

# **Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico**

**Subdirección Académica**

**Departamento de Ingeniería Mecánica**

## **TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS**

**Análisis del Efecto de un Inersor en la Respuesta Dinámica de  
Sistemas Mecánicos en Resonancia**

presentada por  
**Ing. Eduardo Barredo Hernández**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica**

Director de tesis  
**Dr. Andrés Blanco Ortega**



Cuernavaca, Mor., 20/junio/2016

OFICIO No. DIM/208/2016  
Asunto: Aceptación de documento de tesis

**C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO  
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Eduardo Barredo Hernández, con número de control M14CE040, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en resonancia”**, hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

DR. ANDRÉS BLANCO ORTEGA  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica  
6559298

REVISOR 1

DR. JORGE COLÍN OCAMPO  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
4694783

REVISOR 2

DR. ARTURO ABUNDEZ PLIEGO  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
6801139

C.p. (Lic. Guadalupe Garrido Rivera).- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Estudiante  
Expediente

Iniciales AAP/mrsr



Cuernavaca, Mor. 21 de junio de 2016  
OFICIO No. SAC/216/2016

**Asunto:** Autorización de impresión de tesis

**ING. EDUARDO BARREDO HERNÁNDEZ  
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA MECÁNICA  
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánico en resonancia”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

“CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO”

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**SEP TecNM  
CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA**

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr

# Dedicatoria

## **A MIS PADRES:**

*Víctor Barredo Villareal* por su valentía de emigrar a otro país con la finalidad de trabajar honradamente y poder darme una mejor calidad de vida, por inculcarme disciplina en todos los escenarios de mi vida, por su fuerza de voluntad para concentrar toda su energía para lograr tanto sus objetivos como los míos. Gracias padre por recordarme esta frase filosófica en los momentos trances de mi vida.

*“Hay hombres que luchan un día y son buenos. Hay otros que luchan un año y son mejores. Hay quienes luchan muchos años, y son muy buenos. Pero hay los que luchan toda la vida, esos son los imprescindibles”*

Gracias por todas las cosas maravillosas que he vivido a tu lado. Gracias padre mío te amo.

*María Inés Hernández Castellanos* por inculcarme diligencia, por su perseverancia ante las adversidades, por su lucha constante. Gracias madre por el gran esfuerzo que has hecho.

## **A MI ESPOSA:**

*Brenda Elizabeth Flores* por su apoyo en todo momento, por su amor y comprensión. Gracias por luchar conmigo estos años difíciles.

## **A MI HIJA**

*Carolina Barredo Flores* eres mi fuerza de voluntad para seguir luchando. Te amo hija mía, gracias dios.

## **A MIS HERMANOS:**

*Víctor Manuel, Rosa, Amado y Virginia* por el amor y apoyo que siempre me han brindado.

# Agradecimientos

A los hombres valientes y con autodeterminación de la nación mexicana que luchan todos los días para mejorar el país, principalmente al sector educativo y además crean programas de posgrados con becas para estudiantes de alto desempeño. Por lo cual, estoy completamente agradecido y orgulloso del esfuerzo de estos imprescindibles. Por otra parte, le agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgarme una beca para realizar estos estudios de maestría.

Al Dr. Andrés Blanco Ortega por sus consejos, apoyo y asesoramiento para llevar a cabo de manera exitosa este trabajo de investigación. Además, le agradezco la confianza, comprensión y amistad que usted me ha brindado.

Al Dr. Jorge Colín Ocampo y al Dr. Arturo Abúndez Pliego por sus importantes comentarios y sugerencias me permitieron culminar mi trabajo de investigación.

A mis amigos: Víctor Manuel Penagos, Virgilio Meza, Josué Ameth Jiménez y Roger H. Cruz, Rubisel Escobar, José Valles y Andrés Cadena por su amistad y apoyo incondicional.

Le doy las gracias a un ser omnipotente por estar presente en esta etapa tan importante de mi vida y por darme una familia tan maravillosa.

## Resumen

El inersor es un sistema mecánico que almacena energía cinética de rotación y puede ser construido por medio de un conjunto de elementos mecánicos tales como piñón, cremallera, engranes y volantes de inercia. De acuerdo a investigaciones realizadas este sistema demostró mejores cualidades en las suspensiones de automóviles y fue utilizado por primera vez en la fórmula uno. En este trabajo de tesis se presenta el diseño y análisis teórico de un nuevo inersor que consiste en el uso de una doble cremallera y se considera para su estudio los efectos de amortiguamiento viscoso, por lo que se añade un término a la ecuación ideal del inersor. Se analiza el efecto del inersor en sistemas mecánicos de uno y dos grados de libertad en condiciones de resonancia. Se obtienen los modelos matemáticos que rigen la dinámica de sistemas mecánicos Masa Resorte Inersor (MRI) mediante la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos. También, se utiliza el concepto de función de transferencia y de respuesta en frecuencia para realizar un análisis dimensional y así comprender el efecto del inersor. Se presentan resultados de simulación en el dominio del tiempo para validar los modelos matemáticos. El inersor puede ser configurado con elementos de suspensión pasiva tales como resortes y amortiguadores con el propósito de mejorar el comportamiento dinámico de sistemas vibratorios, por lo que en esta tesis se busca mejorar la respuesta dinámica de un sistema mecánico MRI de dos grados de libertad mediante la técnica de optimización  $H_{\infty}$ .

La técnica de optimización  $H_{\infty}$  es análoga a la teoría del punto fijo, la cual se basa en determinar funciones óptimas de variables adimensionales para ajustar parámetros de absorbedores de vibración dinámico amortiguado y no amortiguado. Mediante esta técnica se diseña el inersor para adaptarlo al sistema mecánico MRI de dos grados de libertad.

Posteriormente, se realizan simulaciones en MSC Adams View para corroborar los resultados obtenidos de los modelos analíticos. Además se presentan las ventajas y desventajas del inersor en atenuar las amplitudes de vibración.

## Abstract

The inerter is a mechanical system that stores rotational kinetic energy and it can be built by means of a set mechanical components such as pinion, rack, gears and flywheels. According to the investigations carried out this system demonstrated better qualities in the suspensions of cars and was used for first time in Formula One. In this thesis the design and theoretical analysis of a new inersor which consists in the use of a double rack is presented, for its study the effects of viscous damping is considered, so that the ideal of inersor equation it add a term. The effect of inerter in mechanical systems of one and two degrees of freedom in resonance conditions is analyzed. The mathematical models that govern the dynamics of mechanical systems Mass Spring Inerter (MRI) using the Lagrange equation for nonconservative systems is obtained. Also, the concept of transfer function and frequency response to perform a dimensional analysis and to understand the effect of the inersor is used. Simulation results are presented in the time domain to validate the mathematical models. The inerter can be configured with passive suspended elements such as springs and dashpot with the purpose of improving the dynamic behavior of vibratory systems, so that in this thesis is aiming to improve the dynamic response of a mechanical system MRI of two degrees of freedom through the optimization technique  $H_\infty$ .

The optimization technique  $H_\infty$  is analogous to the theory of fixed point, which is based on determining optimal functions of variables adimensional to adjust parameters of dynamic vibration absorbers damped and not damped. By this optimization technique the inerter is designed to suit the mechanical system MRI of two degrees of freedom.

Later simulations MSC Adams View are performed to corroborate the results of analytical models. Furthermore the advantages and disadvantages of inersor in attenuating the vibration amplitudes are presented.

## Terminología y Simbología

- TMD: Tuned Mass Damper
- RIDTMD: Rotational Inertia Double Tuned Mass Damper
- DVA: Damper Vibration Absorber
- SDOF: Single-Degree-of-Freedom System
- TDOF: Two- Degree-of-Freedom System
- MDOF: Multiple- Degree-of-Freedom System
- MRA: Masa-Resorte-Amortiguador
- MRI: Masa-resorte-inersor
- LTI: Linear-Time-Invariant
- $r_1$  radio del piñón 1 o impulsor
- $r_2$  radio del engrane 2
- $r_3$  radio del engrane 3
- $r_4$  radio del engrane 4
- $r_5$  radio del engrane 5
- $r_6$  radio del engrane 6
- $I_1$  momento de inercia de masa del piñón 1, engrane 2 y eje 1
- $I_2$  momento de inercia de masa del engrane 3, eje 2 y el volante de inercia 1
- $I_3$  momento de inercia de masa del engrane 4, engrane 5 y eje 3
- $I_4$  momento de inercia de masa del engrane 6, eje 4 y el volante de inercia 2
- $M_{Crem}$  masa de la cremallera
- $F_e$  fuerza de entrada al sistema en la cremallera
- $x(t)$  desplazamiento de la cremallera en el dominio del tiempo
- $\theta_1$  desplazamiento angular del eje 1
- $\theta_2$  desplazamiento angular del eje 2
- $\theta_3$  desplazamiento angular del eje 3
- $\theta_4$  desplazamiento angular del eje 4
- $L$  función Lagrangiana
- $T$  energía cinética
- $V$  energía potencial
- $q_i$  coordenada generalizada
- $D$  función de disipación de energía
- $\omega_n$  frecuencia natural
- $\Omega$  variable adimensional relación de frecuencia forzada
- $q$  variable adimensional relación de frecuencias naturales
- $\mu$  variable adimensional relación de  $J$  a  $m_1$
- $\beta$  variable adimensional relación de masas  $m_2$  a  $m_1$
- $\zeta_i$  factor de amortiguamiento



- $b_i$  coeficiente de amortiguamiento rotacional
- $J$  masa equivalente del inersor en kilogramo
- $\delta$  constante de amortiguamiento equivalente del inersor
- $c_i$  coeficiente de amortiguamiento de translación
- $k_i$  coeficiente de rigidez
- $\varphi_i$  ángulo de fase
- $\rho$  densidad del volante de inercia
- $t$  espesor del volante de inercia
- $r_o$  radio externo del volante de inercia
- $r_i$  radio interno del volante de inercia
- $\omega_{A,B}$  frecuencia natural en el punto A y B
- $X_{1,2\omega_A}$  máxima amplitud de  $m_2$  y  $m_1$  en el punto A
- $X_{1,2\omega_B}$  máxima amplitud de  $m_2$  y  $m_1$  en el punto B
- $\zeta_{2\acute{o}ptima}$  factor de amortiguamiento óptima
- $q_{\acute{o}ptima}$  razón de frecuencias naturales óptima
- $\mu_{\acute{o}ptima}$  razón de  $J$  a  $m_1$  óptima
- $\Omega_{A,B}$  relación de frecuencia forzada en el punto A y B
- $H_{1,2}$  respuesta en frecuencia normalizada de  $m_1$  y  $m_2$
- $H_\infty$  función  $H$  infinito
- $n, m$  numerador y denominador de la función  $H_1$
- $\Omega_{1,2}$  razón de frecuencia forzada en el punto 1 y 2
- $q_{1,2}$  razón de frecuencias naturales en el punto 1 y 2
- $\zeta_{2\Omega_{1,2}}$  factor de amortiguamiento en el punto 1 y 2

## Índice General

Dedicatoria .....	I
Agradecimientos.....	II
Resumen.....	III
Abstract .....	IV
Terminología y Simbología .....	V
Índice general .....	VII
Índice de figuras .....	IX
Índice de tablas .....	XI
<b>Capítulo 1. Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1. Inersor.....	1
1.2. Planteamiento del problema .....	3
1.3. Objetivos de la tesis.....	3
1.3.1. Objetivo General .....	3
1.3.2. Objetivos Específicos .....	3
1.4. Justificación .....	4
1.5. Contribuciones del trabajo .....	4
1.6. Organización de la tesis.....	5
<b>Capítulo 2. Antecedentes</b> .....	<b>7</b>
2.1. Absorbedores de vibraciones .....	7
2.2. Marco Teórico.....	10
2.3. Modelado matemático de un sistema mecánico de 3gdl .....	11
2.4. Función de transferencia .....	12
2.5. Respuesta en frecuencia .....	13
2.6. Teorema de Buckingham Pi.....	14
2.7. Volantes de inercia .....	20
2.8. Cremallera y piñón.....	21
2.9. Ley de engranes .....	22
<b>Capítulo 3. Modelado y simulación de sistemas mecánicos</b> .....	<b>23</b>
3.1. Ecuaciones cinemáticas .....	25
3.2. Simulación virtual del inersor .....	26
3.3. Modelo matemático del sistema mecánico MRI de un gdl .....	27
3.4. Simulación del prototipo virtual MRI.....	30
3.5. Sistema mecánico MRI de dos gdl primera configuración .....	31
3.6. Simulación del prototipo virtual TDOF primera configuración .....	34

3.7. Respuesta en frecuencia del sistema mecánico MRI-TDOF primera configuración .....	35
3.8. Sistema mecánico MRI de dos gdl segunda configuración.....	37
3.9. Respuesta en frecuencia del sistema MRI-TDOF Segunda configuración. ....	39
<b>Capítulo 4. Optimización <math>H_{\infty}</math></b>	<b>42</b>
4.1. Introducción a los métodos de optimización .....	42
4.2. Optimización $H_{\infty}$ .....	46
4.3. Cálculo de los parámetros óptimos.....	51
4.4. Simulación virtual del sistema MRI-TDOF en condiciones de resonancia .....	54
<b>Capítulo 5. Diseño y construcción del inersor</b>	<b>56</b>
5.1. Diseño virtual .....	56
5.2. Rediseño del inersor .....	59
5.3. Prototipo físico .....	61
<b>Capítulo 6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>65</b>
6.1. Trabajo futuro .....	66
<b>Bibliografía.....</b>	<b>67</b>
<b>Apéndice A: Ecuación dinámica del inersor de doble cremallera .....</b>	<b>71</b>
<b>Apéndice B: Cálculo de las funciones adimensionales óptimas .....</b>	<b>74</b>
<b>Apéndice C: Planos del inersor de doble cremallera .....</b>	<b>80</b>
<b>Apéndice D: Planos de rediseño del inersor .....</b>	<b>90</b>

## Índice de figuras

Figura 1.1: Inersor piñón-cremallera-volante de inercia. ....	1
Figura 1.2: Configuraciones del inersor.....	2
Figura 1.3: Plataforma experimental de sistemas masa-resorte-amortiguador. ....	2
Figura 2.1: Péndulo T con un sistema TMD e inersor. ....	8
Figura 2.2: Sistema masa-resorte-amortiguador.....	11
Figura 2.3: Absorbedor de vibración dinámico amortiguado - TMD. ....	14
Figura 2.4: Respuesta en estado estable $H_1$ . ....	18
Figura 2.5: Respuesta en estado estable de $H_2$ . ....	19
Figura 2.6: volante de inercia. ....	20
Figura 2.7: Modelo del sistema piñón-cremallera.....	21
Figura 2.8: Tren de engranes rectos. ....	22
Figura 3.1: Inersores propuestos en la literatura. ....	23
Figura 3.2: Inersor de doble cremallera.....	24
Figura 3.3: Diagrama cinemático de inersor de doble cremallera. ....	24
Figura 3.4: Posición de la cremallera. ....	26
Figura 3.5: Sistema mecánico MRI de un gdl.....	27
Figura 3.6: Función impulso. ....	29
Figura 3.7: Posición de la masa $m_1$ .....	30
Figura 3.8: Respuesta a un impulso de la masa $m_1$ .....	30
Figura 3.9: Respuesta en frecuencia de la masa $m_1$ .....	31
Figura 3.10: MRI-TDOF Primer configuración. ....	32
Figura 3.11: Respuesta al impulso de $m_1$ y $m_2$ . ....	33
Figura 3.12: Simulación en MSC Adams TDOF Primera configuración. ....	34
Figura 3.13: Respuesta en frecuencia de $m_1$ MRI-TDOF Primera configuración. .	36
Figura 3.14: Respuesta en frecuencia de $m_2$ MRI-TDOF Primera configuración. .	36
Figura 3.15: MRI-TDOF Segunda configuración. ....	37
Figura 3.16: Respuesta en el tiempo de $m_1$ y $m_2$ . ....	38
Figura 3.17: Simulación en MSC Adams TDOF Segunda configuración. ....	39
Figura 3.18: Respuesta en frecuencia de $m_1$ MRI-TDOF Segunda configuración. 40	
Figura 3.19: Respuesta en frecuencia de $m_2$ MRI-TDOF Segunda configuración. 40	
Figura 4.1: Gradiente direccional. ....	45
Figura 4.2: Efecto del inersor en la respuesta de la masa principal. ....	47
Figura 4.3: Respuesta en estado estable $H_1$ para diferentes valores de $\zeta_2$ .....	50
Figura 4.4: Respuesta en frecuencia de $m_1$ y $m_2$ optimizada.....	53
Figura 4.5: Respuesta en el tiempo de $m_1$ y $m_2$ a $\omega_A$ .....	54
Figura 4.6: Respuesta en el tiempo de $m_1$ y $m_2$ a $\omega_B$ .....	55
Figura 5.1: Vistas principales del inersor de doble cremallera. ....	58
Figura 5.2: Rediseño del inersor. ....	61

Figura 5.3: Ensamble de la carcasa superior e inferior del inersor.....	61
Figura 5.4: Cremallera.....	62
Figura 5.5: Ejes del inersor.....	62
Figura 5.6: Engranés rectos. ....	63
Figura 5.7: Rodamientos NMB 608. ....	63
Figura 5.8: Volantes de inercia.....	63
Figura 5.9: Ensamble final del inersor. ....	64
Figura 6.1: Equivalencia en sistemas mecánicos.....	65
Figura C.1: Carcasa inferior del inersor de doble cremallera .....	80
Figura C.2: Carcasa superior del inersor de doble cremallera .....	81
Figura C.3: Cremallera con doble dentadura .....	82
Figura C.4: Engrane recto de 30 dientes.....	83
Figura C.5: Piñón de 30 dientes .....	84
Figura C.6: Engrane recto de 60 dientes.....	85
Figura C.7: Eje 1 y 2.....	86
Figura C.8: Eje 3 y 4.....	87
Figura C.9: Volante de inercia y tornillo.....	88
Figura C.10: Vista explosionada del inersor de doble cremallera.....	89
Figura D.1: Carcasa inferior inersor .....	90
Figura D.2: Carcasa superior .....	91
Figura D.3: Cremallera del inersor .....	92
Figura D.4: Engrane recto 36 dientes.....	93
Figura D.5: Piñón 36 dientes .....	94
Figura D.6: Engrane recto 48 dientes.....	95
Figura D.7: Volante de inercia 1 .....	96
Figura D.8: Volante de inercia 2 .....	97
Figura D.9: Eje 1 .....	98
Figura D.10: Eje 2 .....	99
Figura D.11: Tornillo y Rodamientos .....	100
Figura D.12: Vista explosionada del inersor.....	101

## Índice de tablas

Tabla 3.1 Parámetros de simulación .....	26
Tabla 5.1: Piezas principales del inersor de doble cremallera.....	57
Tabla 5.2: Piezas principales del rediseño del inersor. ....	59

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Inersor

El inersor es un dispositivo mecánico que absorbe energía cinética de rotación y puede ser construido por medio de un conjunto de elementos mecánicos tales como piñón, cremallera, engranes y volantes de inercia. Fue propuesto por el profesor Malcolm C. Smith en investigaciones de sistemas de control de absorción de vibración. De acuerdo a estas investigaciones, este sistema demostró mejores rendimientos en las suspensiones de automóviles y fue utilizado por primera vez en la fórmula uno [1]. Además, ha sido aplicado en sistemas de suspensión pasiva de motocicletas de alto rendimiento, prototipos didácticos, edificios y trenes [2].

Smith define el inersor como un sistema que absorbe vibración, es decir, no disipa energía tal como lo hace un sistema que contiene amortiguador hidráulico (movimiento axial de un pistón en un cilindro) y amortiguador torsional, él lo define como un dispositivo en el cual la fuerza aplicada en una de sus terminales es directamente proporcional a la aceleración relativa entre ellas, ver Figura 1.1 y se representa mediante la ecuación dinámica ideal [3].

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad (1.1)$$

En donde  $F$  es la fuerza aplicada en las terminales,  $\dot{v}_1$ ,  $\dot{v}_2$  son las aceleraciones de las terminales y  $b$  es una constante de proporcionalidad llamada inertancia que tiene unidades de kilogramo, lo cual contiene información geométrica del volante de inercia del inersor.

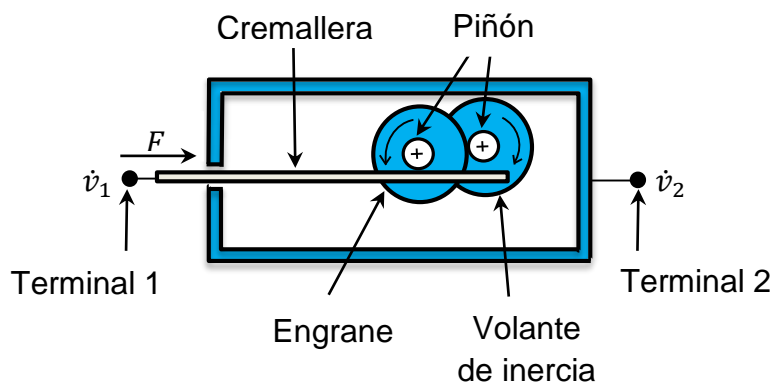


Figura 1.1: Inersor piñón-cremallera-volante de inercia.

En esta tesis se estudia el comportamiento dinámico de un inersor de doble cremallera conectado en paralelo con un resorte. Cuando se modifica la constante de masa equivalente o inercancia del inersor, se presentan cambios en las amplitudes de vibración del sistema Masa Resorte Inersor (MRI). En algunas investigaciones se ha demostrado que el inersor modifica las frecuencias naturales del sistema [4], lo cual se corrobora en este trabajo.

El inersor se puede conectar de varias maneras según sea la aplicación, por lo que algunas ofrecen un mejor rendimiento en la absorción de vibración. Tales configuraciones se muestran en la Figura 1.2.

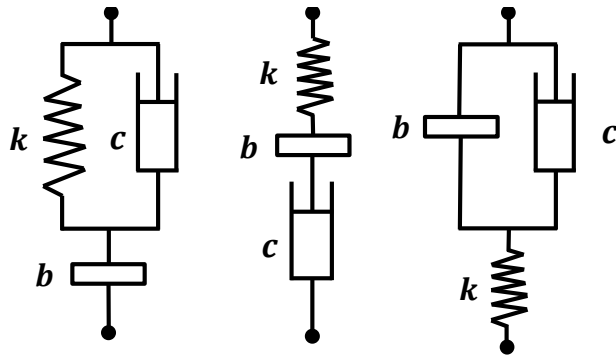


Figura 1.2: Configuraciones del inersor.

En la Figura 1.2 el inersor es conectado en serie y paralelo con elementos de suspensión pasiva tales como resortes y amortiguadores. Con base en las configuraciones mostradas anteriormente se diseñó el inersor para adaptarlo al sistema mecánico que se muestra en la Figura 1.3. La plataforma experimental consta de tres masas inerciales y un motor que transmite la fuerza de excitación a la masa principal mediante un sistema piñón-cremallera. La finalidad de este sistema es simular el fenómeno de resonancia cuando el inersor es conectado en los extremos de las masas inerciales.

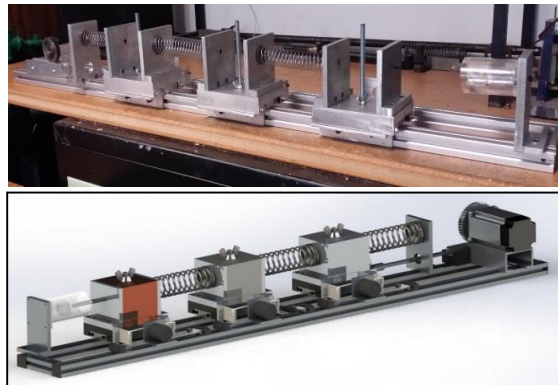


Figura 1.3: Plataforma experimental de sistemas masa-resorte-amortiguador.



## **1.2. Planteamiento del problema**

En sistemas que son susceptibles a presentar vibraciones provenientes de diversas fuentes tales como maquinaria rotatoria o reciprocante, motores, compresores, vehículos de transporte como camiones y trenes se deben proteger mediante dispositivos mecánicos con la finalidad de minimizar los picos de vibración. A veces, la presencia de vibración provoca desgaste excesivo de cojinetes, formación de grietas, aflojamiento de sujetadores, fallas estructurales y mecánicas, lo cual conlleva a la necesidad de diseñar dispositivos que ayuden a mejorar el comportamiento dinámico del sistema principal. En la mayoría de los sistemas mecánicos se presenta un fenómeno llamado resonancia, este ocurre cuando la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, dando lugar a grandes amplitudes de vibración. En algunos casos, la fuerza de excitación o de sacudimiento es inherente a la máquina. Por ejemplo, un desbalance y desalineamiento en una máquina rotatoria. Incluso una fuerza de excitación relativamente pequeña puede provocar una respuesta indeseable cerca de la resonancia, sobre todo en sistemas pobremente amortiguados. En estos casos la magnitud de la respuesta se puede reducir significativamente utilizando absorbedores de vibración dinámico amortiguado y no amortiguado. Es por ello que en la mayoría de los sistemas mecánicos forzados a movimientos oscilatorios se deben atenuar/eliminar las vibraciones, por lo que en esta tesis se analizó el efecto de un inersor para minimizar la máxima amplitud de vibración de sistemas mecánicos en condiciones de resonancia. En este trabajo, se determinó los parámetros de diseño de un inersor y la configuración adecuada con resortes y amortiguadores para obtener una respuesta mínima de vibración de un sistema MRI de dos grados de libertad. Se modeló el inersor considerando amortiguamiento viscoso debido a los rodamientos para emular un comportamiento más real del sistema como un disipador de energía.

## **1.3. Objetivos de la tesis**

### **1.3.1. Objetivo General**

Diseñar y construir un inersor para analizar su efecto en las amplitudes de vibración de sistemas mecánicos de uno y dos grados de libertad en resonancia.

### **1.3.2. Objetivos Específicos**

1. Obtener el modelo matemático del inersor para extrapolarlo al sistema mecánico MRI de dos grados de libertad.

2. Realizar un análisis dimensional a partir de la respuesta en frecuencia del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad. Posteriormente, aplicar un método de optimización para minimizar la máxima amplitud de vibración en las frecuencias de resonancia.
3. Calcular los parámetros óptimos tales como rigidez, masa equivalente y factor de amortiguamiento del inersor para el sistema mecánico MRI con base en las funciones de variables adimensionales óptimas obtenidas en la parte de optimización.
4. Realizar simulaciones en Matlab Simulink y MSC Adams View tanto del modelo analítico como del prototipo virtual para corroborar los resultados.
5. Construir el inersor a partir de las consideraciones de diseño en la técnica de optimización y con base en las dimensiones físicas del simulador de masas que se encuentra en el laboratorio de diseño.

#### 1.4. Justificación

EL inersor es un dispositivo mecánico propuesto recientemente para mejorar el desempeño de sistemas mecánicos sujetos a presentar vibraciones. Con base en los resultados de investigaciones, el inersor puede proporcionar estabilidad, reducir amplitudes de vibración, balancear cargas dinámicas que originan los neumáticos a causa de imperfecciones en carretera. De acuerdo con estas ventajas del inersor, se analizó el efecto que se origina cuando el inersor es conectado en paralelo a un resorte. Además, se consideró hipotéticamente amortiguamiento torsional en los rodamientos para simular la fricción interna en el inersor. Por tanto, el interés de este tema de tesis es diseñar y construir un inersor para analizar su efecto en la respuesta vibratoria de sistemas mecánicos en condiciones de resonancia con el objetivo de minimizar la máxima amplitud de vibración en las frecuencias de resonancia. Al conocer el comportamiento dinámico del inersor permitirá extender su uso en otras aplicaciones para mejorar la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en condiciones de resonancia.

#### 1.5. Contribuciones del trabajo

Se presenta el diseño y construcción de un nuevo diseño mecánico de un inersor con base en la técnica de optimización  $H_{\infty}$ . Se analiza el comportamiento dinámico del inersor mediante simulaciones virtuales en MSC Adams View para atenuar las amplitudes de vibración del sistema mecánico MRI en condiciones de resonancia, para posteriormente extenderlo a otras aplicaciones reales.

Se utilizará la técnica de optimización  $H_{\infty}$  para aportar una metodología de cómo obtener soluciones analíticas de las funciones de variables adimensionales óptimas. Adicionalmente, se muestra la dependencia de las variables adimensionales en la

respuesta normalizada para cada subsistema. Por otra parte, se demuestra analíticamente y mediante gráficas que existen dos puntos fijos en la respuesta en frecuencia que son independientes de la razón de amortiguamiento  $\zeta$  del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad. Así mismo, con la técnica de optimización utilizada, la amplitud normalizada se puede representar por medio de una sola variable adimensional.

## 1.6. Organización de la tesis

Este trabajo de tesis está organizado en seis capítulos que se detallan a continuación.

- En el capítulo 2 se presenta una breve introducción a la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos aplicada a un sistema masa resorte amortiguador (MRA). Por otra parte, se presenta el concepto de función de transferencia y respuesta en frecuencia para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) para poder realizar un análisis dimensional mediante el *Teorema de Buckingham Pi*. Posteriormente, se presenta un ejemplo ilustrativo de análisis dimensional aplicado a un absorbedor de vibración dinámico amortiguado. En este mismo, se añade información sobre volantes de inercia, sistema piñón-cremallera, lo cual conlleva a enunciar la *Ley de engrane*. Esta última información se utiliza para obtener relaciones cinemáticas y para calcular las dimensiones del volante inercia.
- En el capítulo 3 se presenta el modelo matemático y simulación en MSC Adams View del inersor al aplicarle una fuerza de impulso mecánico. Adicionalmente, se obtienen los modelos analíticos de sistema de un solo grado de libertad (SDOF) y sistemas de dos grados de libertad (TDOF) para diferentes configuraciones del inersor. Se realizan simulaciones virtuales para obtener la respuesta dinámica en el dominio del tiempo. Así mismo, se obtiene la respuesta en frecuencia para observar el efecto del inersor en condiciones de resonancia.
- En seguida, el capítulo 4 se aborda el problema de optimización  $H_{\infty}$  que minimiza la máxima amplitud en las frecuencias de resonancia del sistema mecánico TDOF cuando el inersor es conectado en los extremos de las masas inerciales. Se presentan los cálculos de parámetros óptimos del inersor y simulaciones del sistema en condiciones de resonancia y así corroborar el análisis teórico con los resultados obtenidos mediante simulación.
- Por otra parte, en el capítulo 5 se presenta el diseño y construcción del inersor. Además se describen los pasos necesarios para realizar el ensamble de manera correcta con base en los planos del diseño mecánico.

- En el capítulo 6 se presenta las conclusiones de acuerdo a los resultados obtenidos y se establece el trabajo futuro. Finalmente, se presenta una sección de apéndices.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. Absorbedores de vibraciones

El estudio de vibraciones en sistemas mecánicos ha sido de gran interés, por lo que, se han propuesto diferentes dispositivos mecánicos para la absorción y disipación de vibración. Recientemente, se desarrolló un nuevo concepto llamado inersor, este es un dispositivo mecánico que absorbe energía cinética por medio de un volante de inercia, ha sido utilizado para reducir las frecuencias naturales en sistemas mecánicos de seis grados de libertad. Para investigar más a fondo la influencia del inersor en un sistema vibratorio general, un sistema de múltiples grados de libertad (MDOF) se consideró en el análisis de sensibilidad que se realiza de acuerdo a las frecuencias naturales y formas modales para demostrar que las frecuencias naturales del sistema MDOF siempre se pueden reducir al aumentar la inertancia de cualquier inersor incluido en la red mecánica. La influencia de la posición del inersor en las redes mecánicas es modificar las frecuencias naturales [4]. Para mejorar el desempeño de un absorbedor de vibración amortiguado (TMD) se incorporó un arreglo en paralelo masa-resorte-inersor a un sistema de un grado de libertad, es decir, un absorbedor de vibración llamado amortiguador de masas doblemente sintonizado con inercia rotacional (RIDT) para reducir las amplitudes de vibración, este arreglo demostró mejores rendimientos que un simple TMD. Un TMD es un absorbedor de vibración que está conformado por un sistema primario y un sistema secundario, el sistema primario es el sistema al que se desea aislar o suprimir vibración puede ser una máquina rotatoria con un desbalance. Por otro lado, el sistema secundario es el absorbedor y compuesto por un resorte, amortiguador y un elemento masa. El objetivo principal de un absorbedor de vibración es transmitir la energía de vibración del sistema primario al sistema secundario, es decir, que en condiciones de resonancia exista un equilibrio dinámico de fuerzas inerciales en ambos sistemas [5].

Al incluir dispositivos adicionales tales como inersores y amortiguadores conectados al péndulo T y la influencia del TMD en la respuesta dinámica en la base de la estructura del péndulo T, ver Figura 2.1, permite tener un control total en la respuesta del sistema. Por otra parte, los cambios en el diseño de los parámetros del TMD se pueden llevar a cabo de tal manera que no afecta la complejidad del modelo matemático. El inersor y el amortiguador hidráulico de constante  $b$  y  $C_2$

pueden causar sólo una ligera disminución de la amplitud de elevación en la base de la estructura del péndulo T. Además, la combinación de estos dos dispositivos puede conducir a una mejora significativa en la dinámica del sistema. Por tanto, se puede ajustar con precisión la respuesta dinámica del sistema mediante la selección de la configuración correcta del amortiguador e inersor, es decir, en paralelo o serie. Por otra parte, la respuesta dinámica de la estructura depende de los parámetros del amortiguador y del inersor tales como el coeficiente de amortiguamiento e inercia, respectivamente [6-10].

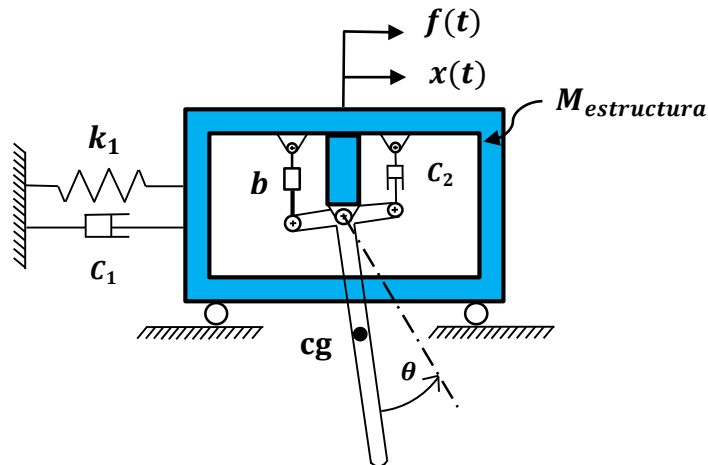


Figura 2.1: Péndulo T con un sistema TMD e inersor [10].

Una de las principales aplicaciones del inersor ha sido en sistemas de suspensión pasiva, activa y semí-activa de automóviles, motocicletas de alto rendimiento y trenes. Combinado con elementos tradicionales de suspensión pasiva tales como amortiguadores y resortes. El inersor es capaz de mejorar el desempeño del sistema en términos de la comodidad del pasajero, la dinámica del sistema y la seguridad. Por otra parte, al añadir un inersor en las suspensiones laterales de trenes se detectó que la velocidad crítica no se incrementa al usar el arreglo en paralelo con amortiguadores y resortes. Los autos de carrera de la "Fórmula Uno" utilizaron este dispositivo con el nombre de J-Damper para mejorar la estabilidad y agarre de los neumáticos sobre la pista, es decir, que las oscilaciones inducidas por las imperfecciones del camino y perturbaciones de carga se pueden reducir con mayor eficacia utilizando suspensiones con inersores. El inersor puede proporcionar mayor flexibilidad en la estructura de un auto, pero la función básica del inersor en sistemas vibratorios aún no ha sido entendida y demostrada completamente. El J-dámper es un "inersor" y su origen está basado en análisis de las analogías eléctricas y redes mecánicas. Existe una correspondencia entre los elementos de una red mecánica pasiva y una red eléctrica, es decir son análogos pero en el caso del inersor es diferente. El hecho de que el elemento de masa, junto con el resorte y el

amortiguador, es insuficiente para realizar la totalidad de las impedancias mecánicas pasivas [11-14].

Adicionalmente, se incorporó un inersor en el tobillo de un robot para mejorar el comportamiento dinámico en terrenos irregulares y en zonas inclinadas, el inersor demostró mejores cualidades en el aspecto de estabilidad y velocidad del robot [15].

Para mejorar el comportamiento dinámico de una mesa óptica se utilizó un inersor. Una mesa óptica se aplica generalmente para aislar las vibraciones de máquinas de precisión. En general una mesa óptica elimina dos fuentes principales de vibración tales como, perturbaciones por la tierra y perturbaciones de carga [16].

