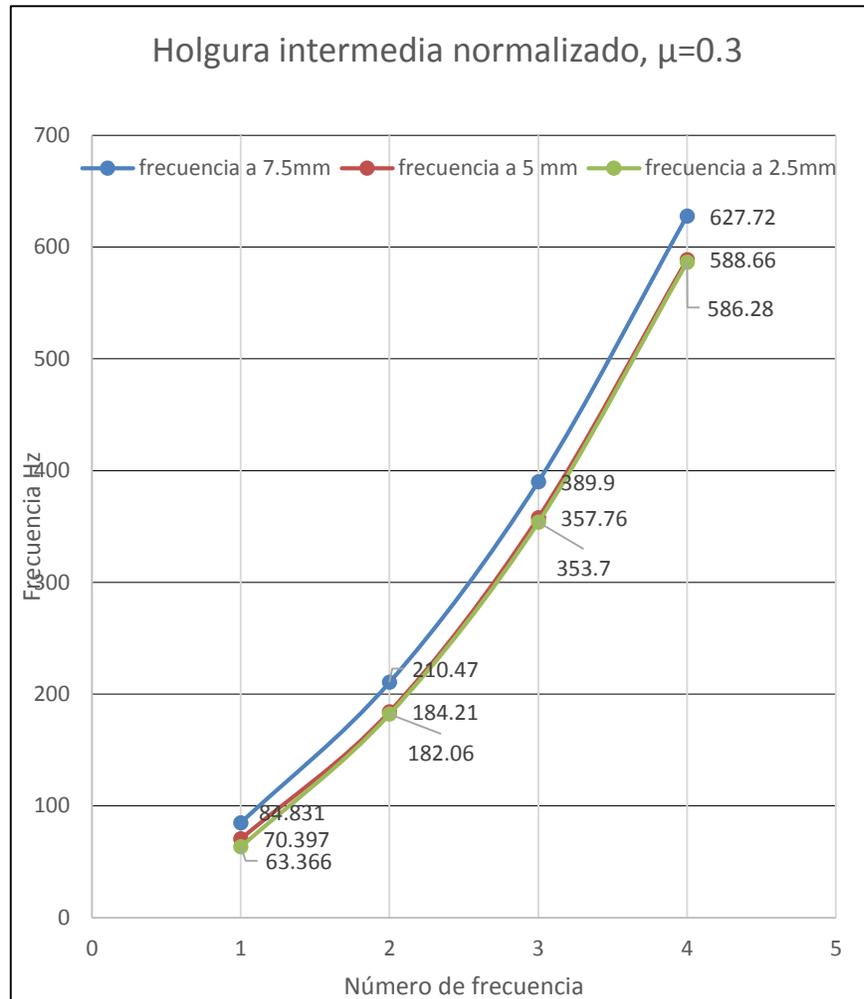


Figura 5.15 Gráfica de las tendencias de las frecuencias del ajuste normalizado crítica con una fricción de 0.3.

En la Figura 5.16 se muestra la gráfica del comportamiento de las frecuencias, con respecto al incremento del desplazamiento; cabe mencionar que las frecuencias son afectadas por muchas condiciones. Una de las principales es el tipo de ajuste que mantiene, el desplazamiento del bloque, las propiedades de materiales, la sensibilidad del software. Sin embargo, es parte del estudio determinar los efectos de los claros (holgura), porque al comparar el estudio con el análisis experimental se obtienen resultados parecidos con el numérico, pero no en el ajuste que se menciona en el experimento y se debe a consecuencia del maquinado utilizado y los instrumentos de medición.

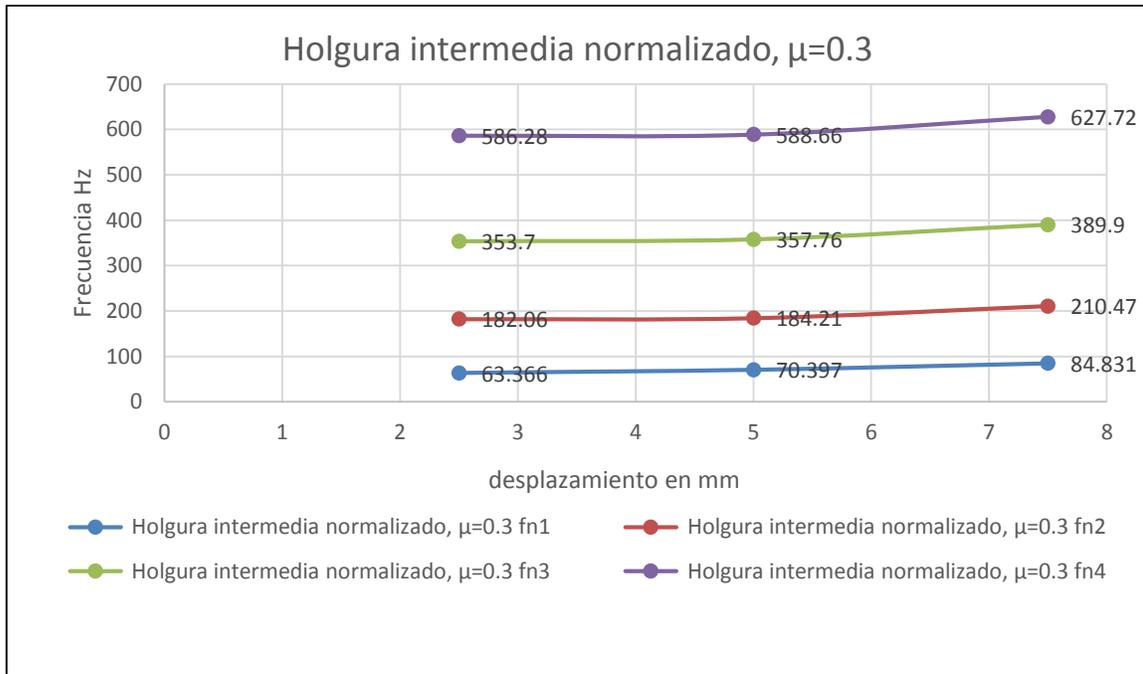


Figura 5.16 Gráfica de las tendencias de las frecuencias variando el desplazamiento del ajuste intermedio normalizado con una fricción de 0.3.

De los resultados obtenidos en las ecuaciones analíticas se llegaron a diversas conclusiones que se mencionan en la siguiente sección.

Capítulo VI

Conclusiones y recomendaciones

Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos a través del estudio numérico se observaron ciertas características durante los análisis realizados, en relación a los cambios en la rigidez geométrica lo cual afecta las frecuencias y formas modales. En los modelos de elemento finito se deben de emplear técnicas para que los resultados sean los más efectivos como: son condiciones de frontera, materiales, características del mallado y del elemento empleado. A continuación se mencionan las observaciones de la información obtenida.

6.1 Observaciones

Para el estudio se empleó el software ABAQUS Standard (Abaqus, 2012), donde se empleó una malla fina en el área de contacto, uniones 2D con elementos *beam*, se utilizó un acero estructural conocido como Acero A36. Se realizó un estudio analítico, análisis numérico y se comparó con resultados experimentales realizado por María Guadalupe Guzmán Campero Calderón, (Guzmán, 2009) donde se observan los resultados de la Figura 5.14 contra los resultados experimentales como se observa en la Figura 6.1, al realizar una comparación los resultados son similares.

