



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Análisis del efecto de un inersor en la respuesta
dinámica de un sistema rotor-cojinete

presentada por

Ing. Javier Antonio Pérez Molina

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Jorge Colín Ocampo

Codirector de tesis

Dr. Andrés Blanco Ortega

Cuernavaca, Morelos, México. Diciembre de 2023.



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

30/noviembre/2023
SAC/191/2023
Autorización de
impresión de tesis

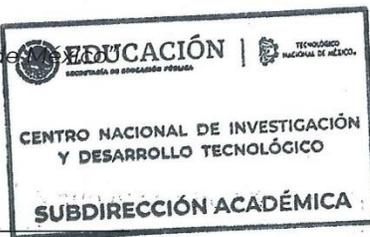
JAVIER ANTONIO PÉREZ MOLINA
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de un sistema rotor-cojinete”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”



CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

C. c. p. Departamento de Ingeniería Mecánica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz

Cuernavaca, Mor., 28/noviembre/2023

OFICIO No. DIM/155/2023
Asunto: Aceptación de documento de tesis
CENIDET-AC-004-M14-OFICIO

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

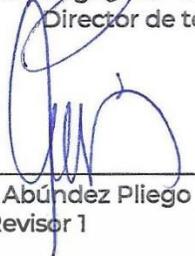
Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Javier Antonio Pérez Molina, con número de control M22CE032, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado “Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de un sistema rotor-cojinete”, y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.



Dr. Jorge Colín Ocampo
Director de tesis



Dr. Andrés Blanco Ortega
Codirector de Tesis



Dr. Arturo Abúndez Pliego
Revisor 1



Dra. Claudia Cortés García
Revisor 2



Dr. Eladio Martínez Rayón
Revisor 3

C.c.p. Depto. Servicios Escolares.
Expediente / Estudiante
Iniciales RCA/mrsr

Dedicatoria

A mis padres de quienes aprendí gran parte de lo que soy, que han sido fuente de mi inspiración profesional y me han formado como un hombre de bien.

A mi padre *José Juan* por ser un gran hombre, un gran padre y un ejemplo a seguir. Por todo tu apoyo en tantos años de estudios, por enseñarme a esforzarme y a realizar las cosas por mí mismo, por confiar en mis decisiones y por estar pendiente de mí.

A mi madre *Blanca Lidia*, una gran persona y gran madre. Por todos tus sacrificios, por los valores bajo los que me criaste y que rigen mi vida. Por todo lo que me enseñaste para ser una persona de bien, por ayudarme en mis estudios y por alentarme a tomar nuevos retos.

A mi hermano *José Eduardo* que siempre me ha cuidado, ha estado a mi lado cuando lo necesito, me da fuerzas para seguir adelante y fue el pilar de que orientara mi vida a estudiar una ingeniería. A la memoria de mi hermanito *Juan Alberto* quien nos dejó muchos recuerdos llenos de amor. A mis hermanas *Faviola* y *Yohana* que han estado pendientes de mí y me han apoyado cuando lo he necesitado, que me han motivado a conocer nuevos lugares y salir adelante, gracias por compartir sus experiencias conmigo y permitirme ampliar mis metas de vida. A mis sobrinos, *Diana Luisa*, *Oziel* y *Jesús*, con mucho cariño y a *Ingrid Janeth* por su apoyo y sus buenos deseos.

A mis familiares por siempre brindarme su apoyo y confianza, y celebrar conmigo cada paso que doy. Especialmente a las familias: *Pérez Zapoteco*, *Pérez Betanzos*, *Ríos Gómez*, *Molina Castro*, *Molina Vidal*, *Cuesta Díaz*, *Gutiérrez Díaz*.

A mis amigos, que me han motivado a buscar nuevas metas, que me escuchan y me orientan y de quienes he aprendido muchas cosas. Especialmente, hago una dedicatoria a mis grandes amigos *Claudio Daniel*, *Carolina Camas*, *Mónica Camas*, *Oreana Villalobos*, *Altlu Solís* y *Gladys Gómez*, de quien agradezco mucho el apoyo brindado.

Agradecimientos

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por permitirme realizar mis estudios de maestría en esta institución. Por la formación académica que generan y el sentido ético que imparten, haciendo de la investigación una herramienta para ayudar a los demás y mejorar nuestro entorno.

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías por el apoyo económico brindado para poder realizar mis estudios de posgrado.

A mi familia por todo el cariño y fuerzas que me brindan. A mis padres *José Juan y Blanca Lidia* que incansablemente me han impulsado a lo largo de mis estudios y me motivan a salir adelante y dar lo mejor de mí. A mi hermano *José Eduardo* que siempre me ha cuidado y me brinda fuerzas para seguir adelante. A mis hermanas *Faviola y Yohana* por todo el cariño y apoyo brindado, y por motivarme a superarme.

A mi director de tesis, *Dr. Jorge Colín Ocampo* y a mi codirector, *Dr. Andrés Blanco Ortega* por sus orientaciones y asesorías en mi investigación, por guiarme en mis estudios de posgrado, por nutrirme en las áreas de conocimiento relacionadas a mi proyecto, por la confianza otorgada y por permitirme tener diversas experiencias en los ámbitos de investigación.

A mis revisores, los doctores *Arturo Abúndez Pliego, Claudia Cortés García y Eladio Martínez Rayón* por sus importantes contribuciones y sugerencias que permitieron mejorar mi proyecto de investigación y ampliar mi visión como investigador.

A la señora *Rocío* por su dedicación, apoyo y atenciones en los procesos administrativos durante mis estudios de posgrado.

Al maestro *Cuauhtémoc Mazón* por asesorarme a lo largo de mi investigación y a los maestros *Demetrio Pérez y Saulo Landa* por las retroalimentaciones para enriquecer mi proyecto.

A mis amigos *Jesús Eduardo, Eder Gibrain y Ángel Isaí* por su amistad y la ayuda brindada.

Resumen

El estudio de las vibraciones representa un área importante en la ingeniería mecánica. La evidencia histórica ha demostrado que ignorar el fenómeno de vibraciones en el diseño de maquinaria y estructuras puede concluir en fallas catastróficas. En el área de rotodinámica se enfatiza en el comportamiento de operación de los rotores, con el objetivo de controlar su respuesta dinámica y de establecer condiciones estables de operación.

Dentro de las consideraciones de diseño, se encuentra el análisis de las vibraciones debidas a fuerzas inerciales provocadas por desbalance. Para el control de las vibraciones, se han empleado dispositivos de control pasivo que han demostrado disminuir la respuesta dinámica en diversas estructuras. Recientemente se han enfocado diversos estudios en la mejora del desempeño de estos dispositivos de control a través de la implementación de inersores.

En este trabajo de tesis se realizó un análisis teórico del desempeño de dispositivos de control pasivo con base en inersores para el control de vibraciones por desbalance en un sistema rotodinámico, considerando los efectos giroscópicos en la respuesta de vibración. Se llevó a cabo un análisis modal del sistema rotodinámico, representando al sistema rotatorio mediante un modelo masa resorte equivalente que considera los efectos giroscópicos, y sobre el que se implementaron los dispositivos de control de vibración mediante redes mecánicas, haciendo uso del concepto de admitancia mecánica.

Se trabajó con la función de respuesta en frecuencia del sistema de forma adimensional y se optimizó aplicando los criterios de Puntos Invariantes y H_{∞} . Se generaron parámetros óptimos considerando tres diferentes configuraciones de sistemas rotodinámicos: a) un disco inercial, b) dos discos inerciales y c) tres discos inerciales, para todas las configuraciones, los discos inerciales se distribuyeron de forma simétrica a lo largo del eje del rotor. Los resultados obtenidos demuestran que la implementación en sistemas rotodinámicos de dispositivos de control pasivo con base en inersores genera una respuesta de vibración estable en la zona de resonancia, minimizando las amplitudes de vibración y creando un ancho de banda en el dominio de la frecuencia donde la amplitud de vibración es constante. Adicionalmente, se realizaron simulaciones de elemento finito del sistema rotodinámico en

el software COMSOL Multiphysics. Finalmente, Los resultados obtenidos se validaron comparando la respuesta de vibración obtenida de la solución del sistema masa resorte equivalente con la respuesta de vibración obtenida de la simulación del sistema rotodinámico con el software COMSOL.

Abstract

The study of vibrations represents an important area in mechanical engineering. The historical evidence has demonstrated that to ignore the phenomenon of vibration in machinery and structures design can conclude in catastrophic failures. The rotordynamic area emphasize in the operation behavior of rotors, in order to control its dynamic response and set stable operation conditions.

Analysis of vibrations induced by unbalance is one of the design considerations. In order to control the vibration, passive control devices have been employed that have demonstrated to reduce the dynamic response in many structures. Recently, different studies have been focused to improve the performance of these control devices through the implementation of inerters.

In this thesis a theoretical analysis was developed about the performance of inerter based passive vibration control devices for the control of vibration induced by unbalanced in a rotordynamic system, considering the gyroscopic effects in the vibration response. A modal analysis of the rotordynamic system was performed, depicting the rotative system through an equivalent spring mass model that includes the gyroscopic effects, and the vibration control devices were employed in this model through the mechanical networks, employing method of the mechanical admittance.

The frequency response function was used in the dimensionless form and was optimized using the methodologies of Fixed Points and the H_∞ norm. Optimum parameters were developed considering three different rotordynamics systems configurations: a) one inertial disk, b) two inertial disks and c) three inertial disks, all configurations were performed distributing the inertial disks symmetrically along the shaft of the rotor. The obtained results prove that the use of inerter based passive control devices in rotordynamics systems generates a stable vibration response in the resonance, minimizing the vibration amplitudes and forming a frequency bandwidth in the frequency domain where the vibration amplitude is constant. Additionally, finite element simulations, of the rotordynamic system, were performed in the software COMSOL Multiphysics. Finally, the obtained results were

validated comparing the vibration response obtained solving analytically the equivalent spring mass system against the vibration response obtained solving the rotordynamic system's simulation through COMSOL.

Índice general

Dedicatoria.....	i
Agradecimientos.....	ii
Resumen.....	1
Abstract.....	3
Índice de figuras.....	7
Índice de tablas.....	12
Capítulo 1. Introducción.....	13
1.1. Inersor.....	13
1.2. Absorbedores de vibración dinámicos.....	14
1.3. Efecto del inersor en los absorbedores de vibración.....	15
Capítulo 2. Estado del arte.....	17
Capítulo 3. Planteamiento del problema.....	46
3.1. Definición del problema.....	46
3.2. Hipótesis.....	47
3.3. Objetivo general.....	47
3.3.1. Objetivos específicos.....	47
3.4. Justificación del problema.....	47
3.5. Alcances y limitaciones.....	48
3.5.1. Alcances.....	48
3.5.2. Limitaciones.....	49
Capítulo 4. Marco teórico.....	50
4.1. Vibraciones.....	50
4.1.1. Frecuencia natural.....	50
4.2. Modelo dinámico de un rotor.....	50
4.2.1. Disco.....	51
4.2.2. Eje.....	53
4.2.3. Masa de desbalance.....	54
4.2.4. Soportes y cojinetes.....	55
4.2.5. Funciones de forma.....	56

4.3.	Absorbedores de vibración	58
4.4.	Inersores.....	59
4.5.	Optimización.....	60
4.5.1.	Método de puntos invariantes.....	60
4.5.2.	Método extendido de puntos invariantes.....	61
4.6.	Optimización H^∞	62
4.6.1.	Optimización H^∞ para sistemas de dos grados de libertad.....	63
4.6.2.	Optimización H^∞ para sistemas de tres grados de libertad	63
4.7.	Solución de sistemas de ecuaciones no lineales: método de Newton-Raphson.....	64
Capítulo 5. Modelado propuesto para un sistema rotodinámico como sistema masa-resorte con admitancia mecánica.....		68
5.1.	Modelado de un sistema rotodinámico con soportes infinitamente rígidos.....	68
5.2.	Influencia de soportes con rigidez y amortiguamiento finito	77
5.3.	Ecuaciones de solución del modelo	80
5.4.	Análisis de redes mecánicas y la admitancia mecánica.....	83
Capítulo 6. Modelo rotodinámico propuesto con dispositivos TID optimizados.....		86
6.1.	Solución del sistema considerando un amortiguador	86
6.2.	Solución del sistema incorporando redes mecánicas	87
6.3.	Optimización de dispositivos TID	88
6.3.1.	Criterio de optimización de puntos invariantes	88
6.3.2.	Criterio de optimización: norma H^∞ para dispositivos TID.....	107
Capítulo 7. Modelo rotodinámico propuesto con dispositivos IDVA optimizados		110
7.1.	Modelo rotodinámico incorporando el absorbedor de vibraciones con base en inersor.....	110
7.2.	Optimización de dispositivos absorbedores de vibración.....	114
7.2.1.	Metodología de puntos invariantes para el absorbedor de vibraciones convencional.....	114
7.2.2.	Metodología de puntos invariantes extendida para absorbedores de vibraciones con base en inersor	117
7.2.3.	Criterio de optimización: norma H^∞ para dispositivos IDVA	123
Capítulo 8. Simulaciones de elemento finito.....		128
8.1.	Simulaciones con módulo de redes mecánicas	128
8.2.	Simulaciones con el módulo de rotodinámica	133