Existen diversos arreglos o configuraciones de las redes mecánicas es decir, serie y paralelo. Basado en el estudio teórico de [17,18], se demostró que de acuerdo a una admitancia permisible, la configuración de la red mecánica con un amortiguador, un inersor y como máximo tres resortes es más eficiente en reducir las amplitudes de vibración. Por otra parte, se ha implementado el inersor para el control de vibraciones en edificios y a partir de los resultados teóricos el inersor se considera eficaz para reducir las amplitudes de vibración causadas por los terremotos y debido al tráfico [19].

El inersor presenta tres no linealidades las cuales son los efectos elásticos, la holgura o espaciado entre diente y diente en el sistema de engranajes y fricción principalmente en las zonas de contacto de los engranes y en los rodamientos. Estas no linealidades han sido estudiadas por Fu-Cheng Wang y concluyó que las no linealidades de efectos elásticos y holgura entre dientes del sistema de engranes pueden ser evitadas en el proceso de manufactura del inersor, es decir, el material debe de ser resistente a esfuerzos causados por cargas dinámicas y añadiendo una precarga al sistema de engranes, respectivamente [20]. Entonces la única no linealidad en el inersor que no puede ser eliminada es la fricción en todo el sistema, por lo que en este trabajo se propone analizar este efecto mediante la suposición de amortiguamiento viscoso rotacional en los rodamientos y así obtener un parámetro de amortiguamiento total o equivalente del inersor. Dada la suposición mencionada es posible utilizar la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos, es decir, que excita una función de disipación de energía en el sistema.

## 2.2. Marco Teórico

Como en cualquier ciencia, la mecánica se basa en un conjunto de principios y de axiomas de validez universal de los cuales se han establecido por medio de experiencia e investigación. Cada pieza adicional de conocimiento se basa sobre estos axiomas y a través del análisis matemático. Las leyes de la mecánica newtoniana para sistemas dinámicos en translación y rotación son útiles para obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento. Una alternativa usada extensamente en dinámica es el balance de energía. Utilizando el axioma de que la energía es conservada, las ecuaciones de movimiento de un sistema son determinadas observando sus relaciones de energía con sus alrededores y dentro de sí mismo. En efecto, para aplicar las leyes de Newton, el movimiento del centro de masa debe ser usado como el sistema coordinado que define su posición instantáneamente. El método de la conservación de energía puede ser aplicado tomando en cuenta un sistema coordinado global, de tal manera que las energías cinéticas y potenciales puedan ser expresadas como funciones de estas coordenadas. Por otro lado, el método de la conservación de la energía y el método de Rayleigh están limitados a sistemas conservativos. En muchos sistemas de ingeniería, existen fuerzas que producen disipación de energía. En un sistema conservativo no hay fuerzas disipativas como las debidas a la fricción, por lo que la ecuación de Lagrange se escribe [21].

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \quad (2.1)$$

En donde  $L = T - V$ ,  $q_i$ ,  $F_i$  se conocen como la función Lagrangiana que representa la diferencia de energías cinética y potencial con base en un sistema coordinado global, coordenada generalizada y todas las fuerzas presentes en el sistema, respectivamente.

Para sistemas no conservativos sucede todo lo contrario con respecto a los sistemas conservativos, es decir, existen fuerzas disipativas en el sistema. Este parámetro fue introducido por *Lord Rayleigh* como una función de disipación  $D = \frac{1}{2} c \dot{q}_i^2$  para incluir fuerzas de amortiguamiento lineal proporcional a la velocidad  $\dot{q}$ . En términos de esta función, la ecuación de Lagrange puede escribirse [22].

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) produce las ecuaciones diferenciales de movimiento necesarias para modelar un sistema dinámico de varios grados de libertad. Además, con esta



ecuación es posible observar con varían las energías cinéticas y potenciales del sistema.

### 2.3. Modelado matemático de un sistema mecánico de 3gdl

Para el sistema mecánico masa-resorte-amortiguador (MRA) que se muestra en la Figura 2.2 las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento dinámico se pueden obtener mediante la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos.

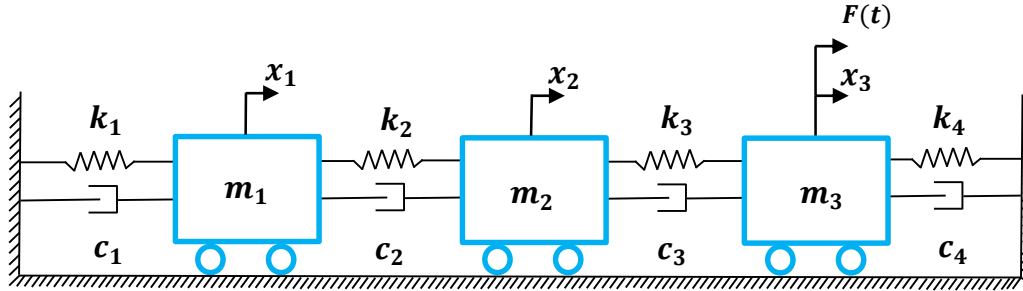


Figura 2.2: Sistema masa-resorte-amortiguador.

El sistema mostrado en la Figura 2.2 es de tres grados de libertad por lo que la ecuación de Lagrange produce tres ecuaciones diferenciales de movimiento (2.3-2.5) para cada coordenada generalizada las cuales están dadas por las siguientes expresiones.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_3} = F(t) \quad (2.5)$$

La función Lagrangiana se obtiene al restar las energías cinéticas y potenciales del sistema y está dada por la ecuación (2.6).

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k_4 x_3^2 \quad (2.6)$$

Por otro lado, la función de disipación de energía es

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} c_4 \dot{x}_3^2 \quad (2.7)$$

Por tanto, las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema MRA son las siguientes.

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \quad (2.8)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 - c_3\dot{x}_3 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 - k_3x_3 = 0 \quad (2.9)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + (c_3 + c_4)\dot{x}_3 - c_3\dot{x}_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_3x_2 = F(t) \quad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) se pueden representar en términos de la variable de Laplace  $s$  para obtener la respuesta de cada masa inercial y así mismo analizar la respuesta en estado estable. Con la ayuda del concepto de función de transferencia es posible analizar la respuesta de cada subsistema en el dominio de la frecuencia y así determinar las frecuencias naturales del sistema.

## 2.4. Función de transferencia

Existe una relación entre ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$  y sus transformaciones al dominio  $s$  mediante el operador de Laplace, así como de sus diversas propiedades, con particular atención en las interpretaciones físicas respectivas. La transformada de Laplace convierte una función  $g(t)$  del dominio tiempo, definida para tiempos mayores o iguales a cero, en una función  $G(s)$  propia del dominio  $s$  mediante la integral impropia:

$$L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt = G(s) \quad (2.11)$$

Por tanto, la transformada de derivadas puede representarse de la siguiente manera.

$$L\{\ddot{g}(t)\} = \int_0^{\infty} \ddot{g}(t)e^{-st} dt = G(s) \quad (2.12)$$

Al realizar la integral de la ecuación (2.12) se obtiene;

$$L\{\ddot{g}(t)\} = s^2G(s) - sg(0) - \dot{g}(0) \quad (2.13)$$

En general

$$L\{g^n(t)\} = s^nG(s) - s^{n-1}g(0) - s^{n-2}\dot{g}(0) - \dots - sg^{n-2}(0) - g^{n-1}(0) \quad (2.14)$$

Donde  $g(0)$ ,  $\dot{g}(0)$ ,  $\ddot{g}(0)$ ,... son condiciones iniciales.

Entonces una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes se puede representar en el dominio de Laplace de la siguiente manera.

$$s^2X(s) - \dot{x}(0) - sx(0) + 2\zeta\omega_n[sX(s) - x(0)] + \omega_n^2X(s) = \frac{1}{m}F(s) \quad (2.15)$$

En donde  $X(s)$  y  $F(s)$  representan la variable de salida o la respuesta y la entrada que en este caso es una fuerza, respectivamente. Entonces el cociente de la salida entre la entrada en el dominio de  $s$  considerando cero las condiciones iniciales para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) se le conoce como *función de transferencia* y su representación matemática resulta.

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} \quad (2.16)$$

Debido a que  $s$  es un número complejo la ecuación anterior se puede representar en términos de  $j\omega$  por lo que se obtiene.

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} \quad (2.17)$$

La función  $G(j\omega)$  se denomina función de respuesta en frecuencia. En el siguiente tema se hablará más de este concepto y su aplicación a los sistemas mecánicos lineales.

## 2.5. Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia se refiere a la variación de amplitud en estado estable con una frecuencia de excitación. Por lo general, se describe como un parámetro adimensional [23]. En muchos sistemas mecánicos forzados mediante fuerzas armónicas y periódicas proporcionan una respuesta similar y puede representarse ya sea en el dominio del tiempo o en frecuencia. La función de respuesta en frecuencia  $G(\Omega)$  es una función de la frecuencia con valores complejos. Además, contiene información relacionada con parámetros del sistema tales como rigidez, frecuencia natural y factor de amortiguamiento, dada por la siguiente expresión de forma adimensional.

$$G(\Omega) = H(\Omega)e^{-j\theta(\Omega)} \quad (2.18)$$

En donde  $\Omega = \omega/\omega_n$  es la relación de la frecuencia de excitación  $\omega$  con la frecuencia natural de sistema  $\omega_n$ , la función adimensional  $H(\Omega)$  proporciona la magnitud,  $j = \sqrt{-1}$ , y  $\theta(\Omega)$  es el retraso de la fase vinculado con la respuesta [24]. El propósito de representar de manera adimensional la respuesta en frecuencia es para reducir el

número de variables y poder manipularlas con el fin de optimizar la respuesta de esta misma. A continuación se presenta un teorema para conocer el número mínimo de variables que pueden representar la respuesta de cualquier sistema mecánico.

## 2.6. Teorema de Buckingham Pi

A veces se desea encontrar la correlación entre una sola variable dependiente y muchas variables independientes. Por lo que, se requiere de mucho tiempo para evaluar el cambio de cada una de ellas y ver el comportamiento de la variable dependiente. Por lo general, es casi imposible determinar el efecto de todos los parámetros de manera independiente. Un mejor método para evaluarlas es el uso de variables adimensionales. El *Teorema de Buckingham Pi* establece que al contar el número de variables, incluyendo la variable dependiente: llamarlo  $n$ . Posteriormente, contar el número de dimensiones básicas involucradas en las variables; llamarlo  $r$ . Entonces se necesitan  $n - r$  variables sin dimensión o grupos de  $\pi$ . Por ejemplo, si  $n = 6$  y  $r = 3$  existe tres grupos de  $\pi$ , y la relación tiene una forma no dimensional de.

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad (2.19)$$

Donde  $\pi_1$  es un grupo sin dimensión que involucra los parámetros de la variable dependiente, y,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  son grupos sin dimensión que solo involucran los parámetros independientes. Usualmente, las variables sin dimensión tienen un significado físico, por ejemplo el factor de amortiguamiento  $\zeta$ . En breve se presenta un ejemplo de este teorema aplicado a un absorbedor de vibración dinámico amortiguado o un TMD. Un TMD es un sistema de dos grados de libertad que está compuesto por dos partes. Un sistema primario y un secundario, el sistema primario representa la máquina de masa  $m_1$  y rigidez  $k_1$  además en ella está presente la fuerza de excitación  $F_0 \sin(\omega t)$  la cual se desea atenuar y el sistema secundario es el absorbedor o sistema auxiliar lo cual está compuesto por una masa  $m_2$ , rigidez  $k_2$  y amortiguamiento  $c_2$  tal como se muestra en la Figura 2.3.

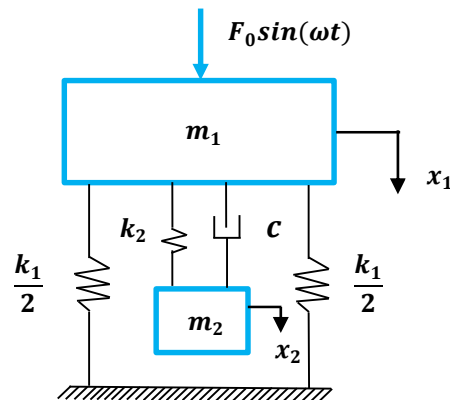


Figura 2.3: Absorbedor de vibración dinámico amortiguado - TMD.

Cuando la máquina de masa  $m_1$  está sujeta a una frecuencia de excitación cercana a su frecuencia natural, ocurren grandes amplitudes de vibración en estado estable. Una solución para mitigar estas amplitudes es cambiar las propiedades del sistema de tal manera que la frecuencia natural se aleje de la frecuencia de excitación. Una solución alternativa es añadir un sistema masa-resorte-amortiguador auxiliar de tal modo que el sistema contendrá dos frecuencias naturales y a la vez estarán lejos de la frecuencia de excitación.

Existen dos problemas cuando se utiliza un absorbedor de vibración. La frecuencia natural más baja del sistema de dos grados de libertad se debe pasar con el fin de llegar a la velocidad de operación. Si el absorbedor es ligeramente desajustado, la amplitud de vibración del sistema primario puede ser grande. Quizás la adición de amortiguamiento al absorbedor puede ayudar a contrarrestar este problema.

Considere la configuración del sistema mecánico de la Figura 2.3 en la cual el amortiguador viscoso está conectado en paralelo con el resorte del sistema auxiliar. Esto es conocido como un absorbedor de vibración amortiguado.

Al aplicar la ecuación de Lagrange al sistema mostrado en la Figura 2.3 para conocer las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico se obtiene.

$$m_1\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_0\sin(\omega t) \quad (2.20)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (2.21)$$

Las ecuaciones (2.20) y (2.21) pueden representarse en el dominio de la variable  $s$  considerando condiciones iniciales nulas en el sistema. Posteriormente, es posible obtener la función de transferencia para cada masa inercial utilizando en concepto de función de transferencia. Por tanto, se obtiene

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m_2s^2 + cs + k_2}{(m_1s^2 + cs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + cs + k_2) - (cs + k_2)(cs + k_1)} \quad (2.22)$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{cs + k_2}{(m_1s^2 + cs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + cs + k_2) - (cs + k_2)(cs + k_1)} \quad (2.23)$$

Al reemplazar a  $s$  por  $j\omega$  en las ecuaciones (2.22) y (2.23) se obtiene la respuesta en frecuencia  $G(\Omega)$  del sistema, lo cual resulta.

$$\frac{X_1(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{k_2 - m_2\omega^2 + jc\omega}{m_1m_2\omega^4 - (m_1k_2 + m_2k_2 + m_2k_1)\omega^2 + k_1k_2 + j\{k_1c\omega - (m_1 + m_2)c\omega^3\}} \quad (2.24)$$

$$\frac{X_2(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{k_2 + jc\omega}{m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_2 + m_2 k_1) \omega^2 + k_1 k_2 + j\{k_1 c \omega - (m_1 + m_2) c \omega^3\}} \quad (2.25)$$

Por otra parte, cada respuesta depende de siete parámetros independientes tales como  $m_1, m_2, k_1, k_2, c, \omega, f_0$  y uno dependiente  $x_1$ . Al aplicar el *Teorema de Buckingham Pi* se obtiene cinco variables adimensionales una dependiente y las cuatro restantes son variables adimensional independientes tales como,  $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $q = \frac{\omega_{n2}}{\omega_{n1}}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{n1}}$ ,  $\zeta = \frac{c}{2m_2\omega_{n2}}$  que representan relación de masa del absorbedor a masa principal, relación de frecuencias naturales, relación de frecuencia forzada y el factor de amortiguamiento, respectivamente. En donde,  $\omega_{n2} = \sqrt{k_2/m_2}$  y  $\omega_{n1} = \sqrt{k_1/m_1}$  son parámetros que se eligen por conveniencia y representan frecuencias naturales del sistema. Sustituyendo estas relaciones y dividiendo por  $k_1 k_2$  en las ecuaciones (2.24) y (2.25), se obtiene.

$$\frac{X_1(j\omega)k_1}{F(j\omega)} = \frac{q^2 - \Omega^2 + j2\zeta q\Omega}{\Omega^4 - \{1 + (1 + \mu)q^2\}\Omega^2 + q^2 + j2\zeta q\Omega\{1 - (1 + \mu)\Omega^2\}} \quad (2.26)$$

$$\frac{X_2(j\omega)k_1}{F(j\omega)} = \frac{q^2 + j2\zeta q\Omega}{\Omega^4 - \{1 + (1 + \mu)q^2\}\Omega^2 + q^2 + j2\zeta q\Omega\{1 - (1 + \mu)\Omega^2\}} \quad (2.27)$$

En efecto de que la expresiones (2.26) y (2.27) son números complejos se necesita obtener la magnitud de  $X_1(j\omega)$  y  $F(j\omega)$  para manipular las variables independientes que repercuten en la respuesta dinámica de  $m_1$  y  $m_2$ . Mediante un tratamiento del algebra compleja, se obtiene.

$$\frac{X_1(j\omega)k_1}{F(j\omega)} = \frac{A + jB}{C + jD} \quad (2.28)$$

$$\frac{X_1(j\omega)k_1}{F(j\omega)} = \frac{A + jB}{C + jD} \left( \frac{C - jD}{C - jD} \right) \quad (2.29)$$

$$\frac{|X_1(j\omega)|k_1}{|F(j\omega)|} = \sqrt{\left(\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}\right)^2 + \left(\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}\right)^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{x_1 k_1}{f_0} = \frac{|X_1(j\omega)|}{|F(j\omega)|} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad (2.31)$$

Donde  $A = q^2 - \Omega^2$ ,  $B = 2\zeta q\Omega$ ,  $C = \Omega^4 - \{1 + (1 + \mu)q^2\}\Omega^2 + q^2$  y  $D = 2\zeta q\Omega\{1 - (1 + \mu)\Omega^2\}$  representan la parte real y compleja del numerador y denominador de la respuesta en estado estable de la masa  $m_1$ , respectivamente.

Sustituyendo la ecuación (2.31) en las ecuaciones (2.26) y (2.27) se obtiene la amplitud en estado estable del sistema primario en su forma normalizada adimensional.

$$\begin{aligned} \frac{x_1 k_1}{F_0} &= H_1(q, \mu, \zeta, \Omega) \\ &= \sqrt{\frac{(q^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta q\Omega)^2}{\{\Omega^4 - [1 + (1 + \mu)q^2]\Omega^2 + q^2\}^2 + (2\zeta q\Omega)^2\{1 - (1 + \mu)\Omega^2\}^2}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

La amplitud en estado estable del sistema auxiliar es

$$\begin{aligned} \frac{x_2 k_1}{F_0} &= H_2(q, \mu, \zeta, \Omega) \\ &= \sqrt{\frac{q^4 + (2\zeta q\Omega)^2}{\{\Omega^4 - [1 + (1 + \mu)q^2]\Omega^2 + q^2\}^2 + (2\zeta q\Omega)^2\{1 - (1 + \mu)\Omega^2\}^2}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Adicionalmente cada ecuación representa un ángulo o una fase que proporciona información de cuanto se ha retrasado la respuesta de cada masa inercial con respecto a la fuerza de entrada, principalmente en condiciones de resonancia. Estos ángulos pueden representarse mediante la siguiente expresión.

$$\varphi_{1,2} = \tan^{-1} \left( \frac{BC - AD}{AC + BD} \right) \quad (2.34)$$

La amplitud en estado estable adimensional del sistema primario, dada mediante la ecuación (2.32), se muestra en la Figura 2.4 para  $\mu = 0.25$ ,  $q = 0.8$  y para diferentes valores de  $\zeta$  además se puede apreciar que la amplitud en estado estable del sistema primario no es cero para diferentes valores de  $\Omega$ . En investigaciones de absorbedores de vibración se ha observado que el sistema auxiliar puede reducir significativamente los picos cercanos a la segunda frecuencia natural, pero no es tan eficiente para reducir la amplitud pico cercana a la primera frecuencia. Por lo cual, se ha investigado cómo afectan los parámetros del absorbedor de vibración amortiguado en los picos de resonancia del sistema primario además se ha notado que la curva de respuesta en estado estable del sistema primario para diferentes valores de  $\zeta$  pasa a través de dos puntos fijos  $P$  y  $Q$ . Por otra parte, al proponer valores arbitrarios de  $\mu$ ,  $q$ ,  $\zeta$  y hacer variar la razón de frecuencia forzada  $\Omega$  se ha

observado que el pico en la primera frecuencia de resonancia es más pequeño que el pico en la segunda frecuencia. Sin embargo, el pico más alto ocurre cerca de  $\Omega = 1$ , lo cual es la región donde un absorbedor es usualmente añadido pero el rango de operación efectivo es todavía pequeño.

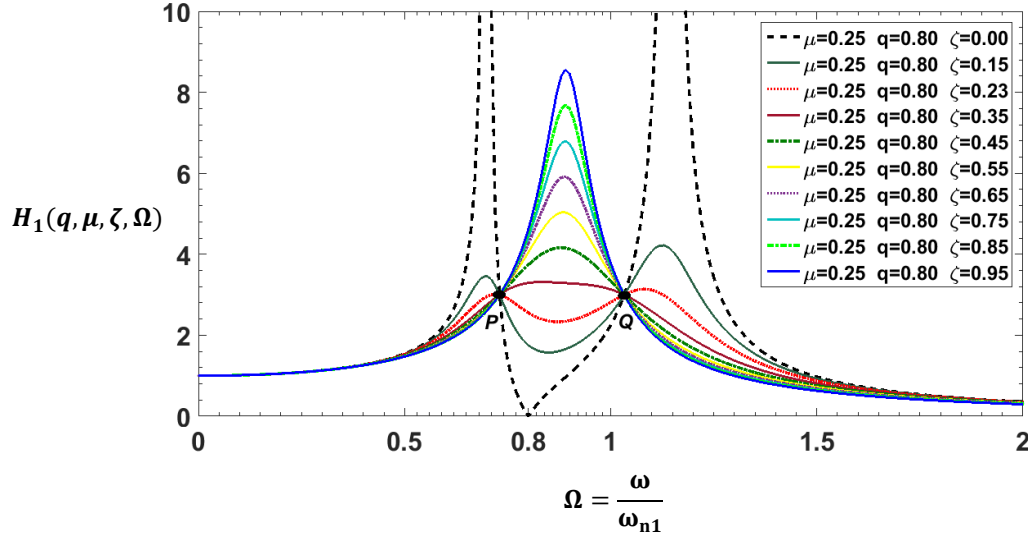


Figura 2.4: Respuesta en estado estable  $H_1$ .

Dado que no es posible eliminar el movimiento en estado estacionario del sistema original cuando no existe amortiguamiento, un absorbedor de vibración amortiguado se debe diseñar para reducir el pico en la frecuencia de resonancia más baja y ampliar el rango de funcionamiento efectivo del absorbedor. Ampliar el rango de funcionamiento requiere que los dos picos tengan aproximadamente la misma magnitud tal como se muestra en la Figura 2.4. Por otra parte, la ubicación de los puntos fijos con respecto al eje horizontal de la respuesta en frecuencia  $H_1$  dependen de  $q$  por lo que debería ser posible sintonizar el absorbedor de modo que los valores de  $H_1$  en los puntos fijos deben tener la misma amplitud. Además, las curvas para diferentes valores de  $\zeta$  pasan a través de los puntos fijos por lo que también debería ser posible encontrar un valor óptimo de  $\zeta$  de tal manera que la ubicación de los puntos fijos en el eje ordenado de  $H_1$  sea la misma amplitud. Por tanto, para valores fijos de  $\mu$  y  $q$ , existen dos valores de  $\Omega$  lo cual producen un valor de  $H_1$ , independiente de  $\zeta$ . El valor de  $H_1$  en estos puntos se escribe como

$$H_1(q, \mu, \zeta, \Omega) = \sqrt{\frac{A(\mu, q)\zeta^2 + B(\mu, q)}{C(\mu, q)\zeta^2 + D(\mu, q)}} \quad (2.35)$$

Mediante un tratamiento matemático a la ecuación (2.35) es posible determinar las funciones óptimas de  $q$  y  $\zeta$  en función de  $\mu$  que minimizan la amplitud de  $H_1$  en las



frecuencias de resonancia. Estos valores son  $\mu = 0.25$   $q = 0.8$  y  $\zeta = 0.23$  y la amplitud de  $H_1$  en los frecuencias de resonancia son iguales tal como se muestra en la Figura 2.4. Estas curvas contienen los picos de resonancia más pequeños que corresponden al valor óptimo de  $q$  y el valor de  $H_1$  en las frecuencias de resonancia es el mismo. Observe que en las amplitudes en los picos de resonancia son iguales. Esto significa que durante el arranque y parada de la maquina no habrá grandes amplitudes de vibración. Adicionalmente la amplitud del sistema auxiliar o del absorbedor siempre será mayor que la del sistema primario tal como se muestra en la Figura 2.5.

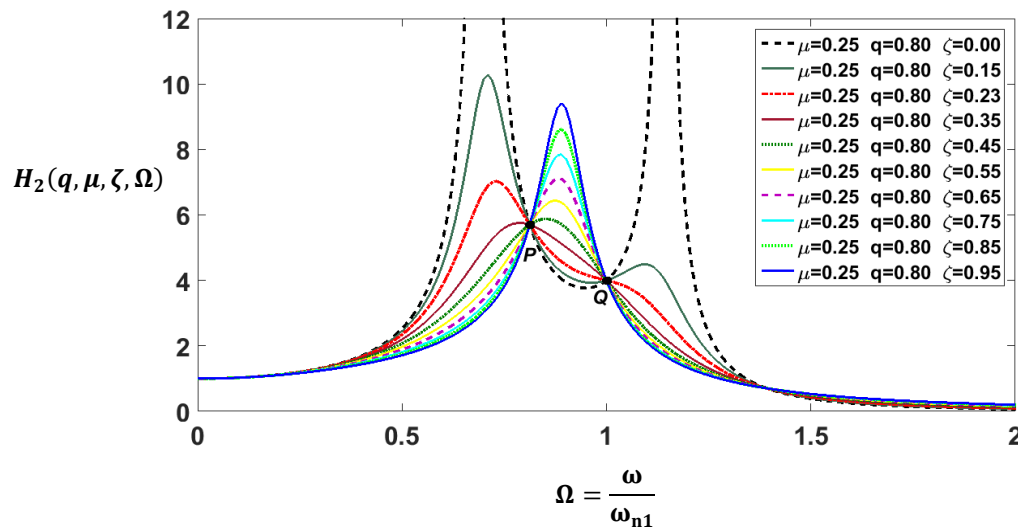


Figura 2.5: Respuesta en estado estable de  $H_2$ .

Por otro lado, en condiciones de resonancia la fase  $\varphi$  de la masa  $m_1$  es 90 grados respecto a la fuerza de excitación. Hipotéticamente, esto significa que el absorbedor ejerce una fuerza igual y opuesta a la magnitud de la fuerza de excitación, por lo que se origina un equilibrio dinámico de fuerzas en el sistema. En la mayoría de los absorbedores de vibración dinámico amortiguado y no amortiguado se optimizan las variables adimensionales con la finalidad de minimizar las amplitudes de vibración de la estructura principal a un nivel de vibración aceptable. Por otra parte, la mayoría de los absorbedores de vibración utilizados en aplicaciones prácticas son no amortiguados. Se tiene que agregar amortiguamiento solo en situaciones en las que se desea ampliar el rango de frecuencias de funcionamiento del sistema primario. Para casos muy particulares en donde se desea eliminar o atenuar las amplitudes de vibración se utilizan otros tipos de absorbedores tales como, el amortiguador de péndulo centrífugo, sistema masa resorte sintonizado, disipador torsional de vibración o disipador de Lanchester, el inersor etc.

En esta tesis se busca mejorar la respuesta dinámica de un sistema mecánico masa-resorte-inersor (MRI) de dos grados de libertad cuando el inersor es

conectado entre los extremos de las masas inerciales. Para el diseño de un inersor se requiere de algunas expresiones matemáticas para calcular las dimensiones requeridas de este mismo. Posteriormente, se hablará de algunos componentes que conforman al inersor tales como, cremallera, piñón y engranes.

## 2.7. Volantes de inercia

También llamado volante motor, es un elemento de máquina en forma de disco circular plano que es conectado al eje de un motor, el cual a su vez podría también ser el eje motriz de la manivela de un mecanismo. La principal función de este dispositivo es almacenar energía cinética. El uso de un volante permite que ocurra lo siguiente:

1. Una reducción de la amplitud de la fluctuación de la velocidad.
2. Una reducción del par de torsión máximo requerido.
3. Un almacenamiento y liberación de energía cuando se requiera durante el ciclo.

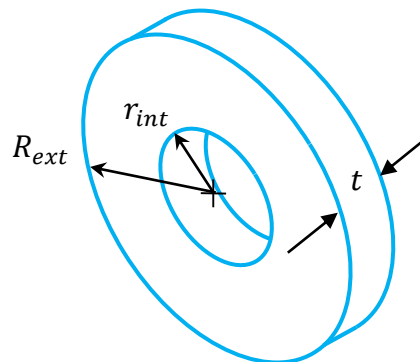


Figura 2.6: volante de inercia.

Si se considera una geometría de disco sólido tal como se muestra en la Figura 2.6 con un radio interno  $r_{int}$  y un radio externo  $R_{ext}$ . El momento de inercia de masa  $I_m$  es.

$$I_m = \frac{\rho\pi t}{2}(R_{ext}^4 - r_{int}^4) \quad (2.36)$$

En donde,  $\rho$  y  $t$  representan la densidad del material y el espesor del volante de inercia, respectivamente. Comúnmente a este tipo de volantes de inercia se le conoce como discos de inercia dado que su forma es simple y sencilla de manufacturar.

Además los volantes pueden ser tan sencillos como un disco cilíndrico de material sólido, o de construcción con rayos y un aro. Esta última disposición representa más

eficiente el uso de material, especialmente en volantes grandes, ya que concentra el grueso de su masa en el aro, que tiene un mayor radio. Dado que el momento inercia de masa  $I_m$  de un volante es proporcional a  $\frac{\rho\pi t}{2}(R_{ext}^4 - r_{int}^4)$ , la masa a un radio mayor tiene mayor contribución de inercia.

## 2.8. Cremallera y piñón

Los engranes son dispositivos mecánicos que transmiten energía desde una parte del sistema a otra, de tal manera que alteran la fuerza, el par, la velocidad y el desplazamiento angular, por ejemplo un sistema piñón cremallera. La aplicación más común de este dispositivo es en la conversión de energía y movimiento rotatorio en lineal y viceversa. Un ejemplo de uso se encuentra en la dirección de piñón y cremallera en automóviles. El piñón está conectado al extremo inferior de la columna de la dirección y gira con el volante. La cremallera engrana con el piñón y se mueve a izquierda y derecha en respuesta al movimiento angular impuesto al volante de dirección ver Figura 2.7.

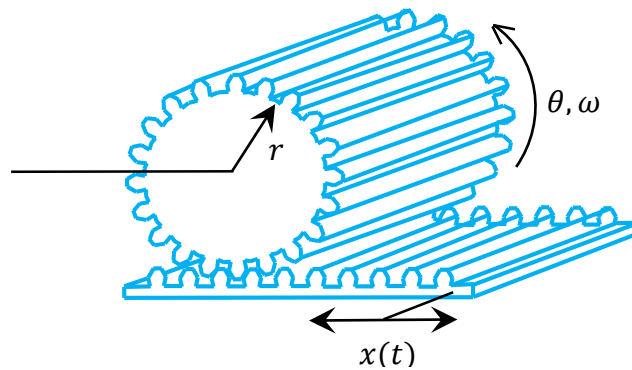


Figura 2.7: Modelo del sistema piñón-cremallera.

De la figura anterior  $r$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  y  $x(t)$  representan el radio de paso, el desplazamiento angular, la velocidad angular del piñón y el desplazamiento de translación de la cremallera, respectivamente. Por tanto, la ecuación cinemática que representa la posición de la cremallera en relación con el desplazamiento angular del piñón es la siguiente.

$$x(t) = r\theta \quad (2.37)$$

Esta representación matemática es válida si y solo si, no existe deslizamiento en los cilindros rodantes tanto del piñón como de la cremallera, es decir entre los radios de paso de ellos mismo. Por lo que conlleva enunciar la *ley de engranes* con la finalidad de obtener relaciones cinemáticas que describan el comportamiento dinámico de un sistema de engranaje simple.

## 2.9. Ley de engranes

Conceptualmente, los dientes de un engrane de cualquier forma evitarán el deslizamiento entre los cilindros rodantes a los que se agregan los dientes. Las superficies de los cilindros rodantes se convertirán en los círculos de paso, y sus diámetros en los diámetros de paso de los engranes. El punto de contacto entre los cilindros queda en la línea de centros como se muestra en la Figura 2.8, y se le llama punto de paso.

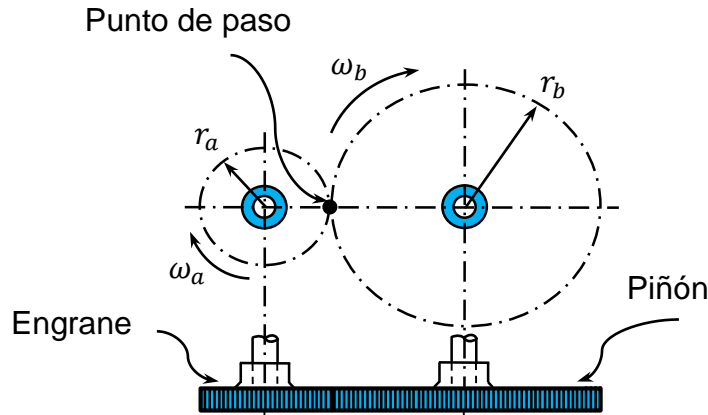


Figura 2.8: Tren de engranes rectos.

De la figura anterior  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $\omega_a$  y  $\omega_b$  representan los radios de paso y las velocidades angulares del engrane y del piñón, respectivamente. Por tanto, la relación de velocidad del sistema de engranajes queda definido de la siguiente manera.

$$r_a \omega_a = r_b \omega_b \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) describe que la velocidad en el punto de paso es la misma para ambos engranes, de acuerdo con esta relación matemática la ley fundamental de engranaje, la cual establece que *la relación de velocidad angular entre los engranes de un juego de engranes permanece constante mientras permanecen engranados.*

## Capítulo 3

# Modelado y simulación de sistemas mecánicos

Varias realizaciones físicas del inersor ideal han sido descritas por Malcolm C. Smith en [11] tales dispositivos se muestran en la Figura 3.1. El primero es un inersor cremallera-piñón y el segundo es un inersor tornillo-volante de inercia. La ventaja principal del primer dispositivo es que consta de elementos mecánicos sencillos y es fácil de construir, pero si se requiere incrementar la constante de proporcionalidad llamada inercia del dispositivo se tendrá que aumentar las dimensiones geométricas del volante de inercia o la relación de engranaje, lo cual involucra incrementar el tamaño físico y el peso del inersor, de manera similar sucede con el inersor de tornillo-volante de inercia, por lo tanto, esto es una desventaja de ambos dispositivos. En ciertas aplicaciones del inersor tal como en una suspensión de automóvil el espacio de montaje de los elementos de suspensión pasiva es angosto además el dispositivo debe contener una constante de inercia grande y un tamaño aceptable para poder ser montado. Una forma de incrementar la constante de inercia sin alterar las dimensiones físicas del inersor es añadir una cremallera que contenga dientes tanto el parte superior como inferior. De esta manera es posible ampliar la constante de inercia del dispositivo.



a) Inersor cremallera-piñón.



b) Inersor tornillo-volante de inercia.

Figura 3.1: Inersores propuestos en la literatura.

En esta tesis se propone un nuevo diseño mecánico del inersor lo cual consiste en una cremallera con doble dentadura, como se muestra en la Figura 3.2. El motivo de colocar dos volantes de inercia es para aumentar la constante de inercia o masa aparente del inersor para que contenga un amplio rango de operación, evitando alterar las las dimensiones físicas del inersor.

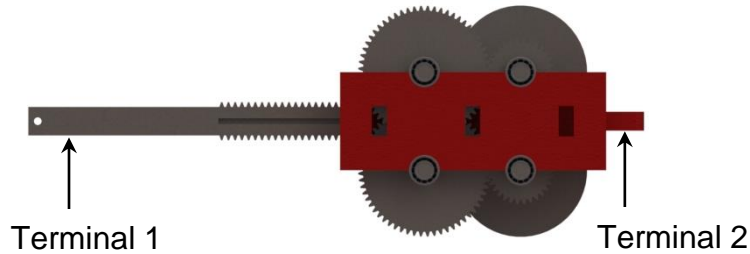


Figura 3.2: Inersor de doble cremallera.

El inersor de doble cremallera está compuesto por una cremallera que consta de dientes tanto en la parte superior como inferior, un sistema de engranaje con una relación de 2 a 1 y dos volantes de inercia. Para obtener el modelo matemático de este dispositivo se considera que la terminal 2 está conectada a tierra de acuerdo a la Figura 3.2. A continuación se presenta el modelo matemático del inersor de doble cremallera, ver Figura 3.3 para caracterizar sus parámetros.