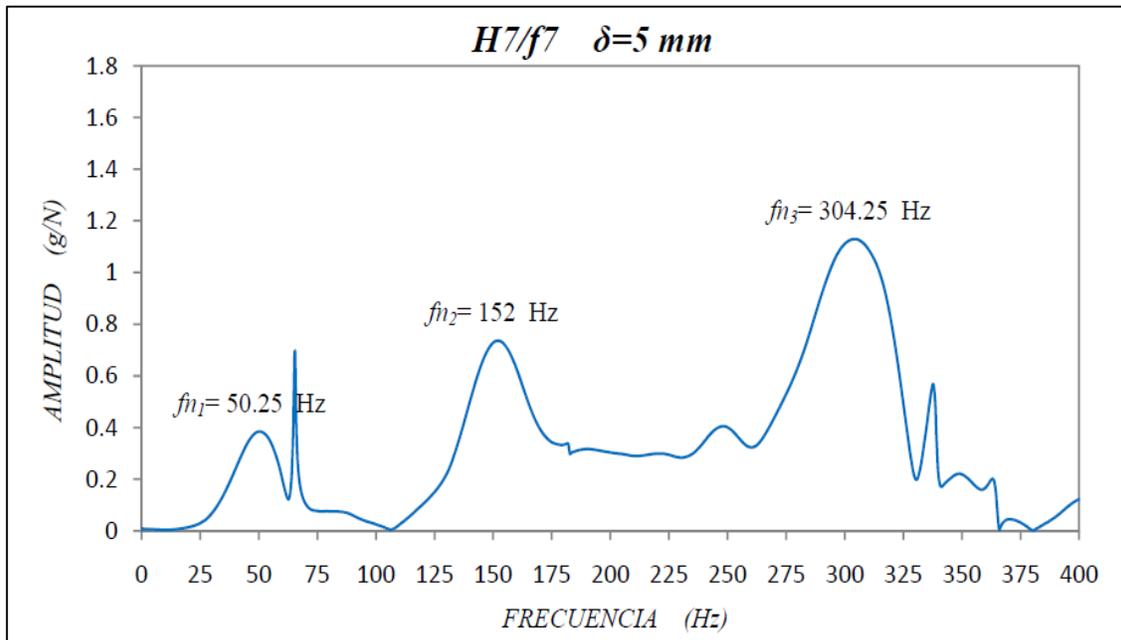


Figura 6.1 Frecuencias naturales obtenidas experimentalmente.

En el estudio de los claros presentes en las uniones mecánicas, permite el movimiento entre ellas, sin embargo, en uniones fijas que se ensamblan se necesita tener ciertas

condiciones para seleccionar el tipo de ajuste, en la Tabla 6.1 se hace la comparación de los resultados entre el valor experimental y el análisis numérico.

Tabla 6.1 Comparación del análisis experimental y numérico.

	Análisis experimental (ajuste H7/f7) Hz	Análisis Numérico (7.97mm de radio del perno) Hz	Porcentaje de diferencia (%)
fn1	50.25	51.844	3.07
fn2	152	165.75	8.30
fn3	304.25	327.13	6.99

En el estudio es de suma importancia analizar el claro (holgura), dentro de este sistema se utilizaron las teorías de Hertz, Pearson y las teorías que rigen los movimientos en una viga (frecuencias de las teorías de Euler-Bernoulli), se realizaron diversos análisis: primero se realizó el estudio de una viga empotrada libre en el extremo, segundo se analizó una viga empotrada articulada en el otro extremo, finalmente una viga empotrada con un desplazamiento en un extremo pero empotrado en ambos lados. Se concluyó que los resultados de los análisis están aproximadamente dentro del rango entre los dos últimos mencionados.

El estudio al utilizar la teoría de Hertz y aplicando las ecuaciones de Pearson se encontró que el semiancho de contacto, donde se obtuvo una gran información en elemento finito, principalmente el estudio del comportamiento de la concentración y distribución de los esfuerzos axiales cuando se aplica la teoría de Hertz, además en la utilización de software para obtener el tamaño de la malla en la zona de contacto, datos preliminares para utilizar en el diseño.

La no linealidad geométrica se presenta en cualquier sistema mecánico para el modelo empleado: es cuando la geometría de la viga se modificada por una fuerza externa y por consiguiente las frecuencias naturales son modificadas, al igual que la fricción hace cambiar las frecuencias; el software presenta una herramienta para tener en consideración estos efectos. En la articulación el contacto es puntual porque la unión es cóncavo-convexo. La holgura presente en la unión tiende a dar efectos peculiares cuando el ajuste de la unión es muy pequeña o esté en el rango H7/h6, la concentración de esfuerzos producidos en el

contacto, tiende a exceder el límite elástico y por lo tanto entraría en su zona plástica; de acuerdo al análisis numérico se llegaba a sobrepasar los 380 MPa en la raíz, quedando fuera del rango elástico. Por otra parte cuando el rango está en H7/c11 los esfuerzos producidos son disminuidos, sin embargo, para la zona de los efectos producidos en las frecuencias naturales los efectos son muy confusos a causa de la holgura y la forma geométrica cóncavo-convexo, donde se presentan diferentes efectos. Las uniones perno-agujero presentan características de fricción y elasticidad muy particulares, especialmente cuando la diferencia de radios es muy pequeña.

Al desplazar o dar una fuerza externa al bloque, donde se encuentra la unión produce un incremento en las frecuencias naturales en los ajustes H7/h6 y H7/f7, cabe mencionar que estos resultados se toman del ejemplo de las cuerdas de una guitarra entre más se tensa, cambian sus frecuencias naturales; sin embargo, al tener un ajuste H7/c11 e intermedio del H7/f7 se tienen condiciones muy distintas, debido al acomodo de la viga a través de la unión cóncavo-convexo y la fricción, provocando cambios particulares de la frecuencia en cada desplazamiento.

En el trabajo experimental se toman muchas consideraciones y por consiguiente no se obtienen resultados similares al análisis numérico, estos efectos pueden ser: la sensibilidad de los equipos conforme llegue haber un contacto pequeño los resultados obtenidos son diferentes, en el análisis de elemento finito se realizó un estudio del comportamiento de las frecuencias producidas por pequeños desplazamientos, para observar el cambio se realizó un desplazamiento controlado de 0 a 0.001 y las respuestas eran muy distintas a las frecuencias: primero sin desplazamiento era de 8.15 Hz; segundo, con un desplazamiento de 0.001 se obtenía una frecuencia de 65.4 Hz; aproximadamente 58 Hz es la diferencia. Se concluyó que los factores que intervinieron fueron primeramente el acabado de las piezas, la sensibilidad del equipo, el control del desplazamiento y el monitoreo de la fricción en lo cual repercuten los resultados.

Uno de los resultados es de superponer las diferencias entre las frecuencias obtenidas de manera analítica sin fricción como se muestra en la Figura 6.2, los resultados numéricos sin fricción por el valor propuesto en el manual de Harris & Piersol (2002), se obtuvo las diferencias de la forma modal al agregar la fricción y se aprecia el cambio de la forma modal

al agregar la fricción, donde hay una resistencia que no permite el movimiento libre como se observa en la figura.

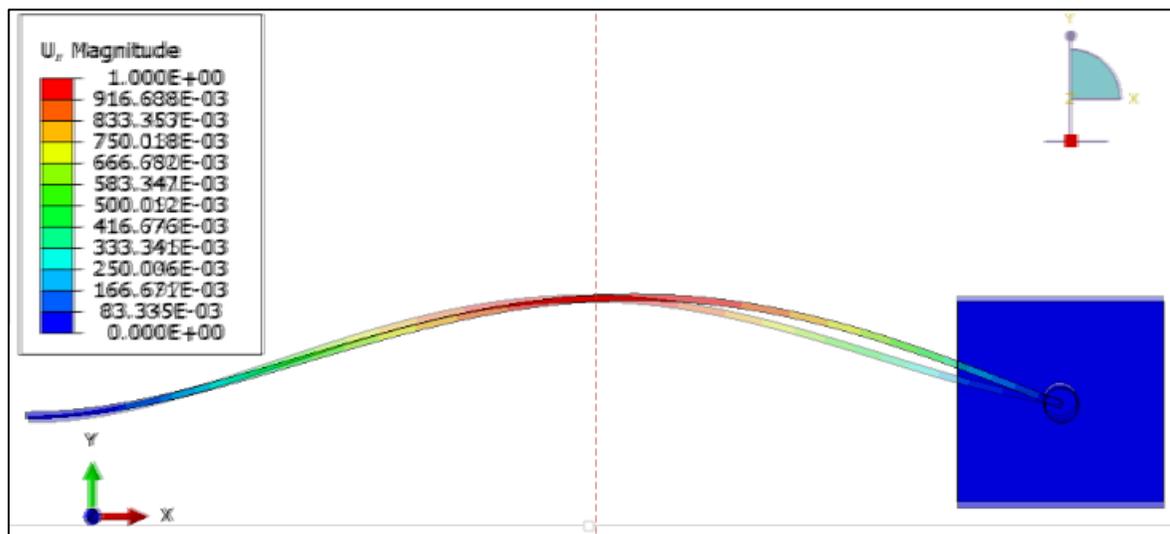


Figura 6.2 Superposición de las imágenes de la primera frecuencia sin fricción y con fricción de 0.3.