Capítulo 9. Análisis del segundo modo de vibración	139
9.1. Modelo rotodinámico con IDVA C3 en la respuesta dinámica para el segundo modo de vibración	139
9.1.1. Modelo rotodinámico de dos discos	140
Capítulo 10. Conclusiones	144
Referencias	147
Apéndices	153

Índice de figuras

Figura 1. Inersor tipo piñón y cremallera [6].	13
Figura 2. Absorbedor de vibraciones dinámico amortiguado (DVA).	14
Figura 3. Absorbedor de vibraciones con base en inersor (IDVA).	15
Figura 4. Sistema con IDVA, con el inersor conectado al absorbedor y a tierra.	16
Figura 5. Diagrama del elemento inersor [1]......	18
Figura 6. Prototipos experimentales de inersores. a) Inersor de piñón y cremallera; b) Inersor de tornillo de bolas [2]......	19
Figura 7. Sistema de n-grados de libertad masa-resorte-inersor [3]......	19
Figura 8. a) Inersor de tornillo de bolas. b) Diagrama de fuerzas, considerando efectos no lineales [4].	20
Figura 9. a) Sistema de suspensión simulado, el bloque S representa a la red mecánica. b) redes mecánicas, analizadas, para el aislamiento de vibraciones. c) modelo del inersor que considera los efectos no lineales [4].	20
Figura 10. a) modelo geoméricamente lineal. b) modelo geoméricamente no lineal [5]... 21	
Figura 11. Diagrama del amortiguador de masa-angular (angular-mass damper) [7]......	22
Figura 12. Sistema mecánico del gyro-mass damper: (a) modelo; (b) modelo con incremento de aceleración angular, debido a combinación de engranes; (c) prototipo del sistema [8]. . 22	
Figura 13.. Armadura: Chevron. toggle brace system, que amplifica el desplazamiento del sistema principal y sobre el que se conecta una terminal del dispositivo de control (amortiguador o inersor) [9].	23
Figura 14. Influencia de los inersores en la respuesta dinámica del sistema [9]......	23
Figura 15. Configuraciones de absorbedor de vibraciones con base en inersores [10]......	25
Figura 16. Sistema principal del puente, incorporando el dispositivo TMDI [14]......	26
Figura 17. (a) Respuesta adimensional del puente sin dispositivo de control. (b) Respuesta adimensional del puente, incorporando el TMDI [14].	26
Figura 18. Modelo de la viga estudiada en [17].	28
Figura 19. Comparación de la respuesta de vibración transitoria para a) viga sola y b) viga incorporando un absorbedor no lineal [17]......	28

Figura 20. a) puente modelado como viga con el IBVA instalado a la mitad de la longitud. b) Mecanismo inersor con inercia variable [18].	29
Figura 21. Sistema TLIS [19].	30
Figura 22. Modelo de una cuarta parte de automóvil y suspensiones con inersores investigados [20].	31
Figura 23. RDVA diseñado por Hu et al. [24].	32
Figura 24. a) Respuesta de vibración del rotor con el RDVA instalado a la mitad del rotor. b) respuesta vibratoria del rotor con el RDVA instalado en diferentes posiciones del rotor [24].	33
Figura 25. Diseño del absorbedor de vibraciones para el sistema de rotor Jeffcott [26].	34
Figura 26. Modelo del rotor con el IDVA [29].	35
Figura 27. Comparación de la estructura del DVA y del IDVA de los dispositivos empleados en [28] y [29].	35
Figura 28. a) Modelo del rotor con el GNES acoplado. b) Estructura del GNES [30].	36
Figura 29. Respuesta de vibración transitoria [30].	36
Figura 30. Respuesta vibratoria en el dominio de la frecuencia a) Rotor sin GNES. b) Rotor con GNES [30]	36
Figura 31. Respuesta del rotor asimétrico, incorporando: a) Absorbedor de vibraciones 1, b) Absorbedor de vibraciones 2 y c) GNES [30].	37
Figura 32. a) Modelo dinámico del NES en dirección horizontal. b) Modelo dinámico del NES en dirección vertical [31].	37
Figura 33. a) Respuesta del rotor sin NES. b) Respuesta en la dirección horizontal del rotor incorporando BNES. c) Respuesta en la dirección vertical del rotor incorporando BNES. Las gráficas b) y c) son diferentes debido al comportamiento diferente que tiene el BNES para cada dirección [31].	38
Figura 34. MNES y sistema rotodinámico reportado por Yao et al. a) Absorbedor de vibraciones tipo MNES. b) Sistema rotodinámico con el MNES equipado [32].	39
Figura 35. Modelo del sistema rotor-cojinete, incorporando NES en los apoyos [34]	39
Figura 36. Gráficas de movimiento del cojinete, con y sin NES. (a) en la dirección X. (b) en la dirección Y [34].	40
Figura 37. (a) Esquema del sistema analizado. (b) Gráfica de respuesta dinámica, comparación entre los métodos de optimización [35].	40
Figura 38. Esquema del sistema rotor-soporte. a) Diagrama del sistema rotodinámico. b) Movimiento de los soportes [37].	41
Figura 39. Respuesta dinámica del sistema al considerar los parámetros del rotor y los soportes [37].	42
Figura 40. Gráficas de respuesta del último estudio realizado; comparación velocidades críticas [37].	43
Figura 41. Remolineo de un rotor [45]	51
Figura 42. Marcos de referencia del disco unido a un eje en rotación [46].	52
Figura 43. Coordenadas para caracterizar el eje, mediante energía elástica [46].	54
Figura 44. Sistema de coordenadas para caracterizar el desbalance [46].	54
Figura 45. Esquema de un cojinete y sus parámetros de rigidez y amortiguamiento [46].	56

Figura 46. a) Sistema rotodinámico, b) Coordenadas para las deformaciones del eje [46].	56
Figura 47. Sistemas masa-resorte incorporando absorbedores de vibración convencionales [45].	59
Figura 48. Optimización de un absorbedor de vibraciones. a) Gráfica con calibración de puntos invariantes. b) Gráfica de respuesta optimizada [45].	61
Figura 49. Metodología extendida de los puntos invariantes [39].	61
Figura 50. Método de solución de Newton-Raphson para una función no lineal en el caso unidimensional.	65
Figura 51. a) Rotor de laboratorio, tipo Jeffcott. b) Representación virtual del rotor.	69
Figura 52. Orientación del rotor en el sistema de referencia fijo, y definición de las variables u, w .	71
Figura 53. Sistema masa-resorte de 1 GDL con movimiento en dirección de una coordenada generalizada.	73
Figura 54. Modelo del rotor considerando efectos giroscópicos y fuerzas de desbalance.	75
Figura 55. Diseño virtual de sistemas rotodinámicos: a) rotor de un disco tipo Jeffcott, b) rotor de dos discos y c) rotor de tres discos.	76
Figura 56. Diagrama del rotor considerando soportes.	77
Figura 57. Modelo dinámico del rotor, con influencia de soportes.	79
Figura 58. Representación de los vectores de excitación por desbalance y de respuesta, en el plano complejo.	82
Figura 59. Trayectoria de movimiento del rotor simétrico, en forma adimensional.	83
Figura 60. Modelo del rotor incorporando redes mecánicas. Diagrama de redes mecánicas [10].	87
Figura 61. Redes mecánicas que no incrementan el grado de libertad del sistema.	89
Figura 62. Diagrama de red C5.	90
Figura 63. a) Diagrama de red mecánica C3 y b) comportamiento de la función G en las tendencias límites de ζ .	91
Figura 64. Comportamiento de las funciones G en las tendencias de ζ , con el parámetro γ optimizado. Para $\phi = 7.6E - 5$.	91
Figura 65. Comportamiento de G sin emplear un valor óptimo de ζ . Para $\phi = 7.6E - 5$.	92
Figura 66. Gráfica de respuesta optimizada incorporando el TID C3. Para $\phi = 7.6E - 5$.	93
Figura 67. Red mecánica C4.	93
Figura 68. Gráficas de respuesta optimizada incorporando el TID C4, bajo los criterios de Krenk y Den Hartog. Para $\phi = 7.6E - 5$.	94
Figura 69. Red mecánica C6.	95
Figura 70. Gráfica de respuesta optimizada del sistema incorporando el TID C6. Para $\phi = 7.6E - 5$.	96
Figura 71. Superficies de los parámetros óptimos de la red C3.	97
Figura 72. Función G , utilizando la red C3. Considerando diferentes expresiones de los parámetros óptimos. Evaluando en $\delta = 0.25$ y $\phi = 0.2043$.	98
Figura 73. Función G . comparación ignorando ϕ en la ecuación de ζ_{opt} . Evaluado en $\delta = 0.25$ y $\phi = 0.2043$.	99

Figura 74. Superficies de los parámetros óptimos de la red C4.	100
Figura 75. Función G , utilizando la red C4, considerando diferentes expresiones de los parámetros óptimos. Evaluando en $\delta = 0.25$ y $\phi = 0.2043$	101
Figura 76. Superficies de los parámetros óptimos de la red C6.	102
Figura 77. Comparación de los efectos giroscópicos en la función de transferencia, empleando la red C6. Evaluando en $\delta = 0.1$ y $\phi = 0.2043$	103
Figura 78. Superficies de la función de transferencia para las diversas redes mecánicas. .	105
Figura 79. Comparación de la respuesta G de los TID para diferentes valores de δ	106
Figura 80. Diagrama de flujo para desarrollar la optimización H^∞ en sistemas de dos grados de libertad.	107
Figura 81. Comparación de gráficas optimizadas bajo las normas H^∞ y puntos invariantes para el TID C3.	108
Figura 82. Comparación de respuestas optimizadas, TID C4 y TID C6.	108
Figura 83. Comportamiento de la respuesta óptima al variar δ . Norma H^∞	109
Figura 84. Modelo del rotor incorporando el absorbedor de vibraciones con elemento de admitancia mecánica.	111
Figura 85. Respuesta del DVA. a) Respuesta del absorbedor con parámetros óptimos. b) Comparación de respuestas del DVA convencional y el TID-C4.	115
Figura 86. Representación de un elemento masa como un dispositivo inersor.	115
Figura 87. Diagramas de red NDVA y su equivalencia como red TID. a) Sistema con NDVA analizado en [44]. b) Sistema equivalente utilizando la red del TID	116
Figura 88. Comparación de respuesta incorporando el NDVA y el TID-C6.	116
Figura 89. Gráficas del IDVA-C3 sin sintonizar evaluado en las tendencias límites de ζ	117
Figura 90. Gráficas del IDVA-C3 sintonizado evaluado en las tendencias límites de ζ	118
Figura 91. Identificación de las relaciones de frecuencia resonantes y antirresonantes.	119
Figura 92. Respuesta optimizada, incorporando el IDVA-C3.	120
Figura 93. Respuesta optimizada, incorporando el IDVA-C4.	121
Figura 94. Respuesta optimizada, incorporando el IDVA-C6.	122
Figura 95. Respuestas óptimas de los IDVA, bajo el criterio de puntos invariantes extendido.	123
Figura 96. Diagrama de flujo para desarrollar la optimización H^∞ en sistemas de tres grados de libertad.	125
Figura 97. Respuesta optimizada empleando el IDVA-C3.	126
Figura 98. Respuesta optimizada empleando el IDVA-C4.	126
Figura 99. Respuesta optimizada, empleando el IDVA-C6.	127
Figura 100. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.	129
Figura 101. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.	130

Figura 102. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.	130
Figura 103. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo DVA. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.	131
Figura 104. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.	131
Figura 105. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.	132
Figura 106. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.	132
Figura 107. Modelo virtual del rotor en el módulo de rotor de viga. a) Definición con elementos finitos. b) Representación tridimensional.	133
Figura 108. Integración del absorbedor de vibraciones como un amortiguador equivalente con admitancia Y_a	134
Figura 109. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.	135
Figura 110. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.	135
Figura 111. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.	136
Figura 112. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo DVA. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.	136
Figura 113. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.	137
Figura 114. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.	137
Figura 115. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.	138
Figura 116. Función de forma seno de ciclo completo.	139
Figura 117. Respuesta vibratoria medida en el punto de ubicación del disco.	140

Figura 118. Funciones de forma obtenidas mediante simulación para un sistema rotodinámico de dos discos: a) Rotor con discos a $L/3$ de cada extremo y b) Rotor con discos a $L/4$ de cada extremo.	141
Figura 119. Respuesta vibratoria con discos colocados a $L/4$ y $3L/4$	141
Figura 120. Gráfica de respuesta medida en la posición de los discos externos para el sistema rotodinámico original.	142
Figura 121. Gráfica de respuesta medida en la posición de los discos externos para el sistema rotodinámico original.	143

Índice de tablas

Tabla 1. Resultados del análisis numérico en la investigación de Hwang.	24
Tabla 2. Resultados de amplitud de desplazamiento para la viga analizada.	29
Tabla 3. Resultados del comportamiento de la rigidez dinámica.	42
Tabla 4. Parámetros del rotor.	70
Tabla 5. Parámetros modales del rotor Jeffcott (laboratorio de CENIDET).	76

Capítulo 1

Introducción

1.1. Inersor

El inersor es un dispositivo mecánico diseñado con el objetivo de absorber la energía cinética de vibración y almacenarla como energía cinética de rotación, comúnmente al hacer girar un volante de inercia (Figura 1). La principal característica de operación de este elemento es que las fuerzas aplicadas en sus nodos (o terminales) son iguales, opuestas, y proporcionales a la diferencia de sus aceleraciones (Ecuación (1)).