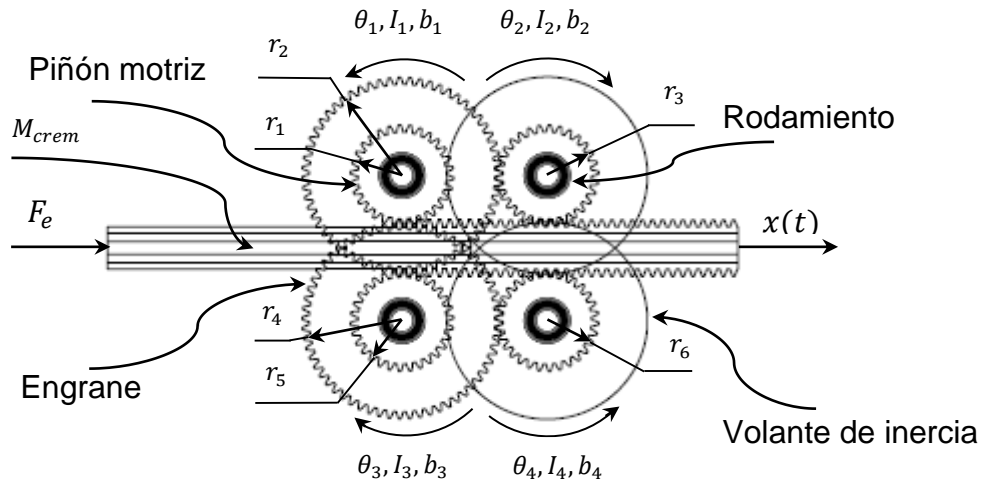


Figura 3.3: Diagrama cinemático de inersor de doble cremallera.

De la figura interior  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$  son los radios de paso del sistema de engranaje,  $I_1, I_2, I_3, I_4$  representan el momento de inercia de masa de los engranes, piñones y volantes de inercia,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  son los desplazamiento angulares de cada eje transmisión del inersor,  $b_1, b_2, b_3, b_4$  son los coeficientes de amortiguamiento rotacional de los rodamientos y  $M_{crem}, F_e, x(t)$  representan la masa de la cremallera, fuerza de entrada y la posición de la cremallera, respectivamente.

### 3.1. Ecuaciones cinemáticas

Con base en la *ley de engranes* se procede a obtener las relaciones cinemáticas de posición y velocidad para la cremallera y los engranes, para así determinar el conjunto de ecuaciones que rigen la dinámica del inersor. Por tanto, tales ecuaciones cinemáticas son las siguientes.

$$x = r_1\theta_1 = r_5\theta_3 \quad \therefore \quad \dot{x} = r_1\dot{\theta}_1 \quad (3.1)$$

$$\theta_2 = \frac{r_2}{r_3}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_2 = \frac{r_2}{r_3}\dot{\theta}_1 \quad (3.2)$$

$$\theta_3 = \frac{r_1}{r_5}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_3 = \frac{r_1}{r_5}\dot{\theta}_1 \quad (3.3)$$

$$\theta_4 = \frac{r_4 r_1}{r_6 r_5}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_4 = \frac{r_4 r_1}{r_6 r_5}\dot{\theta}_1 \quad (3.4)$$

Donde  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\theta_1, \dot{\theta}_1$ ,  $\theta_2, \dot{\theta}_2$ ,  $\theta_3, \dot{\theta}_3$ ,  $\theta_4, \dot{\theta}_4$  representan la posición y velocidad de la cremallera, la posición y velocidad angular de los piñones y engranes, respectivamente. Para una relación 2 a 1 del sistema de engranaje en el inersor es decir,  $r_1 = r_2 = r_4 = r_6$ ,  $r_3 = r_5$  y suponer que los coeficientes de amortiguamiento rotacional de los rodamientos son iguales, es decir,  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ . Así mismo, definir las siguientes constantes  $J$ ,  $\delta$  como la masa equivalente y amortiguamiento total del inersor. Ahora bien, dadas estas definiciones se calcula la función Lagrangiana y la función de disipación de energía del inersor. A partir de estas consideraciones se obtiene la ecuación diferencial de movimiento mediante la ecuación de Lagrange. Por tanto, la ecuación que rige la dinámica del inersor es.

$$J\ddot{x} + \delta\dot{x} = F_e \quad (3.5)$$

Donde

$$J = M_{crem} + (I_1 + I_3) \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + (I_2 + I_4) \left(\frac{r_2}{r_1^2}\right)^2 \quad (3.6)$$

$$\delta = 4b_1 \left[ \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{r_1^2}\right)^2 \right] \quad (3.7)$$

Para más detalles sobre cómo obtener la ecuación (3.5) ver el Apéndice A. Entonces a la ecuación dinámica ideal del inersor se le añade un término adicional, el cual es el amortiguamiento  $\delta$ . Este parámetro representa una fuerza de amortiguamiento que limita el desplazamiento lineal de la cremallera. Con base en los parámetros

mostrados en la Tabla 3.1 se realiza la simulación en MSC Adams View y en Matlab Simulink para corroborar el modelo matemático del inersor.

Tabla 3.1 Parámetros de simulación

	J [kg]	$m_1$ [kg]	$m_2$ [kg]	$k_1$ [ $\frac{N}{m}$ ]	$k_2$ [ $\frac{N}{m}$ ]	$b_1$ [ $\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$ ]	$f_0$ [N]	$a$ [s]
inersor	0.6667	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000194	3.0	1.0
SDOF	1.4251	2.0	0.0	200.0	0.0	0.000194	5.0	1.0
TDOF primera configuración	0.6667	2.0	2.0	300.0	125.0	0.000194	5.0	1.0
TDOF segunda configuración	0.6667	2.0	2.0	300.0	125.0	0.000194	5.0	1.0

De la tabla anterior  $f_0$  y  $a$  representan la magnitud de la fuerza y el tiempo en que dura aplicada, respectivamente. Por otra parte, estos parámetros son característico de la función impulso mecánico.

### 3.2. Simulación virtual del inersor

Al resolver la ecuación (3.5) mediante Matlab Simulink y realizar la simulación virtual en MSC Adams View para comparar los resultados de la respuesta en el dominio del tiempo de la cremallera al aplicarle una fuerza en forma de impulso se obtiene.

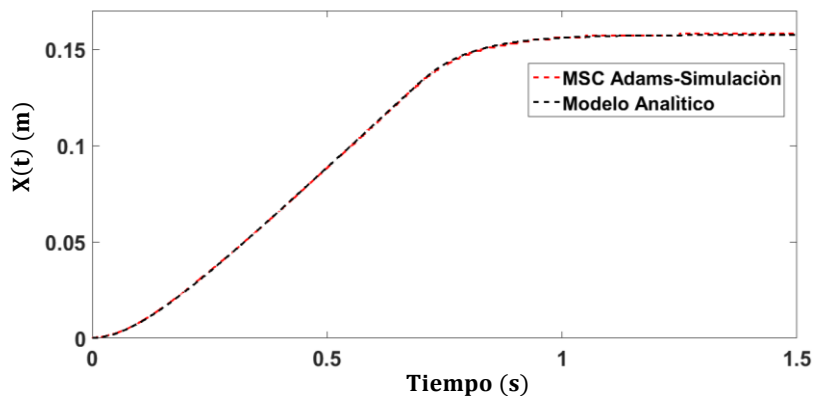


Figura 3.4: Posición de la cremallera.

En la Figura 3.4 es posible notar que ambas soluciones son similares, es decir, tanto en la simulación del prototipo virtual y del modelo analítico además se puede apreciar que el desplazamiento de la cremallera es suave, esto es debido a las fuerzas de inercia inherentes del sistema, principalmente en los volantes de inercia. Por otra parte, el amortiguamiento en los rodamientos provoca un detenimiento suave después de haber aplicado la fuerza. En la siguiente sección se analiza el comportamiento dinámico del inersor cuando es conectado a sistemas mecánicos de uno y dos grados de libertad.



### 3.3. Modelo matemático del sistema mecánico MRI de un gdl

En esta sección se obtiene el modelo matemático para la configuración masa-resorte-inersor (MRI) de un grado de libertad (gdl) para analizar las propiedades del inersor tales como la masa equivalente  $J$  y el amortiguamiento  $\delta$ . En esta misma se realizan simulaciones virtuales del sistema MRI al aplicarle una fuerza de impulso mecánico a la masa  $m_1$ . En la Figura 3.5 se muestra tal sistema de un grado de libertad, lo cual la masa está conectada a un resorte y a un inersor. El inersor se representa por medio de un símbolo de un sistema rotatorio por conveniencia. Las ecuaciones rectoras del sistema se pueden obtener mediante el uso de la síntesis de redes mecánicas que ya ha sido estudiado [3]. El objetivo de obtener las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema es para realizar el análisis en el dominio de la frecuencia y así observar los cambios de amplitud en la respuesta en estado estable del sistema.

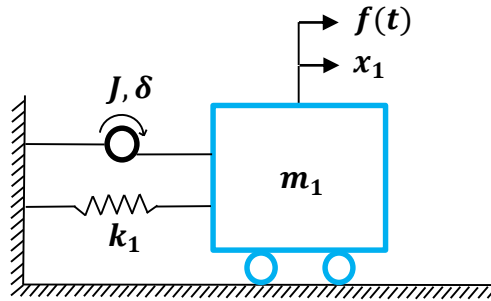


Figura 3.5: Sistema mecánico MRI de un gdl.

Con base en la Figura 3.5 por inspección se nota que existe energía cinética de rotación y translación tanto en el inersor como en la masa  $m_1$ . La energía cinética total en el sistema está dada mediante la siguiente expresión matemática.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ M_{Crem} r_1^2 + I_1 + I_2 \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 + I_3 \left( \frac{r_1}{r_5} \right)^2 + I_4 \left( \frac{r_4 r_1}{r_6 r_5} \right)^2 \right] \dot{\theta}_1^2 \quad (3.8)$$

De acuerdo con la ecuación (3.1) la expresión anterior se puede simplificar como

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ M_{Crem} + \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 (I_1 + I_3) + \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 (I_2 + I_4) \right] \dot{x}_1^2 \quad (3.9)$$

Por otra parte, el segundo término de la ecuación (3.9) es la constante de masa equivalente  $J$  del inersor, por lo que la expresión puede reducirse de la siguiente manera.

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + J) \dot{x}_1^2 \quad (3.10)$$

La energía potencial del sistema es debido a la deformación del resorte de rigidez  $k_1$  está dada por la siguiente expresión.

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 \quad (3.11)$$

Por tanto, la función Lagrangiana se define como

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + J)\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 \quad (3.12)$$

Dado que el desplazamiento del piñón motriz del inersor solo depende del movimiento lineal de la cremallera lo cual es la terminal 1 del inersor, ver Figura 3.2, esta terminal está conectada a la masa  $m_1$ . Por lo que, la función de disipación de energía del inersor solo depende de la respuesta de la masa  $m_1$  y se puede escribir de la siguiente manera.

$$D = \frac{1}{2}\delta\dot{x}_1^2 \quad (3.13)$$

Con base en la función Lagrangiana, función de disipación de energía y a la ecuación de Lagrange se puede obtener la ecuación dinámica del sistema mecánico MRI. Por lo cual, cada término de la ecuación de Lagrange puede expresarse de la siguiente manera.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + J)\ddot{x}_1 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \delta\dot{x}_1 \quad (3.16)$$

Por tanto, la ecuación que rige la dinámica del sistema mecánico MRI de un gdl es la siguiente.

$$(m_1 + J)\ddot{x}_1 + \delta\dot{x}_1 + k_1x_1 = f(t) \quad (3.17)$$

El primer y segundo miembro de la ecuación (3.17) representa el efecto de inercia y amortiguamiento en el inersor, respectivamente. Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (3.17) con condiciones iniciales nulas se obtiene la función de transferencia para la masa  $m_1$  dada por la siguiente expresión matemática.

$$s^2X_1(s) + \frac{\delta}{(m_1 + J)}sX_1(s) + \frac{k_1}{(m_1 + J)}X_1(s) = \frac{1}{(m_1 + J)}F(s) \quad (3.18)$$

Para analizar el efecto del inersor al sistema MRI se aplica una fuerza en forma de impulso. Un impulso es una fuerza aplicada en un determinado tiempo ver Figura 3.6 y está dado por la siguiente expresión en el dominio de la variable "s" de Laplace.

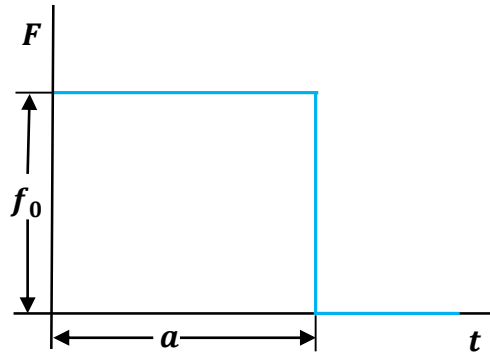


Figura 3.6: Función impulso.

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & 0 \leq t \leq a \\ 0 & t \geq a \end{cases} \quad (3.19)$$

En donde  $f_0$  y  $a$  son la magnitud de la fuerza y el tiempo, respectivamente. Y la representación en el dominio de Laplace es la siguiente.

$$F(s) = f_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-at}}{s} \right) \quad (3.20)$$

Por tanto, al sustituir la ecuación (3.20) en la ecuación (3.18) se obtiene.

$$s^2X_1(s) + \frac{\delta}{(m_1 + J)}sX_1(s) + \frac{k_1}{(m_1 + J)}X_1(s) = \frac{f_0}{(m_1 + J)} \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-at}}{s} \right) \quad (3.21)$$

De la simulación en Matlab Simulink y MSC Adams View de la ecuación (3.21) se obtiene el comportamiento dinámico del sistema para corroborar ambos resultados, ver Figura 3.7. Los parámetros para realizar la simulación virtual del sistema mecánico que se muestra en la Figura 3.5 se tomaron de la Tabla 3.1. Para poder comparar las soluciones tanto de Simulink como Adams se importaron los resultados a Matlab con la finalidad de encimar las gráficas y así poder ver la similitud de las respuestas de ambos programas de simulación.

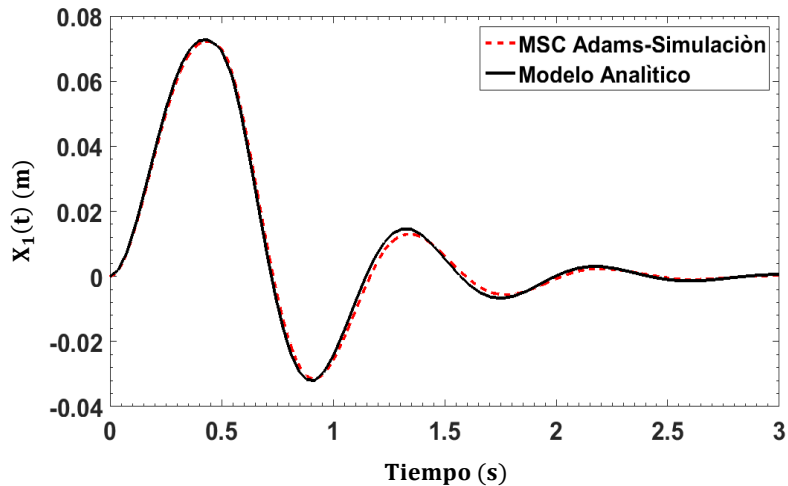


Figura 3.7: Posición de la masa  $m_1$ .

De la figura anterior se puede apreciar que la solución de la ecuación (3.24) lo cual representa el modelo analítico del sistema MRI de un gdl es idéntica a la solución obtenida mediante la simulación virtual.

### 3.4. Simulación del prototipo virtual MRI

Se realizaron simulaciones utilizando el modelo matemático en Matlab-Simulink y también con el prototipo virtual en MSC Adams View con base en los parámetros mostrados en la Tabla 3.1. En la Figura 3.9 se presenta la respuesta en el dominio del tiempo de la masa inercial  $m_1$  al aplicarle una fuerza de impulso mecánico.

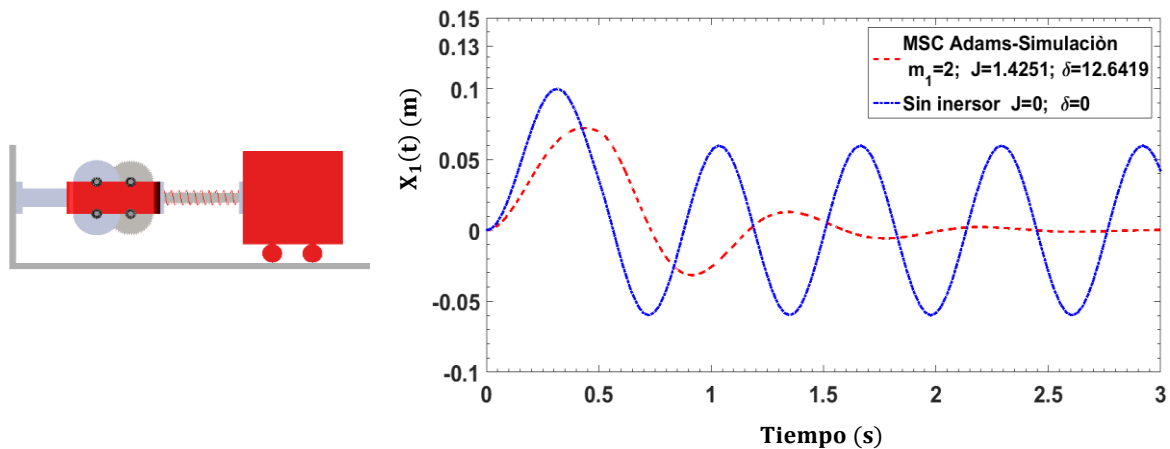


Figura 3.8: Respuesta a un impulso de la masa  $m_1$ .

En la Figura 3.8 se puede notar que el inersor mejora la puesta dinámica de la masa  $m_1$  cuando se le aplica una fuerza de impulso mecánico, esto es debido a la fuerza de amortiguamiento que le proporciona el inersor a la masa inercial. Ahora falta investigar si el inersor mejora el comportamiento dinámico de la masa  $m_1$  cuando

se aplica una fuerza armónica. Para analizar más detalladamente el efecto del inersor en el sistema MRI de un grado de libertad se realiza un análisis en el dominio de la frecuencia con la finalidad de ver cómo se comporta el sistema ante una fuerza armónica con una frecuencia de excitación  $\omega$ . Posteriormente, se utiliza el *teorema de Buckingham Pi* para definir las variables adimensionales. Al elegir las siguientes variables adimensionales  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\mu = \frac{J}{m_1}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$ ,  $\zeta = \frac{\delta}{2m_1\omega_1}$  que representan la frecuencia natural, relación de masa equivalente del inersor a masa, relación de frecuencias y el factor de amortiguamiento, respectivamente. La solución de la ecuación (3.17) del sistema mecánico que se muestra en la Figura 3.5 puede representarse de la siguiente manera.

$$\frac{x_1 k_1}{f_0} = H(\mu, \Omega) = \sqrt{\frac{1}{\{1 - (1 + \mu)\Omega^2\}^2 + (2\zeta\Omega)^2}} \quad (3.22)$$

A continuación se presenta la respuesta en frecuencia del sistema

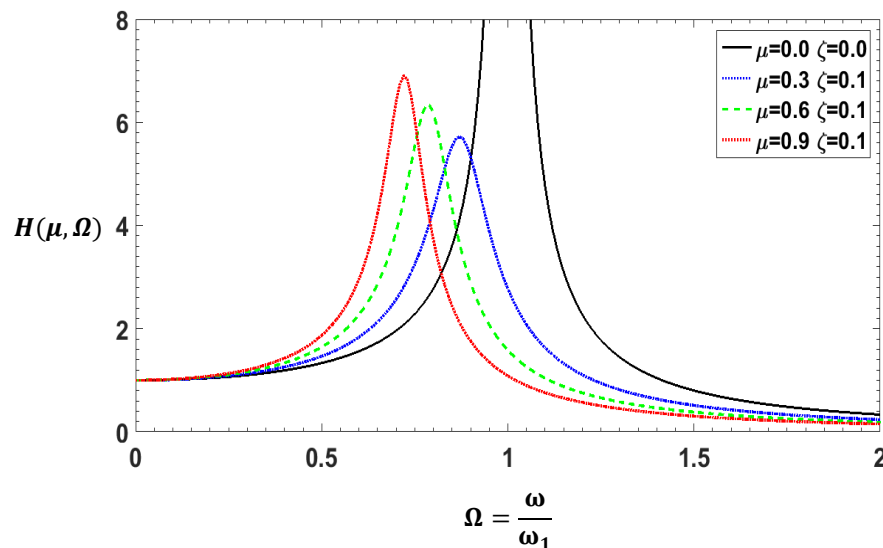


Figura 3.9: Respuesta en frecuencia de la masa  $m_1$ .

Al variar la variable adimensional  $\mu$  se modifican las frecuencias naturales y así mismo las amplitudes de vibración tal como se muestra en la Figura 3.9. Por tanto, el inersor no mejora la respuesta dinámica de la masa  $m_1$  cuando una de sus terminales se conecta a tierra.

### 3.5. Sistema mecánico MRI de dos gdl primera configuración

En la Figura 3.10 el inersor es conectado a un sistema mecánico de dos grados de libertad para analizar su efecto ante una fuerza impulso. Al conectar una de sus terminales a la tierra mecánica, el inersor no presenta aceleración relativa en ellas.

Debido a esta restricción la energía cinética de rotación interna en el inersor solo depende del desplazamiento de la masa  $m_1$ .

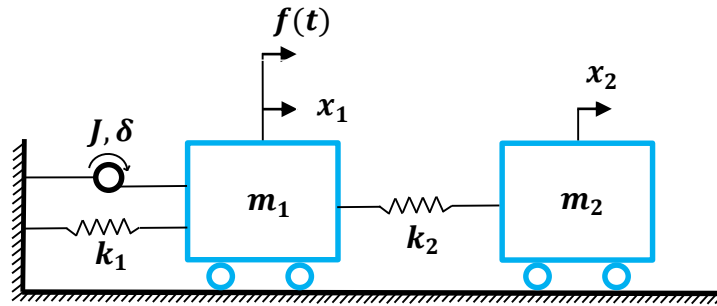


Figura 3.10: MRI-TDOF Primer configuración.

Por tanto, la energía cinética y potencial en todo el sistema puede representarse de la siguiente manera.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J \dot{x}_1^2 \quad (3.23)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \quad (3.24)$$

De acuerdo a la ecuación de Lagrange la función Lagrangiana puede ser expresada como;

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + J) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \quad (3.25)$$

La función de disipación de energía debido a la fricción en los rodamientos puede ser expresada de la siguiente manera.

$$D = \frac{1}{2} \delta \dot{x}_1^2 \quad (3.26)$$

Al aplicar la ecuación de Lagrange se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + J_1) \ddot{x}_1 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \delta \dot{x}_1 \quad (3.29)$$

Por tanto, la ecuación que rige el comportamiento dinámico de la masa  $m_1$  es

$$(m_1 + J)\ddot{x}_1 + \delta\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f(t) \quad (3.30)$$

Al realizar el procedimiento de manera análoga para la masa  $m_2$  se obtiene

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.31)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones (3.30) y (3.31) con condiciones iniciales nulas se obtienen las funciones de transferencia en términos de la respuesta de cada masa inercial del sistema.

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m_2s^2 + k_2}{\{(m_1 + J)s^2 + \delta s + (k_1 + k_2)\}(m_2s^2 + k_2) - (k_2)^2} \quad (3.32)$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{k_2}{\{(m_1 + J)s^2 + \delta s + (k_1 + k_2)\}(m_2s^2 + k_2) - (k_2)^2} \quad (3.33)$$

Con base en la representación anterior es posible obtener la respuesta a una fuerza en forma de impulso al sustituir la ecuación (3.19) en (3.32) y (3.33). Por tanto, se obtiene.

$$X_1(s) = \frac{m_2s^2 + k_2}{\{(m_1 + J)s^2 + \delta s + (k_1 + k_2)\}(m_2s^2 + k_2) - (k_2)^2} f_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-at}}{s} \right) \quad (3.34)$$

$$X_2(s) = \frac{k_2}{\{(m_1 + J)s^2 + \delta s + (k_1 + k_2)\}(m_2s^2 + k_2) - (k_2)^2} f_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-at}}{s} \right) \quad (3.35)$$

Con base en los parámetros mostrados en la Tabla 3.1 la respuesta en el dominio del tiempo para cada subsistema dada una fuerza impulso es.

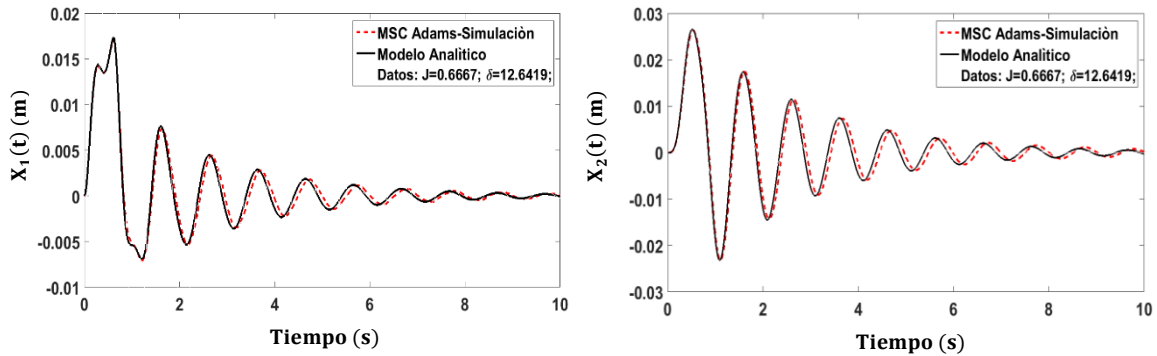


Figura 3.11: Respuesta al impulso de  $m_1$  y  $m_2$ .

La solución tanto del modelo analítico como de la simulación en MSC Adams View es similar. La fuerza en forma de impulso se aplicó a la masa  $m_1$ . Se puede apreciar que la amplitud de la masa  $m_1$  es menor que la amplitud de la masa  $m_2$ , esto debido a que el inersor absorbe una cantidad de energía por medio de los volantes de inercia. Cuando la cremallera transmite la energía cinética de translación al sistema de engranajes y estos a los volantes de inercia, se presenta una fuerza opuesta al desplazamiento de la cremallera, lo cual hace que el desplazamiento de la masa primaria sea menor. Por otra parte, cuando el resorte libera energía potencial la cremallera tendrá que desplazarse en sentido contrario en ese instante los volantes liberan energía cinética de rotación.

### 3.6. Simulación del prototipo virtual TDOF primera configuración

Por medio de Matlab Simulink y MSC Adams View se realizó la interface para obtener la respuesta de ambos subsistemas con base en los parámetros de la Tabla 3.1. De la misma manera se aplicó una fuerza impulso a la masa primaria. Por tanto, los resultados demuestran la correlación con los modelos analíticos.

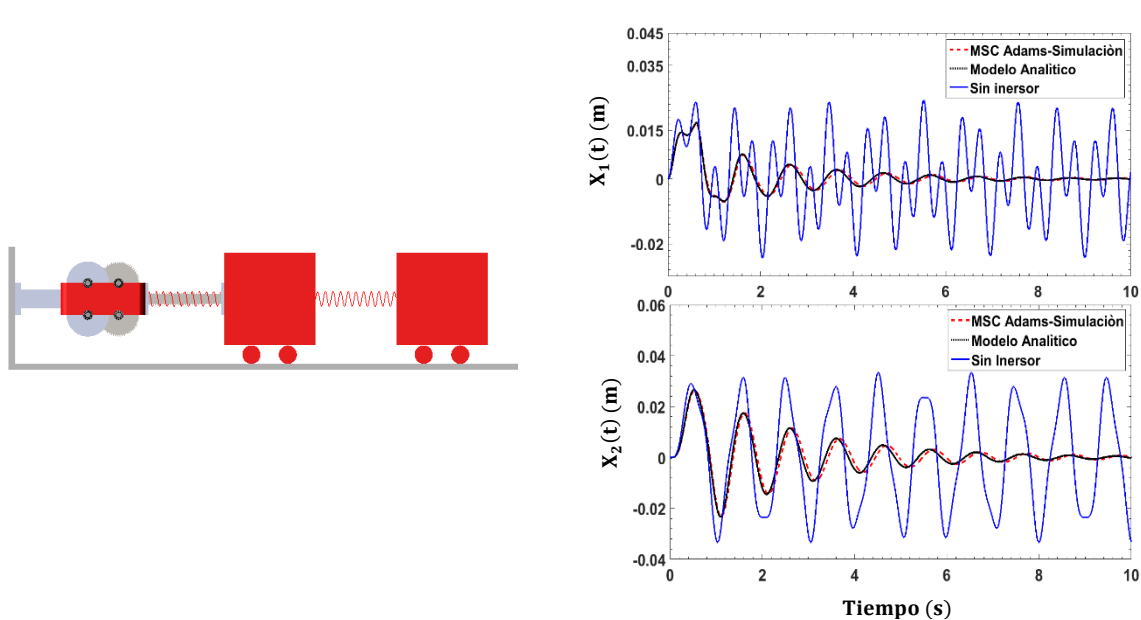


Figura 3.12: Simulación en MSC Adams TDOF primera configuración.

En la Figura 3.12 se puede notar que el inersor mejora la respuesta dinámica tanto de la masa  $m_1$  como de la masa  $m_2$  cuando se aplica una fuerza de impulso mecánico a la masa  $m_1$ . Por otra parte, se necesita saber si el inersor mejora la respuesta de ambos subsistemas cuando se aplica una fuerza armónica con una frecuencia de excitación  $\omega$  a la masa  $m_1$ . En la siguiente sección se realiza este estudio al representar la respuesta en frecuencia de cada masa inercial en términos de las variables adimensionales.



### 3.7. Respuesta en frecuencia del sistema mecánico MRI-TDOF primera configuración

Para analizar el efecto del inersor en la respuesta de cada subsistema mostrado en la Figura 3.10 se debe obtener la respuesta en frecuencia y posteriormente realizar un análisis dimensional. Reemplazando la variable  $s$  por  $j\omega$  en las ecuaciones (3.32) y (3.33) es posible obtener la respuesta en frecuencia para ambas masas inerciales. Por tanto, la respuesta en estado estable para la masa inercial  $m_1$  es.

$$\frac{X_1(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{k_2 - m_2\omega^2}{(m_1m_2 + Jm_2)\omega^4 - (m_1k_2 + Jk_2 + m_2k_1 + m_2k_2)\omega^2 + k_1k_2 + j(\delta k_2\omega - m_2\delta\omega^3)} \quad (3.36)$$

Por otra parte, la ecuación en estado estable para la masa  $m_2$  se obtiene de manera análoga.

$$\frac{X_2(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{k_2}{(m_1m_2 + Jm_2)\omega^4 - (m_1k_2 + Jk_2 + m_2k_1 + m_2k_2)\omega^2 + k_1k_2 + j(\delta k_2\omega - m_2\delta\omega^3)} \quad (3.37)$$

Las variables adimensionales para esta configuración son las siguientes  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ,  $\zeta_1 = \frac{\delta}{2m_1\omega_1}$ ,  $\mu_1 = \frac{J}{m_1}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$ ,  $\beta = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $q = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ , las dos últimas variables adimensionales que se agregan a este análisis representan la razón de masas inerciales de cada subsistema y la razón de frecuencias naturales, respectivamente. Cabe señalar que estos parámetros se eligen por conveniencia para poder analizar la respuesta en estado estable de cada subsistema de manera general. Por tanto, la ecuación en estado estable normalizada para la masa  $m_1$  es.

$$\begin{aligned} \frac{x_1k_1}{f_0} &= H_1(\mu, \beta, q, \zeta_1, \Omega) \\ &= \sqrt{\frac{(q^2 - \Omega^2)^2}{\{(1 + \mu)\Omega^4 - [1 + (1 + \mu + \beta)q^2]\Omega^2 + q^2\}^2 + (2\zeta_1\Omega)^2(q^2 - \Omega^2)^2}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

De la misma manera se obtiene la respuesta adimensional de la masa  $m_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{x_2k_1}{f_0} &= H_2(\mu, \beta, q, \zeta_1, \Omega) \\ &= \sqrt{\frac{(q^2)^2}{\{(1 + \mu)\Omega^4 - [1 + (1 + \mu + \beta)q^2]\Omega^2 + q^2\}^2 + (2\zeta_1\Omega)^2(q^2 - \Omega^2)^2}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

A continuación se grafica la respuesta en estado estable de la masa  $m_1$  y  $m_2$  al hacer variar la variable adimensional  $\Omega$  y  $\mu$  y considerando que  $\beta = q = 1, \zeta_1 = 0.1$ . Solo se considera el efecto del inersor en el sistema.

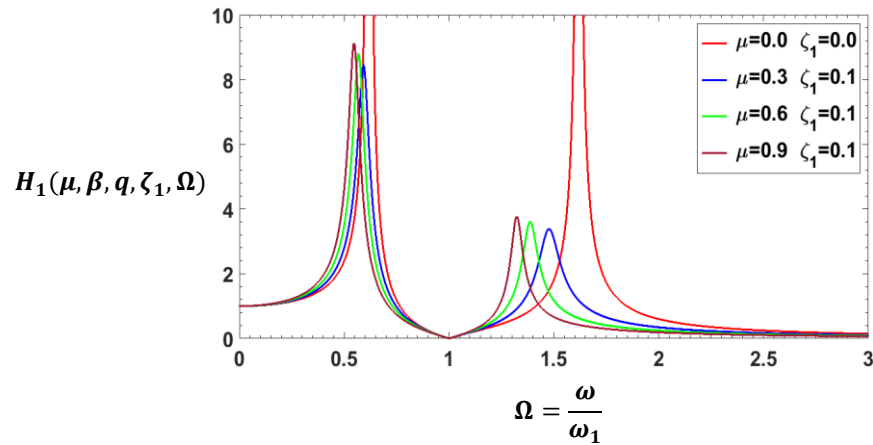


Figura 3.13: Respuesta en frecuencia de  $m_1$  MRI-TDOF Primera configuración.

En la Figura 3.13 se puede notar que al hacer variar la variable adimensional  $\mu$  en la respuesta en estado estable  $H_1$  la amplitud crece en las frecuencias de resonancia además se puede apreciar que el inersor modifica las frecuencias naturales del sistema. Por otra parte, se puede observar que todas las curvas se cortan en un solo punto sobre el eje horizontal de la respuesta  $H_1$ , la ubicación de este punto siempre estará dado por la variable adimensional  $q$ . El inersor no mejora la respuesta dinámica de la masa  $m_1$  en esta configuración dado que las amplitudes crecen en las frecuencias de resonancia.

Por otra parte, la respuesta en estado estable de la masa  $m_2$  es.

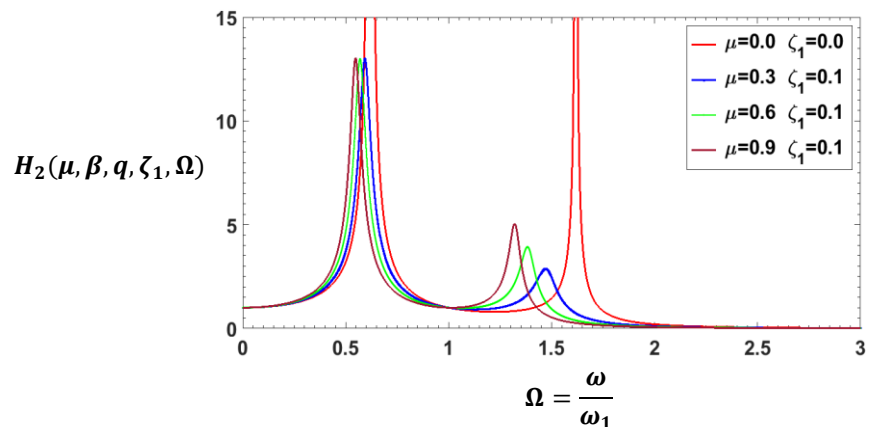


Figura 3.14: Respuesta en frecuencia de  $m_2$  MRI-TDOF primera configuración.

De la figura anterior se puede observar que el inersor modifica las frecuencias naturales además los picos de resonancia aumentan en estas mismas.