En el estudio se observó que en los ajustes H7/h6 al H7/c11, el valor de 45.72 Hz se obtuvo calculando de manera analítica sin fricción; en el ajuste H7/h6 a 2 mm de desplazamiento, a H7/f7 a 2.5 mm y en la holgura H7/c11 se encontró a 5 mm aproximadamente. Cabe mencionar que los resultados son de manera analítica ideal sin considerar la fricción.

6.2 Conclusiones

- Los resultados del estudio numérico se compararon con los resultados experimentales y se obtuvieron valores similares con respecto al mismo desplazamiento pero de diferente holgura; sin embargo, esto se debe a los instrumentos de medición y el maquinado empleado.
- Las holguras presentan ciertas características en los elementos como cambios de frecuencia, mayor concentración de esfuerzos o menor dependiendo la holgura. los resultados fueron comprobados de manera analítica con la forma ideal sin fricción.
- Con la teoría de Hertz y Pearson se especifica el tamaño de malla, obteniendo una convergencia razonable, para que los valores sean los más aproximados a los resultados analíticos.

- El cambio de rigidez geométrica en la viga provocado por el desplazamiento del bloque en la articulación, influye en los cambios en las frecuencias de la viga, por tal razón dicha rigidez depende del desplazamiento del bloque produciendo una carga para que ocurran estos efectos.
- Al realizar el estudio con diferentes modelos se comparó una viga empotrada en ambos extremos; una viga empotrada en un extremo y con el otro extremo articulado, donde se obtenían las frecuencias naturales dentro de ese rango de valores, que fueron los límites del modelo.
- Los desplazamientos afectan en el contacto de la unión, se observó que al haber un desplazamiento de 0.001 mm se tenía una frecuencia de 58 Hz; sin embargo, al no tener contacto la frecuencia era de 8.5 Hz. Por lo que se concluye que al tener un contacto por pequeño que sea las frecuencias son afectadas.
- La fricción en las formas modales impide el movimiento libre, por lo tanto al tener un coeficiente de fricción es afectado la forma modal como se observa en la Figura 6.2
- Finalmente donde se repercuten más los efectos en las frecuencias naturales es en la zona de ajustes no normalizados, que se encuentran dentro del ajuste H7/f7 y H7/c11; por lo tanto, las frecuencias no aumentan cuando se tensa la viga produciendo valores caóticos.

6.3 Recomendaciones

El efecto de la fricción es de suma importancia en los resultados obtenidos, sin embargo, en el análisis numérico estático se produce efectos muy particulares en el incremento de la concentración de los esfuerzos, por otra parte en el análisis dinámico ocurre un cambio no muy perceptible con diferencias entre 1 Hz o menos, pero en la forma modal sí hay cambios específicos; esto abre un estudio a futuro en la parte numérica, buscar en la literatura o en el manual del software cómo hacer que sea más notable la influencia de la fricción en uniones cóncavo-convexo y por tal motivo en el software por el momento no se presentan los cambios.

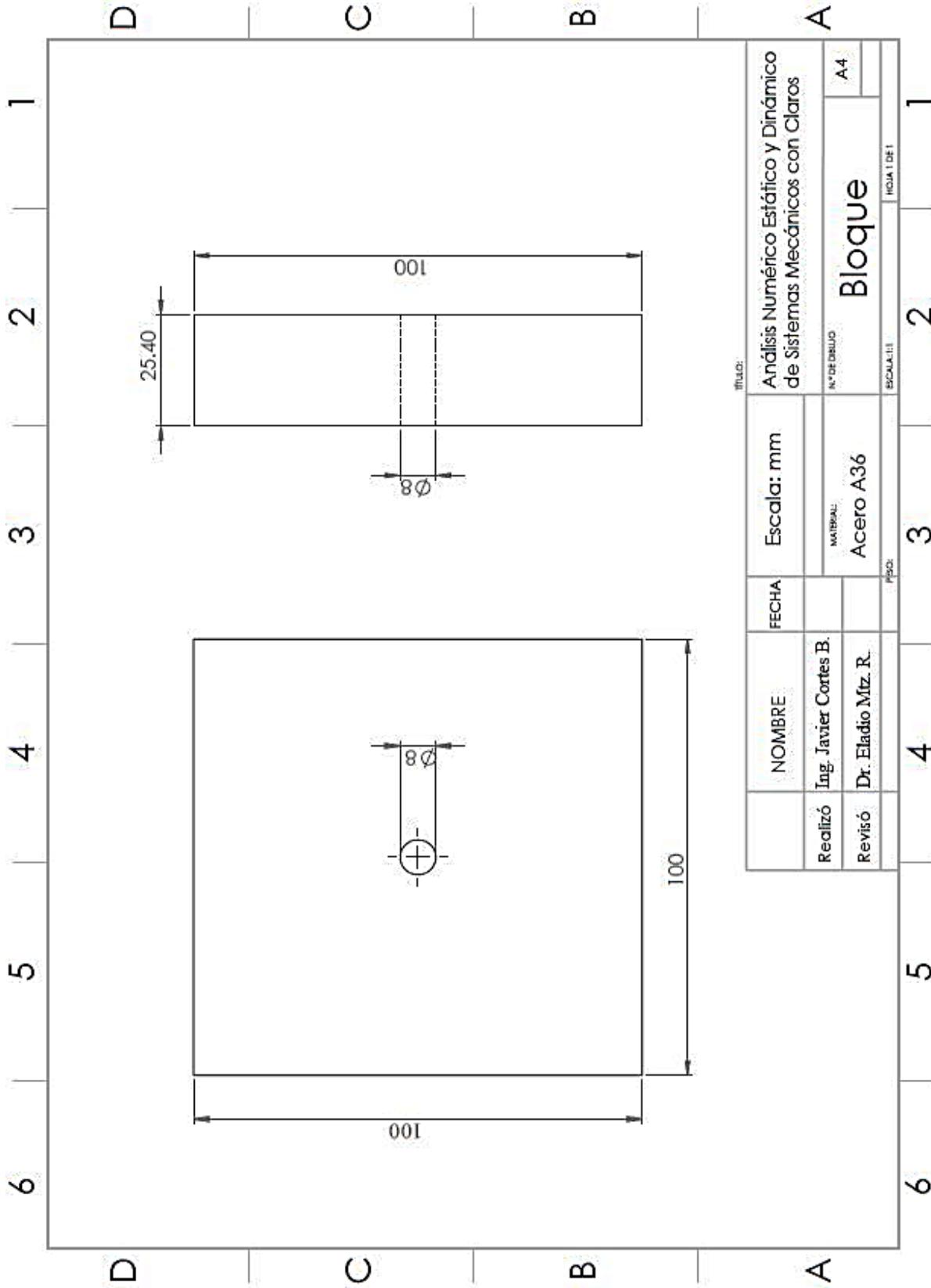
Además si se requiere volver a realizar el trabajo experimental se deben tomar en cuenta varios factores, principalmente que se utilicen equipos de precisión para tener el valor de las frecuencias apropiadas y obtener resultados similares al experimental y numérico.