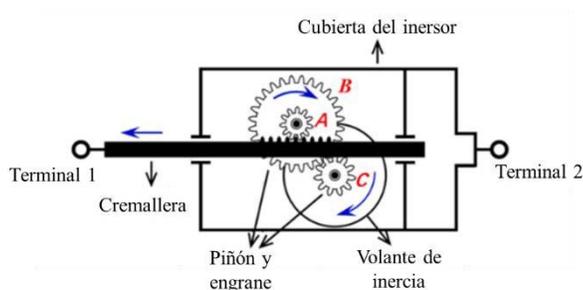


Figura 1. Inersor tipo piñón y cremallera [6].

$$F(t) = b(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) \quad (1)$$

La constante de proporcionalidad b se conoce como la inercia del dispositivo y tiene unidades de kilogramos. El valor de la inercia se obtiene al aplicar las ecuaciones de movimiento de Newton al dispositivo y su valor depende del mecanismo elegido para armar el inersor. En la actualidad, se han construido inersores con base en diferentes tipos de

mecanismos, tales como: 1) piñón y cremallera, 2) tornillo de bolas, 3) sistema hidráulico y 4) bomba de engranes.

La expresión de la ecuación (1) define al inersor como un elemento mecánico ideal (o teórico), donde se requiere un valor de inercia b como dato para el análisis teórico, sin embargo, este es un elemento mecánico que se debe diseñar y manufacturar, por lo tanto, al igual que los elementos resorte y amortiguador, debe cumplir con ciertas características mecánicas que logren aportar el parámetro de inercia b considerado inicialmente como un coeficiente en el desarrollo teórico, por lo que, hasta que cumple con estas características mecánicas se puede considerar al elemento inersor como un dispositivo real.

1.2. Absorbedores de vibración dinámicos

Un absorbedor de vibración es un sistema masa-resorte-amortiguador que se instala sobre el sistema principal al cual se pretende aislar de la vibración (Figura 2). Estos sistemas conocidos como DVA (*Dynamic Vibration Absorber*) o TMD (*Tuned Mass Damper*) han demostrado un buen desempeño en el control de vibraciones. Sin embargo, la relación de la masa del absorbedor m con la masa del sistema principal M funge como limitante en el diseño práctico de estos dispositivos.

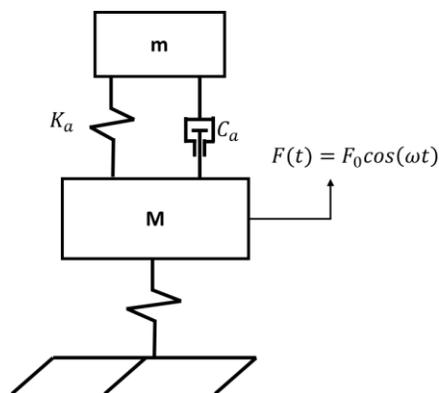


Figura 2. Absorbedor de vibraciones dinámico amortiguado (DVA).

1.3. Efecto del inersor en los absorbedores de vibración

Se denomina IDVA (*Inerter-based Dynamic Vibration Absorber*) a un DVA que incorpora un inersor. Al implementar el inersor, conectado en paralelo con el elemento amortiguador C_a y el elemento resorte K_a en el DVA (Figura 3), las ecuaciones de movimiento del sistema se representan como se muestra en las ecuaciones (2) y (3).

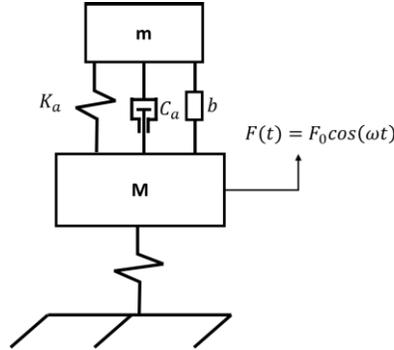


Figura 3. Absorbedor de vibraciones con base en inersor (IDVA).

$$M\ddot{x}_1 + b(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (K + k_a)x_1 - k_a x_2 = F_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

$$M\ddot{x}_2 + b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_a(x_2 - x_1) = 0 \quad (3)$$

Por otra parte, el efecto del inersor se aprovecha de mejor manera (y resulta más visible su impacto en el DVA) si una de sus terminales se conecta a la masa del absorbedor m y la otra se fija a tierra (Figura 4), entonces, las ecuaciones diferenciales representativas de esta configuración se definen como:

$$M\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (K + k_a)x_1 - k_a x_2 = F_0 \cos(\omega t) \quad (4)$$

$$(m + b)\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_a(x_2 - x_1) = 0 \quad (5)$$

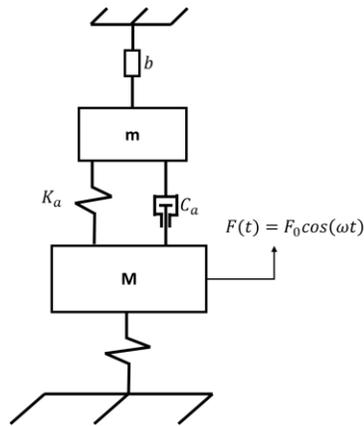


Figura 4. Sistema con IDVA, con el inersor conectado al absorbedor y a tierra.

Se puede observar en las Ecuaciones (4) y (5) en comparación con las ecuaciones (2) y (3), que en la configuración del IDVA que se muestra en la Figura 4, el efecto del inersor influye únicamente en el absorbedor de vibración, sin tener efecto alguno en el sistema principal. En esta configuración, el efecto del inersor sobre el absorbedor de vibración es proporcionar una masa efectiva (también llamada masa virtual) al sistema secundario. Por lo tanto, se concluye que de acuerdo con la configuración que presenten los IDVAs se pueden lograr un mejor desempeño dinámico en comparación con el que se obtiene utilizando DVAs.

Capítulo 2

Estado del arte

Las vibraciones u oscilaciones son movimientos que se repiten después de un intervalo de tiempo. El estudio de las vibraciones es de especial interés debido al efecto que tienen sobre el comportamiento de operación en una máquina o estructura. Éstas pueden tener un efecto perjudicial en los equipos, llegando a provocar fallas en su funcionamiento o fractura en sus componentes mecánicos. Diversos métodos de control de vibraciones se han desarrollado gracias a la profunda investigación realizada en esta área. Una forma de controlar la respuesta dinámica de un sistema es a través de dispositivos conocidos como absorbedores de vibración dinámicos.

Los absorbedores de vibración dinámicos convencionales (DVAs), son dispositivos que se acoplan al sistema principal, sobre el cual se requiere controlar la vibración. Los DVAs están conformados por elementos mecánicos que pueden ser masa-resorte o masa-resorte-amortiguador y se ha demostrado que presentan un buen desempeño dinámico en el control de vibraciones de diversos sistemas. En la literatura se reporta que diversos investigadores han estudiado la aplicación de estos dispositivos, así como la mejora de su desempeño mediante la adición de elementos mecánicos conocidos como inersores. Las siglas IDVA hacen referencia al DVA sobre los que se integra un inersor (del inglés: *Inerter-based Dynamic Vibration Absorber*).

El elemento *inersor* fue introducido, el año 2002, por Malcolm C. Smith [1], quien publicó un artículo en el que propuso el uso de este elemento en la industria automotriz. El elemento inersor propuesto, completó la analogía corriente-fuerza entre sistemas mecánicos y sistemas eléctricos, sustituyendo al elemento masa que había sido usado erróneamente hasta ese entonces, por el parámetro de inercia b del inersor (Ecuación (1)). Smith [1] plasmó que

un inersor es un modelo idealizado y al mismo tiempo es un elemento mecánico de un puerto (dos terminales, Figura 5), de la misma forma que los elementos resorte y amortiguador. Su propiedad es que las fuerzas, iguales y opuestas son proporcionales a la aceleración relativa entre sus terminales, la fuerza que experimenta el elemento inersor, se expresa de forma matemática como se muestra en la Ecuación (1).

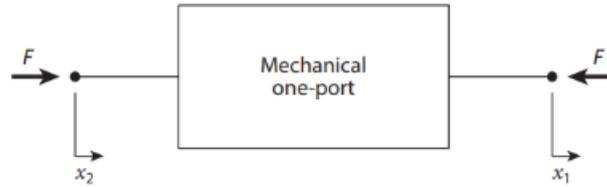


Figura 5. Diagrama del elemento inersor [1].

$$F(t) = b(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) \quad (1)$$

donde, b es la inercia $b > 0$.

Es importante comprender que la Ecuación (1) que gobierna el comportamiento del inersor no es una ley natural o mecánica, sino una propiedad que debe ser satisfecha por un mecanismo para ser considerado un inersor.

Desde su introducción, este dispositivo ha sido empleado para mejorar los sistemas absorbedores de vibración convencionales. Diversas investigaciones han demostrado que incorporar un inersor a un DVA aumenta su eficiencia en el control de la respuesta dinámica de sistemas y brinda un diseño compacto. Distintos investigadores han realizado estudios sobre la aplicabilidad de estos dispositivos. Papageorgiou *et al.* [2] analizaron experimentalmente dos variantes de los dispositivos inersores: 1) Tornillo de bolas y 2) piñón y cremallera (Figura 6). Comprobaron que el comportamiento de los dispositivos analizados experimentalmente se acerca al de un inersor ideal en el rango de frecuencias de 1 Hz a 10 Hz. Con estos resultados validan que el comportamiento real de dichos dispositivos se acerca al comportamiento ideal que establece su modelo matemático, para ese rango de frecuencias.

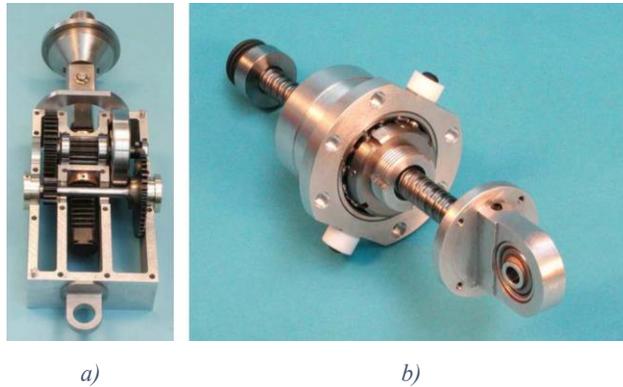


Figura 6. Prototipos experimentales de inersores. a) Inersor de piñón y cremallera; b) Inersor de tornillo de bolas [2].

Posteriormente, Chen *et al.* [3] realizaron investigaciones teóricas sobre la influencia de los inersores en la frecuencia natural de un sistema vibratorio de n -grados de libertad (Figura 7).

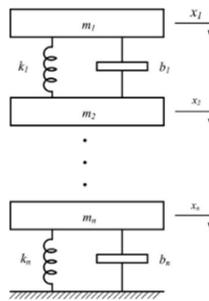


Figura 7. Sistema de n -grados de libertad masa-resorte-inersor [3].

Demostraron que, para el sistema vibratorio de la Figura 7, la adición de cada inersor aporta en la reducción de las frecuencias naturales, debido a que dichas frecuencias son funciones decrecientes con respecto a la inercia b y que dicha inercia puede ser vista como un incremento virtual de masa al sistema. Además, también obtuvieron como resultado que la posición en donde se inserta el inersor influye en la eficiencia de reducción de la frecuencia natural del sistema.

En 2015 Sun *et al.* [4] analizaron el efecto de considerar los efectos no-lineales, de fricción y elasticidad para un inersor de tipo tornillo de bolas, en el desempeño de un sistema de suspensión de automóvil. Realizaron una prueba experimental inicial, en la que compararon el comportamiento lineal teórico contra los resultados medidos del inersor; en la Figura 8 se presenta el modelo del inersor y su diagrama de fuerzas. Sun *et al.* [4] reportaron que, a bajas

frecuencias de vibración, los efectos no-lineales dominan el comportamiento dinámico, en contraste, cuando la frecuencia aumenta, el inersor tiende a un comportamiento dinámico lineal.

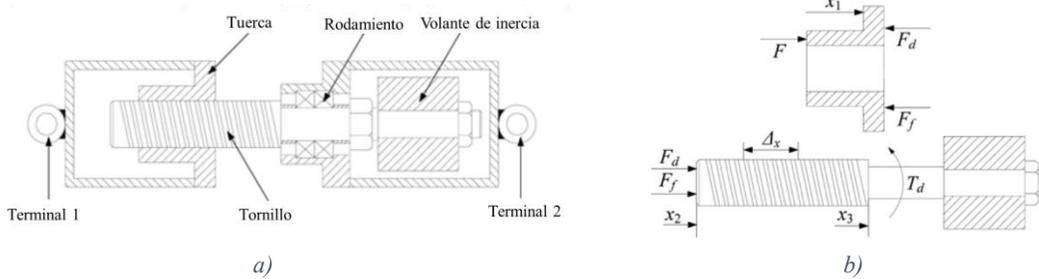


Figura 8. a) Inersor de tornillo de bolas. b) Diagrama de fuerzas, considerando efectos no lineales [4].