### 3.8. Sistema mecánico MRI de dos gdl segunda configuración

En la Figura 3.15 el inersor es añadido a un sistema mecánico de dos grados de libertad para analizar su efecto en la respuesta dinámica de ambos subsistemas ante una fuerza de impulso mecánico. En este caso el inersor es conectado entre los extremos de  $m_1$  y  $m_2$ , lo cual existe aceleración relativa en sus terminales. En esta configuración se analiza en forma detallada el efecto del inersor dado que se originan fuerzas opuestas en sus terminales cuando se sintoniza a la segunda frecuencia natural, es decir el segundo modo de vibración. Debido a esta restricción la energía cinética de rotación interna en el inersor depende del desplazamiento de ambas masas. Por tanto, el desplazamiento angular del piñón puede ser expresado de la siguiente manera.

$$\theta_1 = \frac{1}{r_1}(x_1 - x_2) \therefore \dot{\theta}_1 = \frac{1}{r_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (3.40)$$

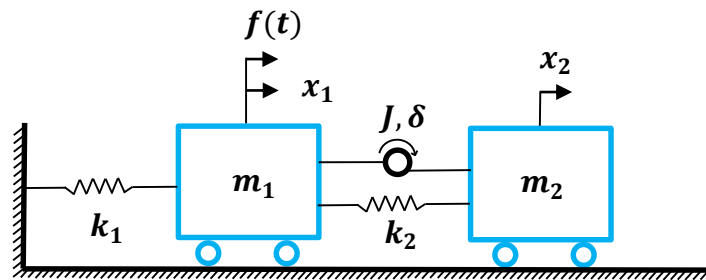


Figura 3.15: MRI-TDOF segunda configuración.

La función Lagrangiana se obtiene al calcular la energía cinética y potencial del sistema. Por tanto, la energía cinética y potencial es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \quad (3.41)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 \quad (3.42)$$

Esto produce

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 \quad (3.43)$$

La función de disipación de energía del inersor está dada por la siguiente expresión.

$$D = \frac{1}{2}\delta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \quad (3.44)$$

Por medio de la ecuación de Lagrange se obtienen las ecuaciones rectoras del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + J)\ddot{x}_1 - J\ddot{x}_2 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \delta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (3.47)$$

Por tanto, la ecuación que rige el comportamiento dinámico de la masa  $m_1$  es

$$(m_1 + J)\ddot{x}_1 - J\ddot{x}_2 + \delta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f(t) \quad (3.48)$$

De la misma manera se obtiene la ecuación dinámica para la masa  $m_2$

$$(m_2 + J)\ddot{x}_2 - J\ddot{x}_1 + \delta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.49)$$

Mediante Matlab Simulink se resuelven las ecuaciones (3.48) y (3.49) de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3.1. Por otra parte, la respuesta para cada subsistema es comparada con la simulación virtual en MSC Adams, ver Figura 3.16.

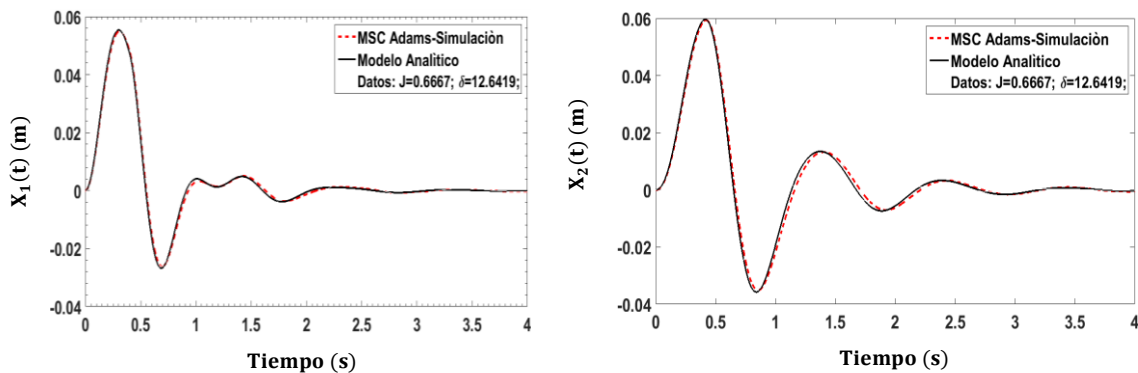


Figura 3.16: Respuesta en el tiempo de  $m_1$  y  $m_2$ .

En ambas soluciones, tanto el modelo analítico como la simulación, las respuestas de las masas inerciales son idénticas de esta manera se validaron los modelos matemáticos. Se concluye que el inersor ayuda a atenuar la respuesta de ambos subsistemas. Se puede apreciar que la respuesta de la masa  $m_1$ , la amplitud es menor en el intervalo de  $1 \leq t \leq 2$  s, esto es debido a que el inersor desarrolla fuerzas opuestas al movimiento de la masa  $m_1$ . En la Figura 3.17 se muestra la simulación de todo el sistema cuando las masas se separan entre sí, los volantes

de inercia giran en sentido antihorario, lo cual absorben energía cinética de rotación. Ahora bien cuando se alcanza la máxima deformación de los resortes a causa de la fuerza de excitación sobre masa  $m_1$  y de las fuerzas de inercia, los resortes liberan energía potencial almacenada, por lo que las masas van a tratar de unirse virtualmente. En ese instante los volantes liberarán la energía almacenada, lo cual produce una fuerza opuesta al movimiento de la cremallera para contrarrestar el movimiento de ambas masas.

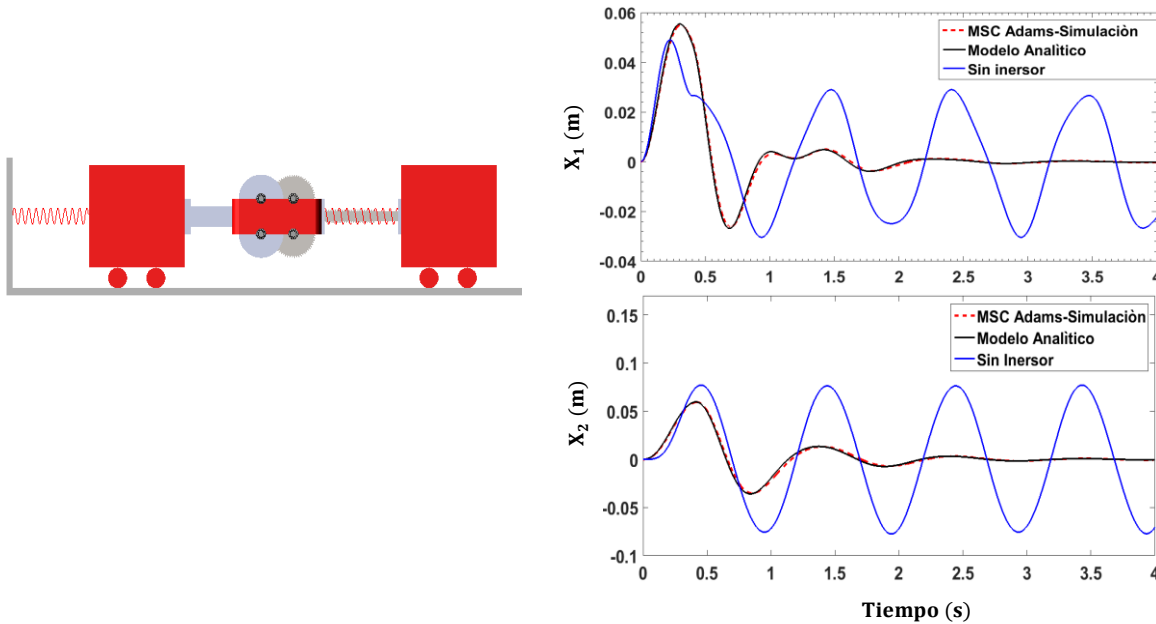


Figura 3.17: Simulación en MSC Adams TDOF Segunda configuración.

Por otra parte, la respuesta del sistema mecánico mostrado en la Figura 3.15 aumenta cuando se desconecta el inersor, tal respuesta es la curva azul de la Figura 3.17 y se reduce a un sistema-masa resorte de dos grados de libertad.

### 3.9. Respuesta en frecuencia del sistema MRI-TDOF segunda configuración.

Al obtener la función de transferencia de la ecuación (3.48), representarlas en el dominio de la frecuencia, sustituir las variables adimensionales descritas en la sección anterior y cambiar la variable adimensional factor de amortiguamiento por la siguiente expresión.

$$\zeta_2 = \frac{\delta}{2m_2\omega_2} = \frac{\delta}{2\sqrt{k_2m_2}} \quad (3.50)$$

La respuesta normalizada para cada masa inercial puede ser representada de la siguiente manera.

$$\frac{x_1 k_1}{f_0} = H_1(\mu, \beta, q, \zeta_2, \Omega) = \sqrt{\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2 [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2}} \quad (3.51)$$

La amplitud en estado estable para el segundo subsistema es

$$\frac{x_2 k_1}{f_0} = H_2(\mu, \beta, q, \zeta_2, \Omega) = \sqrt{\frac{(\beta q^2 - \mu\Omega^2)^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2 [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2}} \quad (3.52)$$

Para analizar el efecto del inersor en la respuesta de  $m_1$  y  $m_2$  en estado estable se considera los siguientes valores de las variables adimensionales  $\beta = q = 1$  y  $\zeta_2 = 0.1$ . Por lo que, la única variable adimensional a estudiar es  $\mu$  haciendo variar la relación de frecuencia forzada  $\Omega$ . De esta manera, se obtiene el efecto de la variable  $\mu$  en los picos de resonancia para la masa  $m_1$ .

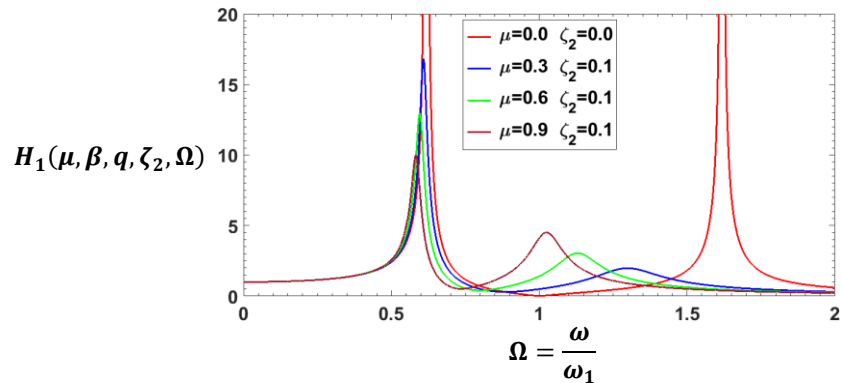


Figura 3.18: Respuesta en frecuencia de  $m_1$  MRI-TDOF segunda configuración.

Por otra parte, la respuesta en estado estable normalizada de la masa  $m_2$  es

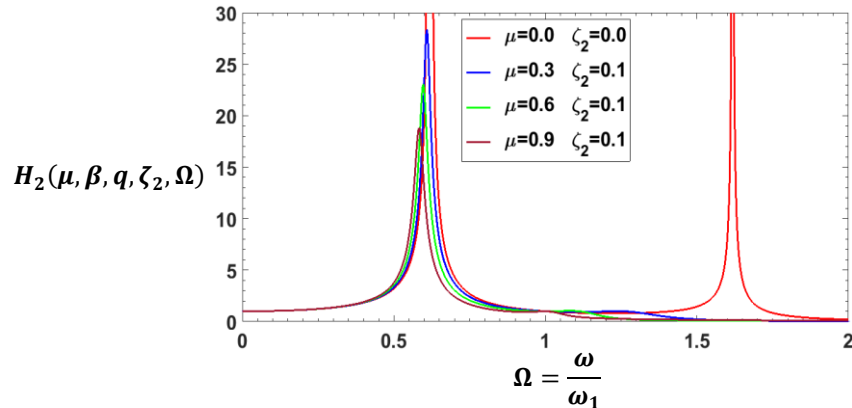


Figura 3.19: Respuesta en frecuencia de  $m_2$  MRI-TDOF segunda configuración.

EL inersor modifica las frecuencias naturales del sistema y puede reducir las amplitudes de vibración en esta configuración. La razón es porque el inersor desarrolla fuerzas opuestas al movimiento de ambos subsistemas en cualquiera de los modos de vibración. Bajo estas consideraciones, se puede notar que la amplitud de la masa  $m_2$  es casi nula en la segunda frecuencia natural, mientras que en la primera es mayor, lo mismo sucede para las amplitudes de resonancia para la masa  $m_1$ . Adicionalmente, los cambios de amplitud en las frecuencias de resonancia pueden originar daños en algún componente físico de una máquina, muchos autores sugieren optimizar la respuesta de un sistema vibratorio, lo cual implica optimizar los parámetros físicos del sistema tales como, rigidez, amortiguamiento y masa equivalente del inersor. En el siguiente capítulo se abordará detalladamente este tema para optimizar la respuesta de esta configuración, es decir el inersor es conectado en los extremos de las masas inerciales. Existen diversos métodos de optimización por ejemplo los métodos numéricos secuenciales y los métodos analíticos ambos presentan un alto grado de complejidad por el número de variables que involucran la función objetivo. La función objetivo es la que se desea optimizar, este caso la función objetivo es la respuesta en estado estable de cualquier masa, y las restricciones estarán dadas en las variables adimensionales.





# Capítulo 4

## Optimización $H_\infty$

### 4.1. Introducción a los métodos de optimización

La localización de raíces y la optimización están relacionadas, en el sentido de que ambas involucran valores iniciales y la búsqueda de un punto de referencia. La diferencia fundamental entre ambos tipos de problemas es en que la localización de raíces es la búsqueda de los ceros de una función o funciones. En cambio, la optimización es la búsqueda ya sea del mínimo o del máximo.

El óptimo es el punto donde la curva es plana. En términos matemáticos, esto corresponde al valor de  $x$  donde la derivada  $f'(x)$  es igual a cero. Además, la segunda derivada,  $f''(x)$ , indica si el óptimo es un mínimo o un máximo: si  $f''(x) < 0$ , el punto es un máximo; si  $f''(x) > 0$ , es un mínimo.

Si se analiza ahora la relación entre las raíces y el óptimo, es posible sugerir una estrategia para determinar este último; es decir, se puede derivar la función y localizar la raíz (el cero) de la nueva función. De hecho, algunos métodos de optimización tratan de encontrar un óptimo resolviendo el problema de encontrar la raíz:  $f'(x) = 0$ . Deberá observarse que tales búsquedas con frecuencia se complican porque  $f'(x)$  no se puede obtener analíticamente. Por tanto, es necesario usar aproximaciones por diferencias finitas para estimar la derivada.

Más allá de ver la optimización como un problema de raíces, deberá observarse que la tarea de localizar el óptimo esta reforzado por una estructura matemática extra que no es parte del encontrar una simple raíz. Esto tiende a hacer de la optimización una tarea más difícil, en particular con casos multidimensionales.

Uno de los métodos para optimizar funciones de múltiples variables es el método de los multiplicadores de Lagrange. Este método se desarrolló para optimizar problemas con restricciones, es decir, problemas de optimización donde las variables están limitadas en alguna forma. Un problema de programación matemática u optimización generalmente se puede establecer como

Determinar  $x$ , que minimiza o maximiza  $f(x)$

Sujeto a

$$d_i(x) \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

$$e_i(x) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.2)$$

Donde  $x$  es un vector de diseño  $n$ -dimensional;  $f(x)$  es la función objetivo;  $d_i(x)$  son las restricciones de desigualdad;  $e_i(x)$  son las restricciones de igualdad;  $m$  y  $p$  son números naturales y  $a_i$  y  $b_i$  son las constantes.

Los problemas de optimización se clasifican considerando la forma de  $f(x)$ :

- Si  $f(x)$  y las características son lineales, se tiene un problema de programación cuadrática.
- Si  $f(x)$  es cuadrática y las restricciones son lineales, se tiene un problema de programación cuadrática.
- Si  $f(x)$  no es lineal ni cuadrática y/o las restricciones no son lineales, se tiene un problema de programación no lineal.

Cuando las ecuaciones (4.1) y (4.2) se incluyen en la optimización, se tiene un problema de optimización restringido; de otra forma, se trata de un problema de optimización no restringido.

Para la optimización multidimensional no restringida existen métodos directos tales como búsquedas aleatorias, búsquedas univariadas y búsquedas de patrones, no requieren la evaluación de las derivadas de la función. Por otro lado, los métodos de gradiente utilizan la primera y segunda derivada para encontrar el óptimo. Como en la localización de raíces, los problemas de optimización unidimensionales se pueden dividir en métodos cerrados y métodos abiertos. La búsqueda por sección dorada es un ejemplo de un método cerrado que depende de los valores iniciales que encierran un solo valor óptimo. Este es seguido por un procedimiento cerrado algo más sofisticado (la interpolación cuadrática). Por otra parte, los métodos abiertos están basados en la idea del cálculo para encontrar el mínimo o máximo al resolver  $f'(x) = 0$ . Esto reduce el problema de optimización al encontrar la raíz de  $f'(x)$  mediante los métodos con gradiente y el método de Newton. Los métodos con

gradiente utilizan en forma explícita información de la derivada para generar algoritmos eficientes que localicen óptimos. Del cálculo diferencial, la primera derivada de una función unidimensional proporciona la pendiente de la recta tangente a la función que se analiza. Desde el punto de la optimización, esta es una información útil. Por ejemplo, si la pendiente es positiva, no indica que al incrementar el valor de la variable independiente no conducirá a un valor más alto de la función que se está analizando.

Del cálculo, también se sabe que la primera derivada puede indicar cuándo se ha encontrado un valor óptimo, puesto que este es el punto donde la derivada toma el valor de cero. Además, el signo de la segunda derivada puede indicar si se ha alcanzado un mínimo (positivo en la segunda derivada) o un máximo (negativo en la segunda derivada).

Estas ideas son útiles en los algoritmos de búsqueda en una dimensión. No obstante, para entender por completo las búsquedas multidimensionales, se debe primero entender cómo se expresan la primera y segunda derivada en un contexto multidimensional.

A continuación se explica de manera breve “*El gradiente*”. Suponga que se tiene una función en dos dimensiones  $f(x, y)$ . Un ejemplo podría ser su altura sobre una montaña como una función de su posición. Suponga que usted está en un lugar específico sobre la montaña  $(a, b)$  y quiere conocer la pendiente en una dirección arbitraria. Una forma de definir la dirección es a lo largo de un nuevo eje ( $h$ ) que forma un ángulo ( $\theta$ ) con el eje  $x$  como se muestra en la Figura 4.1. La elevación a lo largo de un nuevo eje puede entenderse como una función  $g(x)$ . Si usted define su posición como el origen de este eje, es decir  $h = 0$ , la pendiente en esta dirección podría designarse como  $g'(0)$ . Esta pendiente, que se llama derivada direccional, se puede calcular a partir de las derivadas parciales a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  mediante.

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta) \quad (4.3)$$

Suponiendo que el objetivo es obtener la mayor elevación con el siguiente paso, por lo que la pregunta lógica sería: ¿En qué dirección está el mayor paso de ascenso? La respuesta a esta pregunta es proporcionada mediante lo que matemáticamente se conoce como el *gradiente*, el cual se define así:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad (4.4)$$

Este vector también se conoce como “nabla  $f$ ”, el cual se relaciona con la derivada direccional de  $f(x, y)$  en el punto  $x = a$  y  $y = b$ . Donde las derivadas parciales están evaluadas en  $x = a$  y  $y = b$

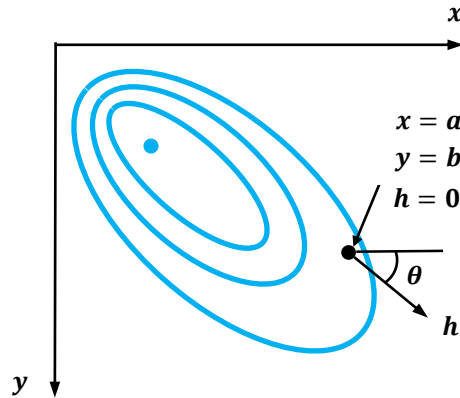


Figura 4.1: Gradiente direccional.

Dado que se sabe bien la definición de optimización y de algunos métodos. En este tema de tesis se desea optimizar la respuesta vibratoria del sistema mecánico MRI-TDOF de dos grados de libertad mostrado en la Figura 3.15. Se elige esta configuración porque en las terminales del inersor existe aceleración relativa, es decir, el inersor está conectado en los extremos de la masa  $m_1$  y  $m_2$  y como consecuencia se generan fuerzas opuestas al movimiento de los elementos masa. En otras palabras en esta configuración se puede analizar completamente el comportamiento dinámico del inersor en condiciones de resonancia.

Un método de optimización comúnmente visto en la literatura es la “*Teoría de los puntos fijos*” lo cual fue propuesta por Den Hartog y Ormondroyd para la optimización de absorbedores de vibración amortiguado (DVA) en términos de minimizar la respuesta de la amplitud máxima del sistema primario. De acuerdo, a este principio Hahnkamm dedujo las relaciones óptimas para ajustar los parámetros del DVA, más tarde Brock desarrolló la función de amortiguamiento óptimo [25-27]. Por otra parte en [28], se propone un método numérico para optimizar los parámetros de un TMD de múltiples grados de libertad llamado método del subgradiente para maximizar el amortiguamiento mínimo de los modos de vibración en un rango de frecuencias prescritas. El procedimiento de optimización minmax para el diseño de absorbedores de péndulo de vibración dinámica usado con un sistema primario amortiguado. Este problema es formulado proporcionando los parámetros de un absorbedor péndulo lo cual puede minimizar la amplitud de vibración del sistema primario y disminuye la sensibilidad de la respuesta del sistema primario para ciertas frecuencias de excitación [29,30]. Además de estos

métodos el criterio de Chebyshev ha sido aplicado para el diseño óptimo de los parámetros de un TMD, este método consiste aproximar la función objetivo a un polinomio de orden menor, por lo que este método requiere de un algoritmo iterativo para la búsqueda de los parámetros óptimos [31,32].

## 4.2. Optimización $H_\infty$

La optimización  $H_\infty$  es análoga a la “Teoría de los puntos fijos” [33]. A partir de la función de respuesta en frecuencia normalizada o de forma adimensional este método puede ser aplicado para minimizar la máxima amplitud en las frecuencias de resonancia. Por otra parte, es posible determinar dos frecuencias llamadas puntos fijos, donde la amplitud de vibración es independiente de la razón de amortiguamiento. A partir de esta analogía se determinan los parámetros óptimos de un TMD [34].

Ahora bien, para poder aplicar la técnica de optimización  $H_\infty$  al sistema mecánico de dos grados de libertad segunda configuración se puede utilizar la respuesta en frecuencia de la masa  $m_1$ . Esto se hace para seleccionar las dimensiones óptimas del volante de inercia del inersor, la constante de rigidez  $k_2$  y  $\delta$ , lo cual es el amortiguamiento equivalente en el inersor. Por tanto, la función objetivo a minimizar es.

$$\begin{aligned} \frac{x_1 k_1}{f_0} &= H_1(\mu, \beta, q, \zeta_2, \Omega) \\ &= \sqrt{\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2 [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

El problema de optimización se formula para minimizar la magnitud de vibración en las frecuencias de resonancia del sistema MRI de dos grados de libertad. Para una relación de masa  $\beta$ , la solución al problema de minimización de la máxima amplitud es.

$$\min_{\mu, q, \zeta_2} \left( \max_{\Omega_i} (H_1(\Omega_i)) \right)$$

Sujeto a  $\mu \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $\zeta_2 \geq 0$  y  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  son las soluciones reales y positivas de la siguiente ecuación.

$$\frac{\partial H_1^2}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) puede ser transformada en una función polinómica con respecto a  $\Omega^2$ , por tanto  $H_1^2$  puede ser escrita como.

$$H_1^2 = \frac{n}{m} \frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2 + (2\zeta_2 \beta q \Omega)^2 [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2} \quad (4.7)$$

Por tanto,

$$\frac{\partial H_1^2}{\partial \Omega^2} = \frac{m \frac{\partial n}{\partial \Omega^2} - n \frac{\partial m}{\partial \Omega^2}}{m^2} = 0 \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) es equivalente a

$$m \frac{\partial n}{\partial \Omega^2} - n \frac{\partial m}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (4.9)$$

Para poder aplicar la ecuación (4.9) y resolver el problema de optimización se debe hacer la siguiente suposición. Si el amortiguamiento en el inersor  $\delta = 0$  se concluye que  $\zeta_2 = 0$  entonces la resonancia ocurre a las dos frecuencias resonantes no amortiguadas del sistema, cuando el amortiguamiento  $\zeta_2 = \infty$ , las dos masas  $m_1$  y  $m_2$  virtualmente se unen entre sí, y el sistema se comporta en esencia como un sistema de un grado de libertad. Por tanto, la amplitud de  $H_1$  es infinito para  $\delta = 0$  y también con  $\delta = \infty$ . En alguna parte entre estos límites, el pico de  $H_1$  será mínimo. Para poder concebir esta idea, la siguiente Figura 4.2 se muestra las curvas para tales consideraciones.

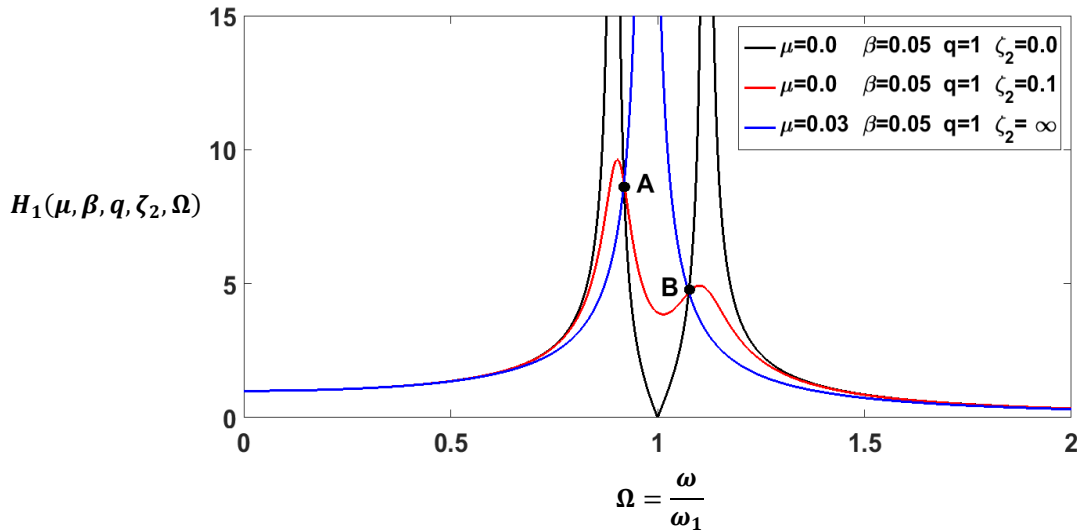


Figura 4.2: Efecto del inersor en la respuesta de la masa principal.

Como se puede ver en la Figura 4.2 todas las curvas se cortan en los puntos A y B independientemente del valor de amortiguamiento [35]. Estos puntos se pueden localizar de acuerdo a las siguientes consideraciones. Al sustituir la relación de amortiguamiento  $\zeta_2 = 0$  en la función  $H_1$  normalizada, se obtiene.

$$H_1(\mu, \beta, q, \Omega)_{\zeta_2=0} = \sqrt{\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2}} \quad (4.10)$$

Ahora bien, cuando el factor de amortiguamiento  $\zeta_2 = \infty$ . La función  $H_1$  es

$$H_1(\beta, \Omega)_{\zeta_2=\infty} = \sqrt{\frac{1}{[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2}} = H_\infty \quad (4.11)$$

Dado que la amplitud de  $H_1$  cuando  $\zeta_2 = 0$  y  $\zeta_2 = \infty$  es infinita, al igualar las ecuaciones (4.10) y (4.11) es posible localizar los puntos  $A$  y  $B$  en las curvas de respuesta en frecuencia.

$$H_1(\mu, \beta, q, \Omega)_{\zeta_2=0} = H_1(\beta, \Omega)_{\zeta_2=\infty} \quad (4.12)$$

Esto produce

$$[\beta^2 + (2\mu + 2)\beta + 2\mu]\Omega^4 - [(1 + \beta q^2 + q^2)\beta + \mu]2\Omega^2 + 2\beta q^2 = 0 \quad (4.13)$$

Las dos raíces de la ecuación (4.13) indican los valores de la relación de frecuencia  $\Omega_A = \omega_A/\omega$  y  $\Omega_B = \omega_B/\omega$ , correspondientes a los puntos  $A$  y  $B$ . Lo cual están dadas por la siguiente expresión.

$$\Omega_{A,B}^2 = \frac{(\beta q^2 + q^2 + 1)\beta + \mu \mp \sqrt{(\beta^4 + 2\beta^3 + \beta^2)q^4 - [\beta\mu + (2\mu + 2)\beta^2]2q^2 + (\beta + \mu)^2}}{\beta^2 + (2\mu + 2)\beta + 2\mu} \quad (4.14)$$

Las ordenadas de  $A$  y  $B$  se determinan sustituyendo en la ecuación (4.11). Para optimizar la respuesta del sistema MRI, las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia deben ser iguales para no provocar fluctuaciones de carga dinámicas causadas por cambios imprevistos en los picos de resonancia [36]. Por tanto, se debe sustituir  $\Omega_A^2$  y  $\Omega_B^2$  en la función  $H_\infty$ .

$$H_1(\beta, \Omega)_{\zeta_2=\infty, \Omega_A^2} = H_1(\beta, \Omega)_{\zeta_2=\infty, \Omega_B^2} \quad (4.15)$$

Esto produce

$$(\beta^4 + 2\beta^3 + \beta^2)q^4 - [2\mu\beta + (2\mu + 2)\beta^2]q^2 + (\beta + \mu)^2 = 0 \quad (4.16)$$

Resolviendo para la variable adimensional  $q$  mediante un tratamiento matemático. Por tanto, se obtiene

$$q(\mu, \beta) = \sqrt{\frac{(1 + \mu)\beta + \mu}{\beta(1 + \beta)^2}} \quad (4.17)$$

Como era de esperarse el inersor modifica las frecuencias naturales dado que la variable adimensional  $q$  representa la razón de frecuencias naturales. Además proporciona información adicional, el cual dice en qué relación de frecuencia forzada  $\Omega$  ocurre el segundo modo de vibración del sistema. Por otra parte, si  $\mu \approx 0$ , es decir, la masa equivalente  $J$  es aproximadamente cero el único efecto en el inersor es el amortiguamiento debido a los rodamientos, lo cual provocaría que la ecuación (4.17) se reduzca a la siguiente expresión.

$$q = \sqrt{\frac{1}{(1 + \beta)^2}} \quad (4.18)$$

Y se tendría como resultado la variable adimensional óptima para sintonizar un absorbedor de vibración dinámico amortiguado (TMD) que ya ha sido tratado ampliamente. Regresando al caso, una forma de encontrar la correlación entre la variable  $\mu$  y  $\beta$  de la ecuación (4.17) es utilizar el concepto del gradiente direccional, esto involucra determinar el máximo o mínimo global óptimo de la función  $q(\mu, \beta)$  simplificando se obtiene.

$$\nabla q(\mu, \beta) = \frac{\partial q(\mu, \beta)}{\partial \mu} + \frac{\partial q(\mu, \beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (4.19)$$

Con base en las condiciones iniciales del problema de optimización se conoce el valor de  $m_1$  y  $m_2$  lo cual están relacionadas con la variable adimensional  $\beta$ . Entonces  $\mu$  debe estar expresada en relación a  $\beta$ . Por tanto, se obtiene.

$$\mu_{\text{óptima}} = \frac{\beta(\beta^2 + 1)}{\beta(3 + 2\beta) + 1} \quad (4.20)$$

Ahora que se conoce el parámetro  $\mu_{\text{óptima}}$  es posible calcular la masa equivalente del inersor. Para poder calcular la rigidez  $k_2$  óptima se debe sustituir la ecuación (4.20) en (4.17). De esta manera la variable adimensional  $q_{\text{óptima}}$  está dada por la siguiente expresión matemática.



$$q_{\text{óptima}} = \sqrt{\frac{(2 + \beta)\beta + 2}{(2\beta + 1)(1 + \beta)^2}} \quad (4.21)$$

Las ecuaciones (4.20) y (4.21) indican como ajustar los parámetros óptimos  $k_2$  y  $J$  de rigidez y masa equivalente del inersor, respectivamente. Pero no indican el valor óptimo de la relación de amortiguamiento  $\zeta_2$  y el valor correspondiente de  $H_1$ . El valor óptimo de  $\zeta_2$  se determina haciendo la curva de respuesta  $H_1$  lo más plana posible en los picos A y B tal como se muestra en la Figura 4.3. Esto se logra mediante la ecuación (4.9), por tanto se obtiene.

$$\frac{\partial n}{\partial \Omega^2} = -2(\beta + \mu)[\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2] + (2\zeta_2\beta q)^2 \quad (4.22)$$

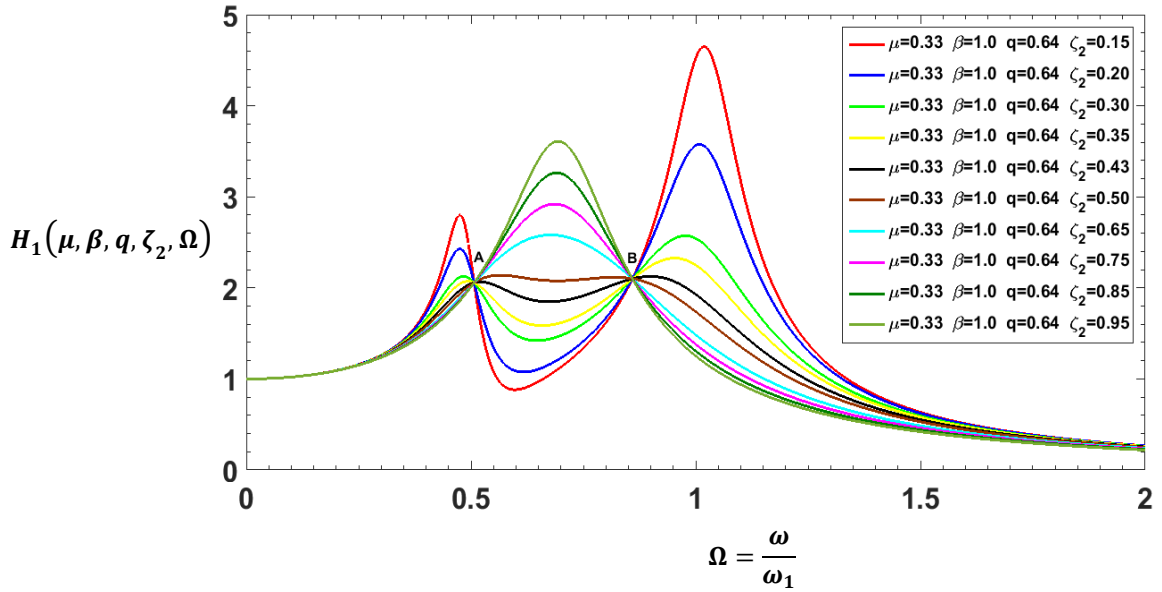


Figura 4.3: Respuesta en estado estable  $H_1$  para diferentes valores de  $\zeta_2$ .

Por otra parte, el segundo miembro de la ecuación (4.9) puede ser expresado de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial \Omega^2} = & 2\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 \\ & + \beta q^2\}\{2(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^2 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\} \\ & - 2(1 + \beta)(2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2] \\ & + (2\zeta_2\beta q)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Considerando que  $n = 1$  y  $m = [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2$  con base en la función  $H_\infty$ , estas relaciones deberán sustituirse en la ecuación (4.9) junto con las ecuaciones (4.22)

y (4.23) para determinar el factor de amortiguamiento óptimo. Por tanto, la ecuación resultante es

$$\begin{aligned}
& [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2 \{-2(\beta + \mu)[\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2] + (2\zeta_2\beta q)^2\} \\
& - \{2\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 \\
& + \beta q^2\}\{2(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^2 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\} \\
& - 2(1 + \beta)(2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2] \\
& + (2\zeta_2\beta q)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2\} = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Para poder resolver para  $\zeta_2$  se debe reemplazar  $\mu$  por  $\mu_{\text{óptima}}$  y  $q$  por  $q_{\text{óptima}}$ . La ecuación resultante estará dada en función de  $\beta$  y  $\Omega$ . Debido a que  $\Omega$  puede tomar dos valores, los cuales son  $\Omega_A$  y  $\Omega_B$ . Entonces habrá dos valores de  $\zeta_2$ , es decir un coeficiente de amortiguamiento en el punto  $A$  y otro en  $B$ . Muchos autores recomiendan tomar un promedio del amortiguamiento óptimo de  $A$  y  $B$  [37,38]. Para encontrar estas relaciones primero se calcula  $\Omega_A$  y  $\Omega_B$ , por tanto se obtiene.

$$\Omega_{A,B}^2 = \frac{(4\beta^2 + 5\beta + 4) \mp \sqrt{\beta(4\beta^2 + 5\beta + 4)(2\beta + 1)}}{(4\beta^2 + 5\beta + 4)(\beta + 1)} \tag{4.25}$$

Entonces el amortiguamiento óptimo estará dado por la siguiente expresión

$$\zeta_{2\text{óptima}}^2 = \frac{\zeta_A^2 + \zeta_B^2}{2} \tag{4.26}$$

Por tanto, el factor de amortiguamiento óptimo  $\zeta_2$  puede representarse de la siguiente manera.

$$\zeta_{2\text{óptima}} = \sqrt{\frac{3\beta}{8(1 + \beta)}} \tag{4.27}$$

Adicionalmente en el Apéndice B se muestra la metodología más detallada sobre cómo obtener las funciones adimensionales óptimas para optimizar la respuesta  $H_1$  del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad.