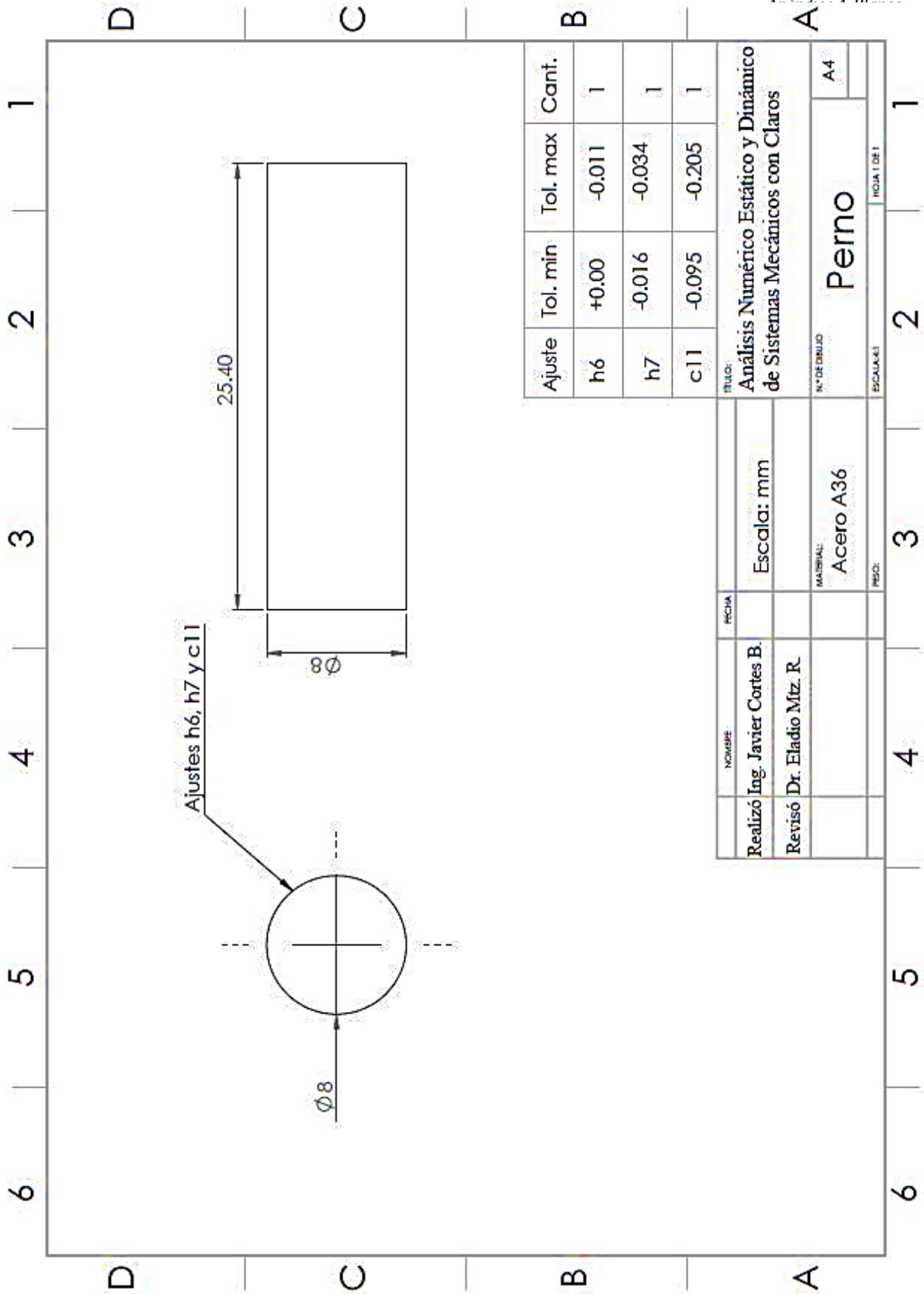
6.4 Trabajos futuros

Para continuar con esta investigación se debe emplear los impactos producidos en la unión provocado por un movimiento cinemático o cíclico y la disipación de la energía producida.

Apéndice

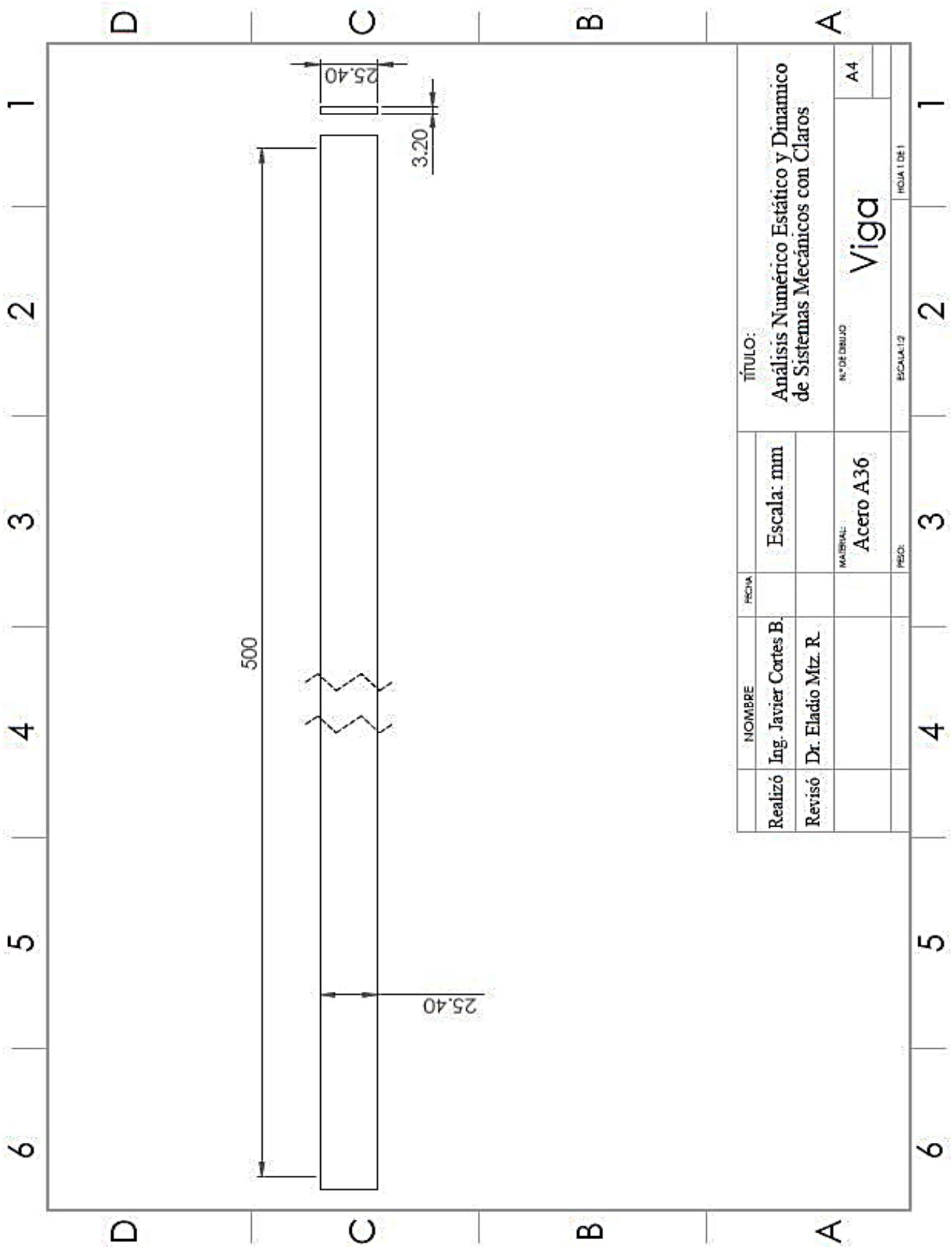
Apéndice A Planos





Ajuste	Tol. min	Tol. max	Cant.
h6	+0.00	-0.011	1
h7	-0.016	-0.034	1
c11	-0.095	-0.205	1

TÍTULO:		Análisis Numérico Estático y Dinámico de Sistemas Mecánicos con Claros	
NOMBRE:		Realizó Ing. Javier Cortes B.	
FECHA:		Escala: mm	
NOMBRE:		Revisó Dr. Eladio Mtz. R.	
MATERIAL:		Acero A36	
N.º DE DIBUJO:		Perno	
ESCALA:		A4	
HOJA:		HOJA 1 DE 1	



Apéndice B Comprobación de la Ley de Hertz, Pearson y ecuaciones de Euler-Bernoulli.