Posteriormente, realizaron simulaciones del sistema de suspensión (Figura 9a), con tres tipos de redes mecánicas (Figura 9b). Las tres redes se compararon en su forma lineal y no lineal (Figura 9c). Sus resultados demostraron que el comportamiento de la suspensión es ligeramente afectado por las no-linealidades, y que el desempeño de las redes S_1 y S_2 presentan un mejor aislamiento de vibraciones y menor sensibilidad a los efectos no lineales.

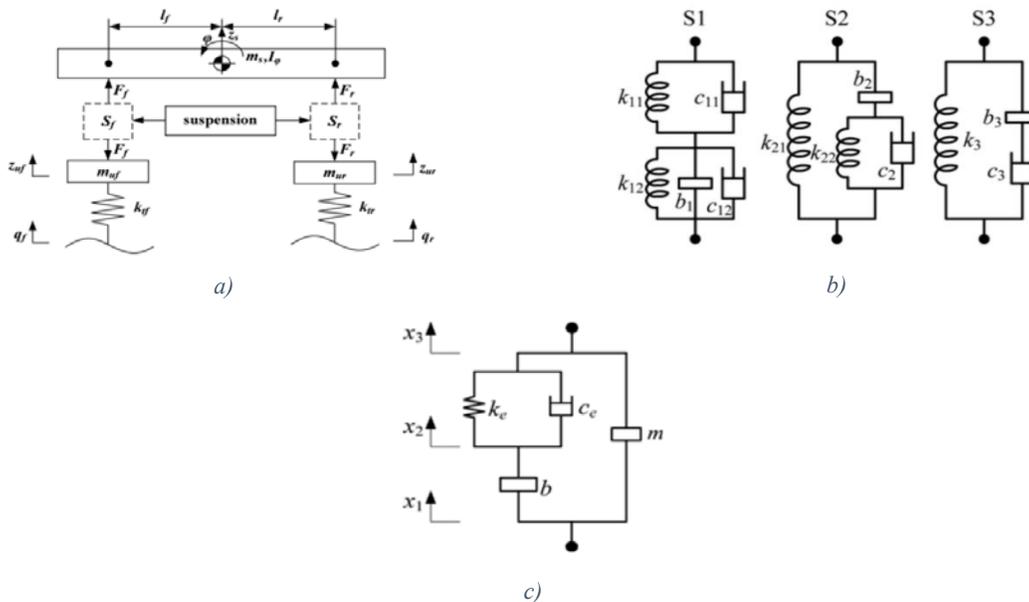


Figura 9. a) Sistema de suspensión simulado, el bloque S representa a la red mecánica. b) redes mecánicas, analizadas, para el aislamiento de vibraciones. c) modelo del inersor que considera los efectos no lineales [4].

Por otra parte, Moraes *et al.* [5] en 2018, investigaron numéricamente los efectos en el aislamiento de vibraciones, al considerar un modelo con un arreglo geoméricamente no lineal del inersor (Figura 10b). El sistema que analizaron, consistió en el aislamiento de las

vibraciones generadas por excitación de la base. Con este estudio encontraron que, para vibraciones de gran amplitud, el sistema se comporta como si tuviera una configuración geométrica lineal.

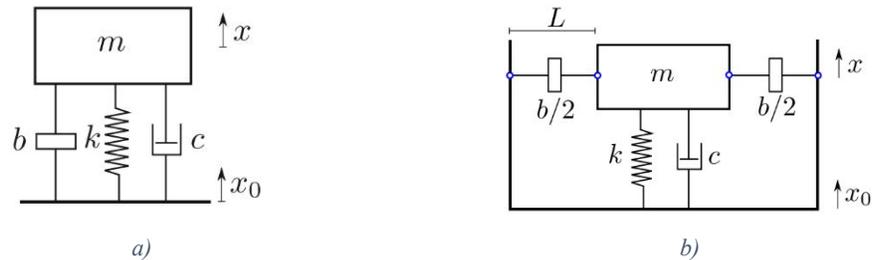


Figura 10. a) modelo geoméricamente lineal. b) modelo geoméricamente no lineal [5]

Las ventajas en el aislamiento de vibraciones que presentó el inersor, centró el interés de diversos investigadores para implementarlo en sistemas pasivos destinados hacia el control de vibraciones, como los DVA's o NES (*Nonlinear Energy Sink*). Estos sistemas de control de vibración, implementando inersores, han sido investigados en diversas áreas.

Por ejemplo, se han desarrollado investigaciones para el control de estructuras en el área de ingeniería civil. En esta área Ma *et al.* [6] presentaron un estado del arte sobre las investigaciones y desarrollos de sistemas de control de vibraciones pasivos con inersores.

A continuación, se presentan algunas investigaciones realizadas para tres tipos de dispositivos de control de vibraciones: disipadores de energía, absorbedores de vibración y aisladores de vibración. Las siguientes referencias han sido citadas en [6]:

1. Disipadores de energía

En 2008 Pradono *et al.* [7] propusieron un sistema amortiguador de masa-angular (Figura 11) para el control de la respuesta dinámica del sistema de un edificio sometido a vibración provocada por excitación de la base. Su investigación reveló que la inercia del sistema angular proporciona una masa equivalente traslacional, que es mucho mayor que la masa física del dispositivo. Además, los resultados obtenidos demostraron que el desempeño dinámico del dispositivo fue efectivo en la reducción de la respuesta sísmica del edificio, y que aporta la ventaja de reducir la frecuencia natural del sistema, sin incrementar la fuerza inducida en la base debida a los sismos.

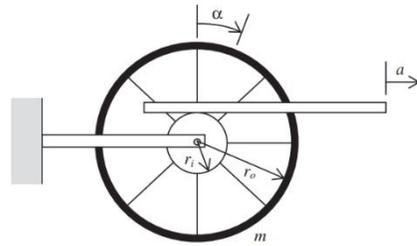


Figura 11. Diagrama del amortiguador de masa angular (angular-mass damper) [7].

Posteriormente, en 2010, otro dispositivo de inercia angular fue estudiado por Saitoh [8]. Para mitigar el desplazamiento de un aislador de bases, Saitoh desarrolló un IMD del inglés *inertial mass damper* al que llamó GMD, del inglés *gyro-mass damper* (Figura 12), los resultados obtenidos mostraron que la razón de reducción del desplazamiento relativo puede alcanzar hasta un 40% utilizando un GMD.

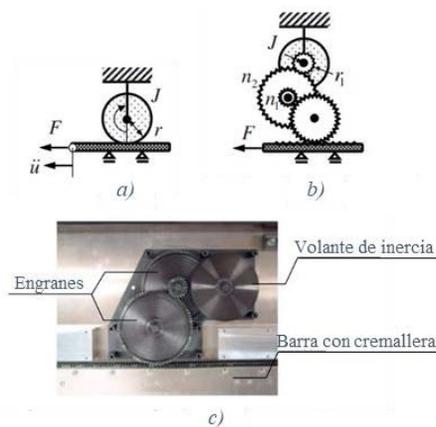


Figura 12. Sistema mecánico del gyro-mass damper: (a) modelo; (b) modelo con incremento de aceleración angular, debido a combinación de engranes; (c) prototipo del sistema [8].

En 2007, Hwang *et al.* [9] investigaron el desempeño dinámico del inersor aplicado al control de vibraciones en estructuras de edificios excitadas por sismos. Para esta investigación, utilizaron un método de amplificación de desplazamiento para optimizar la respuesta del inersor. Dicho método consiste en una estructura, a la que se le denota como *toggle brace system* que sirve para conectar una de las terminales del inersor, como se observa en la Figura 13.

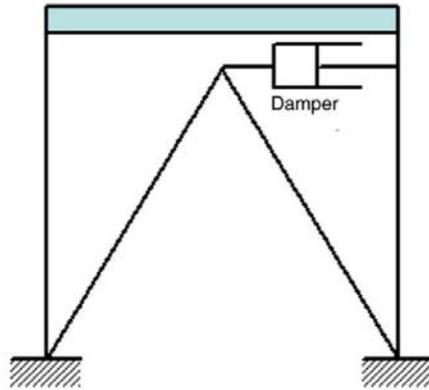


Figura 13.. Armadura: Chevron. toggle brace system, que amplifica el desplazamiento del sistema principal y sobre el que se conecta una terminal del dispositivo de control (amortiguador o inersor) [9].

Hwang *et al.* reportaron el estudio de cuatro sistemas vibratorios diferentes: (1) estructura sin dispositivo de control de vibración; (2) inersor-*toggle brace*; (3) inersor con amortiguamiento viscoso-*toggle brace*; (4) inersor con amortiguamiento de fricción-*toggle brace*. En la gráfica de la Figura 14 se muestra la respuesta dinámica para la estructura con los tres primeros sistemas mencionados previamente, sin incluir el sistema con amortiguamiento de fricción. En la Tabla 1 se presentan los porcentajes de reducción de la respuesta vibratoria, obtenidos para cada uno de los cuatro sistemas analizados, tomando como referencia la respuesta de vibración del sistema (1).

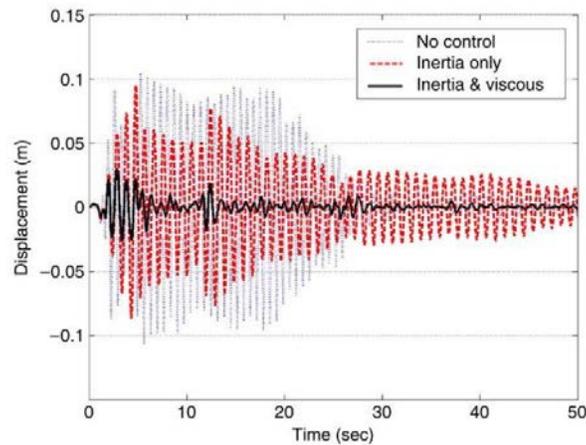


Figura 14. Influencia de los inersores en la respuesta dinámica del sistema [9].

Tabla 1. Resultados del análisis numérico en la investigación de Hwang.

	Porcentaje de reducción del desplazamiento			
	Sistema (1)	Sistema (2)	Sistema (3)	Sistema (4)
Desplazamiento máximo del inersor: 2 cm	0 (vibración libre)	11%	72%	62%
Desplazamiento máximo del inersor: 4 cm	0 (vibración libre)	25%	41%	34%

Los resultados reportados muestran que el desempeño del inersor es dependiente del paso de la cuerda, en el modelo tornillo de bolas. Además, el sistema muestra un mayor control al incorporarse un sistema de amortiguamiento (viscoso o por fricción) y al instalarse sobre un *toggle brace system*.

2. Absorbedores de vibración

Enfocándose en los dispositivos absorbedores dinámicos de vibración, Hu y Chen [10] propusieron seis configuraciones de redes mecánicas basadas en inersor para implementarse en el absorbedor de vibraciones y así generar los dispositivos denominados IDVA (Figura 15). Para cada IDVA propuesto, el sistema se optimizó considerando los criterios de optimización H_2 y H_∞ . La respuesta de vibración obtenida del sistema considerando las diferentes redes mecánicas, se comparó con la respuesta de vibración obtenida para el sistema vibratorio con DVA convencional.

De los obtenidos, reportaron que las configuraciones $C3$, $C4$, $C5$ y $C6$ presentaron un mejor desempeño dinámico comparado con el desempeño de un DVA clásico. Por otra parte, para el sistema optimizado con el criterio H_2 se logró mejorar el desempeño dinámico del absorbedor en más de un 10%, mientras que para el sistema optimizado con el criterio H_∞ el desempeño dinámico del absorbedor se incrementó por arriba del 20%. En contraste, las configuraciones $C1$ y $C2$ no mostraron mejoras en su desempeño dinámico.

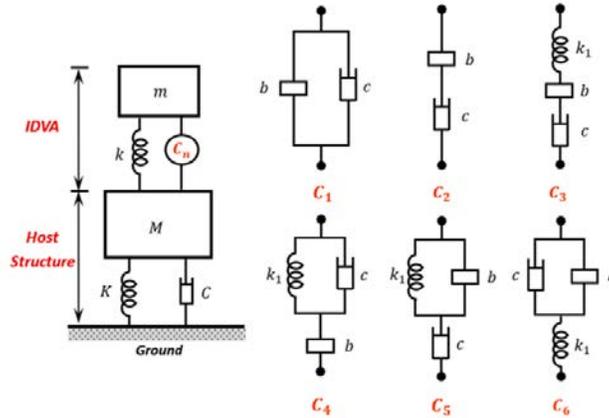


Figura 15. Configuraciones de absorbedor de vibraciones con base en inersores [10].

Brzeski *et al.* [11], [12] desarrollaron un novedoso IDVA con inercia ajustable, su estudio se basó en simulaciones numéricas y pruebas experimentales para el control de la respuesta dinámica de un oscilador. Concluyeron que el IDVA propuesto proporcionaba un incremento de amortiguamiento al sistema, en un intervalo amplio de frecuencias.

Marian y Giaralis [13] estudiaron un TMDI (masa sintonizada-amortiguador-inersor, el cual es otro nombre con el que se hace referencia al IDVA) para mitigar el movimiento oscilatorio de un sistema en forma de cadena sometido a un movimiento estocástico generado en la base del sistema. Demostraron que, el TMDI, podía generar el mismo desempeño en el control de vibración que el que se obtiene con el TMD, pero utilizando una menor masa en el dispositivo de control, o que, para un valor de masa establecido, el TMDI presenta un mejor desempeño en el control de la respuesta vibratoria que el que se consigue con el TMD.