### 4.3. Cálculo de los parámetros óptimos

A partir de las funciones óptimas obtenidas mediante la técnica de optimización  $H_\infty$  es posible minimizar la máxima amplitud en las frecuencias de resonancia de la masa  $m_1$ . Por tanto, al calcular los parámetros óptimos tales como la rigidez  $k_2$ , el amortiguamiento  $\delta$  y la masa equivalente  $J$  del inersor. Se sabe que  $m_1 = m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 300 \text{ N/m}$ , la densidad para los volantes de inercia es  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , el espesor es  $t = 0.005 \text{ m}$ , el radio interno es  $r_i = 0.004 \text{ m}$ , la relación de engranes

es de 2 a 1 con  $r_2 = 0.03375 \text{ m}$ ,  $r_1 = 0.016875 \text{ m}$  y la fuerza de excitación es  $f(t) = 5\sin(\omega t)$  aplicada a la masa  $m_1$ . Se procede a calcular la masa equivalente del inersor con la siguiente relación.

$$J = m_1 \mu_{\text{óptima}} = m_1 \left( \frac{\beta(\beta^2 + 1)}{\beta(3 + 2\beta) + 1} \right) \quad (4.28)$$

En donde,  $\beta = \frac{m_2}{m_1} = 1$  y sustituyendo se obtiene

$$J = 0.6667 \text{ kg} \quad (4.29)$$

Con base en la ecuación (2.36) es posible determinar el radio externo de cada volante de inercia del inersor. Al suponer que el momento de inercia de masa para cada eje y engrane es despreciable, la ecuación de masa equivalente puede reducirse a la siguiente expresión.

$$J = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 (I_2 + I_4) \quad (4.30)$$

El inersor se diseñó considerando que los volantes de inercia son del mismo tamaño, por lo que  $I_2$  debe ser igual a  $I_4$ . Entonces la ecuación de masa equivalente puede representarse de la siguiente manera.

$$J = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left( \rho \pi t (R_{\text{ext}}^4 - r_{\text{int}}^4) \right) \quad (4.31)$$

Por tanto, el radio externo para cada volante es

$$R_{\text{ext}} = \sqrt[4]{\frac{J r_1^4}{\rho \pi t r_2^2} + r_{\text{int}}^4} \approx 0.025 \text{ m} \quad (4.32)$$

La constante de rigidez  $k_2$  se obtiene a partir de la ecuación (4.21), lo cual resulta.

$$k_2 = k_1 \beta q_{\text{óptima}}^2 = k_1 \beta \left( \frac{(2 + \beta)\beta + 2}{(2\beta + 1)(1 + \beta)^2} \right) = 125 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (4.33)$$

Para calcular la constante de amortiguamiento equivalente  $\delta$  del inersor mediante la ecuación de relación de amortiguamiento óptimo es posible calcular esta constante de la siguiente manera.

$$\delta = 2\zeta_{2\text{óptima}}\sqrt{k_2 m_2} = 2\sqrt{k_2 m_2} \sqrt{\frac{3\beta}{8(1+\beta)}} = 13.6930 \text{ N} \frac{\text{s}}{\text{m}} \quad (4.34)$$

Debido a que  $\delta$  es el coeficiente de amortiguamiento equivalente del inersor. Al realizar la simulación en MSC Adams View se debe calcular el coeficiente de amortiguamiento rotacional para simular la fricción que existe en los rodamientos por medio de la siguiente expresión.

$$b_1 = \frac{\delta}{4 \left\{ \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{r_2}{r_1^2} \right)^2 \right\}} \quad (4.35)$$

El coeficiente de amortiguamiento rotacional que debe de utilizarse en MSC Adams View es

$$b_1 = \frac{13.6930}{4 \left\{ \left( \frac{1}{0.016875} \right)^2 + \left( \frac{0.03375}{0.016875^2} \right)^2 \right\}} = 0.000194964 \text{ N m} \frac{\text{s}}{\text{rad}} \quad (4.36)$$

De acuerdo a estos parámetros óptimos la respuesta en frecuencia para la masa  $m_1$  y  $m_2$  es

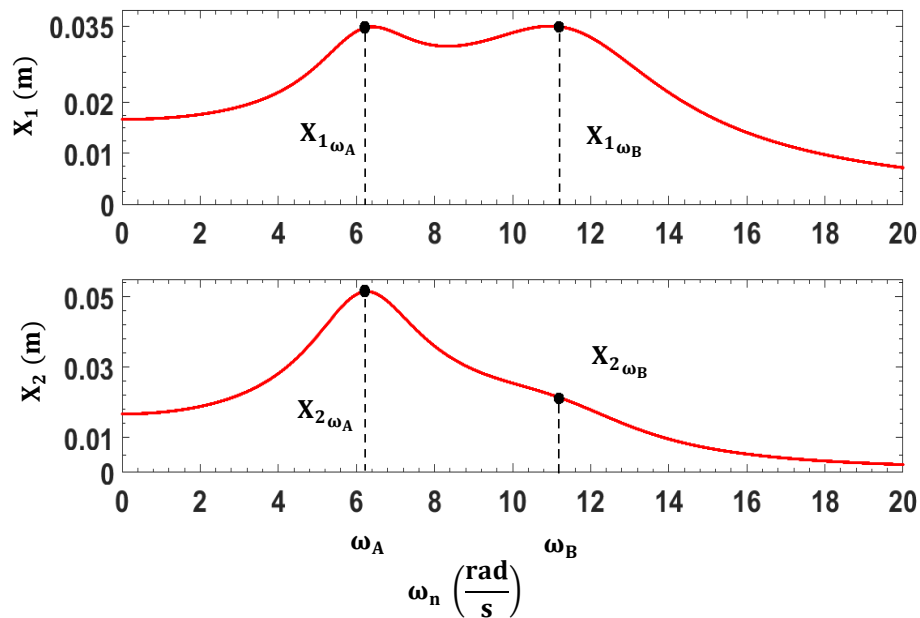


Figura 4.4: Respuesta en frecuencia de  $m_1$  y  $m_2$  optimizada.

En la Figura 4.4 se puede apreciar que la amplitud de vibración para la masa  $m_1$  en las frecuencias de resonancia es la misma. Y las frecuencias naturales del sistema pueden calcularse con la ecuación (4.25), por tanto se obtiene.

$$\omega_A = \sqrt{\frac{300}{2}} \sqrt{\frac{(4 + 5 + 4) - \sqrt{(4 + 5 + 4)(2 + 1)}}{(4 + 5 + 4)(1 + 1)}} \approx 6.243 \frac{rad}{s} \quad (4.37)$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{300}{2}} \sqrt{\frac{(4 + 5 + 4) + \sqrt{(4 + 5 + 4)(2 + 1)}}{(4 + 5 + 4)(1 + 1)}} \approx 10.537 \frac{rad}{s} \quad (4.38)$$

Además, las amplitudes de la masa  $m_1$  y  $m_2$  a estas frecuencias se pueden calcular por medio de las ecuaciones (B.37) y (B.38) mostradas en el Apéndice B.

$$X_{1\omega_A} \approx 0.03485 \text{ m} ; X_{1\omega_B} \approx 0.03446 \text{ m} \quad (4.39)$$

$$X_{2\omega_A} \approx 0.05112 \text{ m} ; X_{2\omega_B} \approx 0.02021 \text{ m} \quad (4.40)$$

#### 4.4. Simulación virtual del sistema MRI-TDOF en condiciones de resonancia

Para someter a resonancia al sistema se debe cambiar  $\omega$  por  $\omega_A$  y  $\omega_B$  en la función  $f(t) = 5\sin(\omega_{A,B}t)$ . A continuación se realiza la simulación en Matlab Simulink y MSC Adams View para validar los modelos analíticos. En la siguiente grafica se muestra la respuesta de la masa  $m_1$  en el dominio del tiempo cuando el sistema es excitado a la primera frecuencia natural  $\omega_A$ .

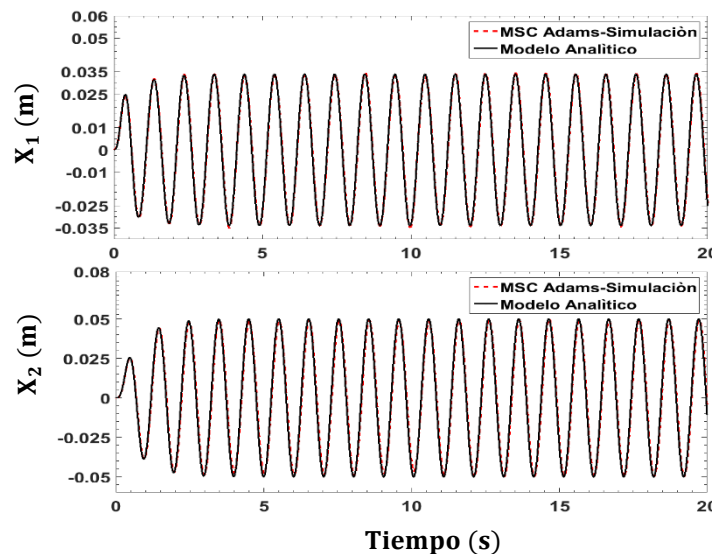


Figura 4.5: Respuesta en el tiempo de  $m_1$  y  $m_2$  a  $\omega_A$ .

En la Figura 4.5 se puede observar que la solución analítica es análoga a la solución obtenida mediante simulación. Por otra parte, la máxima amplitud de vibración de la respuesta en el dominio del tiempo tanto de  $m_1$  como  $m_2$  es la misma en los picos de resonancia de la respuesta en estado estable ver Figura 4.6. A continuación se muestra la respuesta en el dominio del tiempo cuando el sistema es expuesto a la segunda frecuencia natural  $\omega_B$ .

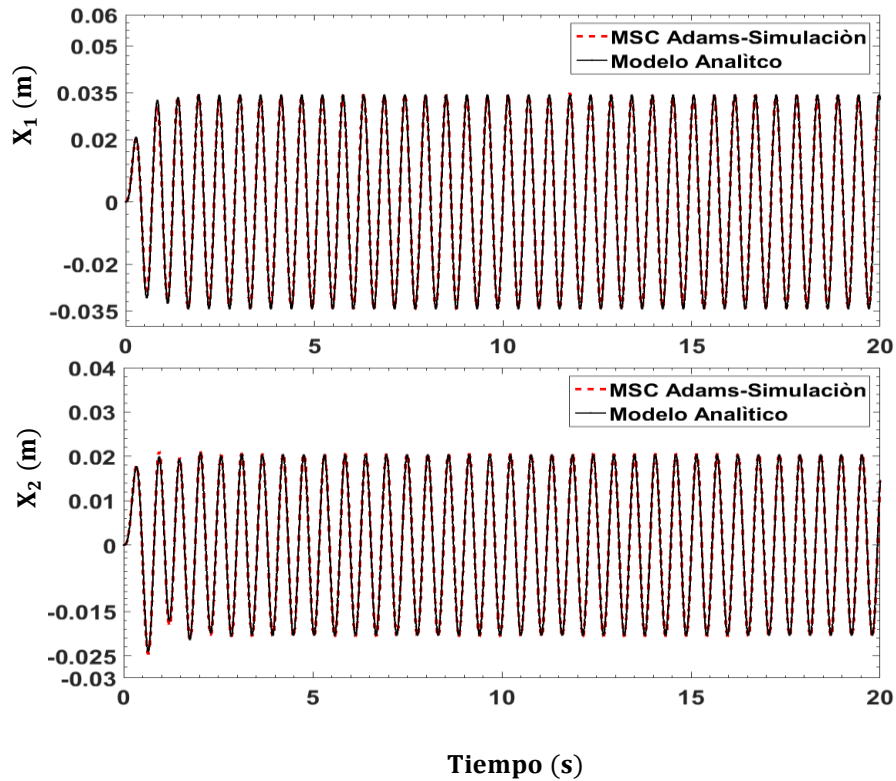


Figura 4.6: Respuesta en el tiempo de  $m_1$  y  $m_2$  a  $\omega_B$ .

# Capítulo 5

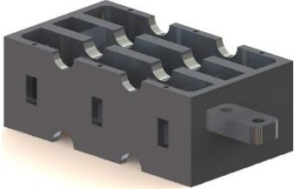






## Diseño y construcción del inersor

### 5.1. Diseño virtual


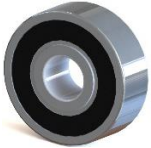
Con base en las dimensiones físicas del simulador de masas mostrado en la Figura 1.3 se diseñaron las partes principales del inersor tales como la carcasa, la cremallera, los sujetadores para los rodamientos y los ejes en solidworks. El motivo por el cual se tomó como prioridad diseñar estas partes es por el espacio de montaje que existe en el simulador. Las partes restantes del inersor tales como los rodamientos, tornillos y los engranes se tomaron de la caja de herramientas de solidworks con la idea de poder adquirirlos fácilmente dado que son productos estandarizados. El componente de gran importancia para el diseño de un inersor es el volante de inercia puesto que le brinda efectos de inercia rotacional y afecta directamente a la constante de masa equivalente o inertancia del dispositivo. Para seleccionar adecuadamente las dimensiones de los volantes de inercia del dispositivo se aplicó el método de optimización  $H_{\infty}$  al sistema mecánicos MRI de dos grados de libertad cuando el inersor es conectado entre los extremos de las masas inerciales ver Figura 3.15. Este método consiste en mejorar la respuesta dinámica tanto de la masa  $m_1$  como de la masa  $m_2$ . Por medio de este método fue posible calcular la constante de masa equivalente  $J$  del inersor lo cual contiene información de las dimensiones geométrica del volante de inercia.

Una vez calculadas las dimensiones físicas de los volates de inercia se procedió a realizar el diseño CAD del inersor. Posteriormente, se importó el prototipo virtual a MSC Adams View para realizar las simulaciones. Al ver que existe un margen de error menor al 5% en la respuesta dinámica de las masas inerciales del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad obtenida mediante los modelos analíticos y la simulación virtual se procedió a elaborar los planos del inersor de doble cremallera ver Apéndice C. A continuación en la Tabla 5.1 se muestran de manera breve las partes principales del inersor.

Tabla 5.1: Piezas principales del inersor de doble cremallera.

Nombre de la pieza	Material de fabricación	Número de piezas	CAD de la pieza
Carcasa inferior	Acero	1	
Carcasa superior	Acero	2	
Ejes	Acero	4	
Engrane de 30 dientes	Acero	2	
Piñón de 30 dientes	Acero	2	
Engrane de 60 dientes	Acero	2	
Cremallera	Acero	1	



Volante de inercia	Acero	2	
Rodamientos	NMB 608	8	

Para poder ensamblar fácilmente cada engrane y volante de inercia a los ejes del inersor se consideró que al diámetro de cada eje se debe agregar una milésima de milímetro más de material. Posteriormente, se debe utilizar el método de ajuste por interferencia para unir el engrane, volante de inercia y rodamientos con el propósito de que este ensamble pueda transmitir un par sin que haya un desajuste en las piezas. Por otra parte, la cremallera se diseñó con una ranura en las caras laterales para que pueda desplazarse en una sola dirección además este diseño permite precargar al sistema de engranajes fácilmente. De la misma manera la carcasa consta de dos guías diseñadas con cierta tolerancia para que la cremallera pueda añadirse sin algún problema. Otro punto muy importante que se consideró para el diseño de este dispositivo es el maquinado de sus parte principales dado que actualmente el costo por maquinar piezas es muy caro. El maquinado de la carcasa inferior del inersor se debe realizar con un taladro fresa mediante vaciados desde la vista superior hasta la vista inferior excepto en la parte media dado que ahí se encuentran las guías. Para poder apreciar detalladamente las partes que conforman al inersor se realizó una foto virtual a las vistas principales como se muestra en la Figura 5.1 en el siguiente orden a) isométrico b) Frontal c) Lateral d) Superior.

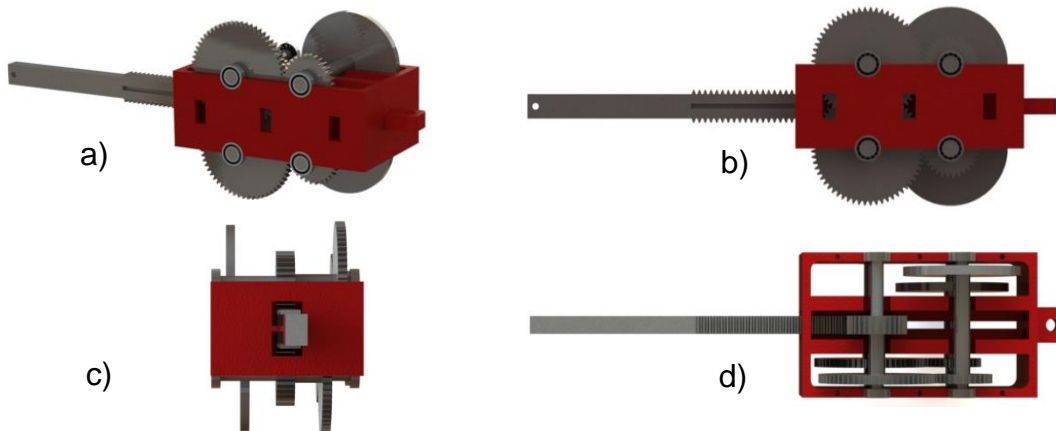


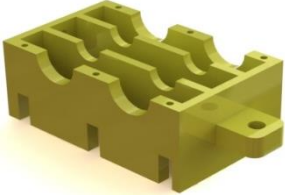

Figura 5.1: Vistas principales del inersor de doble cremallera.





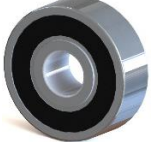

El motivo por el cual no se muestra la carcasa superior del inersor es porque oculta detalles de la carcasa inferior tales como los taladrados, algunas secciones del sistema de engranaje etc. Como se puede apreciar en la Figura 5.1 el inersor consta de pocos elementos mecánicos y la mayoría son estandarizados pero existe un inconveniente para la manufactura de la cremallera el cual es el costo de maquinado dado que consta de dientes tanto en la parte superior e inferior. De acuerdo al paso de la cremallera se investigó el costo de la herramienta de corte para poder maquirarla mediante una fresadora lo cual resultó más costosa que la fabricación de todo el dispositivo. Por tanto, se acordó rediseñar el inersor de tal manera que el maquinado de la cremallera sea más económico y que no afecte los valores óptimos de diseño del dispositivo tal como la constante de inercancia.

## 5.2. Rediseño del inersor

Como se mencionó anteriormente dada la problemática sobre el maquinado de la cremallera se rediseño el inersor con las mismas propiedades físicas de tal manera que la constante de masa equivalente del dispositivo no sea afectada. Para el nuevo diseño del inersor se consideró que la cremallera debe contener un paso estándar, es decir, que exista herramienta de corte para la fresadora así poder maquirar dicha pieza. De la misma manera para el sistema de engranajes se optó por el mismo paso dado que el piñón esta acoplado a la cremallera. En la Tabla 5.2 se muestran los componentes principales de inersor y para ver las dimensiones reales del dispositivo usted puede ver el Apéndice D, el cual muestra todos los planos.

Tabla 5.2: Piezas principales del rediseño del inersor.

Nombre de la pieza	Material de fabricación	Número de piezas	CAD de la pieza
Carcasa inferior	Nylamid	1	
Carcasa superior	Acrílico	2	

Ejes	Aluminio	2	
Engrane de 36 dientes	PLA	2	
Engrane de 48 dientes	PLA	1	
Cremallera	Acero	1	
Rodamientos	NMB 608	4	
Volantes de inercia	acero	2	

Como se puede apreciar en la Tabla 5.2 la cremallera solo tiene dientes en la parte superior este diseño permite un maquinado más fácil y barato además las piezas del dispositivo son menos. En este nuevo diseño se incorporó dos volantes de inercia con la finalidad de proporcionarle al dispositivo la constante de masa equivalente necesaria para atenuar las amplitudes de vibración. Por otra parte, los

engranes son de PLA (ácido poliláctico) este material es un polímero el cual es utilizado para imprimir piezas 3D. A continuación se muestra el ensamble del dispositivo en la Figura 5.2.



Figura 5.2: Rediseño del inersor.

Ahora que se tiene el diseño más económico y con las mismas características físicas del inersor de doble cremallera se procede a ensamblar el prototipo físico. A continuación se presenta de manera detallada el proceso de manufactura del inersor.

### 5.3. Prototipo físico

Con base en el diseño virtual y tomando de referencia los planos de trabajo del Apéndice D se maquinaron las piezas que conforman el inersor.

En la Figura 5.3 se muestran la carcasa superior e inferior ensambladas. El maquinado de la carcasa inferior de Nylamid resulto menos costoso dado que no presenta muchos detalles de diseño además es un polímero lo cual permite que la herramienta de corte realice más rápido los vaciados. Por otra parte, la carcasa superior de acrílico fue manufacturada mediante una cortadora laser. Este conjunto de piezas hacen del inersor un dispositivo con menor peso físico y alta resistencia a esfuerzos dado que las propiedades físicas del Nylamid son similares a las del acero.

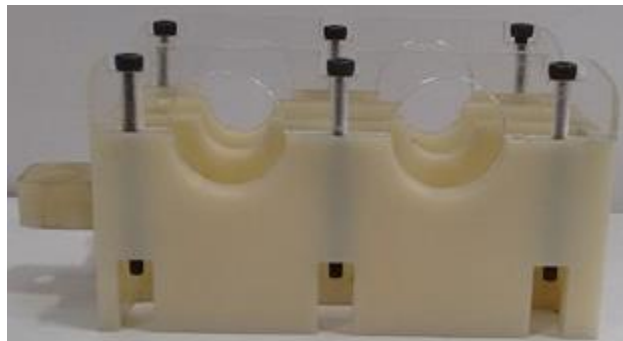


Figura 5.3: Ensamble de la carcasa superior e inferior del inersor.

El costo de maquinado de la cremallera resulto más económico porque solo consta de dientes en la parte superior además las dimensiones son estandarizadas. Dado que una cremallera puede ser construida a partir de una barra rectangular se procedió a comprar una barra de  $\frac{1}{2}$  de pulgada de grosor. Posteriormente se buscó la herramienta de corte con el paso adecuado para crear los dientes así mismo las ranuras. Finalmente, se obtuvo el producto con las dimensiones especificadas en el diseño ver Figura 5.4.



Figura 5.4: Cremallera.

Los ejes del inersor fueron maquinados en el laboratorio de diseño mecánico por medio del Torno CNC DYNAMACH TK50/100. Como se comentó anteriormente se agregó una milésima del milímetro más al diámetro nominal del eje para poder aplicar el método de ajuste por interferencia. En la Figura 5.5 se muestran los ejes del inersor, los pequeños cambios de sección proporcionan a que las piezas estén lo más perpendicular posible al eje con la finalidad de que el dispositivo genere el efecto que se requiere.



Figura 5.5: Ejes del inersor.

Otro punto importante para el diseño del inersor es el sistema de engranajes. Para obtener un diseño más económico se optó por buscar engranes estandarizados y así calcular el paso. Posteriormente, se buscó en la caja de herramientas de solidworks los engranes de acuerdo al paso para realizar el diseño adecuado de la cremallera que ya fue mencionado. En la Figura 5.6 se muestran los engranes necesarios para construir el inersor.



Figura 5.6: Engranés rectos.

Los rodamientos son de tipo industrial NMB 608 DSD02 y de las dimensiones requeridas dado que los eje debe entrar con cierto apriete sobre de estos. A continuación se muestran tales elementos mecánicos ver Figura 5.7.



Figura 5.7: Rodamientos NMB 608.

Por otra parte, los volantes de inercia se maquinaron de tal manera que los ejes se puedan acoplar fácilmente. Se optó por la forma más sencilla de un volante de inercia la cual es un disco sólido tal como se muestra en la Figura 5.8 dado que es más fácil y menos costoso de maquinar.



Figura 5.8: Volantes de inercia.

Finalmente para obtener un ensamble exitoso y con menos errores se debe acoplar los engranes a los ejes que le corresponden. Posteriormente, acoplar los volantes de inercia y los rodamientos. Entonces el ensamble final es tal como se muestra en la siguiente Figura 5.9.



Figura 5.9: Ensamble final del inersor.

De esta manera se concluyó el ensamble final del inersor. Durante la etapa de fabricación del dispositivo se entendió con mayor claridad el funcionamiento. Para poder aprovechar el efecto total del inersor, las terminales deben estar conectadas a elementos con desplazamiento axial un ejemplo es un sistema suspensión de automóvil. Dado que el inersor no cambia sus propiedades físicas principalmente la constante de masa equivalente se considera un elemento de suspensión pasiva que ayuda a balancear las cargas dinámicas originas por cargas de inercia, fuerzas de excitación externa etc.





# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

Cuando una de las terminales del inersor es conectada a la tierra mecánica el efecto que produce en la respuesta en estado estable es incrementar la amplitud y reducir las frecuencias naturales. Por ejemplo, el sistema mecánico masa-resorte-inersor (MRI) de un grado de libertad que se muestra en la Figura 6.1 puede ser expresado de forma equivalente.

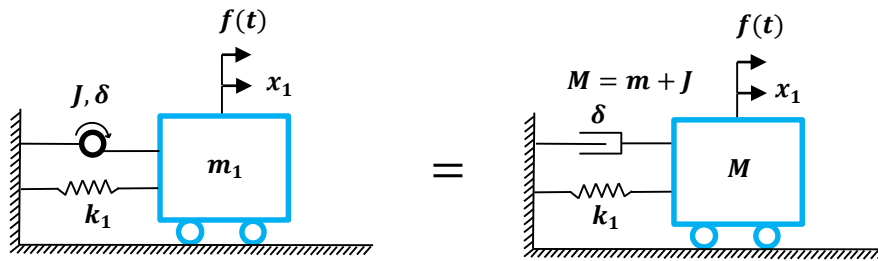


Figura 6.1: Equivalencia en sistemas mecánicos.

Si el amortiguamiento  $\delta$  en el inersor despreciable la frecuencia natural del sistema es.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + J}} \quad (6.1)$$

Como se puede apreciar en la ecuación (6.1), si se incrementa el valor de la constante  $J$  del inersor la frecuencia natural  $\omega_n$  tiende a disminuir.

Por otra parte, si las terminales del inersor no están conectadas a tierra, las fuerzas que se generan son directamente proporcional a la aceleración relativa entre ellas. Este efecto se puede apreciar mejor cuando el inersor es conectado a un sistema mecánico de dos grados de libertad tal como se muestra en la Figura 3.15. Cuando el sistema es sometido al segundo modo de vibración, es decir a la segunda

frecuencia natural  $\omega_B$ , provoca que las masas se separen mutuamente y el inersor compensará esos movimientos generando fuerzas opuestas al movimiento de las masas  $m_1$  y  $m_2$ . En condiciones de resonancia, el inersor genera fuerzas opuestas para provocar un equilibrio dinámico en los desplazamientos de las masas inerciales. Por otra parte, para minimizar las magnitudes en los picos de resonancia, se utilizó la técnica de optimización  $H_\infty$  para mejorar la respuesta de la masa  $m_1$ . Una vez que se calcularon los parámetros óptimos se realizó la simulación en MSC Adams View y Matlab Simulink para apreciar mejor el comportamiento dinámico del inersor en condiciones de resonancia. Además se demostró que es posible expresar la respuesta en frecuencia  $H_{1,2}$  en términos de una sola variable adimensional con el propósito de conocer los picos de resonancia a una relación de masas dadas.

En general, el inersor disminuye las fuerzas dinámica recíprocas de un sistema mecánico por medio de los volantes de inercia un ejemplo de ello son las fuerzas que se generan en los neumáticos a causa de las perturbaciones de la carretera. Debido a que el inersor absorbe energía cinética mediante los volantes de inercia y la transmite momentáneamente por medio de sus terminales, una aplicación esencial del inersor es a absorbedores de vibración dinámica y a sistemas de suspensión pasiva.

### 6.1. Trabajo futuro

De acuerdo con los resultados obtenidos mediante los tratamientos matemáticos y de simulaciones virtuales, el inersor demostró mejorar la respuesta dinámica del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad en condiciones de resonancia. Por tanto, surgen las siguientes ideas como trabajos futuros y aplicaciones del inersor.

- Diseñar y construir un sistema de suspensión semi-activo con elementos pasivos tales como resorte e inersor. En la parte activa (amortiguador) estudiar el comportamiento de un fluido reológico con el propósito de mejorar el comportamiento dinámico del chasis de un automóvil.
- Aplicar el sistema de suspensión semi-activa a un cuarto de automóvil y adquirir señales de vibración para ver el desempeño del sistema.
- Realizar un análisis de esfuerzo-deformación mediante la técnica de los elementos finitos a la cremallera y al sistema de engranajes para seleccionar adecuadamente el material para manufacturar dichos componentes.

**Bibliografía**

- [1] C. P. F. S. F.-C. W. M. C. S. Michael Z.Q. Chen, «The missing mechanical circuit element,» *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 1, nº 9, pp. 10-26, 2009.
- [2] R. M. G. Alejandra Z. Matamoros-Sanchez, «Applications of the inerter in railway vehicle suspensions,» *UKACC International Conference on Control*, pp. 555-560, 2014.
- [3] M. C. Smith, «Synthesis of mechanical networks,» *The inerter, IEEE Transactions on Automatic*, vol. 47, nº 10, pp. 1648-1662, 2002.
- [4] M. Z.Q.Chen, «Influence of inerter on natural frequencies of vibrations systems,» *Journal of Sound and Vibration*, nº 333, p. 1874–1887, 2014.
- [5] H. Garrido, «Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper,» *Engineering Structures*, pp. 2149-2153, 2013.
- [6] M. Z. Q. Chen, «Suspension Performance with One Damper and One Inerter,» *24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pp. 3534-3539, 2012.
- [7] C.-H. Y. M.-L. C. a. M. H. Fu-Cheng Wang, «The Performance Improvements of Train Suspension Systems with Inerters,» *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control* , pp. 1472-1477, 2006.
- [8] C. Li, «Performance Benefits of Using Inerter in Semiactive Suspensions,» *Transactions on Control Systems Technology*, pp. 1-7, 2014.
- [9] K.-H. G. Mehdi Ahmadian, «On the benefits of semi-active suspensions with inerters,» *Shock and Vibration*, p. 257–272, 2011.
- [10] M. C. Smith, «The Inerter Concept and Its Application,» *SICE Annual Conference, Fukui, Japan*, vol. 1, nº 1, pp. 1-40, 2003.
- [11] M. Z. Q. Chen, «Passive mechanical synthesis and n-port resistive networks,» *Department of Mechanical Engineering*, pp. 1-54, 2015.

- [12] H.-A. C. Fu-Cheng Wang, «Mechatronic Suspension Design and Its Applications to Vehicle Suspension Control,» de *IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, 2008.
- [13] T. H. Mamoru Watanabe, «Wobbling mass effects for a walking robot with inerters,» de *SICE Annual Conference*, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 2014.
- [14] Y.-C. Chen, «Vibration Control of a Three-Leg Optical Table by Mechatronic Inerter Networks,» *SICE Annual Conference*, pp. 426-431, 2014.
- [15] Guanrong, «Realization of Three-port Spring Networks with Inerter for Effective Mechanical Control,» *IEEE-TAC Submission*, pp. 1-6, 2015.
- [16] K. W. Y. Z. a. J. L. Michael Z. Q. Chen, «Realization of a Special Class of Admittances with One Damper and One Inerter for Mechanical Control,» *Transactions on Control Systems Technology*, vol. 58, nº 7, pp. 1841-1846, 2013.
- [17] F.-C. Wang, «Performance Analyses of Building Suspension Control with Inerters,» de *IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, 2007.
- [18] F.-C. W. a. W.-J. Su, «Inerter Nonlinearities and the Impact on Suspension Control,» *American Control Conference*, nº 11-12, pp. 3245-3250, 2008.
- [19] A. Dimarogonas, «Vibration for Engineers,» pp. 191-96, Second Edition.
- [20] W. W. seto, «Vibraciones mecanicas,» *Analogias electricas*, pp. 163-173, 1986.
- [21] S. G. kelly, «Mechanical Vibrations Theory and applicantios, SI,» *Frecuency response, Damped Vibration Absorbers*, pp. 411-424, 2011.
- [22] B. Balachandran, «Vibrations, Frecuency Response function,» 2009 Second Edition.
- [23] M. Z. REN, «A VARIANT DESIGN OF THE DYNAMIC VIBRATION ABSORBER,» *Journal of Sound and vibration*, nº 245(4), pp. 762-770, 2001.

- [24] Y. C. W.O. Wong, «Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion,» *Engineering Structures*, n° 30, p. 282–286, 2008.
- [25] G. Coppola, «OPTIMAL DESIGN OF DAMPED DYNAMIC VIBRATION ABSORBER FOR DAMPED PRIMARY SYSTEMS,» *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 1, n° 34, pp. 119-135, 2010.
- [26] S. N. L. Zuo, «Minimax optimization of multi-degree-of-freedom tuned-mass dampers,» *Journal of Sound and Vibration*, n° 272, p. 893–908, 2004.
- [27] M. A. Abdel-Hafiz, «Minimax Optimization Of Dynamic Pendulum Absorbers For A Damped Primary System,» *INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC & TECHNOLOGY RESEARCH*, vol. 3, pp. 209-215, 2014.
- [28] T. Brandon Brown, «Minimax design of vibration absorbers for linear damped systems,» *Journal of Sound and Vibration*, pp. 1-12, 2010.
- [29] E. PENNESTRI, «AN APPLICATION OF CHEBYSHEV'S MIN-MAX CRITERION TO THE OPTIMAL DESIGN OF A DAMPED DYNAMIC VIBRATION ABSORBER,» *Journal of Sound and Vibration*, 0887.
- [30] A. B. Yonina C. Eldar, «A Minimax Chebyshev Estimator for Bounded Error Estimation,» *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, vol. 4, n° 56, pp. 1388-1397, 2008.
- [31] Y. C. a. W. Wong, «H-infinity optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber-revisited and new results,» *Department of Mechanical Engineering* , pp. 1-31, 2010.
- [32] M. Yinlong Hu, «Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers,» *International Journal of Mechanical Sciences*, n° 99, p. 297–307, 2015.
- [33] M. L. Yinlong Hu, «Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution,» *Journal of Sound and Vibration*, pp. 17-36, 2015.
- [34] S. A. N. D. J. W. I. F. Lazar, «Using an inerter-based device for structural,» *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, pp. 1-26, 2013.

- [35] E. P. P. Brzeski, «The application of inerter in tuned mass absorber,» *International Journal of Non-Linear Mechanics*, nº 70, pp. 20-29, 2015.
- [36] Z. S. L. H. Yinlong Hu, «Vibration analysis for isolation system with inerter,» *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, pp. 6687-6692, 2014.
- [37] C. P. a. M. C. Smith, «Laboratory experimental testing of inerters,» *Conference on Decision and Control, and*, pp. 3351-3356, 2005.
- [38] H. H. Thanh-Tung Tran, «INTEGRATED INERTER DESIGN AND APPLICATION TO OPTIMAL VEHICLE SUSPENSION SYSTEM,» *International Journal of Computer-Aided technologies*, vol. 1, nº 2/3, pp. 1-16, 2014.

### Apéndice A: Ecuación dinámica del inersor de doble cremallera

Con base en el diagrama cinemático del inersor mostrado en la Figura 3.3 las ecuaciones que describen el desplazamiento lineal de la cremallera y el desplazamiento angular del sistema de engranajes son.

$$x = r_1\theta_1 = r_5\theta_3 \quad \therefore \quad \dot{x} = r_1\dot{\theta}_1 \quad (\text{A.1})$$

$$\theta_2 = \frac{r_2}{r_3}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_2 = \frac{r_2}{r_3}\dot{\theta}_1 \quad (\text{A.2})$$

$$\theta_3 = \frac{r_1}{r_5}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_3 = \frac{r_1}{r_5}\dot{\theta}_1 \quad (\text{A.3})$$

$$\theta_4 = \frac{r_4 r_1}{r_6 r_5}\theta_1 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_4 = \frac{r_4 r_1}{r_6 r_5}\dot{\theta}_1 \quad (\text{A.4})$$

La energía cinética del inersor está dada por la siguiente expresión matemática

$$T = \frac{1}{2} M_{crem}\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\theta}_4^2 \quad (\text{A.5})$$

Al sustituir las relaciones cinemáticas en la ecuación (A.5) se obtiene la energía cinética en términos del desplazamiento de la cremallera y del desplazamiento angular del piñón motriz dada por la siguiente ecuación.

$$T = \frac{1}{2} M_{crem}\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_3 \left(\frac{r_1}{r_5}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_4 \left(\frac{r_4 r_1}{r_5 r_6}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{A.6})$$

Simplificando la ecuación (A.6) se obtiene

$$T = \frac{1}{2} M_{crem}\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left[ I_1 + I_2 \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + I_3 \left(\frac{r_1}{r_5}\right)^2 + I_4 \left(\frac{r_4 r_1}{r_5 r_6}\right)^2 \right] \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{A.7})$$

Para poder expresar la ecuación (A.7) en términos de una sola variable se debe sustituir la siguiente relación cinemática.