Para el diseño se deben obtener los resultados analíticos para emplear la teoría de Hertz y de Pearson, en el modelo se hace el análisis independiente; primero se realiza el análisis del pasador con la base del agujero aplicando una fuerza de 200 N; segundo se realizan las frecuencias y formas modales de una viga en cantiléver. En la Figura B.1 se observa el diseño discreto en 2D.

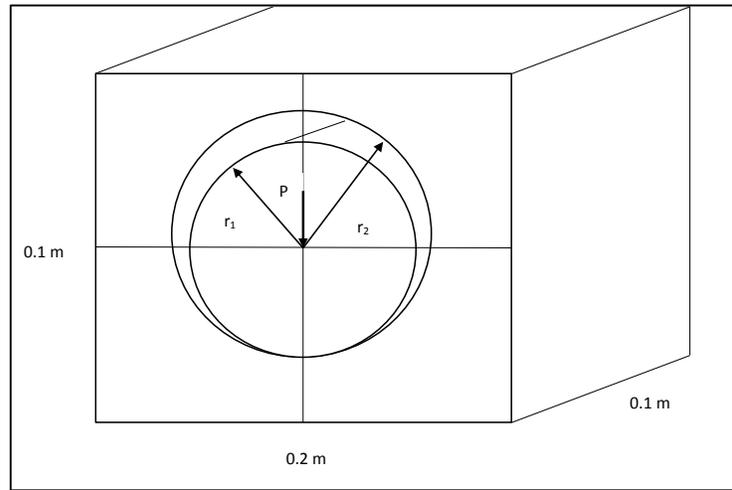


Figura B.1 Representación del modelo.

B.1 Análisis 2D teoría de Hertz

Ecuaciones contacto cilindro-cilindro

(El signo + se toma cuando los dos son convexos y el signo – cuando uno de ellos es cóncavo)

- $F=200$ N
- $R_1=0.012$ m
- $R_2=0.0127$ m
- $b=$ Espesor 0.1 m
- $E=$ módulo de Young $2.00E+11$ Pa
- $\nu=$ módulo de poisson 0.26
- $\Delta R=$ diferencia de radio $7.00E-04$ m

De acuerdo a las ecuaciones presentadas anteriormente se utiliza el mismo número de Poisson por tener propiedades similares, para encontrar el semiancho de huella se aplica la ecuación B.1.

$$A = 2.15 \sqrt{\frac{F \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{b \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} \quad (B.1)$$

$$a = 2.15 \sqrt{\frac{200 \text{ N}}{0.1 \text{ m}} \left(\frac{\frac{1}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2} + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2}}{\frac{1}{0.012 \text{ m}} - \frac{1}{0.0127 \text{ m}}} \right)} = 1.41872 e^{-4} \text{ m}$$

La presión máxima se obtiene de la siguiente ecuación, en la que se aplica la fuerza en un espesor de la Figura B.1.

$$P_{max} = \frac{4F}{\pi * a * b} \quad (B.2)$$

$$P_{max} = \frac{4(200 \text{ N})}{\pi(0.1 \text{ m})(1.41872 e^{-4} \text{ m})} = 17.8823 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Al obtener estos valores se debe emplear el ángulo de contacto que se describe con la ecuación de Pearsson.

B1.2 Ángulo de contacto aplicando la teoría de Pearsson

Para obtener del ángulo de contacto se debe realizar una iteración de acuerdo a los valores presentados en el plano de la ecuación 2.14.

$$\frac{E * \Delta R}{Q} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - b^2}{b^2} \right) - \frac{I_b}{\pi^2 b^2 (1 + b^2)}$$

- $b = \tan(\epsilon/2)$
- $I_b = \pi \log[1 + b^2]$
- $\Delta R =$ diferencia de radio $7.00 \text{E}-04 \text{ m}$

- Q= carga (200/0.024m)

$$\frac{E \cdot \Delta R}{Q} = \frac{(2e^{11} \text{Pa})(0.0007 \text{m})}{200 \text{ N}/0.024 \text{m}} = 16800$$

Se realizó un programa en Matlab para hallar el valor iterativo del ángulo de contacto.

Se muestran en la Tabla B.1.

Tabla B.1 Resultado de la iteración para el ángulo de contacto

	Resultado en radianes	Resultado en grados
ϵ =ángulo de contacto	1.231100E-02	0.70
b=tan($\epsilon/2$)	6.155578E-03	
Lb	9.999811E-01	
PI	3.141593E+00	
	16800.6477	
porcentaje de error	-0.003855362	

B.1.3 Dimensión de malla

Para el análisis de elemento finito se deben emplear consideraciones, debido a que el método de elemento finito (MEF) es un método aproximaciones para obtener valores, se debe implementar el tipo de malla y la dimensión de malla, para que los resultados sean aproximados a los cálculos analíticos.

El medio círculo tiene 2100 partes.

Tiene una circunferencia 0.0377m

Dividiendo la circunferencia se tiene la dimensión de la malla: $1.79288 \times 10^{-5} \text{ m}$

Aproximadamente 55777 partes se puede dividir en un metro.

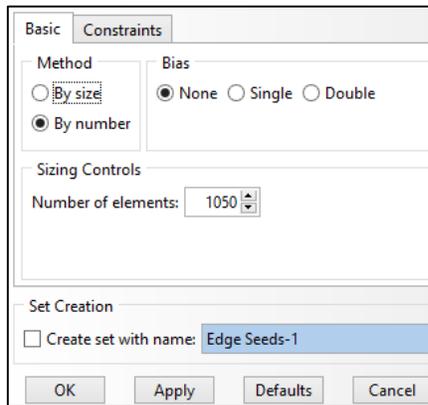


Figura B.2 Secciones divididas en el pasador.

B1.4 Condiciones de frontera del elemento 2D

Se fijó la parte inferior del bloque, se limitó el movimiento en X y rotación en XY, solo se permitió el movimiento en Y. Se le aplicó una fuerza en 200 N.

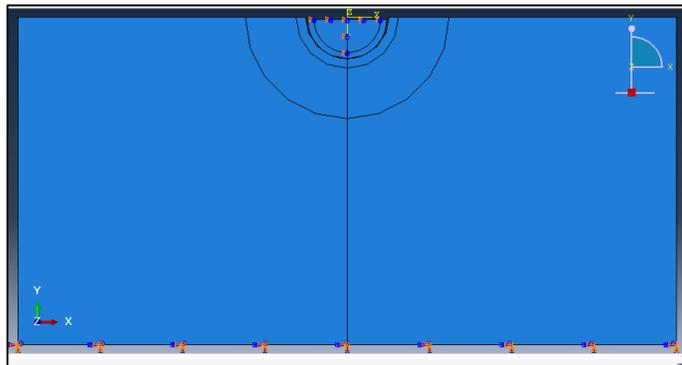


Figura B.3 Condiciones de frontera.

B1.5 Semiancho de huella de MEF del elemento 2D

El valor obtenido del elemento finito del programa Abaqus es el siguiente valor de aproximadamente 1.45076×10^{-5} m como se aprecia en la Figura B.4.

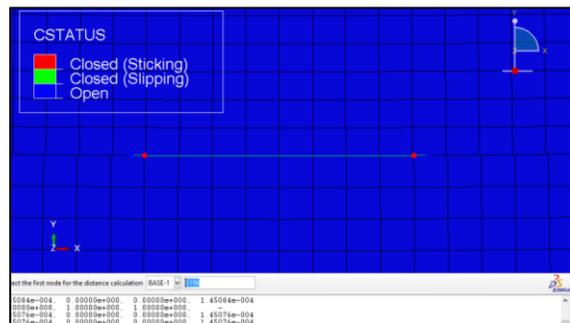


Figura B.4 Longitud del semi-ancho de contacto.