Algunos investigadores estudiaron el desempeño de los TMDI's en el control de vibraciones en estructuras, provocadas por vientos. Xu *et al.* [14] en 2019 analizaron analíticamente la aplicación del TMDI para el control de vibraciones verticales, inducidas por vórtices, en un puente. El modelo consistió en un TMDI conectado en el interior de la estructura del puente, con el inersor conectado en paralelo al resorte y al amortiguador (Figura 16).

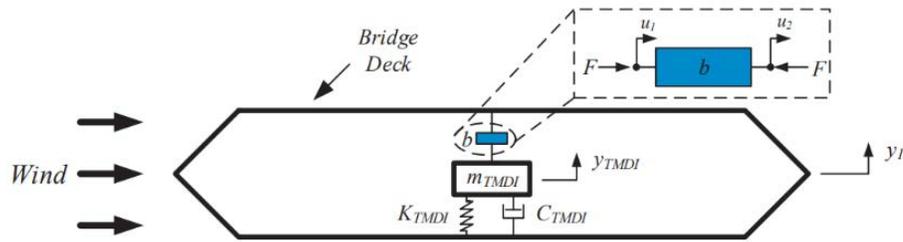


Figura 16. Sistema principal del puente, incorporando el dispositivo TMDI [14].

Los resultados obtenidos muestran que el TMDI reduce de manera efectiva la amplitud de la respuesta de vibración del sistema hasta en un 94% (Figura 17).

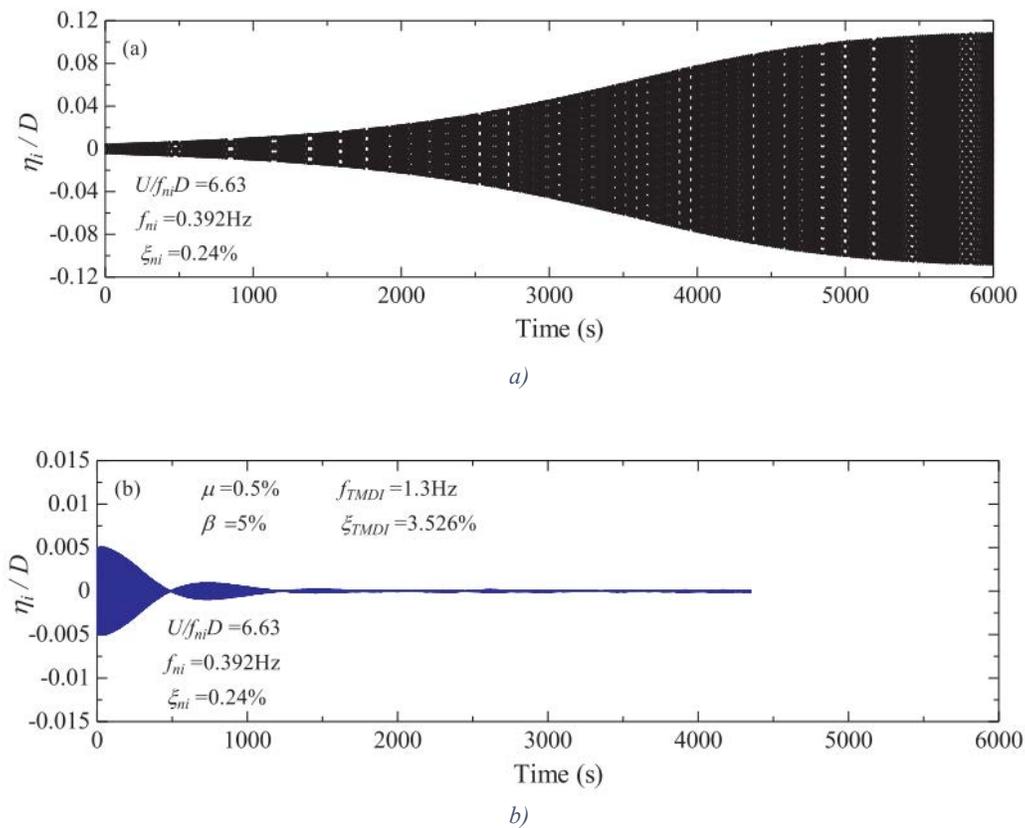


Figura 17. (a) Respuesta adimensional del puente sin dispositivo de control. (b) Respuesta adimensional del puente, incorporando el TMDI [14].

Una comparación del desempeño dinámico del TMDI contra el desempeño dinámico obtenido con el TMD, expuso que para la configuración empleada (Figura 16) el TMDI

tiene una efectividad ligeramente inferior que el TMD convencional. Por otra parte, el TMDI presenta un mejor comportamiento para la configuración en la que una de las terminales del inersor se conecta a tierra, logrando así, que el efecto de amplificación de la masa del absorbedor se aproveche al 100%. Sin embargo, aun con una menor efectividad, el TMDI presenta un diseño más útil, debido a que reduce la amplitud de desplazamiento de la masa resonante. Además, a diferencia del TMD, reportó un buen control del movimiento a diversas velocidades del viento (frecuencias de excitación).

Por otra parte, Dai *et al.* [15], investigaron la influencia de la localización del inersor en el control de las vibraciones inducidas por el viento. Emplearon un TMDI sobre dos sistemas: una torre de 76 pisos y un puente. Sus estudios demostraron que el TMDI se ve ampliamente afectado por la localización de instalación y que se puede encontrar un punto óptimo para su desempeño. Sus resultados comprueban que el TMDI presenta diversas ventajas en comparación con el TMD: (1) mitigación del modo de vibración fundamental, (2) mitigación de vibración en armónicos de mayor frecuencia, (3) mayor razón de amortiguamiento, (4) amplitud de vibración menor en el TMDI, (5) mejor control frente a desajustes de sintonización entre el sistema y la masa del dispositivo. Estos resultados son congruentes con los presentados por Marian y Giaralis [14].

Posteriormente, en 2020 Zili y Breiffni [16] analizaron la vibración en aerogeneradores. Para su estudio utilizaron un sistema TMDI para controlar la vibración en los álabes. Realizaron simulaciones donde compararon el comportamiento de un sistema TMD contra los resultados obtenidos implementando el TMDI, del análisis de sus resultados reportaron que, para la misma razón de masas, el TMDI tiene una carrera de movimiento 55% menor que el TMD, los resultados reportados son congruentes con lo observado por Marian y Giaralis [14] y Dai *et al.* [15].

Otros autores han evaluado el desempeño dinámico de los absorbedores de vibración incorporando inersores para el control de vibraciones en elementos tipo viga. Samani y Pellicano [17] analizaron el desempeño de los DVA lineales y no lineales, con parámetros optimizados, en el control de la vibración transitoria en una viga sujeta a una carga puntual móvil, como en el caso de puentes (Figura 18).

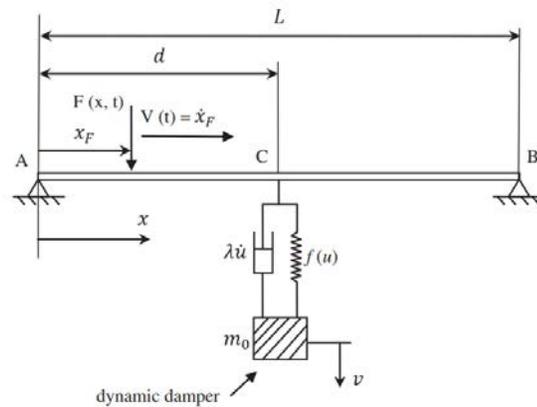


Figura 18. Modelo de la viga estudiada en [17].

Los criterios de métodos de optimización utilizados se basaron en dos enfoques: 1) reducción de la deflexión máxima y 2) máxima disipación de energía. Con estos enfoques reportaron diversas configuraciones con sus respectivos parámetros optimizados y comprobaron el buen desempeño de los dispositivos en el control de vibraciones para cargas móviles en vigas. En la Figura 19a se muestra la respuesta vibratoria de la viga sin absorbedor, en contraste, en la Figura 19b se presenta la respuesta de vibración de la viga incorporando un DVA no lineal.

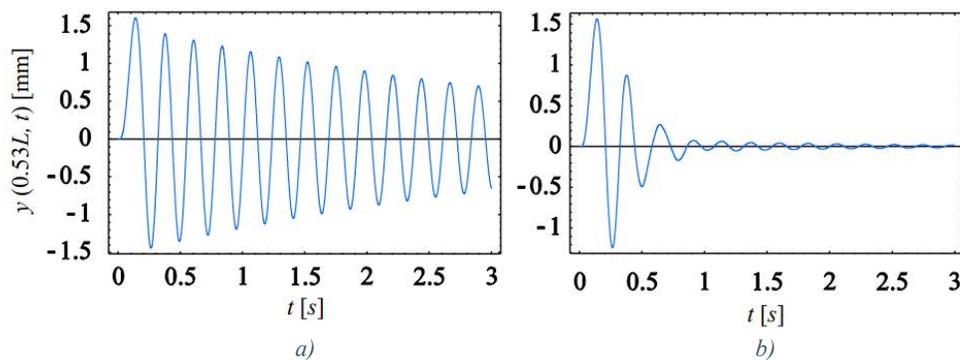


Figura 19. Comparación de la respuesta de vibración transitoria para a) viga sola y b) viga incorporando un absorbedor no lineal [17].

En la misma tendencia, Ebrahimnejad *et al.* [18] analizaron numéricamente el desempeño de un absorbedor con base en inersor con inercia ajustable (IBVA). El IBVA propuesto se implementó en un puente modelado como un elemento tipo viga, con el objetivo de minimizar las amplitudes de vibración generadas por cargas móviles (Figura 20).

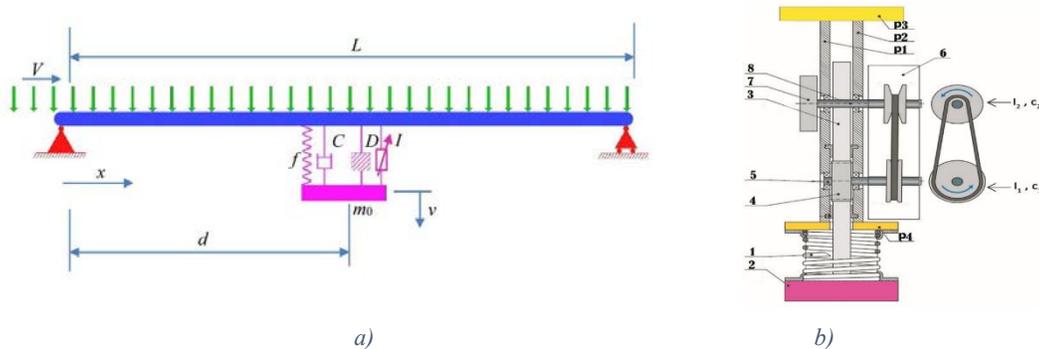


Figura 20. a) puente modelado como viga con el IBVA instalado a la mitad de la longitud. b) Mecanismo inersor con inercia variable [18].

En la Tabla 2 se muestran las amplitudes de vibración del puente sin un absorbedor de vibración, en comparación con la respuesta de vibración obtenida con un DVA clásico y con la respuesta de vibración del sistema utilizando el IBVA propuesto. De los resultados obtenidos, Ebrahimnejad *et al.* concluyeron que el IBVA con inercia ajustable propuesto presentó un mejor desempeño en el control de la respuesta dinámica en comparación con el DVA.

Tabla 2. Resultados de amplitud de desplazamiento para la viga analizada.

	Sin dispositivo de control	Con DVA	Con IBVA
Deflexión máxima de la viga	Aprox. 25.3 mm	2.45 mm	1.79 mm

Por otra parte, Zhao *et al.* [19] propusieron un dispositivo TLIS (del inglés *Tuned-Liquid Inerter System*) al incorporar un inersor en un sistema TLD (*Tuned Liquid Damper*), el cual es un dispositivo DVA en el que se incorporaron efectos de fluido al tener el elemento masa representado por un recipiente con agua.

El TLIS propuesto se obtuvo al incorporar un inersor, con una de sus terminales conectada al TLD y la otra terminal conectada a tierra. Se analizó el desempeño dinámico del TLIS en la minimización de la vibración de un sistema masa resorte de un solo grado de libertad (Figura 21). De los resultados obtenidos, se concluyó que:

- Para una cantidad de fluido establecido, el TLIS consigue reducir las amplitudes de las respuestas de aceleración y desplazamiento en un 60% en comparación con el TLD.
- El TLIS puede generar el mismo desempeño dinámico que presenta el TLD, pero reduciendo en 60%, o más, la cantidad de fluido necesaria.

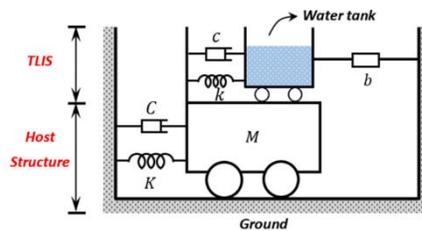


Figura 21. Sistema TLIS [19].

Se puede observar que los resultados reportados en este trabajo concuerdan con los resultados obtenidos en otras investigaciones donde se reporta el desempeño de absorbedores de vibración con base en inersores para el control de vibraciones. Por lo tanto, para una masa dada, correspondiente al absorbedor, implementar un inersor al sistema mejora el desempeño dinámico del IDVA en el control de la amplitud de vibración del sistema. En su defecto, para el control de la amplitud de vibración del sistema en un límite establecido, utilizar un inersor brinda el beneficio de un dispositivo con un diseño más práctico.