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{r_1}\dot{x} \quad (\text{A.8})$$

Esto produce

$$T = \frac{1}{2} M_{crem}\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left[ I_1 \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + I_2 \left(\frac{r_2}{r_1 r_3}\right)^2 + I_3 \left(\frac{1}{r_5}\right)^2 + I_4 \left(\frac{r_4}{r_5 r_6}\right)^2 \right] \dot{x}^2 \quad (\text{A.9})$$

## Ecuación dinámica del inersor de doble cremallera

Considerando que la relación de velocidad angular del sistema de engranaje del inersor es de 2 a 1 se concluye que  $r_1 = r_3 = r_5 = r_6$  y  $r_2 = r_4$ . Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (A.9) se obtiene.

$$T = \frac{1}{2} \left[ M_{crem} + (I_1 + I_3) \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + (I_2 + I_4) \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] \dot{x}^2 \quad (A.10)$$

De la ecuación anterior se define la masa equivalente de inersor como sigue

$$J = M_{crem} + (I_1 + I_3) \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + (I_2 + I_4) \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \quad (A.11)$$

Para poder utilizar la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos se debe obtener la función Lagrangiana  $L = T - V$  del inersor, donde  $T$  es la energía cinética y  $V$  es la energía potencial. Dado que en el inersor no existe energía potencial la función Lagrangiana es.

$$L = \frac{1}{2} J \dot{x}^2 \quad (A.12)$$

Así mismo, la función de disipación de energía  $D$  a causa de la fricción en los rodamientos del inersor se puede calcular de la siguiente manera.

$$D = \frac{1}{2} 2b_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} 2b_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} 2b_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} 2b_4 \dot{\theta}_4^2 \quad (A.13)$$

Donde  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  y  $b_4$  son los coeficientes de amortiguamiento rotacional de los rodamientos. Al sustituir las relaciones cinemáticas en la ecuación (A.13) se obtiene

$$D = b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \dot{\theta}_1^2 + b_3 \left( \frac{r_1}{r_5} \right)^2 \dot{\theta}_1^2 + b_4 \left( \frac{r_4 r_1}{r_5 r_6} \right)^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (A.14)$$

Sustituyendo la ecuación (A.8) en (A.14) resulta

$$D = b_1 \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 \dot{x}^2 + b_2 \left( \frac{r_2}{r_1 r_3} \right)^2 \dot{x}^2 + b_3 \left( \frac{1}{r_5} \right)^2 \dot{x}^2 + b_4 \left( \frac{r_4}{r_5 r_6} \right)^2 \dot{x}^2 \quad (A.15)$$

Considerando que  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$  la ecuación (A.15) se reduce a

$$D = b_1 \left[ \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{r_2}{r_1 r_3} \right)^2 + \left( \frac{1}{r_5} \right)^2 + \left( \frac{r_4}{r_5 r_6} \right)^2 \right] \dot{x}^2 \quad (A.16)$$



## Ecuación dinámica del inersor de doble cremallera

Dada la relación 2 a 1 del sistema de engranaje del inersor, es decir,  $r_1 = r_3 = r_5 = r_6$  y  $r_2 = r_4$ . La ecuación (A.16) se reduce a la siguiente expresión matemática.

$$D = 2b_1 \left[ \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{r_2}{r_1^2} \right)^2 \right] \dot{x}^2 \quad (\text{A.17})$$

Al aplicar la ecuación de Lagrange al inersor de doble cremallera se obtiene.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F_e \quad (\text{A.18})$$

Donde

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = J\ddot{x} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 4b_1 \left[ \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{r_2}{r_1^2} \right)^2 \right] \dot{x} \quad (\text{A.21})$$

Por tanto, la ecuación que gobierna el comportamiento dinámico del inersor de doble cremallera es.

$$J\ddot{x} + 4b_1 \left[ \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{r_2}{r_1^2} \right)^2 \right] \dot{x} = F_e \quad (\text{A.22})$$

Definiendo  $\delta$  como la constante de amortiguamiento total del inersor.

$$\delta = 4b_1 \left[ \left( \frac{1}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{r_2}{r_1^2} \right)^2 \right] \quad (\text{A.23})$$

Por lo cual, la ecuación (A.22) se puede expresar de la siguiente manera.

$$J\ddot{x} + \delta\dot{x} = F_e \quad (\text{A.24})$$



## Apéndice B: Cálculo de las funciones adimensionales óptimas

A partir de la respuesta  $H_1$  normalizada del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad se aplican las siguientes consideraciones.

$$H_1(\mu, \beta, q, \zeta_2, \Omega) = \sqrt{\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2 + (2\zeta_2\beta q\Omega)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2 + (2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2}} \quad (\text{B.1})$$

Dado que  $\zeta_2 = \frac{\delta}{2m_2\omega_2}$ , si  $\delta = 0$  se obtiene  $\zeta_2 = 0$ . Por tanto

$$H_1(\mu, \beta, q, \zeta_2, \Omega) = \sqrt{\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2}} \quad (\text{B.2})$$

Cuando  $\delta = \infty$  se obtiene  $\zeta_2 = \infty$ . Esto produce

$$H_1(\mu, \beta, q, \zeta_2, \Omega) = \sqrt{\frac{(2\zeta_2\beta q\Omega)^2}{(2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2}} = H_\infty(\mu, \beta, q, \zeta_2, \Omega) \quad (\text{B.3})$$

Por inspección  $H_1 = \infty$  cuando  $\zeta_2 = 0$  y  $\zeta_2 = \infty$ . Al igualar las ecuaciones (B.2) y (B.3) se obtiene

$$\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2} = \frac{(2\zeta_2\beta q\Omega)^2}{(2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2} \quad (\text{B.4})$$

La ecuación (B.4) es equivalente a

$$\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)}{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2} = \pm \sqrt{\frac{(2\zeta_2\beta q\Omega)^2}{(2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2}} \quad (\text{B.5})$$

El miembro derecho de la ecuación (B.5) tiene dos soluciones. Estas soluciones pueden representarse de la siguiente manera.

$$\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)}{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2} = \pm \frac{1}{[1 - (1 + \beta)\Omega^2]} \quad (\text{B.6})$$

Tomando la solución positiva de la ecuación (B.6) se obtiene

$$\frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)[1 - (1 + \beta)\Omega^2]}{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2} \quad (\text{B.7})$$

De lo anterior la ecuación (B.7) puede representarse de la siguiente manera.

$$(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)[1 - (1 + \beta)\Omega^2] - \{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Lo cual resulta

$$\beta^2\Omega^4 = 0 \quad (\text{B.9})$$

Esto significa que la primera solución de la ecuación (B.6) no converge en la búsqueda de las funciones adimensionales óptimas. Por otra parte, al tomar la solución (–) de la misma ecuación se obtiene.

$$(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)[1 - (1 + \beta)\Omega^2] + \{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Simplificando la ecuación (B.10) se obtiene

$$[\beta^2 + (2\mu + 2)\beta + 2\mu]\Omega^4 - [(1 + \beta q^2 + q^2)\beta + \mu]2\Omega^2 + 2\beta q^2 = 0 \quad (\text{B.11})$$

Resolviendo para  $\Omega^2$

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{(\beta q^2 + q^2 + 1)\beta + \mu \mp \sqrt{(\beta^4 + 2\beta^3 + \beta^2)q^4 - [\beta\mu + (2\mu + 2)\beta^2]2q^2 + (\beta + \mu)^2}}{\beta^2 + (2\mu + 2)\beta + 2\mu} \quad (\text{B.12})$$

La ecuación (B.12) representa las dos frecuencias de resonancia del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad, como se puede apreciar no dependen del factor de amortiguamiento. A estas frecuencias le corresponden dos amplitudes llamadas picos de resonancia tal como se muestra en la Figura 4.3. Por consideraciones de diseño estos picos debe ser iguales para tales frecuencias por tanto se debe realizar la siguiente operación matemática.

$$\frac{1}{[1 - (1 + \beta)\Omega_1^2]} = \frac{1}{[1 - (1 + \beta)\Omega_2^2]} \quad (\text{B.13})$$

Simplificando la ecuación (B.13) se obtiene

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 \quad (\text{B.14})$$

Considerando que  $\Omega_1^2 = A - B$  y  $\Omega_2^2 = A + B$ . En donde

$$A = \frac{(\beta q^2 + q^2 + 1)\beta + \mu}{\beta^2 + (2\mu + 2)\beta + 2\mu} \quad (\text{B.15})$$

$$B = \frac{\sqrt{(\beta^4 + 2\beta^3 + \beta^2)q^4 - [\beta\mu + (2\mu + 2)\beta^2]2q^2 + (\beta + \mu)^2}}{\beta^2 + (2\mu + 2)\beta + 2\mu} \quad (\text{B.16})$$

Entonces al sustituir tales consideraciones

$$A - B = A + B \quad (\text{B.17})$$

Se obtiene

$$-2B = 0 \quad (\text{B.18})$$

Al sustituir la ecuación (B.16) en (B.18) se origina la ecuación para obtener la variable adimensional  $q_{\text{óptima}}$ . Por tanto, se obtiene

$$(\beta^4 + 2\beta^3 + \beta^2)q^4 - [\beta\mu + (2\mu + 2)\beta^2]2q^2 + (\beta + \mu)^2 = 0 \quad (\text{B.19})$$

Resolviendo para  $q^2$

$$q_{1,2}^2 = \frac{(1 + \mu)\beta + \mu \mp \sqrt{-\beta^4 - 2\mu\beta^3 - 2\beta^3 - 2\mu\beta^2}}{\beta(\beta + 1)^2} \quad (\text{B.20})$$

Dado que  $0 \leq \beta \leq 1$  y que  $\mu, q$  solo pueden tomar valores reales positivos y no números complejos. La ecuación (B.20) se reduce a

$$q_{1,2}^2 = \frac{(1 + \mu)\beta + \mu}{\beta(\beta + 1)^2} \quad (\text{B.21})$$

Se concluye que  $q_1^2 = q_2^2$ . Por tanto, la ecuación (B.21) se puede representar mediante la siguiente expresión matemática.

$$q(\mu, \beta) = \sqrt{\frac{(1 + \mu)\beta + \mu}{\beta(\beta + 1)^2}} \quad (\text{B.22})$$

Para poder encontrar la correlación que existe entre la variable adimensional  $\mu$  y  $\beta$  se debe utilizar la herramienta matemática “*derivada direccional*”. Posteriormente, igualar a cero la ecuación resultante para encontrar los máximos y mínimos globales o locales. Por tanto, la ecuación (B.22) puede escribirse de la siguiente manera.

$$\frac{\partial q(\mu, \beta)}{\partial \mu} + \frac{\partial q(\mu, \beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Realizando las derivadas parciales de la ecuación (B.23) se obtiene

$$\frac{1}{\beta(1+\beta)} + \frac{1+\mu}{\beta(1+\beta)^2} - \frac{(1+\mu)\beta + \mu}{\beta^2(1+\beta)^2} - \frac{2[(1+\mu)\beta + \mu]}{\beta(1+\beta)^3} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Resolviendo para  $\mu$  se obtiene la variable adimensional  $\mu_{\text{óptima}}$  dada por la siguiente expresión matemática.

$$\mu_{\text{óptima}} = \frac{\beta(\beta^2 + 1)}{\beta(3 + 2\beta) + 1} \quad (\text{B.25})$$

Al sustituir la ecuación (B.25) en (B.22) se obtiene la variable adimensional  $q_{\text{óptima}}$  dada por la siguiente expresión matemática.

$$q_{\text{óptima}} = \sqrt{\frac{(2+\beta)\beta + 2}{(2\beta + 1)(1+\beta)^2}} \quad (\text{B.26})$$

Por otra parte, es posible representar la razón de frecuencia forzada  $\Omega$  en términos de una sola variable adimensional sustituyendo  $\mu_{\text{óptima}}$  por  $\mu$  y  $q_{\text{óptima}}$  por  $q$  en la ecuación (B.12) y simplificando mediante Maple Soft se obtiene

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{(4\beta^2 + 5\beta + 4) \mp \sqrt{\beta(4\beta^2 + 5\beta + 4)(2\beta + 1)}}{(4\beta^2 + 5\beta + 4)(\beta + 1)} \quad (\text{B.27})$$

Para encontrar el factor de amortiguamiento óptimo  $\zeta_2$  se debe hacer lo más plana posible la curva de respuesta en frecuencia normalizada  $H_1$  en los picos de resonancia tal como se muestra en la Figura 4.3. Por lo cual, se debe realizar la siguiente operación matemática.

$$\frac{\partial H_1^2}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (\text{B.28})$$

La función  $H_1^2$  se puede escribir como una fracción parcial propia en términos de  $\Omega^2$  de la siguiente manera.

$$H_1^2 = \frac{n}{m} = \frac{(\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2)^2 + (2\zeta_2\beta q\Omega)^2}{\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}^2 + (2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2} \quad (\text{B.29})$$

Desarrollando la ecuación (B.28) se obtiene

$$\frac{\partial H_1^2}{\partial \Omega^2} = m \frac{\partial n}{\partial \Omega^2} - n \frac{\partial m}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (\text{B.30})$$

De lo anterior el primer miembro de la ecuación (B.30) es

$$\frac{\partial n}{\partial \Omega^2} = -2(\beta + \mu)[\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2] + (2\zeta_2\beta q)^2 \quad (\text{B.31})$$

El segundo miembro de la misma ecuación puede representarse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial \Omega^2} = & 2\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 + \beta q^2\}\{2(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^2 \\ & - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\} - 2(1 + \beta)(2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2] \\ & + (2\zeta_2\beta q)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Al sustituir las ecuaciones (B.31) y (B.32) en (B.30) y considerando que  $n = 1$  y  $m = [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2$  de la función  $H_\infty$  se obtiene.

$$\begin{aligned} [1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2 \{ & -2(\beta + \mu)[\beta q^2 - (\beta + \mu)\Omega^2] + (2\zeta_2\beta q)^2\} \\ & - \{2\{(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^4 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\Omega^2 \\ & + \beta q^2\}\{2(\beta + \mu + \mu\beta)\Omega^2 - [(\beta + \mu) + (\beta + \beta^2)q^2]\} \\ & - 2(1 + \beta)(2\zeta_2\beta q\Omega)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2] \\ & + (2\zeta_2\beta q)^2[1 - (1 + \beta)\Omega^2]^2\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

De lo anterior se puede ver que la ecuación (B.33) produce dos soluciones para  $\zeta_2$ . Estas soluciones representan el amortiguamiento en las frecuencias de resonancia tanto de  $\Omega_1^2$  como  $\Omega_2^2$ . Al sustituir  $\mu_{\text{óptima}}$  por  $\mu$ ,  $q_{\text{óptima}}$  por  $q$  y  $\Omega_{1,2}^2$  por  $\Omega^2$  se obtiene el factor de amortiguamiento  $\zeta_2$  en la primera y segunda frecuencia de resonancia dada por la siguiente expresión matemática.

$$\begin{aligned} \zeta_2^2 \Omega_{1,2}^2 \\ = \frac{\left\{ \left( 16\beta^{\frac{9}{2}} + 28\beta^{\frac{7}{2}} + 26\beta^{\frac{5}{2}} + 8\beta^{\frac{3}{2}} \right) \mp (7\beta^3 + 8\beta^2 + 6\beta) \left( \sqrt{8\beta^3 + 14\beta^2 + 13\beta + 4} \right) \right\}}{\left( 32\beta^{\frac{9}{2}} + 88\beta^{\frac{7}{2}} + 108\beta^{\frac{5}{2}} + 68\beta^{\frac{3}{2}} + 16\beta^{\frac{1}{2}} \right) \mp (16\beta^3 + 36\beta^2 + 36\beta + 16) \left( \sqrt{8\beta^3 + 14\beta^2 + 13\beta + 4} \right)} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Para obtener la variable adimensional óptima  $\zeta_2$  Den Hartog sugiere calcular el promedio del valor de amortiguamiento en las frecuencias de resonancia. Por tanto, el valor promedio puede escribirse de la siguiente manera.

$$\zeta_2^2 \text{óptima} = \frac{\zeta_2^2 \Omega_1^2 + \zeta_2^2 \Omega_2^2}{2} \quad (\text{B.35})$$

Sustituyendo la ecuación (B.34) en (B.35) se obtiene

$$\zeta_2 \text{óptima} = \sqrt{\frac{3\beta}{8(1 + \beta)}} \quad (\text{B.36})$$

Por otra parte, al sustituir  $\mu_{\text{óptima}}$  por  $\mu$ ,  $q_{\text{óptima}}$  por  $q$ ,  $\zeta_{2\text{óptima}}$  por  $\zeta_2$  y  $\Omega_{1,2}^2$  por  $\Omega$  en la ecuación (B.1) se obtiene la respuesta en frecuencia normalizada  $H_1$  en términos de una sola variable adimensional tal como se muestra en la siguiente ecuación.

$$H_{1\Omega_{1,2}^2}(\beta) = \sqrt{\frac{4\beta^2 + 5\beta + 4}{(2\beta + 1)}} \quad (\text{B.37})$$

Adicionalmente, es posible representar la respuesta en frecuencia normalizada  $H_2$  en términos de la variable adimensional  $\beta$  usando de manera análoga el método para obtener la ecuación (B.37). Por tanto, se obtiene

$$H_{2\Omega_{1,2}^2}(\beta) = \frac{\sqrt{4\beta^2 + 5\beta + 4}}{\beta\sqrt{2\beta + 1}} \sqrt{\frac{l}{p}} \quad (\text{B.38})$$

En donde

$$l = \left(3\beta^{\frac{7}{2}} + 2\beta^{\frac{5}{2}} + 6\beta^{\frac{3}{2}} - 4\beta^{\frac{1}{2}}\right) \left(\sqrt{(4\beta^2 + 5\beta + 4)(2\beta + 1)}\right) \mp (14\beta^5 + 39\beta^4 + 86\beta^3 + 82\beta^2 + 52\beta + 8) \quad (\text{B.39})$$

$$p = \left(15\beta^{\frac{5}{2}} + 18\beta^{\frac{3}{2}} + 14\beta^{\frac{1}{2}}\right) \left(\sqrt{(4\beta^2 + 5\beta + 4)(2\beta + 1)}\right) \mp (46\beta^4 + 103\beta^3 + 134\beta^2 + 86\beta + 32) \quad (\text{B.40})$$

La ecuación (B.38) representa los picos de resonancia de  $H_2$  en la primera y segunda frecuencia forzada  $\Omega_{1,2}^2$ . La importancia de representar la repuesta en frecuencia normalizada  $H_1$  y  $H_2$  en términos de una sola variable es por consideraciones de diseño. Por otra parte, una de las ventajas principales de estas representaciones matemáticas es la facilidad de obtener el máximo desplazamiento adimensional tanto de la masa  $m_1$  como de la masa  $m_2$  en condiciones de resonancia. Entonces, se concluye que para una relación de masa  $\beta$  dada se obtiene rápidamente los picos de resonancia del sistema mecánico MRI de dos grados de libertad mediante las ecuaciones (B.37) y (B.38).



### Apéndice C: Planos del inersor de doble cremallera

En el diseño mecánico es importante contar con esquemas que desglosen uno a uno los detalles de las piezas que constituyen el prototipo que se desea realizar. El objetivo principal de esto es tener los planos de trabajo sobre los cuales se pueda basar para maquinar cada una de las piezas. El inersor de doble cremallera diseñado cuenta con 5 piezas que se deben de maquinar y las piezas restantes son estándar. A continuación se muestran los planos necesarios que la fabricación del dispositivo.

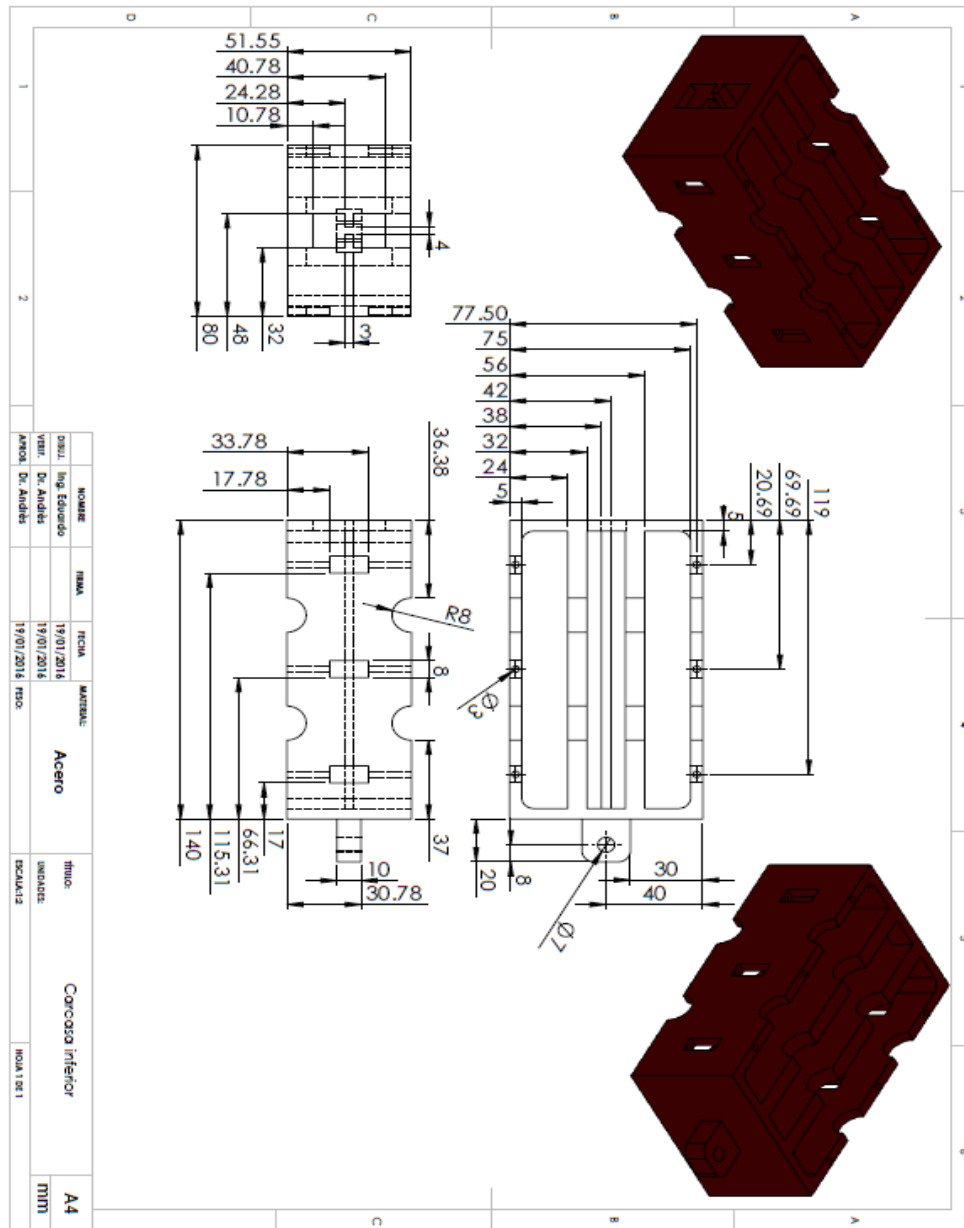


Figura C.1: Carcasa inferior del inersor de doble cremallera.

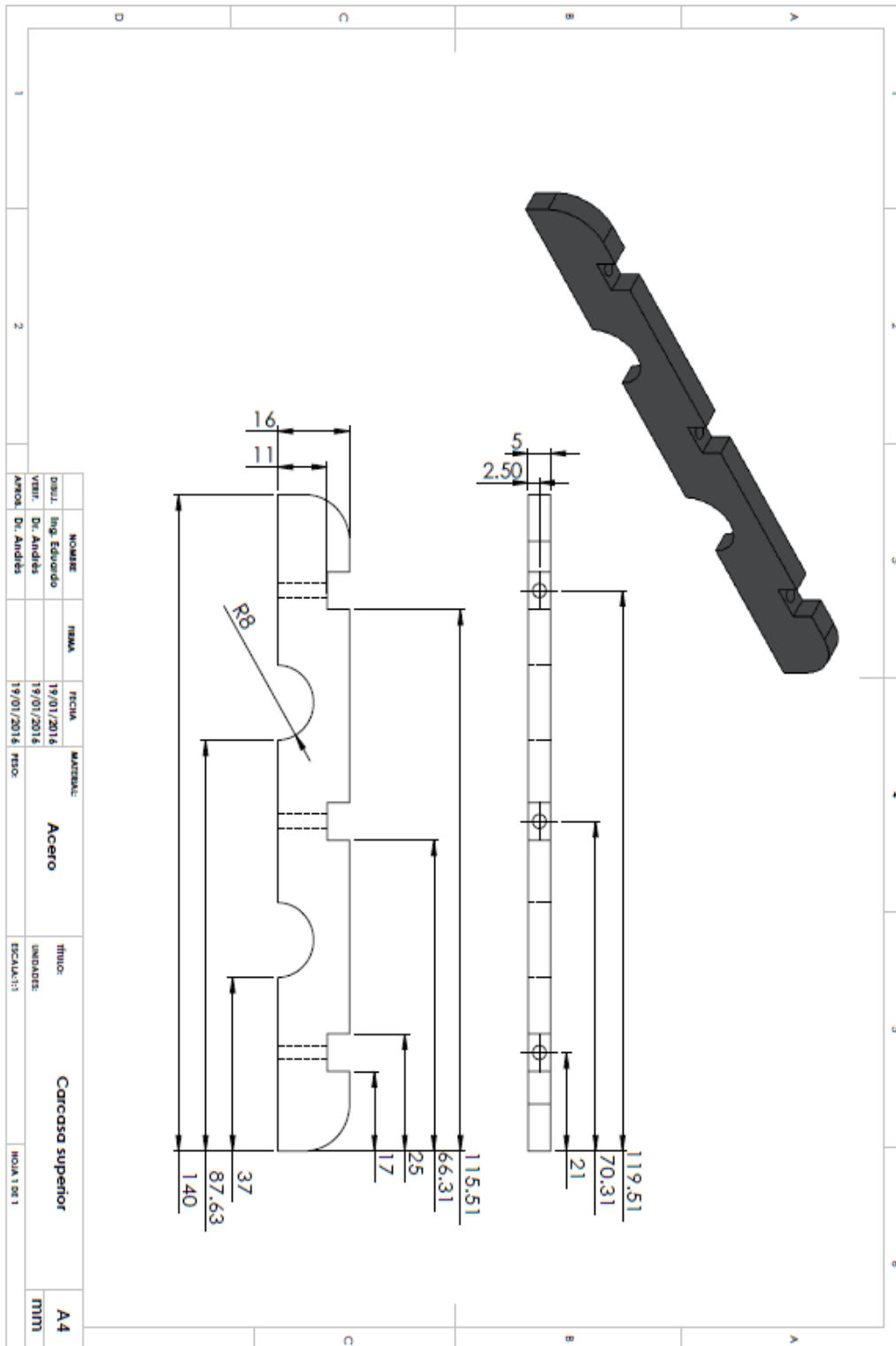


Figura C.2: Carcasa superior del inersor de doble cremallera.

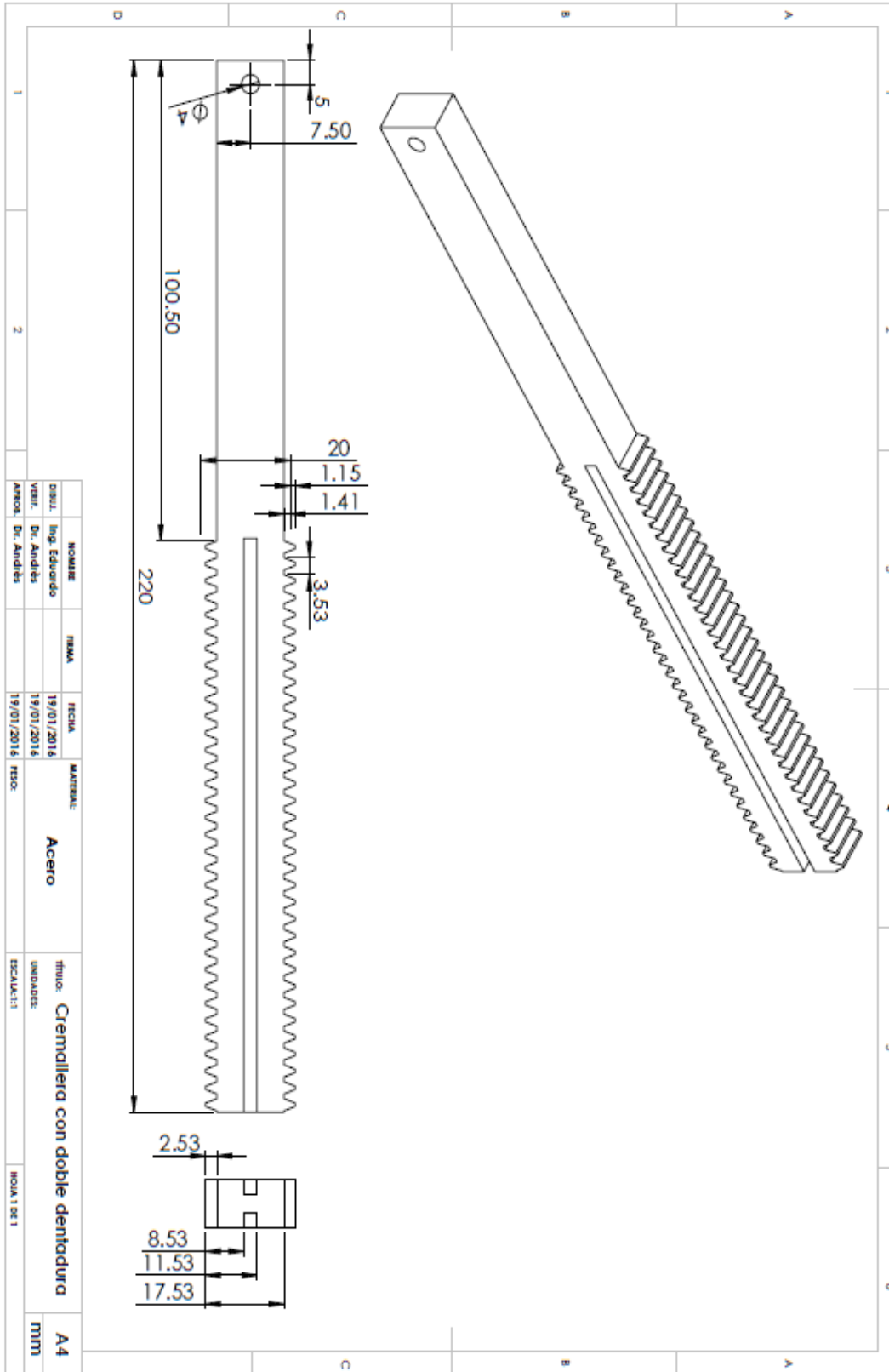


Figura C.3: Cremallera con doble dentadura.

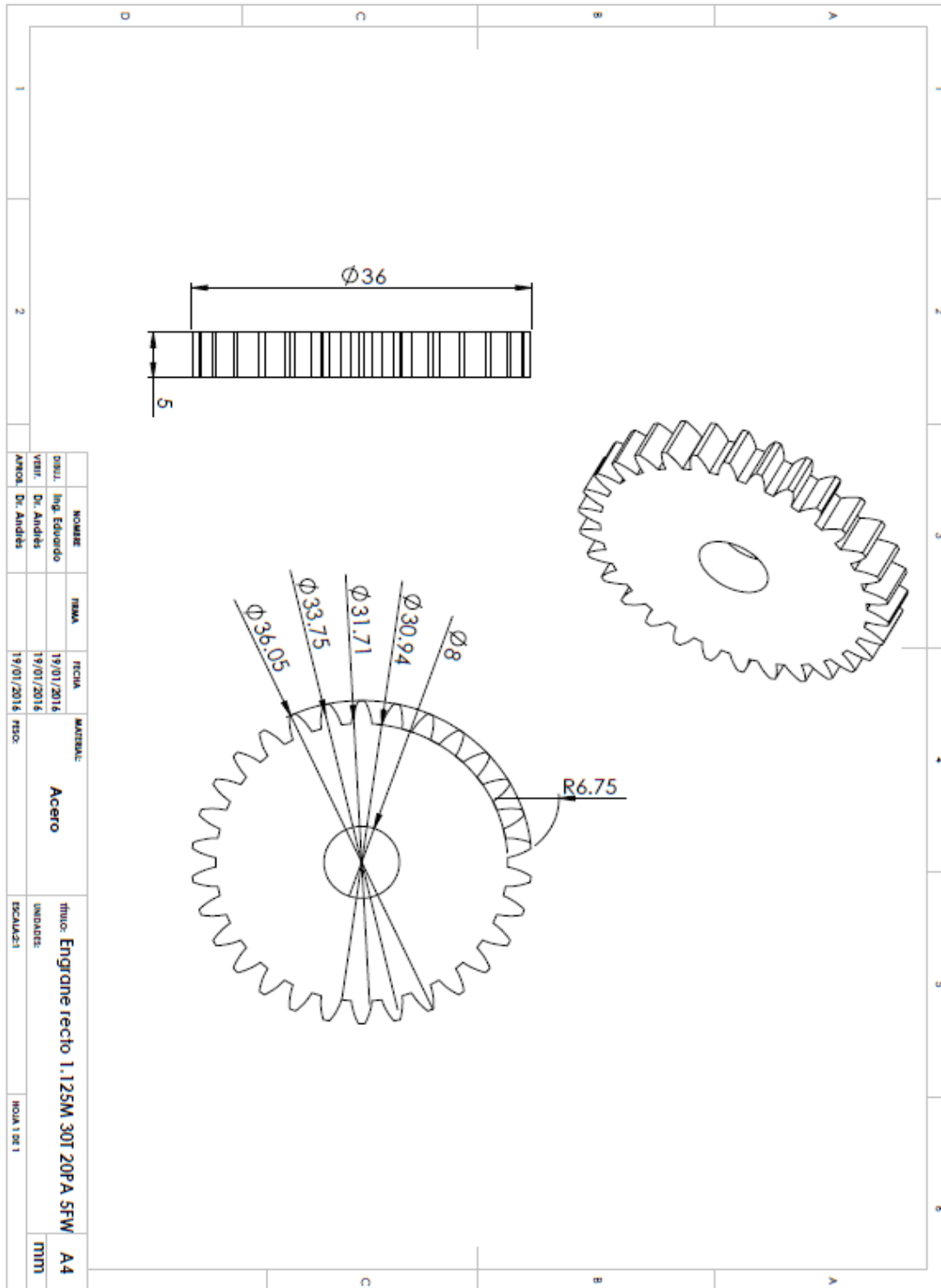


Figura C.4: Engrane recto de 30 dientes.