B1.6 Esfuerzos principales obtenidos de MEF del análisis 2D

En elemento finito se obtienen los esfuerzos en la dirección del eje Y o esfuerzos principales en δY en Abaqus es de conocido como S22, donde se presenta los esfuerzos principales en la Figura A.5, de 17.919712×10^6 Pa.

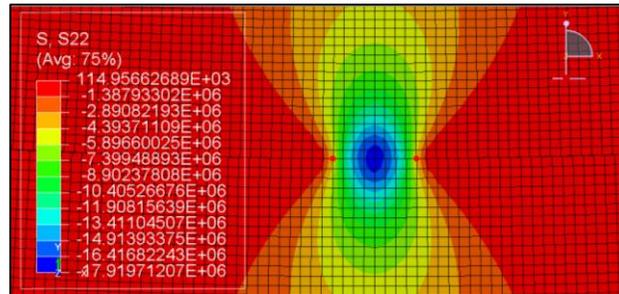


Figura B.5 Concentración de esfuerzos.

B1.9 Convergencia de malla

Para obtener los resultados se realizó una convergencia de malla obteniendo los resultados más aproximados empleando diferentes tamaño de malla y los resultados fueron los siguientes utilizando en el modelo a emplear de 0.04 mm de nodo a nodo.

Tabla B2 Resultados comparativos de la concentración de esfuerzos.

Fricción	0.08mm	0.04 mm
0	0.785	0.54
0.05	0.789	0.5404
0.1	0.798	0.55086
0.15	0.813	0.56646
0.2	0.839	0.59946
0.25	0.875	0.63936
0.3	0.917	0.682361
0.35	0.958	0.72536
0.4	1.002	0.7708
0.45	1.05	0.8161
0.5	1.091	0.865104
0.55	1.135	0.9131
0.6	1.185	0.9551

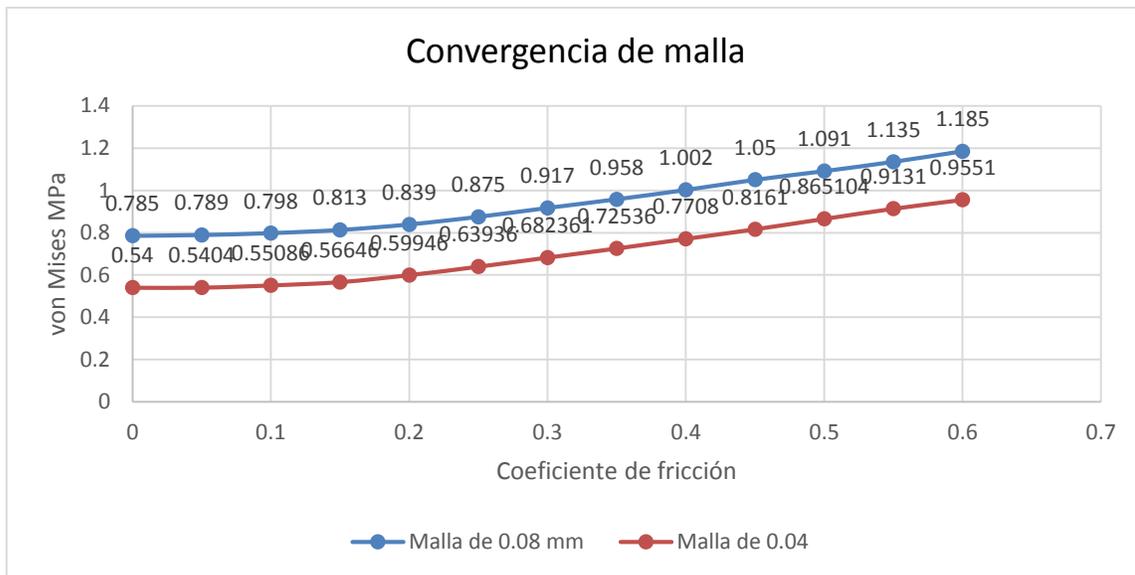


Figura B6 Convergencia de malla.

B1.8 Análisis numérico de una viga empotrada en un extremo.

En la simulación numérica para encontrar las frecuencias naturales de una viga se debe tomar en consideración sus características las cuales se muestran en la Figura B.7.

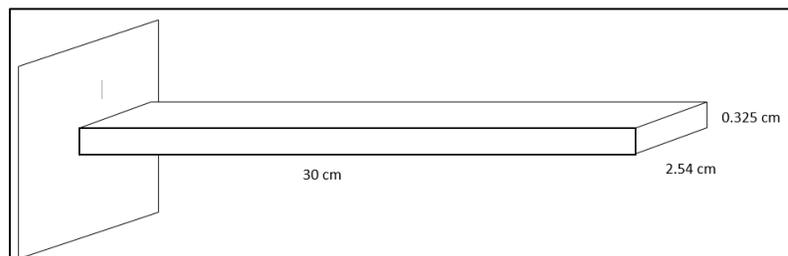


Figura B.7 Dimensión de la viga.

Datos

- Espesor de la viga=3.25 mm
- Ancho de viga= 25.40 mm
- Largo de la viga= 30 cm
- Frecuencia natural angular

$$\omega_n = A \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

Donde

- E= Modulo de Young
- I= Momento de inercia
- l=longitud de la viga
- μ =masa de la viga
- A es el coeficiente de la siguiente figura.

Y de acuerdo con el valor de A se obtiene los siguientes parámetros que se muestran en la Figura B.8.

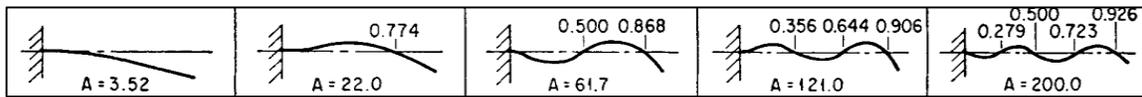


Figura B.8 Valor de A para el cálculo de una viga empotrada.

Los resultados obtenidos del valor analítico se muestran en la siguiente Tabla B.3.

Tabla B.3 Valores de la frecuencia natural.

Frecuencia f_n	Resultado de ecuación analítica (Hz)
$f_n 1$	29.5825
$f_n 2$	185.265
$f_n 3$	229.12
$f_n 4$	518.55
$f_n 5$	648.618

B1.8 Análisis obtenidos en MEF de las frecuencias naturales de una viga

Los valores obtenidos se muestran en las siguientes figuras de una viga empotrada en el extremo como se observa en la Figura B.9.

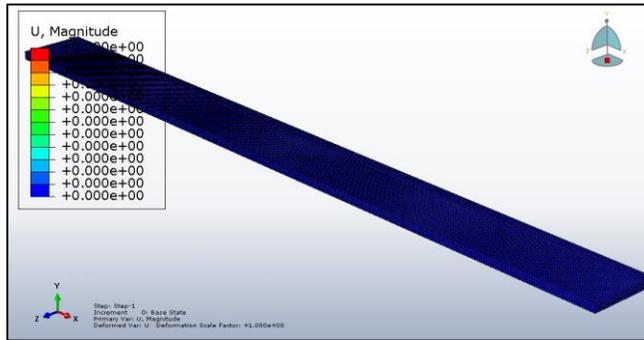


Figura B.9 Viga sin excitación natural.

En la Figura B.10 se muestra la primera frecuencia natural que es de aproximadamente de 27.839 Hz.