3. Aisladores de vibración

Hu *et al.* [20] investigaron un modelo de una cuarta parte de un automóvil con una suspensión que incorpora un inersor. Para su estudio Hu *et al.* consideraron seis configuraciones conocidas como redes mecánicas (Figura 22).

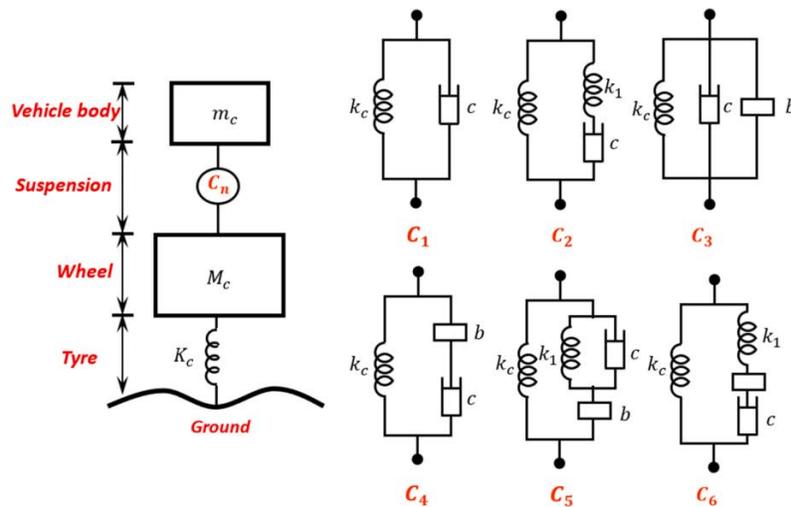


Figura 22. Modelo de una cuarta parte de automóvil y suspensiones con inersores investigados [20].

Sus resultados demostraron que las redes mecánicas etiquetadas como C_3 , C_4 , C_5 y C_6 mejoraron el desempeño de comodidad de viaje y agarre de los neumáticos, y de manera simultánea disminuyó la deflexión de la suspensión.

Hasta este punto, se observa que las investigaciones sobre la implementación de un inersor en un dispositivo de control de vibraciones han reportado resultados cualitativos semejantes, que incluyen: diseño compacto, mejora en el control de vibraciones y un mejor comportamiento del dispositivo de control.

Ahora, enfocando el tema en el área de rotodinámica, el principal problema se centra en reducir las amplitudes de vibración del sistema rotodinámico, generadas por fuerzas de desbalance. El desbalance es un problema presente en todos los sistemas rotatorios, por lo que, las investigaciones se han enfocado al estudio de dispositivos absorbedores de vibración, como una opción sustituta y/o complementaria a los diferentes procesos de balanceo existentes en la literatura para sistemas rotodinámicos.

En 2015, Campos y Nicolletti [21] propusieron la implementación de un absorbedor de vibraciones rotativo para la reducción de vibraciones laterales, debido al desbalance, en la canasta de una lavadora durante el proceso de exprimido. Ellos analizaron el DVA sin amortiguamiento y lo sintonizaron a una frecuencia cercana a la velocidad de giro de la

lavadora. Los resultados obtenidos muestran una reducción de hasta 69% de la amplitud de vibración.

Posteriormente, en 2016 Fontes y Nicoletti [22] continuaron con el uso de DVAs en rotodinámica: trabajaron sobre un rotor con dos discos inerciales e implementaron un DVA utilizando elementos viscoelásticos (Dupont VAMAC 5022) para la unión entre el rotor y el absorbedor, lo que convierte al modelo en un absorbedor amortiguado. Aplicando criterios de optimización al DVA propuesto, se maximizaron las propiedades disipativas del absorbedor de vibración, logrando una reducción mayor en la amplitud de vibración del sistema, así como un incremento en el ancho de banda donde las amplitudes de vibración son constantes. Como resultados, reportaron una reducción en la amplitud de vibración del sistema rotodinámico en el pico de resonancia en un 68.9% en la dirección horizontal y una reducción del 76.1% en la dirección vertical.

En el mismo año, Yao *et al.* [23] propusieron un diseño de absorbedor de vibraciones activo con rigidez negativa generada por imanes permanentes, logrando una supresión de la vibración. El efecto del absorbedor en la respuesta vibratoria del sistema rotodinámico puede ajustarse al cambiar la magnitud de la rigidez negativa.

Por otra parte, Hu *et al.* [24] propusieron el uso de un absorbedor de vibraciones rotodinámico (RDVA) para el control de vibraciones por desbalance en un rotor tipo *Jeffcott* (Figura 23). El RDVA propuesto se activa con un control *on-off* que está en función de la velocidad de giro del rotor. El RDVA se activa cuando el sistema rotodinámico alcanza la zona de resonancia y una vez que se supera la velocidad crítica del rotor, el RDVA se desacopla. Se analizó el comportamiento dinámico del rotor con el RDVA en diferentes posiciones del rotor.

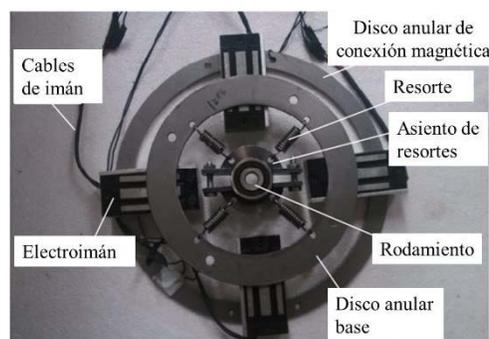


Figura 23. RDVA diseñado por Hu et al. [24].

El uso del RDVA minimizó la respuesta de vibración del rotor, logrando un mejor desempeño cuando el RDVA se coloca en la posición media del rotor. En la Figura 24a se presenta la respuesta de vibración del rotor sin RDVA comparada con la respuesta de vibración obtenida del rotor con el RDVA colocado en la posición media del rotor. En la Figura 24b se muestra la respuesta de vibración del rotor sin RDVA, comparada con la respuesta de vibración del rotor con el RDVA colocado en diferentes posiciones a lo largo del eje del rotor.

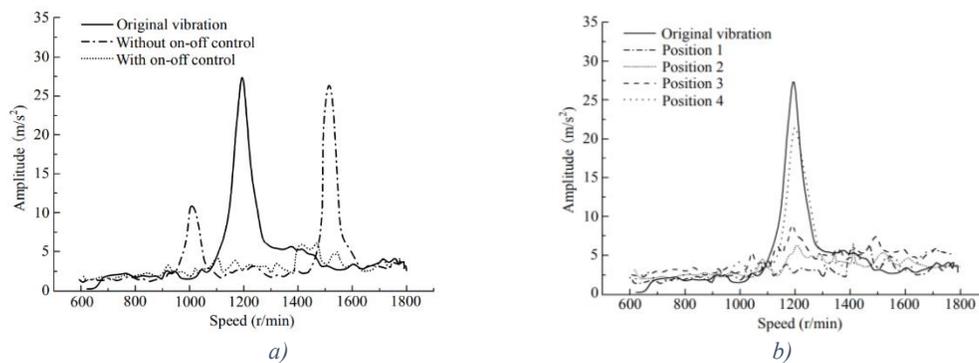


Figura 24. a) Respuesta de vibración del rotor con el RDVA instalado a la mitad del rotor. b) respuesta vibratoria del rotor con el RDVA instalado en diferentes posiciones del rotor [24].

Por otra parte, en 2018, Heidari y Monjezi [25] calcularon y compararon los parámetros óptimos de dos configuraciones de absorbedores de vibración, seleccionaron el que transmite menos fuerzas al soporte y desarrollaron un prototipo activo que aplica las fuerzas, calculadas del absorbedor, sobre el rotor. El dispositivo fue diseñado con base en actuadores magnéticos. Con los resultados obtenidos se concluyó que el efecto del DVA permite un control eficiente en las respuestas de vibraciones.

También en el año 2018, Yao *et al.* [26] centraron su investigación en un método para el diseño de absorbedores de vibración basados en un absorbedor de vibración ajustable, en el cual la frecuencia natural del absorbedor puede modificarse mediante un ajuste de rigidez, masa o lugar de instalación del absorbedor. Propusieron un diseño que emplea resortes helicoidales y efectos de rigidez a través de un sistema magnéticos (Figura 25). El absorbedor fue instalado en el eje de un rotor tipo *Jeffcott*. Este diseño de absorbedor consiste en dos partes principales:

1. Mecanismo de rigidez positiva, compuesta por un asiento que se conecta al eje y que está conectado por resortes a un marco que sirve como masa del absorbedor.
2. Mecanismo de rigidez negativa, presentado por un sistema de anillos magnéticos conectados al absorbedor y al chasis o base del sistema principal.

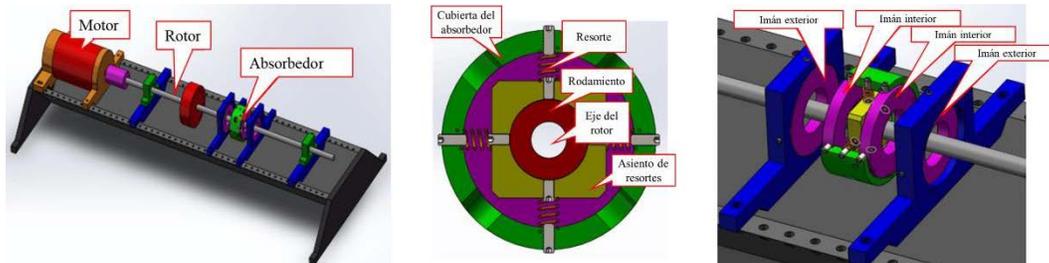


Figura 25. Diseño del absorbedor de vibraciones para el sistema de rotor Jeffcott [26].

En 2019, Behnam y Hamidreza [27] implementaron un modelo virtual del absorbedor de vibraciones, al que le aplicaron criterios de optimización para obtener los parámetros de diseño. La fuerza de respuesta del absorbedor fue aplicada al rotor por medio de un sistema activo conformado por magnetos y sensores, con el que se logró reducir la respuesta de vibración.

Por otra parte, investigaciones utilizando los absorbedores de vibración DVA como dispositivos completamente pasivos fueron realizadas por Qi xu *et al.* [28], el estudio realizado fue completamente numérico con el objetivo de eliminar la vibración inducida por el fluido lubricante en los cojinetes del sistema rotodinámico. Reportaron que, en comparación con el sistema sin DVA, se incrementó en 12% el límite de la velocidad de giro del rotor a partir de la cual el sistema rotodinámico comienza a tener un comportamiento inestable. Posteriormente, Qi xu *et al.* [29] en el 2019, incorporaron un inersor al dispositivo DVA. El IDVA propuesto se implementó en el mismo sistema rotodinámico reportado en [28] (Figuras 26 y 27). Su investigación resultó en un incremento de hasta 21.43% en la velocidad de giro a partir de la cual el sistema rotodinámico tiene un comportamiento inestable, en comparación con el sistema rotodinámico sin dispositivo.

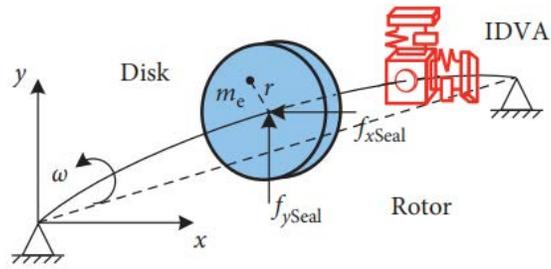


Figura 26. Modelo del rotor con el IDVA [29].

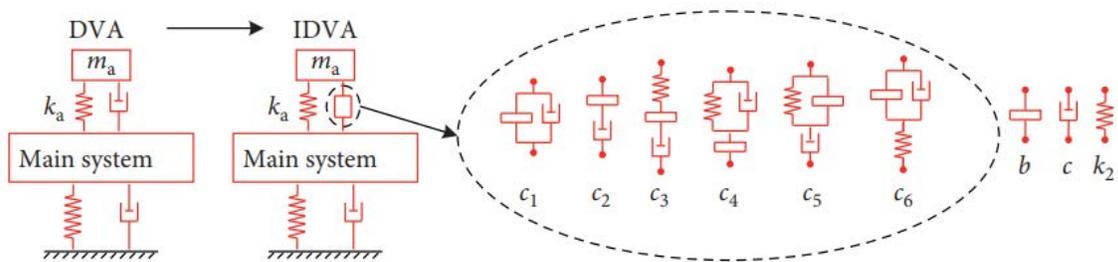


Figura 27. Comparación de la estructura del DVA y del IDVA de los dispositivos empleados en [28] y [29].

Durante los años 2019 y 2020 investigaciones numéricas y experimentales se centraron sobre otra variante de los absorbentes de vibración aplicados en rotores. Estos dispositivos, conocidos como NES (*Nonlinear Energy Sink*) varían de los DVA's clásicos en que emplean una rigidez que es no lineal. En 2019, Yao *et al.* [30] estudiaron el desempeño dinámico de una configuración de NES conectado a tierra mediante un sistema de rigidez no lineal y al rotor mediante una rigidez lineal, a esta configuración se le refiere como GNES (Grounded-NES). El esquema del GNES propuesto se muestra en la Figura 28a, mientras que en la Figura 28b se muestra el modelo virtual tridimensional del GNES.