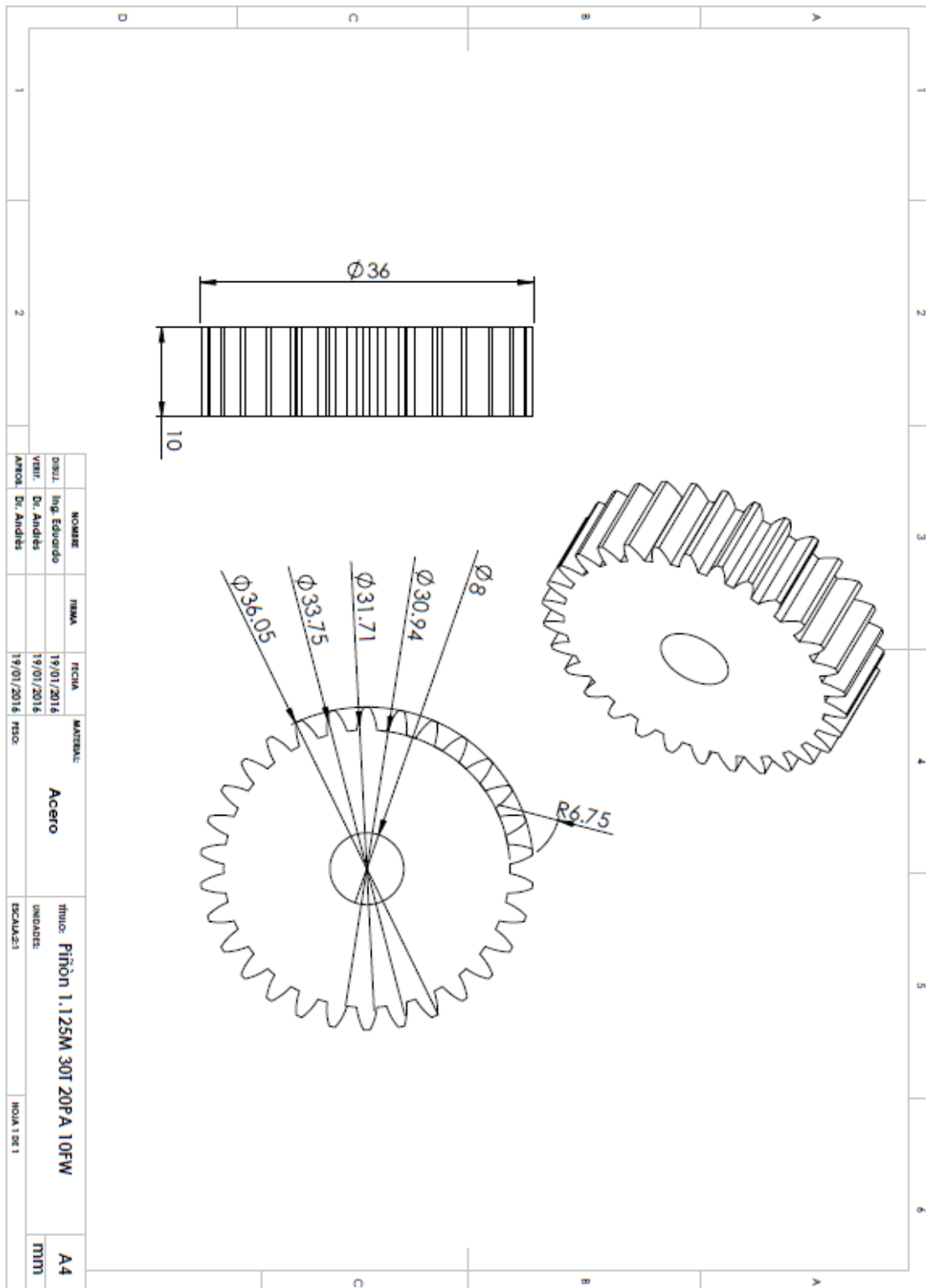


Figura C.5: Piñón de 30 dientes.

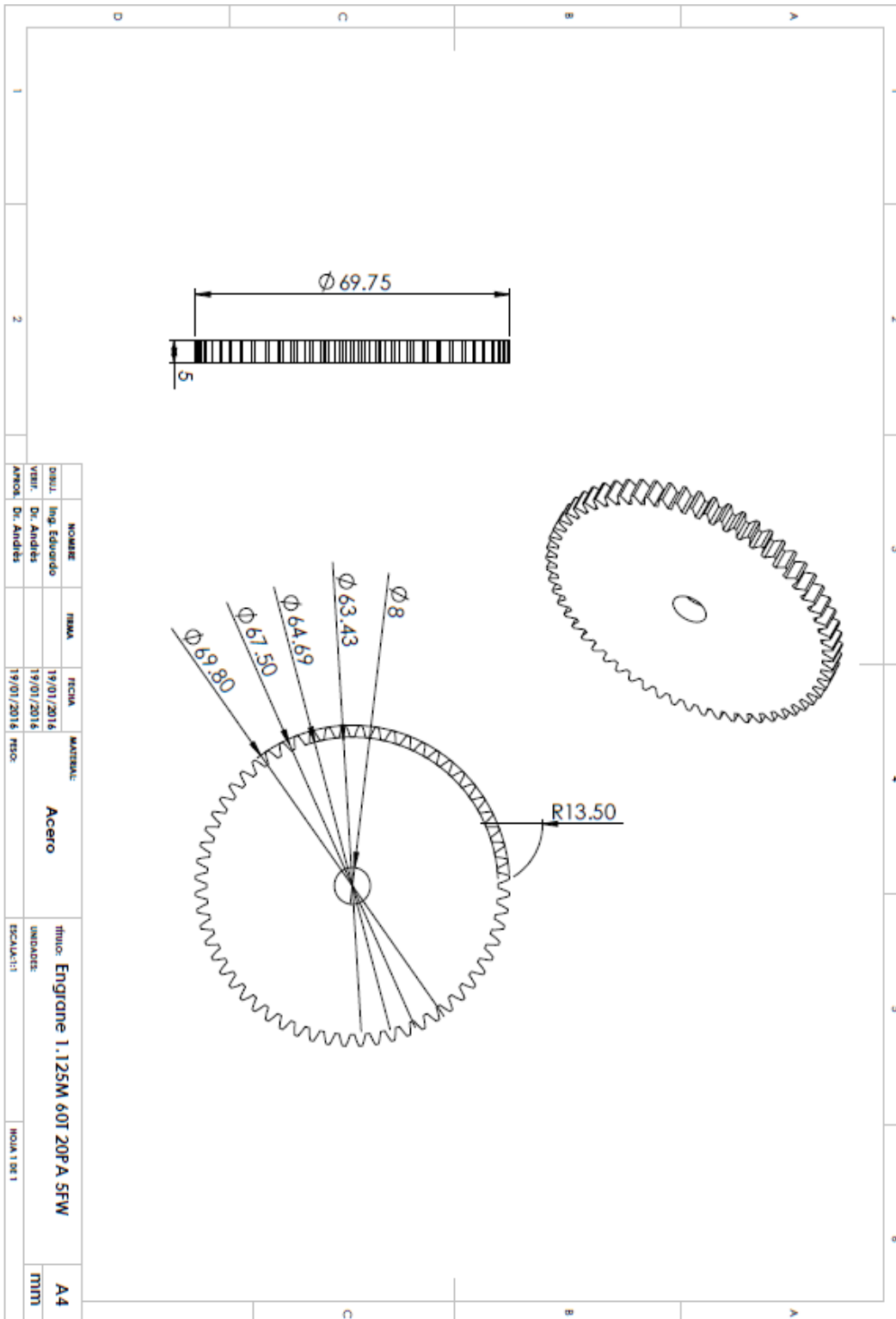


Figura C.6: Engrane recto de 60 dientes.

# Planos del inersor de doble cremallera

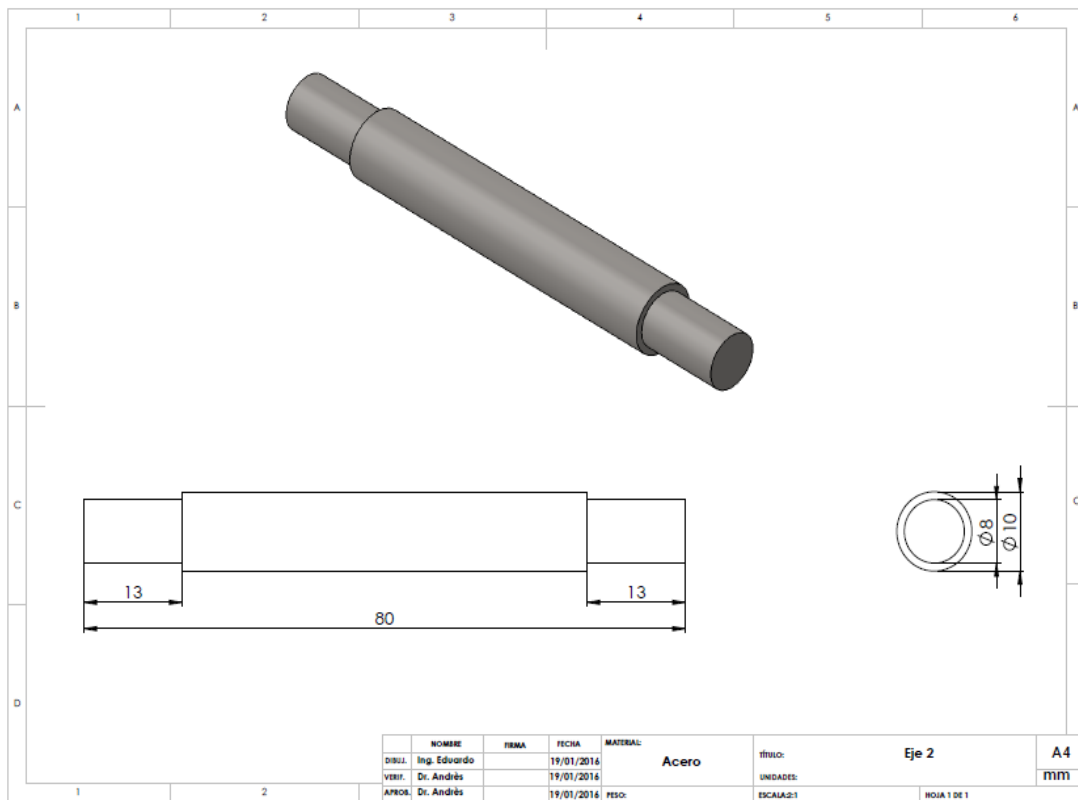
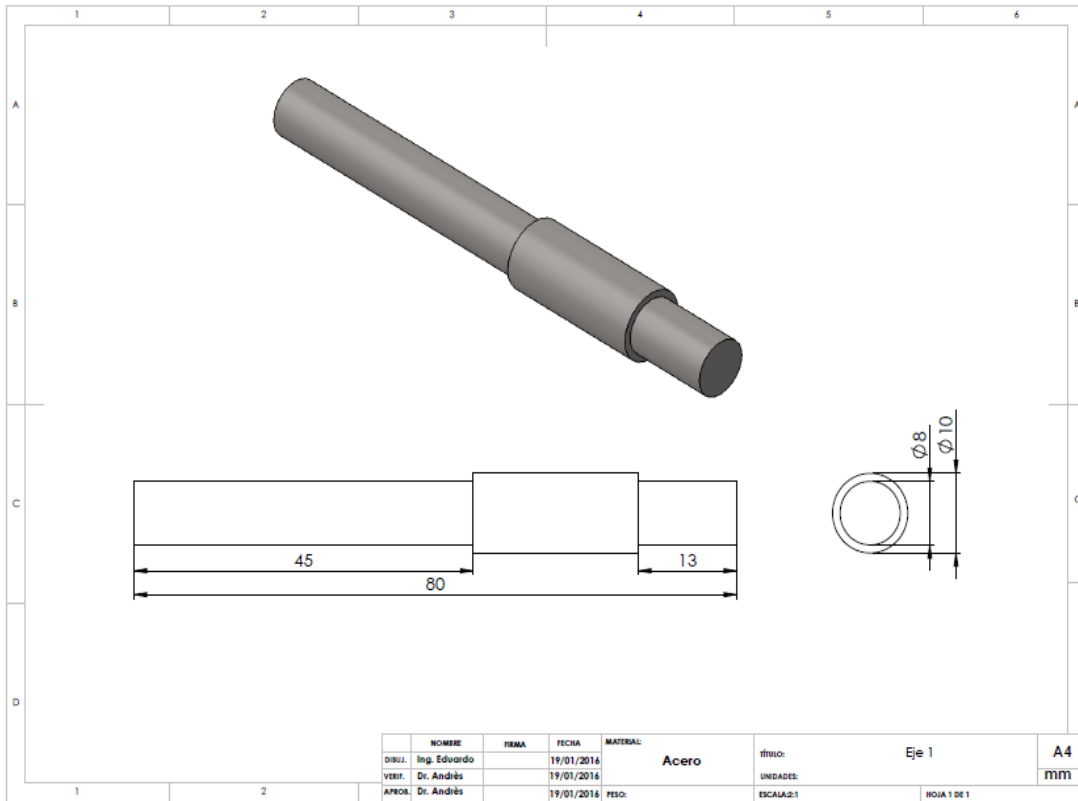


Figura C.7: Eje 1 y 2.

# Planos del inersor de doble cremallera

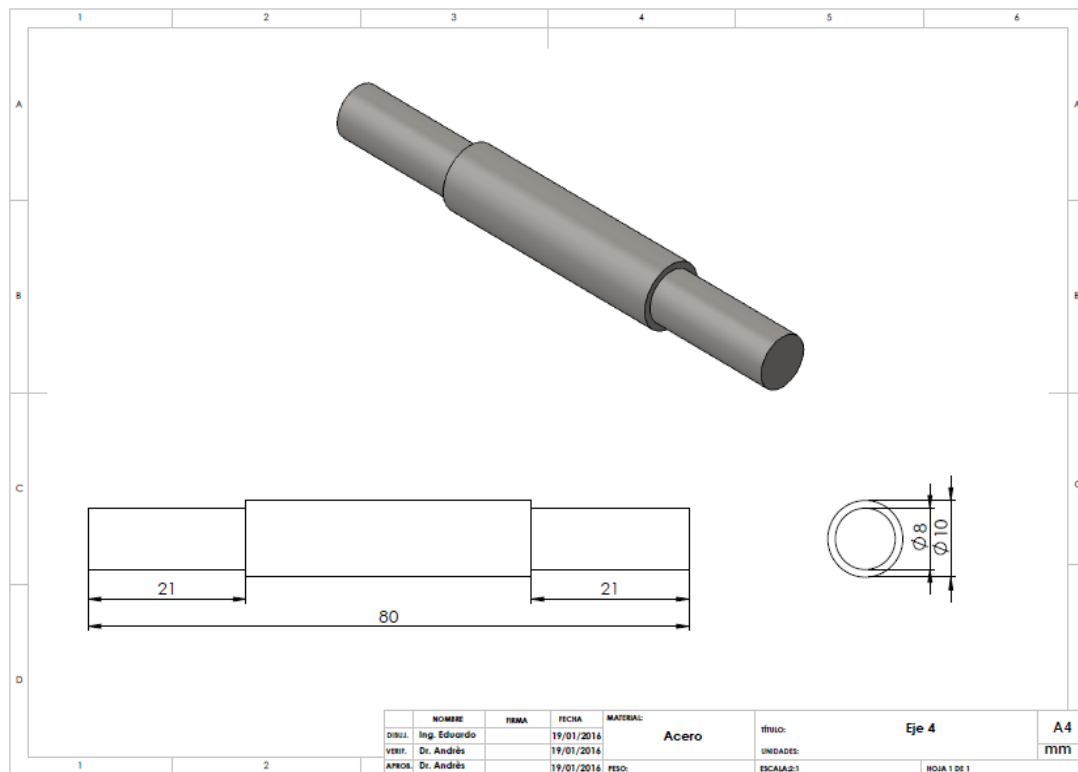
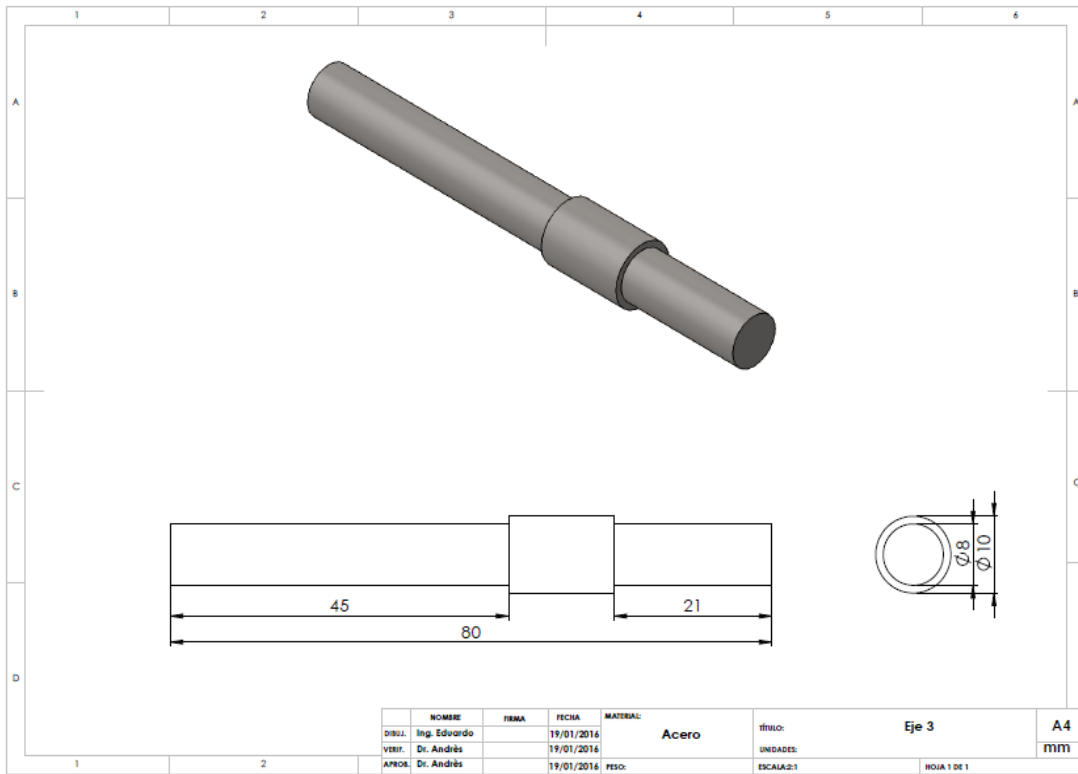


Figura C.8: Eje 3 y 4.



## Planos del inersor de doble cremallera

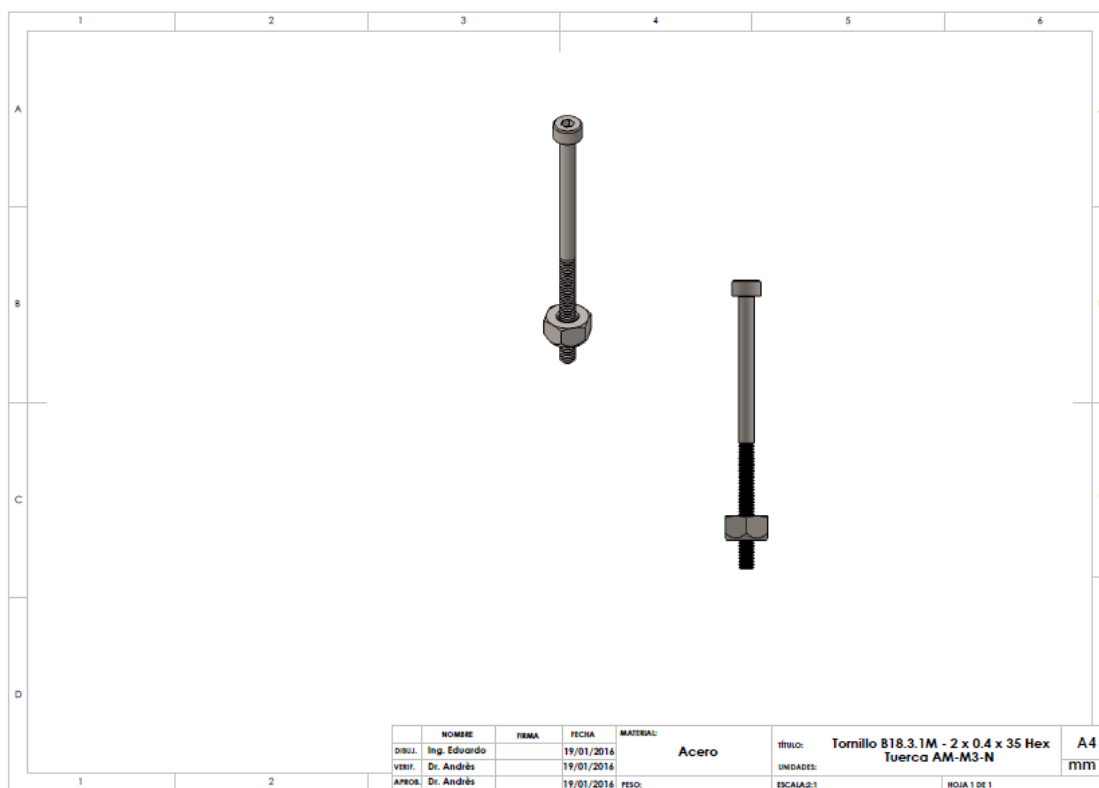
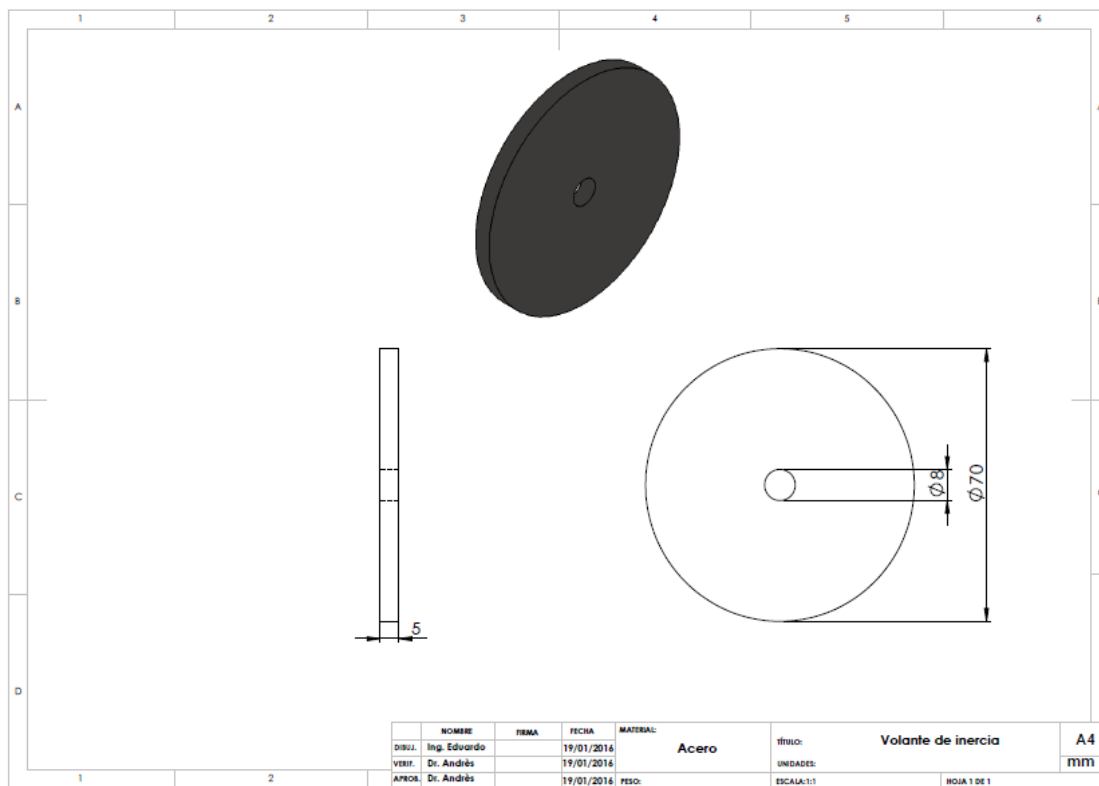


Figura C.9: Volante de inercia y tornillo.

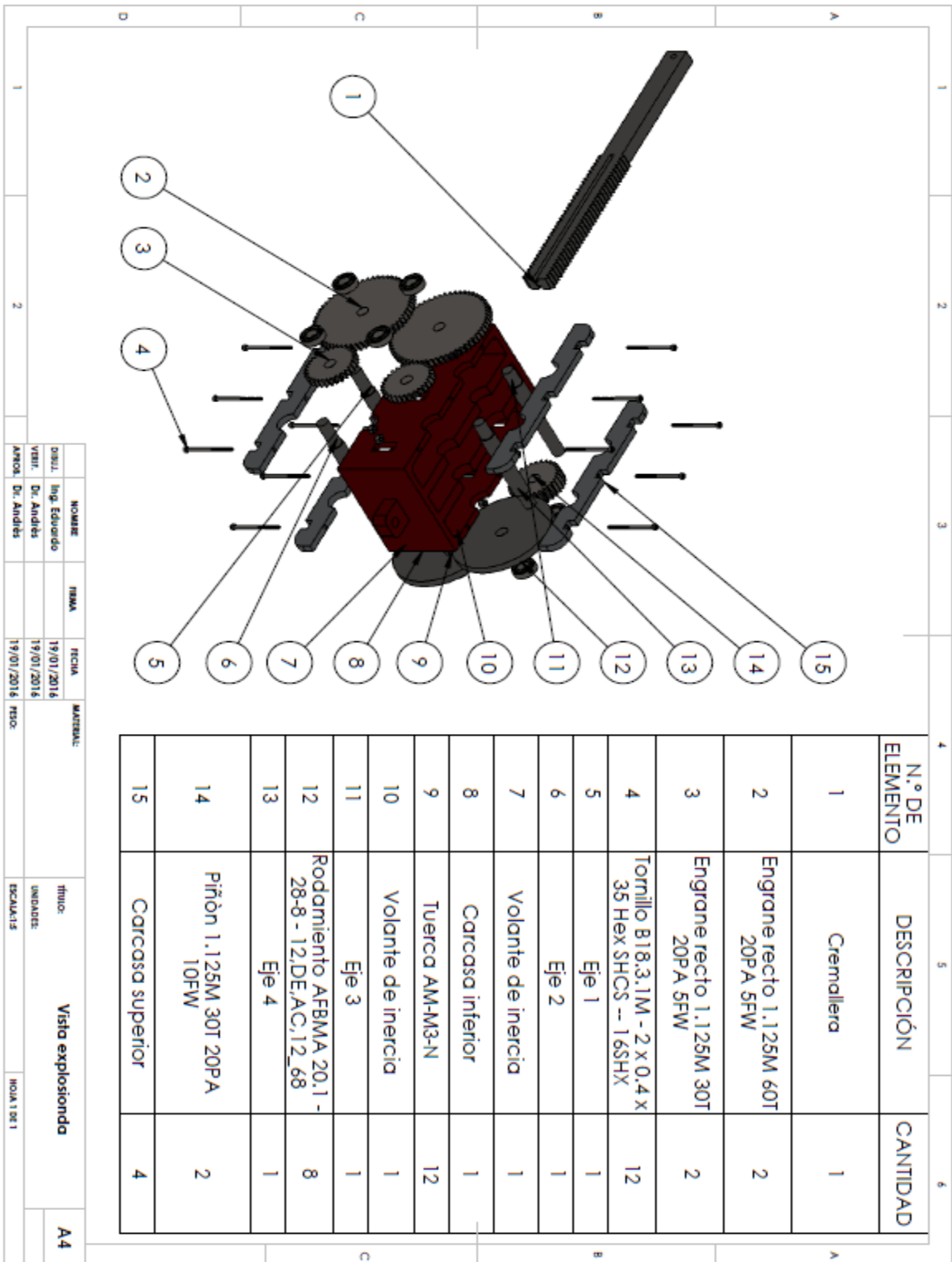


Figura C.10: Vista explosionada del inersor de doble cremallera.

## Apéndice D: Planos de rediseño del inersor

En esta parte se presentan los planos necesarios para poder fabricar el inersor así mismo especificaciones sobre el maquinado de tales partes del dispositivo.

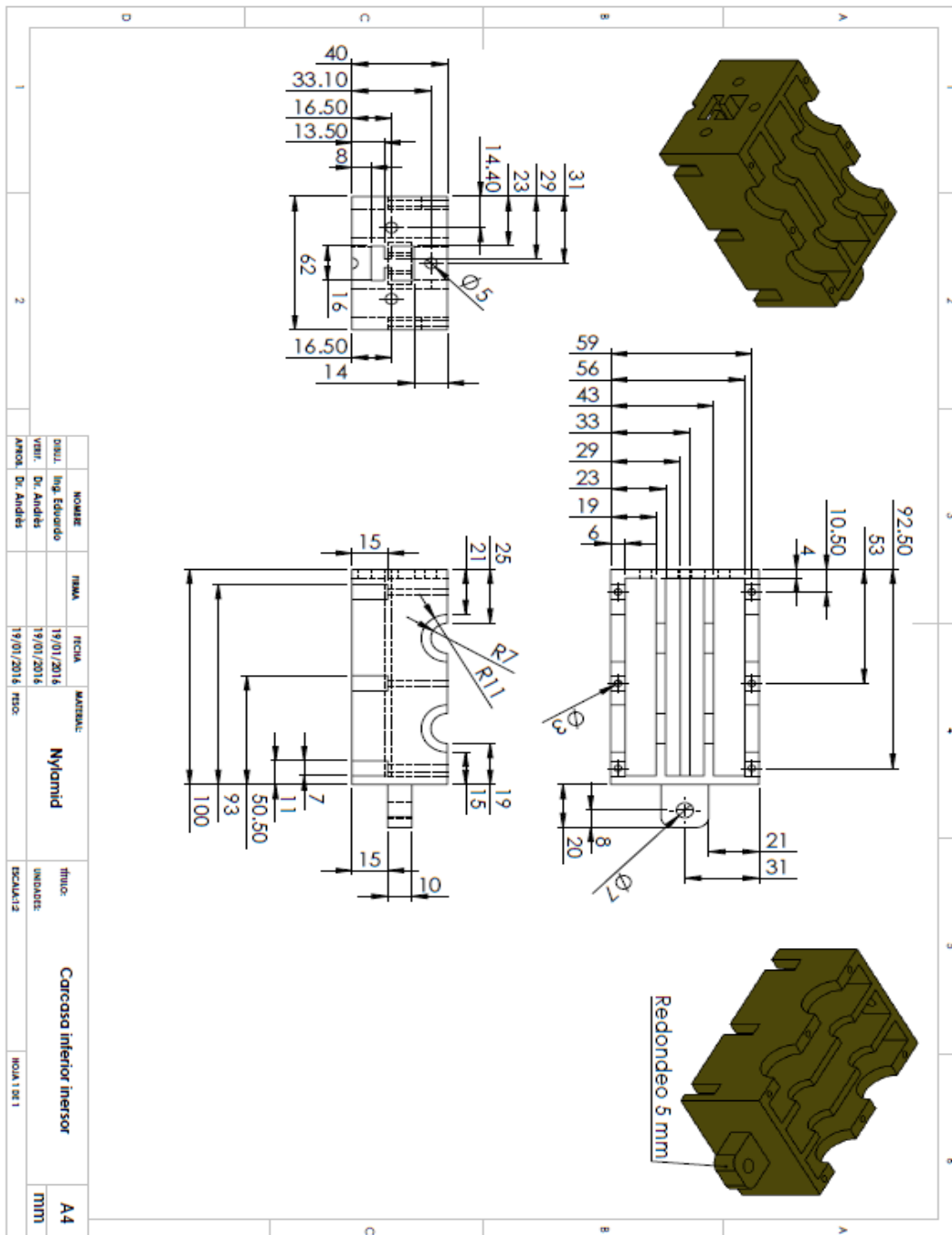


Figura D.1: Carcasa inferior inersor.

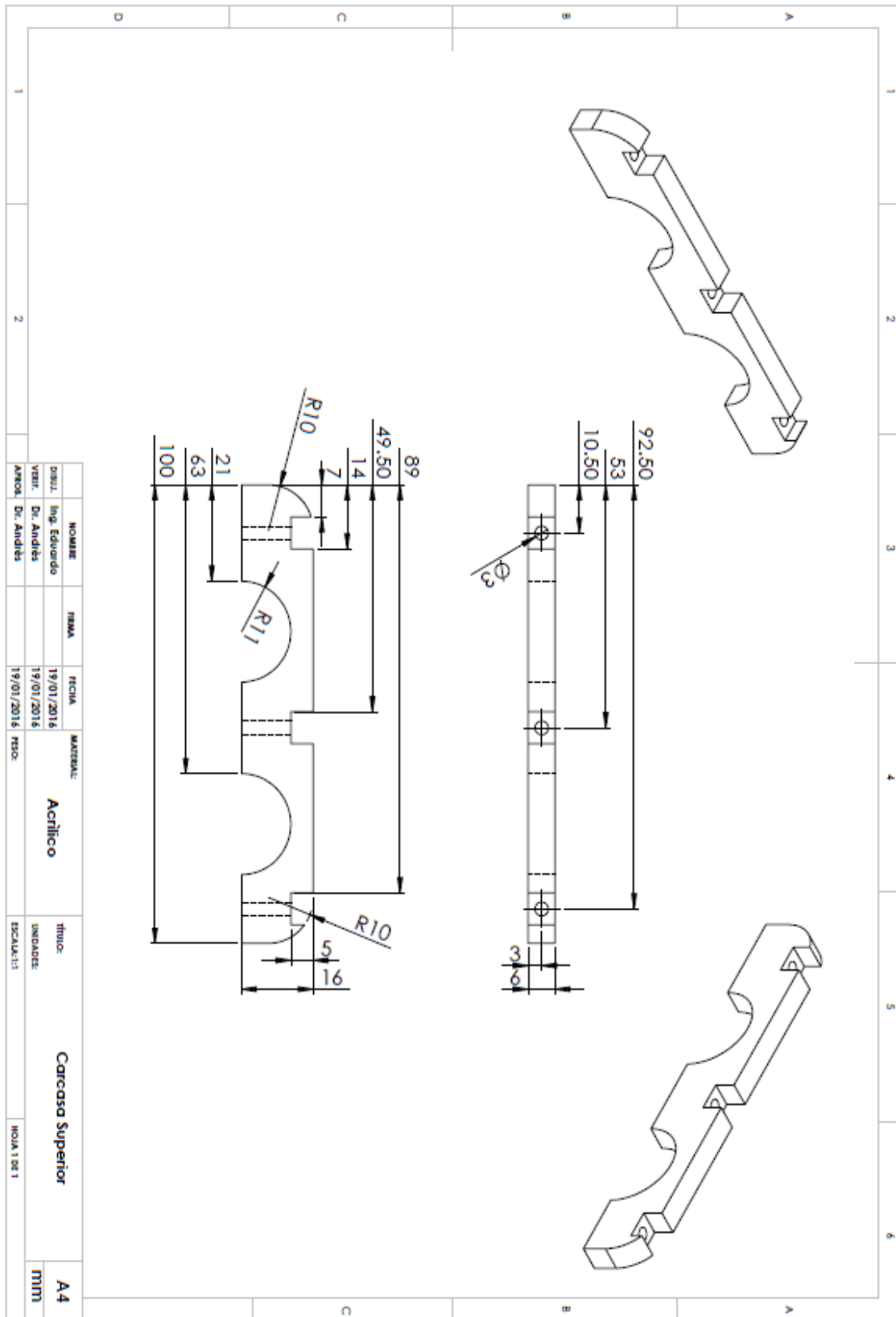


Figura D.2: Carcasa superior.

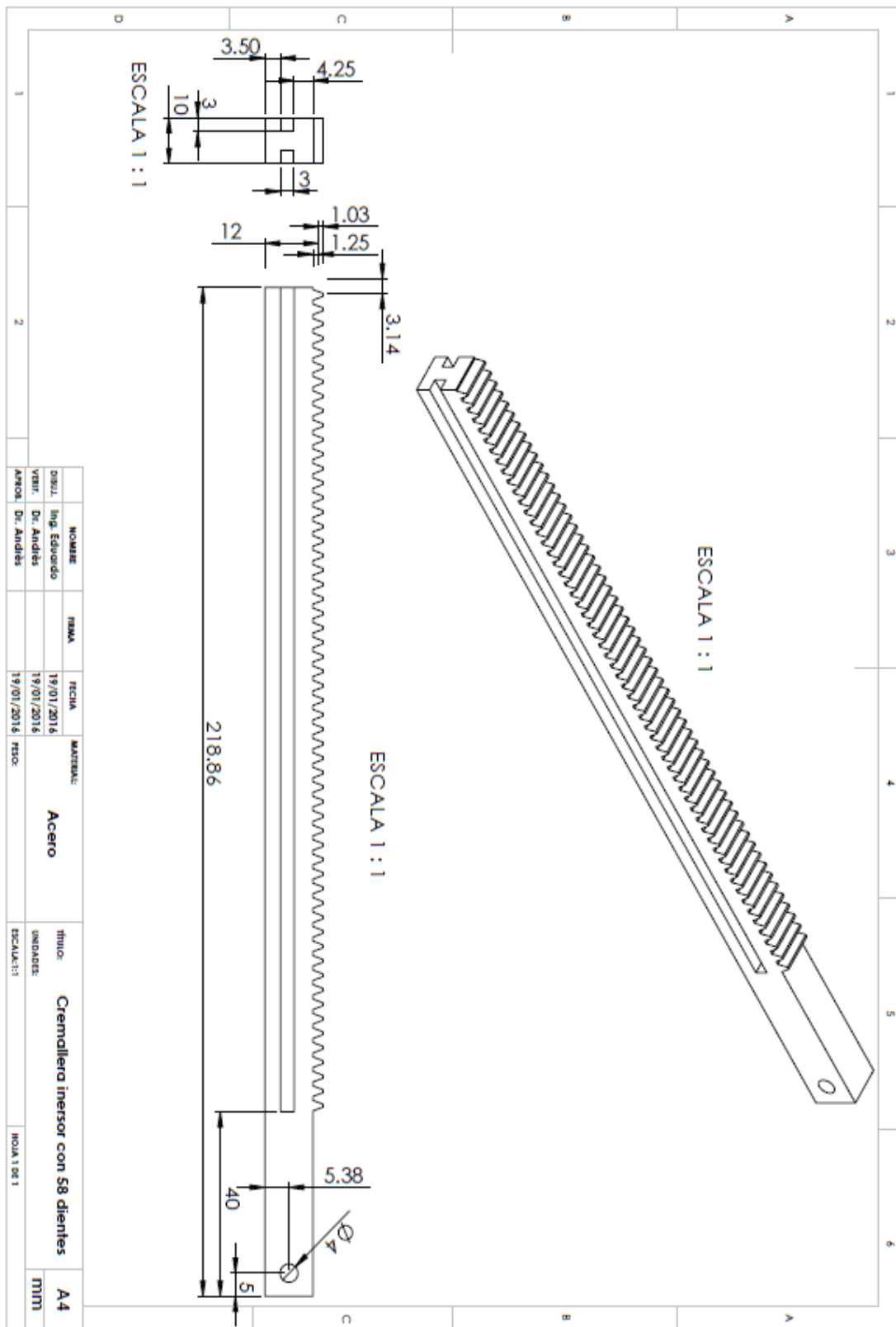


Figura D.3: Cremallera del inersor.