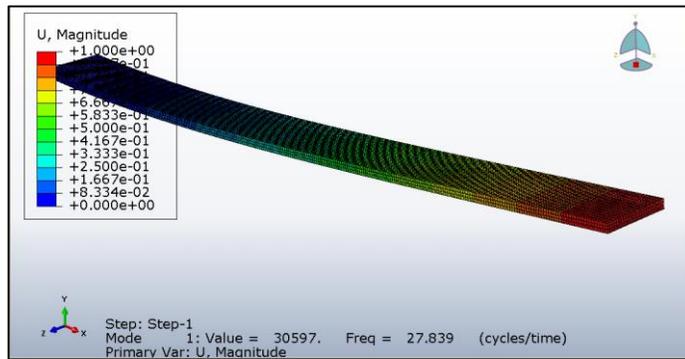


Figura B.10 Primera frecuencia natural y forma modal

En la Figura B.11 se muestra la segunda frecuencia natural y la forma modal que es de aproximadamente 174.35 Hz

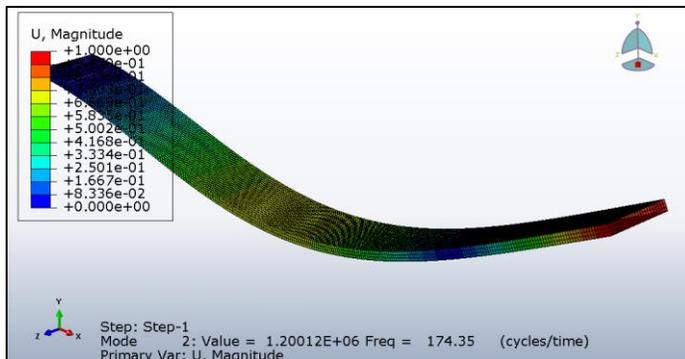


Figura B.11 Segunda forma modal y frecuencia natural

En la siguiente Figura B.12 se muestra la tercera forma modal y el valor de la frecuencia natural de 228.39 Hz

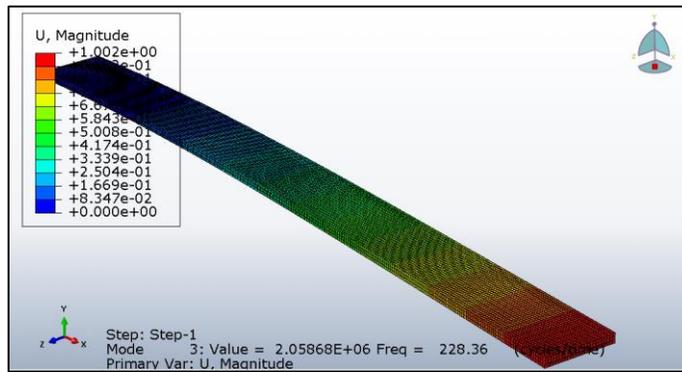


Figura B.12 Tercera forma modal y frecuencia natural

En la Figura B.13 se muestra el valor la cuarta forma modal con su respectiva frecuencia natural de 488.02 Hz

Los resultados obtenidos se hicieron de manera separada los cuales se determinó el esfuerzo por el contacto de Hertz y las frecuencias naturales de una viga en cantilever.

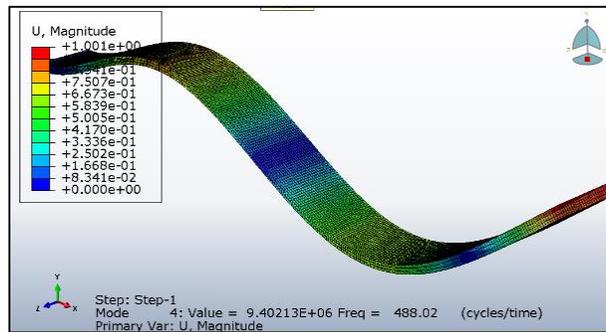


Figura B.13 Cuarta forma modal y frecuencia natural

A continuación se hace el análisis correspondiente al ensamble del modelo discreto completo.

Apéndice C Ensamble del modelo

Ensamble del sistema

C1.1 Ensamble del modelo en ABAQUS (Abaqus, 2012).

Para este ensamble se deben considerar las propiedades del material, las dimensiones de la pieza, condiciones de frontera y finalmente los resultados.

C1.2 Unión de elemento “BEAM”

Se debe de considerar ciertos parámetros, principalmente se debe colocar las características del material, la densidad (ρ), el módulo de Young (E), el módulo de Poisson (ν) y las dimensiones del elemento.

Entonces el siguiente paso que se muestra en la Figura C.1 sirve para escribir las dimensiones del perfil.

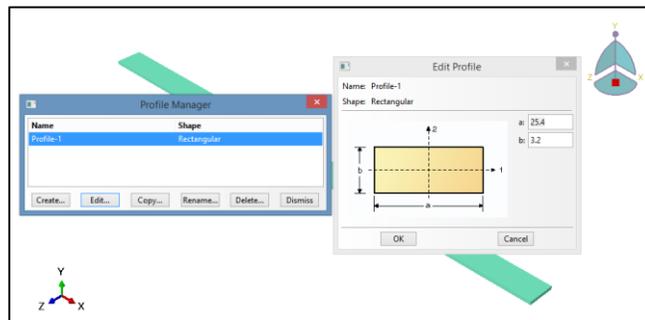


Figura C.1 Dimensiones del perfil de la viga.

El paso más esencial es la asignar la orientación de la viga como se muestra en la Figura C.2.

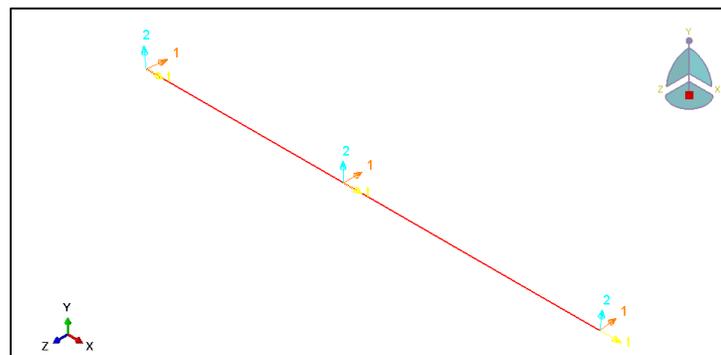


Figura C.2 Orientación de la viga.

Posteriormente para visualizar la sección de la viga como se observa en la Figura C.3 con sus dimensiones se va al menú *Part Display Options* en ABAQUS como la figura se hace de forma alambre y para observar la dirección y forma de la pieza se da en *Beam Profiles* que es el perfil de la viga.

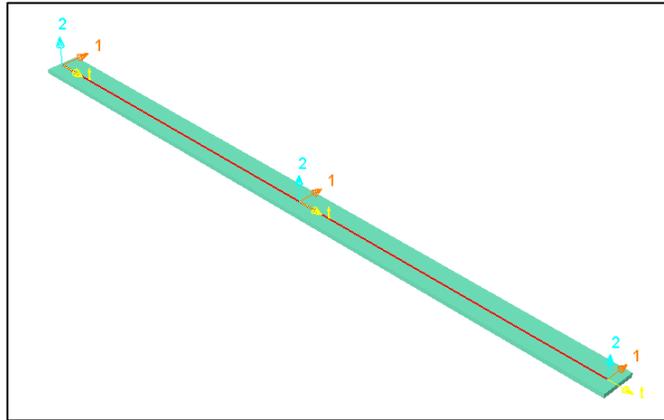


Figura C.3 Viga

C1.3 Unión “Beam” con elementos 2D

En la unión se deben usar varios artificios para poder ensamblar estas piezas una de las principales es particionar o dividir en varias secciones un extremo de la viga para realizar el siguiente ensamble.

En la unión se debe hacer una conexión tipo Tie: es la que conecta por nodos a la viga que es tipo alambre” Beam” y al pasador que es elemento 2D como se observa en la Figura C.4.