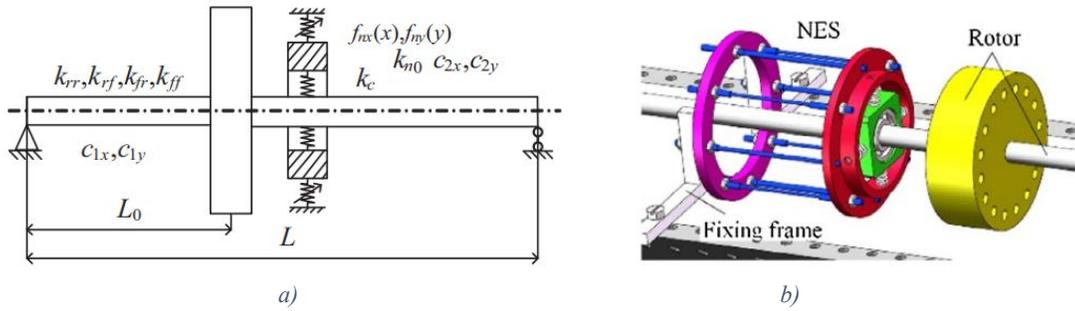


Figura 28. a) Modelo del rotor con el GNES acoplado. b) Estructura del GNES [30].

Los autores evaluaron el desempeño dinámico del GNES propuesto en un sistema rotodinámico para el control de la vibración transitoria y en estado estable. En estado transitorio, se reportó una velocidad de disipación de la vibración tres veces más rápida usando el GNES en el sistema rotodinámico (Figura 29). En vibración en estado estable, el dispositivo redujo 71% la amplitud de desplazamiento en resonancia (Figura 30); disminuyendo la amplitud de vibración de 0.76 mm a 0.22 mm, en la parte experimental se logró una reducción máxima en la amplitud de vibración del rotor del 68%.

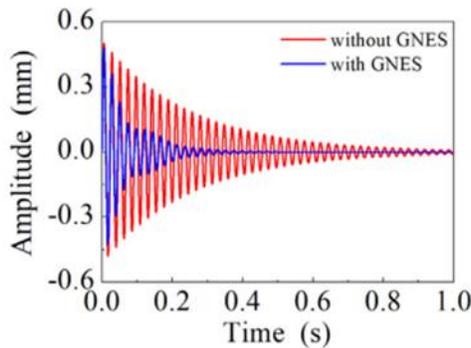


Figura 29. Respuesta de vibración transitoria [30].

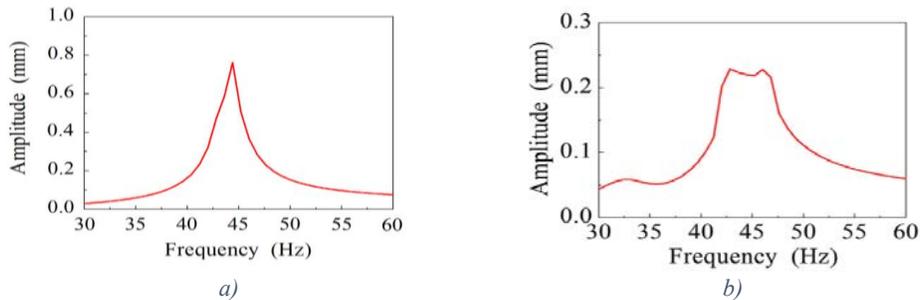


Figura 30. Respuesta vibratoria en el dominio de la frecuencia a) Rotor sin GNES. b) Rotor con GNES [30]

Por otra parte, los autores evaluaron el desempeño dinámico del GNES contra el DVA convencional en el control de la respuesta de vibración de un rotor asimétrico, alcanzando dos velocidades críticas (Figura 31). El GNES mostró tener un mejor desempeño controlando las vibraciones, implementando un solo GNES al sistema rotodinámico (Figura 31c), mientras que para el caso de los DVA's se utilizaron dos, uno para cada frecuencia natural del rotor (Figuras 31a y 31b).

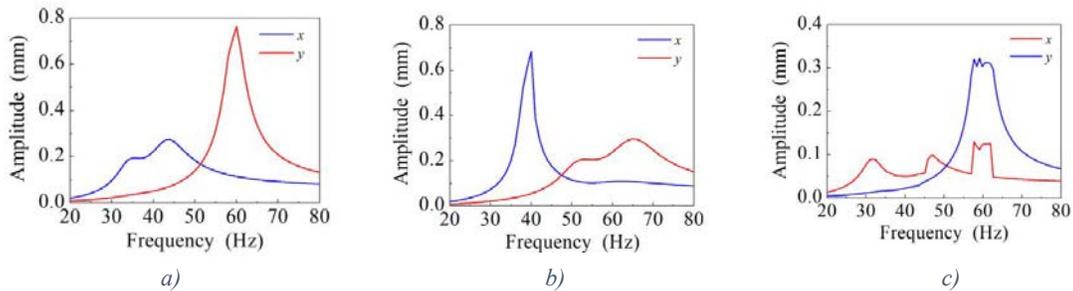


Figura 31. Respuesta del rotor asimétrico, incorporando: a) Absorbedor de vibraciones 1, b) Absorbedor de vibraciones 2 y c) GNES [30].

Posteriormente, en el año 2020, Yao *et al.* [31] desarrollaron un NES llamado *Bi-stable buckled beam Nonlinear Energy Sink* (BNES). Este dispositivo tiene un comportamiento diferente en las direcciones horizontal y vertical (Figura 32).

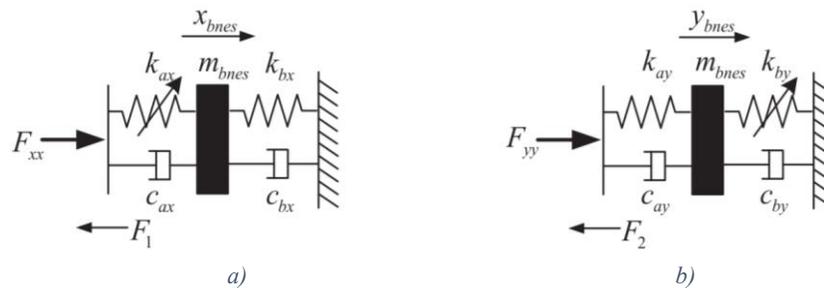
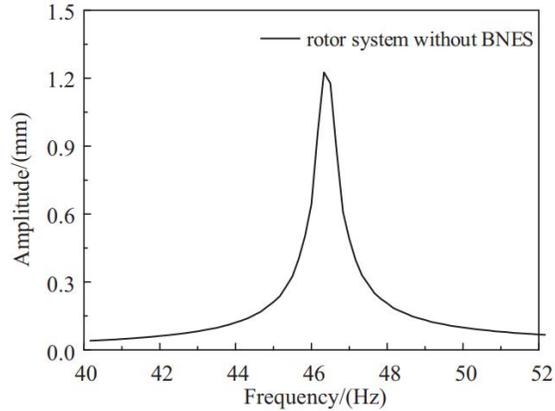
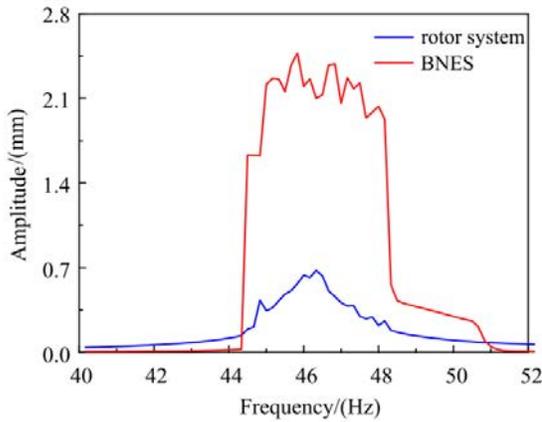


Figura 32. a) Modelo dinámico del NES en dirección horizontal. b) Modelo dinámico del NES en dirección vertical [31].

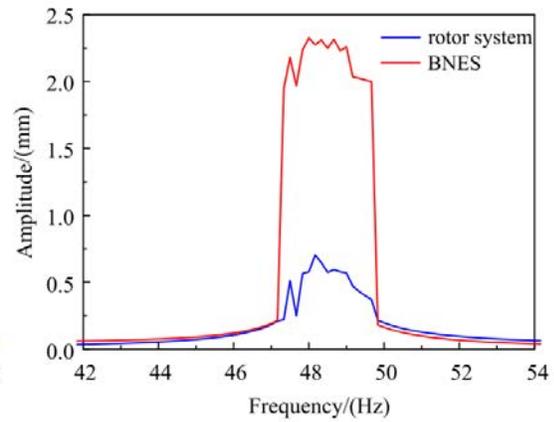
De igual forma, estudiaron su desempeño en el control de vibración transitoria y en estado estable. En el análisis transitorio, demostraron una disipación de energía de vibración hasta 6.43 veces más rápido al incorporar el BNES al sistema rotodinámico. Mientras que en el estudio en estado estable se logró una reducción de hasta un 45% en la amplitud de vibración del sistema (Figura 33).



a)



b)



c)

Figura 33. a) Respuesta del rotor sin NES. b) Respuesta en la dirección horizontal del rotor incorporando BNES. c) Respuesta en la dirección vertical del rotor incorporando BNES. Las gráficas b) y c) son diferentes debido al comportamiento diferente que tiene el BNES para cada dirección [31].

Continuando con sus investigaciones sobre los NES, Yao *et al.* [32] aplicaron un absorbedor tipo MNES (*Multi-stable Nonlinear Energy Sink*) a un sistema rotodinámico (Figura 34). Analizaron el desempeño del MNES en vibración transitoria y en estado estable. Los resultados reportados muestran una velocidad de reducción 3.28 veces más rápida al aplicar el MNES en vibración transitoria y una reducción de amplitud por encima del 56% para vibración en estado estable.

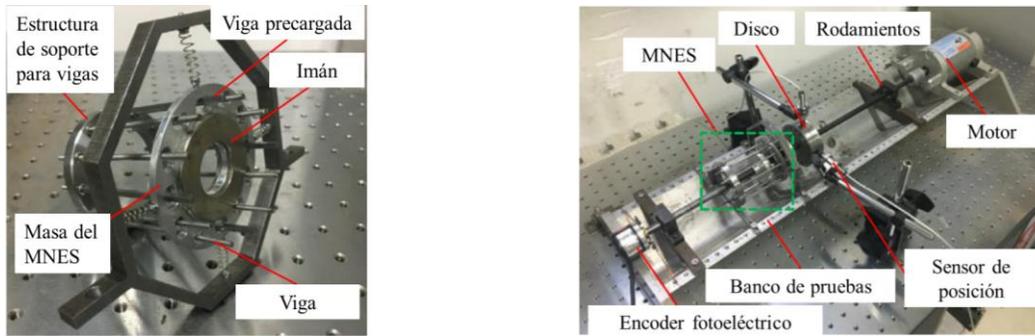


Figura 34. MNES y sistema rotodinámico reportado por Yao *et al.* a) Absorbedor de vibraciones tipo MNES. b) Sistema rotodinámico con el MNES equipado [32].

Siguiendo el objetivo de reducir las vibraciones en los rotores, otras investigaciones se han orientado al estudio de los efectos de los soportes en la respuesta dinámica del rotor. Se ha reconocido que los soportes tienen una gran influencia en el comportamiento de los sistemas rotatorios. En 2001 Vázquez *et al.* [33] analizaron el efecto de considerar los soportes del rotor como flexibles en lugar de rígidos. Estudiaron un sistema de un rotor, sujetado por dos cojinetes ubicados sobre soportes flexibles. Sus resultados demostraron que la rigidez de los soportes tiene un efecto importante en la estabilidad del comportamiento del rotor y que el límite de la estabilidad depende de la flexibilidad de los soportes.

Una investigación sobre el uso de dispositivos de control de vibraciones aplicados sobre los apoyos del rotor, fue llevada a cabo en 2015 por parte de Bab *et al.* [34] quienes estudiaron numéricamente el efecto de sumideros de energía no lineales (NES) localizados en los cojinetes para la mitigación de la vibración de un rotor soportado por cojinetes lisos con suspensión no lineal. Incorporaron un NES para cada movimiento en X y en Y, de cada apoyo, como se observa en la Figura 35.

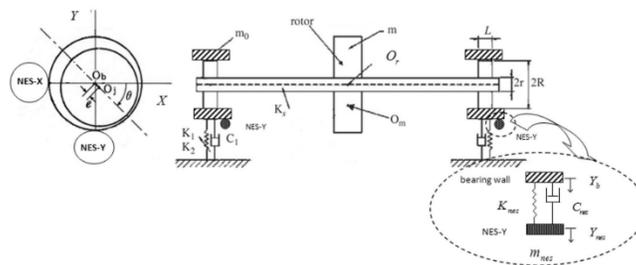


Figura 35. Modelo del sistema rotor-cojinete, incorporando NES en los apoyos [34]

Demostraron que al utilizar el NES optimizado sobre los cojinetes, este disminuye efectivamente las amplitudes de vibración (Figura 36), aunque el tipo de movimiento permanece sin cambios a ciertas velocidades.