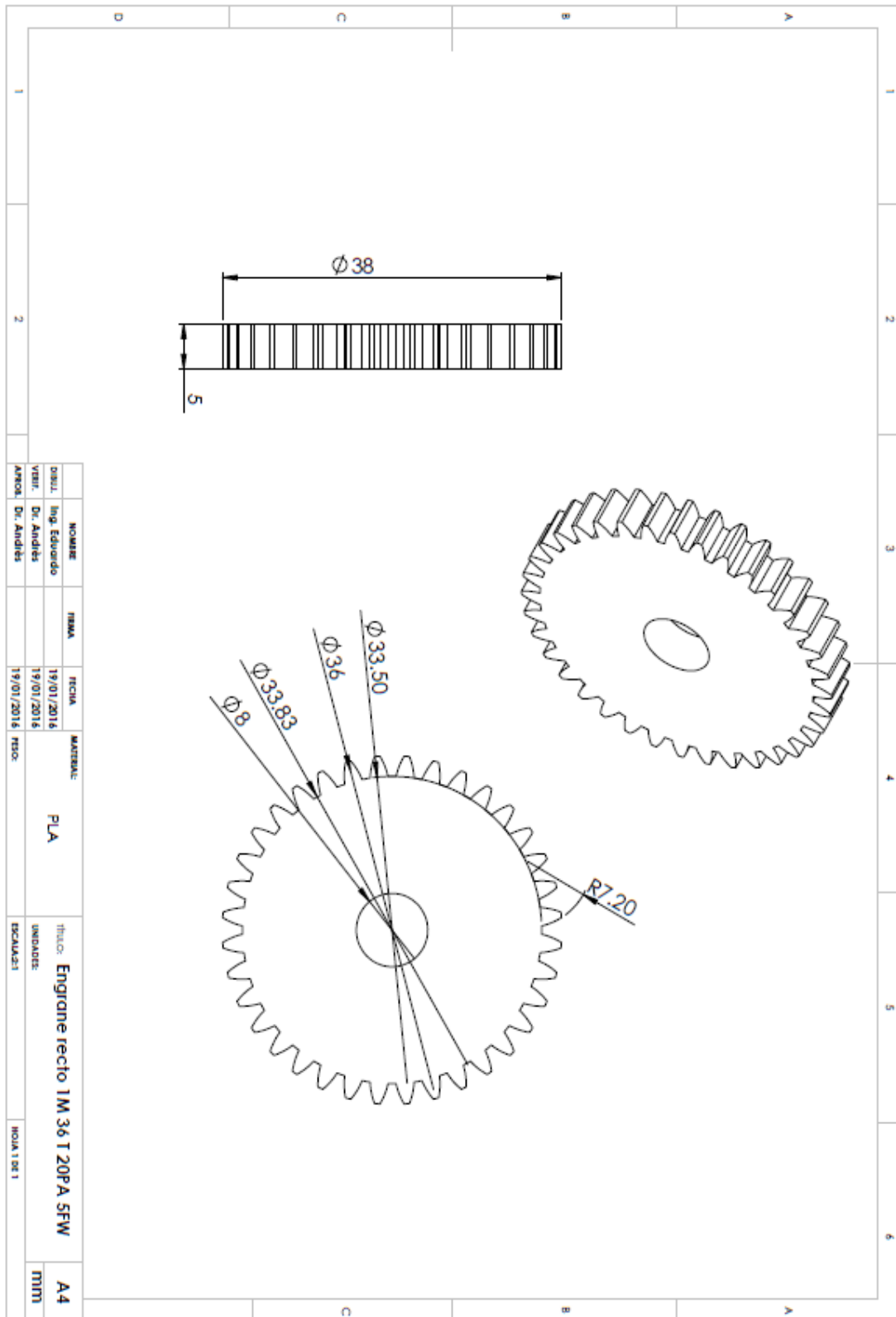


Figura D.4: Engrane recto 36 dientes.

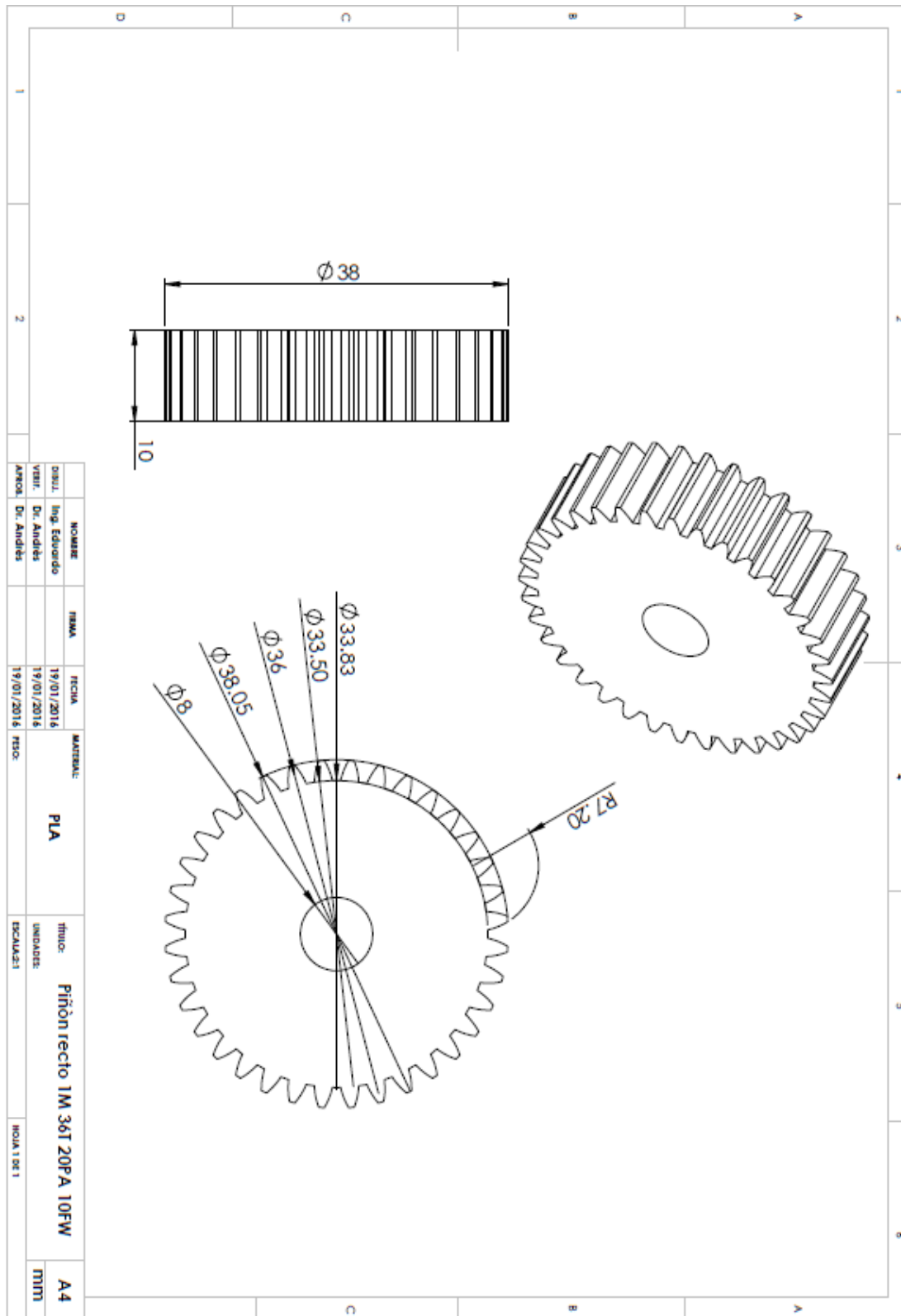


Figura D.5: Piñón 36 dientes.

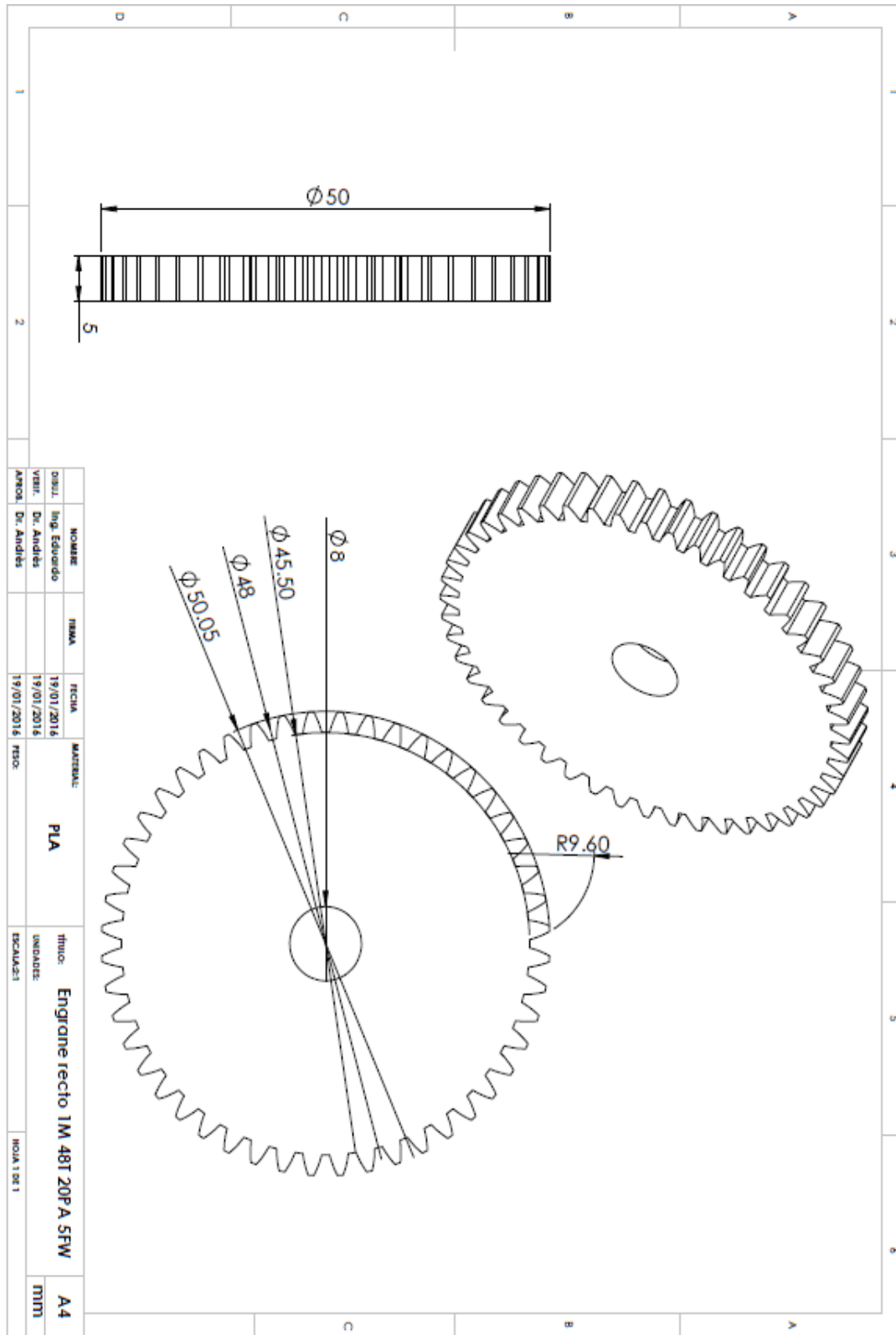


Figura D.6: Engrane recto 48 dientes.



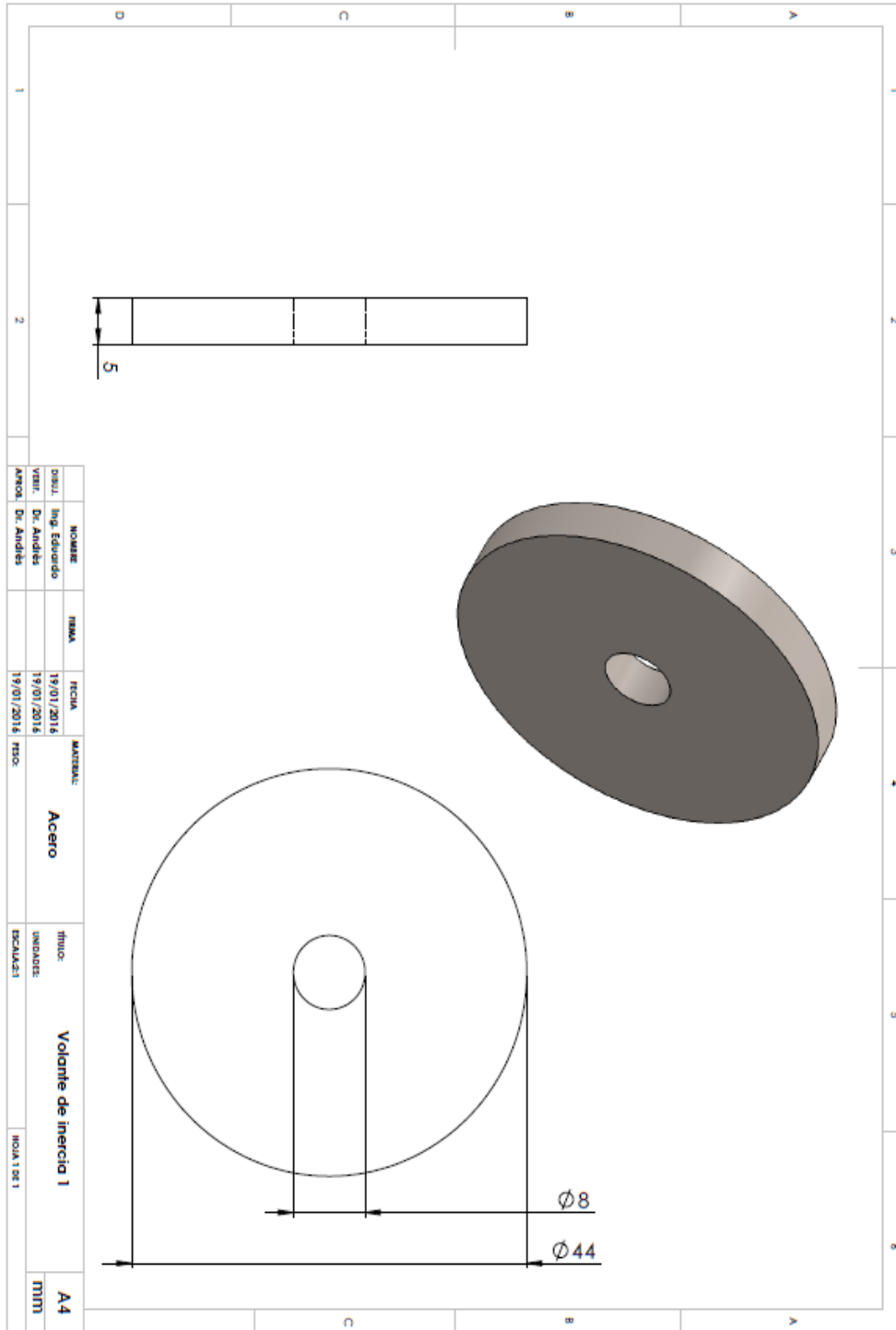


Figura D.7: Volante de inercia 1.

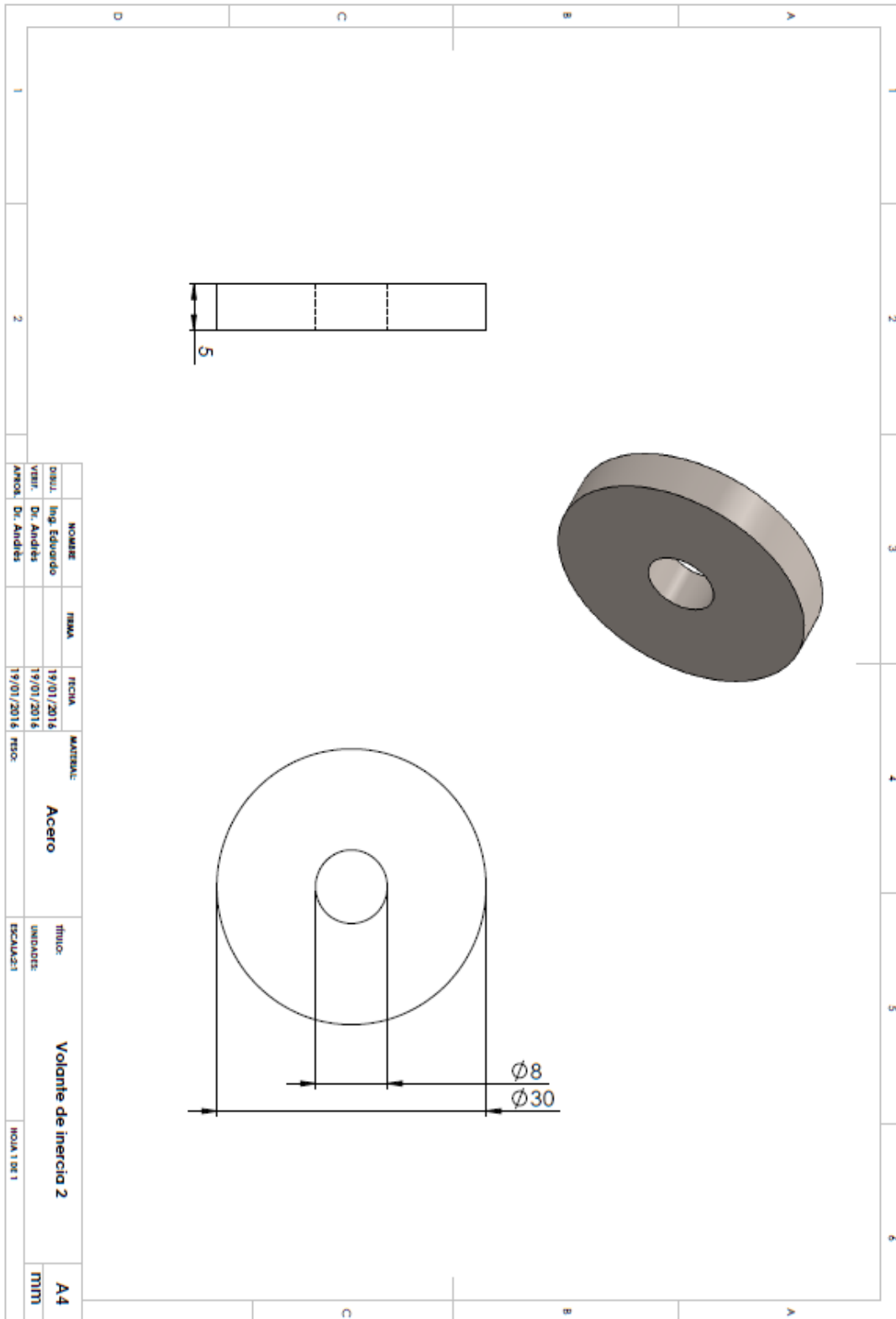


Figura D.8: Volante de inercia 2.

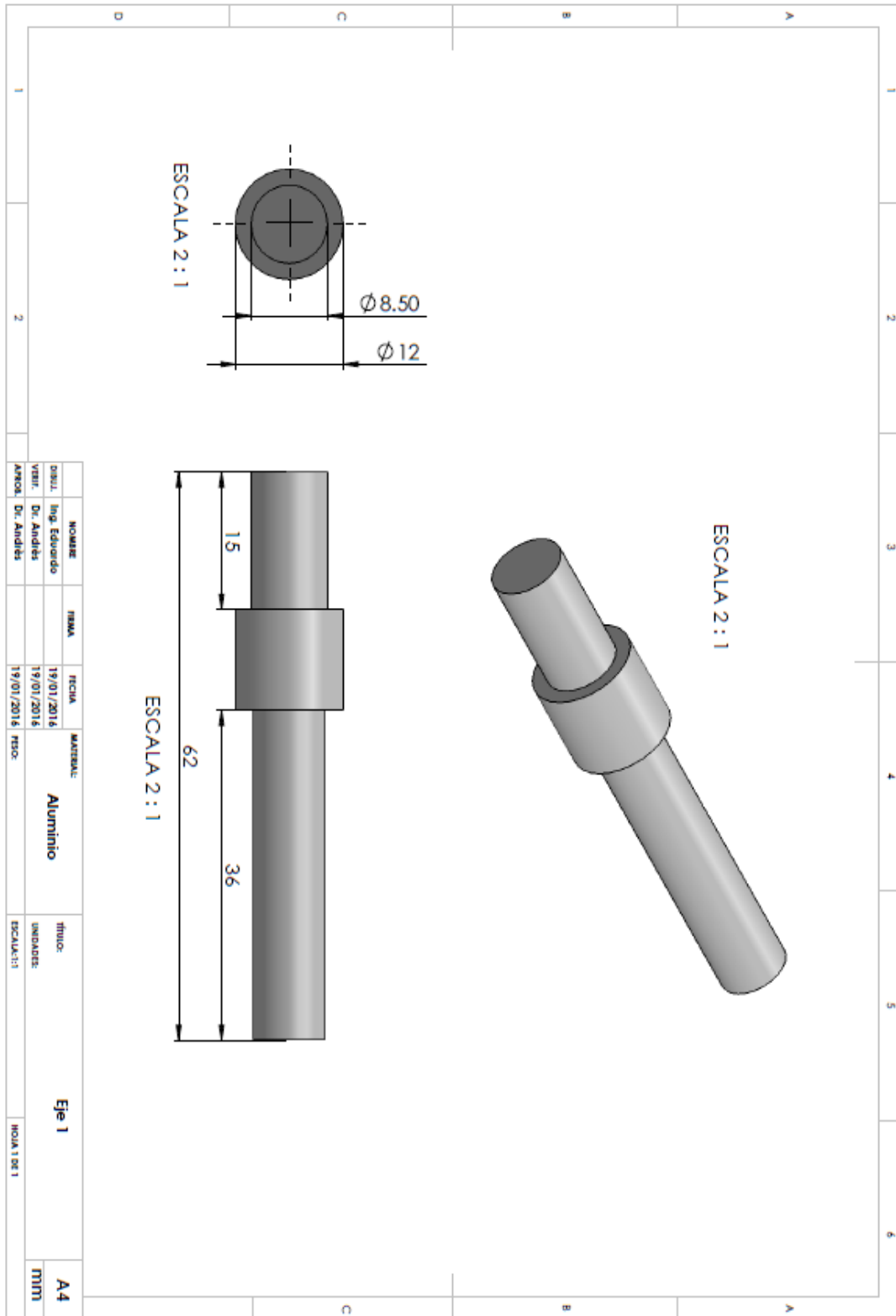


Figura D.9: Eje 1.

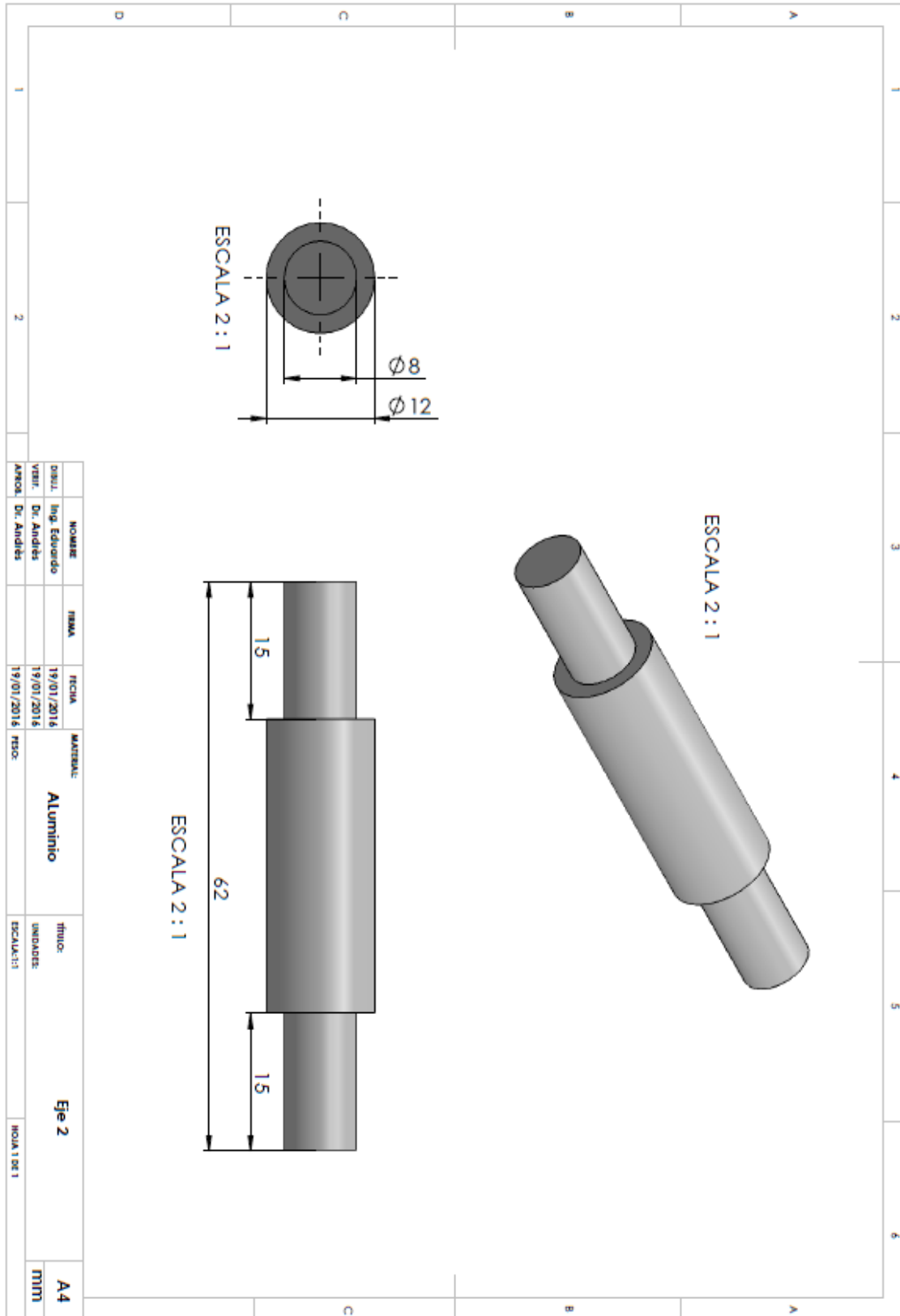


Figura D.10: Eje 2.

# Planos de rediseño del inersor

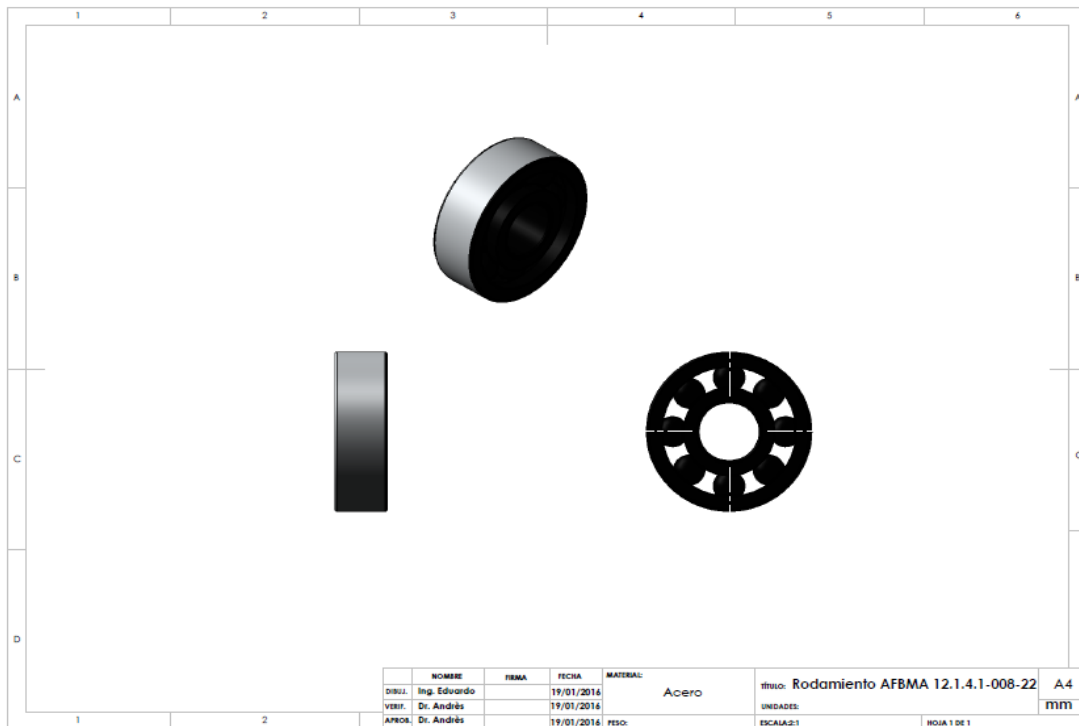
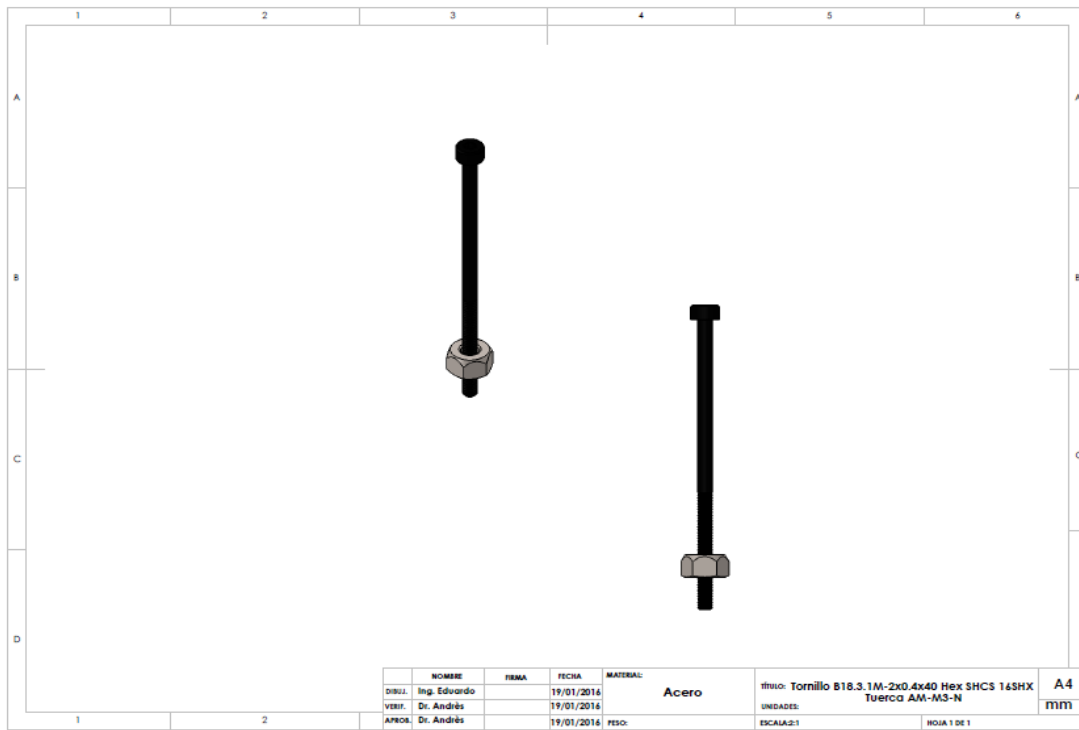


Figura D.11: Tornillo y Rodamientos.

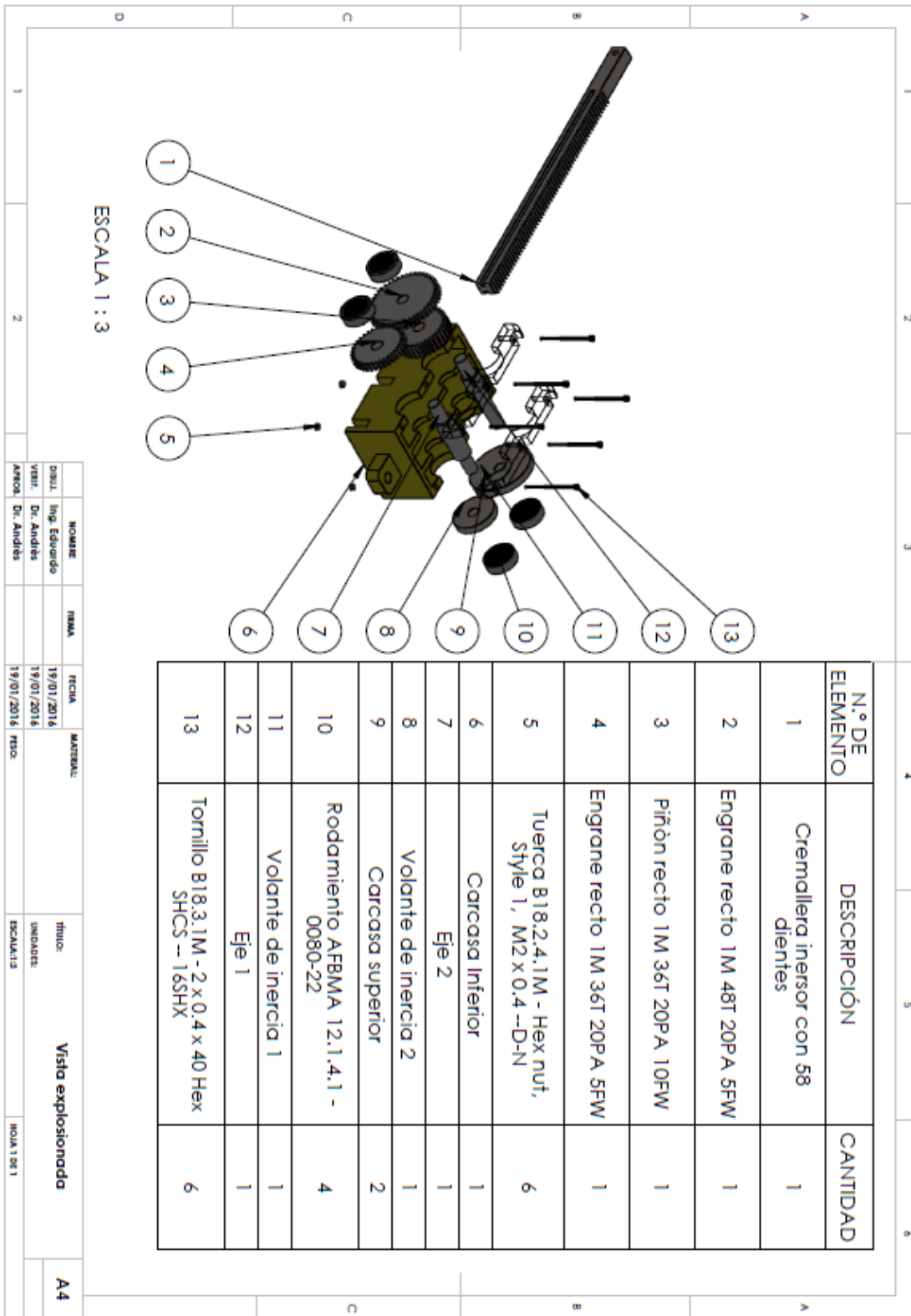


Figura D.12: Vista explosionada del inersor.