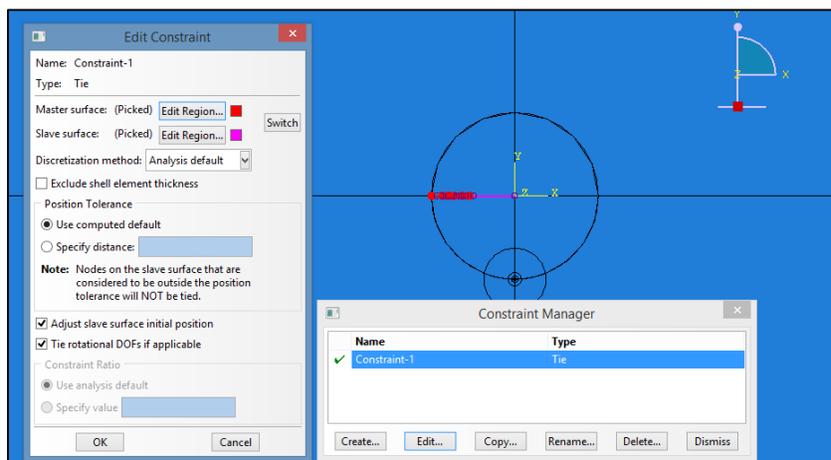


Figura C.4 Conexión tipo Tie

Finalmente se obtiene el ensamble “Beam” y 2D que se muestra en la siguiente Figura C.5.

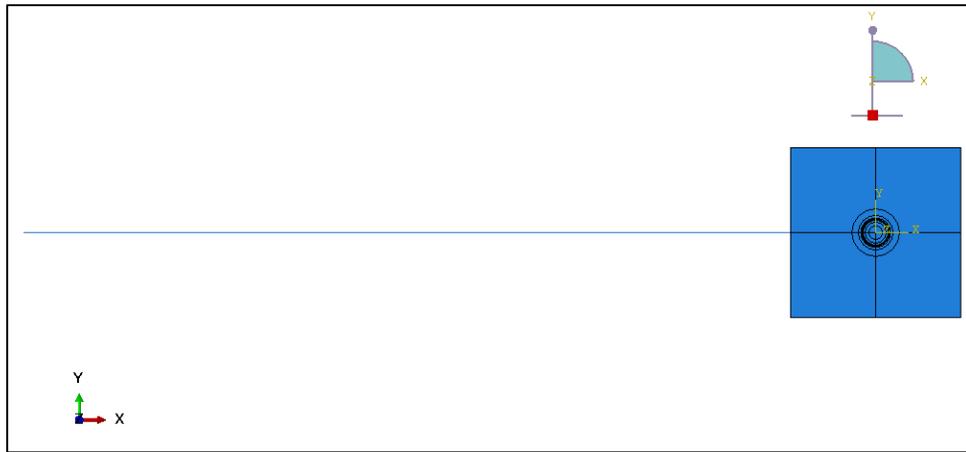


Figura C.5 Ensamble del diseño

Estas características para el ensamble se deben emplear para el correcto funcionamiento del modelo en ABAQUS.

Bibliografía

- Abaqus, A. U. (2012). Dassault Systemes, Simulia Corp. ABAQUS Version 6.9. Rhode Island, USA.: Providence.
- Aginaga, J., Zabalza, I., Altuzarra, O., & Pinto, C. (2010). Análisis de las condiciones de pérdida de contacto en uniones con holgura. *Asociacion Española de Ingeniería Mecánica*, 10.
- Astorqui, J. S. (06 de 09 de 2010). Master Universitario en innovación Tecnológica en edificación. Recuperado el 12 de Octubre de 2015, de La simulación en el diseño de técnicas en rehabilitación de edificios: www.edificacion.upm.es/personales/santacruz/Docencia/master/Manual_Straus7.pdf
- Beer, F. P., Johnston, E. R., Dewolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2013). *Mecánica de Materiales*. Connecticut: McGraw-Hill.
- Chandrupatla, T. R., & Belgundu, A. D. (1999). *Introducción a la ingeniería de elementos finitos* (Segunda Edición ed.). Pearson.
- Ciavarella, M., & Decuzzi, P. (2000). The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact. I the case of elastic. *International of solids and 38 structures*, 183-197.
- concentrada, L. d. (7 de Octubre de 2015). AutoFem Analysis. Obtenido de http://www.autofemsoft.com/examples/es/bending_of_a_cantilevered_beam.html
- Contreras, C. (2009). *Análisis Experimental de la Fricción Seca en una Viga en Cantiliver*. México: Cenidet.
- Cook, R. D. (1995). *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. Wisconsin, Madison: Jhon Wiley & Sons, INC.
- Cruz, V. M. (2000). *Análisis experimental de vibraciones con efecto de fricción y claro en uniones mecánicas*. Cuernavaca.
- D., M. R., & H., D. (1953). Elastic Spheres in Contact under Varying Oblique Forces. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 20, pp. 327-344.
- Ewins, D. J. (2000). *Modal Testing Theory, Practice and Application*. Press LTD, U.K.: RSP Research Studies.
- Flores, P., & Ambrosio, J. (2004). Revolute joints whit clearance in multibody systems. *El SEVIER*.
- Greenwood, J. A., & Williamson, J. B. (1966). Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proc. R. Soc.*, 295-300.
- Guzmán, M. G. (2009). *Análisis de influencia de los esfuerzos inerciales en el comportamiento de estructuras mecánicas unidas por pernos*. Cuernavaca.
- Harris, C. M., & Piersol, A. G. (2002). *Harris' Shock and Vibration*. New York: McGraw-Hill.
- Hutton, D. (2004). *Fundamentals of finite element analysis*. New York: McGraw-Hill 1era Edición.
- Jhonson, K. L. (1985). *Contact mechanism*. Cambridge University Press.

- Konowalski, K. (2009). Experimental research and modeling of normal contact stiffness and contact damping of machined joint surfaces. *Advances in Manufacturing Science and Technology*, 33(3): 53–68.
- Krolkowski, J., & Szczepek, J. (1993). Assessment of tangential and normal stiffness of contact between rough surfaces using ultrasonic methods. *Wear* 160, 253–258.
- Liu, C.-S., Ke, Z., & Yang, R. (2007). The FEM analysis and approximate model for cylindrical joints with clearances. *Mechanism and machine theory* 42, 183-197.
- Maia, N. M., & Silva, J. M. (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis (Mechanical Engineering Research Studies. Engineering Control Series, 9)*. Research Studies Press: Britain.
- Martinez, E. R. (2013). *Análisis numérico y experimental del comportamiento dinámico de uniones mecánicas con pernos*. Cuernavaca: Tesis doctoral.
- Michelin, I. (2015). *Refacciones de llanta*. Cuernavaca: El Sevier.
- Mukras, S., Kim, N. H., Schmitz, N., L., A. M., & Sawyer, W. G. (2009). *Analysis of planar multibody systems with revolute joint wear*. Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Florida, Gainesville, FL, USA: ELSEVIER.
- Oliván Sánchez, P. A. (2015). *Análisis Numérico de Rigidez de Contacto en Función de Geometría de Cuerpos*. Cuernavaca, Morelos: cenidet.
- Olyaei, A. A., & Ghazavi, M. R. (2012). Stabilizing slider-crank mechanism with clearance joints. *Mechanism and machine theory* 53, 17-29.
- Rao, S. S. (1995). *Mechanical Vibration*. Wesley, USA: Addison.
- Roca, R., & León, J. (1981). *Vibraciones Mecánicas*. México: Limusa.
- SatirNet, ©. S. (06 de Noviembre de 2015). SatirNet. Obtenido de <http://www.satirnet.com/satirnet/2015/07/07/evaluacion-de-riesgos-por-exposicion-vibraciones-mano-brazo/#sthash.vQi7OHXT.dpbs>
- Szwedowicz, D., Martínez, E., Bedolla, J., & Rodríguez, J. M. (2003). Experimental and numerical free vibration analysis of bolted connections with respect to mechanical clearances. *ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 90-98.
- Thomson, W. T. (1937). *Teoría de vibraciones*. México: Prentice Hall.
- Timoshenko, S. (1937). *Vibration Problems in Engineering*. New York, U. S. A.: Van Nostrand Company Inc.
- Yang, H. (2014). Modeling and Analysis of Normal Contact Stiffness of Machined Joint surface. *International Journal of Control and Automation*, Vol.7, No.6, pp.21-32.
- Zienkiewicz, O. C. (1982). *El método de los elementos finitos*. Barcelona: REVERTÉ S. A.