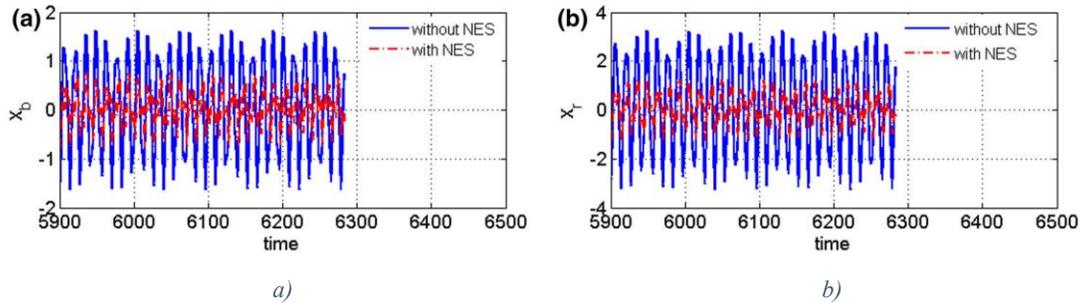


Figura 36. Gráficas de movimiento del cojinete, con y sin NES. (a) en la dirección X. (b) en la dirección Y [34].

Heidari y Safarpour [35] investigaron la influencia de los soportes amortiguados y flexibles en las amplitudes de la respuesta dinámica de un rotor. Realizaron una optimización del sistema de soporte, empleando los métodos de optimización H_∞ y H_2 . Demostraron que la amplitud máxima del rotor se reduce más de 50% (Figura 37).

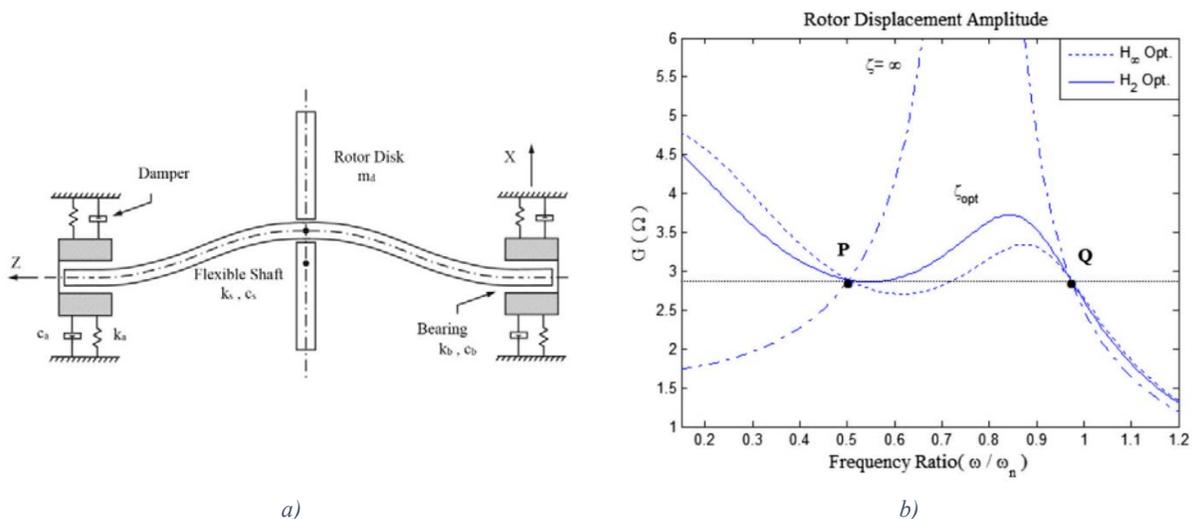


Figura 37. (a) Esquema del sistema analizado. (b) Gráfica de respuesta dinámica, comparación entre los métodos de optimización [35].

Por otra parte, Zapomel *et al.* [36] propusieron un elemento de soporte semiactivo que consiste en la combinación de un amortiguador magnetorreológico y un rodamiento hidrodinámico para el control de las vibraciones en un rotor tipo *Jeffcott*. Los resultados

obtenidos muestran que el incremento en el amortiguamiento del sistema magnetorreológico mejora el comportamiento del rotor, transformando la vibración caótica en regular y reduciendo la respuesta de desplazamiento.

En 2022, Wang *et al.* [37] investigaron numérica y experimentalmente el efecto de considerar los parámetros dinámicos de los soportes (masa, rigidez y amortiguamiento) en la respuesta de vibración del rotor, en lugar de considerar los soportes como rígidos. El esquema conceptual del rotor analizado se muestra en la Figura 38.

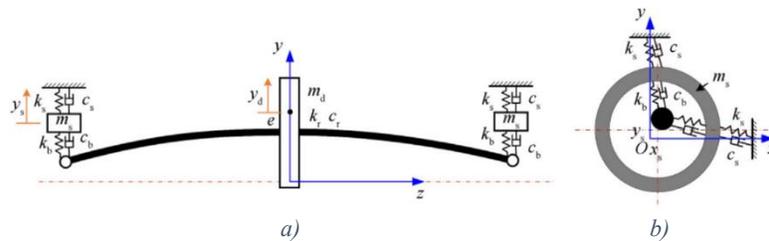


Figura 38. Esquema del sistema rotor-soporte. a) Diagrama del sistema rotodinámico. b) Movimiento de los soportes [37].

Además, estudiaron la influencia de las fuerzas dinámicas en la rigidez de los soportes. Establecieron que cuando una fuerza dinámica F_D es aplicada, la inercia de la masa crea una fuerza efectiva que actúa en dirección del movimiento, opuesta a la fuerza de rigidez. Esto es equivalente a una rigidez negativa y, como consecuencia, se reduce la rigidez de los soportes. Los autores establecen este efecto como rigidez dinámica y estudiaron su influencia en las vibraciones del sistema. Primero, analizaron un modelo rotor-soporte simple para estudiar la repercusión de los soportes sobre las velocidades críticas del rotor; después, estudiaron la rigidez dinámica en un soporte de un aero-motor y finalmente, incluyeron estos factores en una investigación sobre la respuesta de un rotor, modelado con dos discos para considerar la masa del soporte y su rigidez dinámica.

Los resultados de los tres casos considerados se presentan como sigue:

- 1) Al considerar el sistema masa-resorte-amortiguador del soporte, este induce al sistema una velocidad crítica extra; una velocidad crítica proviene del rotor y la otra

del soporte, debido a la resonancia de la estructura. Además, la magnitud de la primera velocidad crítica es menor que cuando se considera solo al rotor (Figura 39).

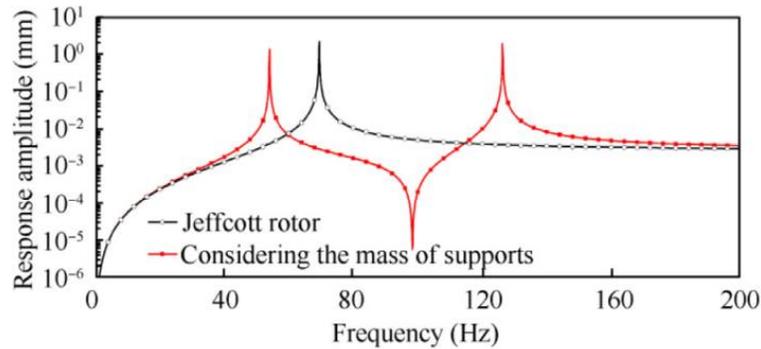


Figura 39. Respuesta dinámica del sistema al considerar los parámetros del rotor y los soportes [37].

- 2) Al analizar la rigidez dinámica del soporte, se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 3:

Tabla 3. Resultados del comportamiento de la rigidez dinámica.

	$\frac{\omega}{\omega_n} < 1$	$\frac{\omega}{\omega_n} \approx 1$	$\frac{\omega}{\omega_n} > 1$
Comportamiento de la rigidez dinámica	Los efectos dinámicos son mínimos y la rigidez estática es equivalente a la rigidez dinámica.	La rigidez dinámica se reduce hasta aproximadamente 1% del valor de la rigidez estática.	La rigidez dinámica toma un valor mayor que el de la rigidez estática.

- 3) Los resultados del rotor *Jeffcott* que considera los efectos dinámicos del soporte, mostraron que aparecieron tres velocidades críticas en lugar de las dos que se obtienen al despreciar la rigidez dinámica del rotor. Este es un comportamiento muy importante que debe considerarse al momento de establecer el rango de operación del rotor (Figura 40).

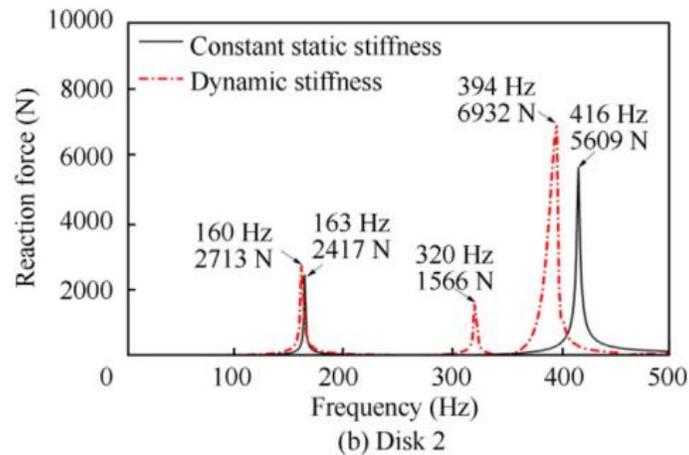


Figura 40. Gráficas de respuesta del último estudio realizado; comparación velocidades críticas [37].

Diversas investigaciones afirman que la implementación de los distintos tipos de absorbedores de vibración mejora el comportamiento dinámico del sistema principal; reduciendo la amplitud de vibración y el tiempo de la respuesta transitoria. Para obtener el mejor comportamiento del sistema, el absorbedor debe diseñarse bajo ciertos parámetros óptimos.

Existen diferentes metodologías de optimización, en las cuales se utiliza la función de respuesta en frecuencia (FRF). Den Hartog [38] desarrolló el método de puntos invariantes para optimizar el absorbedor de vibraciones convencional; dicho método se puede aplicar a otros dispositivos que sean de dos grados de libertad. Barredo *et al.* [39] extendieron la metodología de puntos invariantes para sistemas de tres grados de libertad.

Un método de optimización ampliamente aplicado en el análisis de absorbedores es el criterio H_{∞} , que consiste en la disminución de la máxima amplitud de respuesta del sistema, la cual ocurre en las frecuencias de resonancia. Nishihara y Asami [40] desarrollaron soluciones para el sistema de dos grados de libertad. Posteriormente, Asami *et al.* [41] extendieron la metodología a sistemas de múltiples grados de libertad.

Los métodos mencionados previamente se han aplicado en el estudio de dispositivos de control basado en inersores. Hu *et al.* [42] optimizaron aisladores de vibración mediante la teoría de puntos invariantes. Hu y Chen [10], Javidialesaadi *et al.* [43] y Mendoza-Larios

[44] utilizaron la norma H_∞ para encontrar los parámetros óptimos de sistemas DVA e IDVA, los cuales incluso han sido optimizados mediante otros criterios como el de H_2 .

Conclusiones del estado del arte

Los absorbedores de vibración han sido estudiados para reducir las respuestas dinámicas en diversas estructuras como puentes, aerogeneradores, edificios y rotores. En los sistemas rotodinámicos, se han abordado para resolver las vibraciones debidas a desbalance y a inestabilidades debidas al fluido de los cojinetes. Algunos investigadores han utilizado absorbedores pasivos colocando un dispositivo sobre el eje. Otros utilizan sistemas activos, normalmente con discos magnéticos montados sobre el eje, con los que aplican una fuerza que ha sido calculada con base en algún modelo de absorbedor de vibraciones.

Con respecto a los absorbedores pasivos, estos muestran ser efectivos para reducir la vibración, pero tienen la desventaja de necesitar una masa relativamente grande para conseguir buenos resultados. Esta desventaja, implica un área de aplicación importante para los inersores.

Buscando una mejora en el desempeño de los dispositivos de control de vibraciones, diversos investigadores han realizado estudios con los cuales comprueban que la implementación de un inersor mejora el comportamiento de estos sistemas de control de vibraciones tradicionales (absorbedores, aisladores o disipadores de energía). El efecto principal de un inersor es que puede reducir la masa necesaria del absorbedor de vibraciones, debido a que proporciona una masa virtual relativamente grande al sistema.

La optimización de los dispositivos de control con base en inersores, permite obtener un conjunto de parámetros para lograr la mejor respuesta del sistema. Ésta consiste en la menor amplitud de respuesta, un ancho de banda en frecuencia donde se presenta la menor amplitud de vibración a un valor constante, así como un comportamiento más estable. Si bien los inersores realizados experimentalmente presentan un buen funcionamiento solo en un rango de frecuencias de excitación, este rango resulta útil para su implementación en diversas máquinas.

Para finalizar, se han reportado investigaciones que presentan cómo los soportes del rotor influyen en su respuesta dinámica. Se han realizado mejoras sobre los rodamientos de soporte, tratando de influenciar sobre el rotor para reducir las vibraciones. Por esta razón mejorar los soportes del rotor también constituye un área de estudio de los absorbedores con base en inersores con el fin de reducir las vibraciones. Un absorbedor de vibraciones puede colocarse a lo largo de todo el rotor, incluyendo los soportes, e inherentemente, el grado de control del absorbedor sobre el rotor será influenciado por esta posición de instalación.

Capítulo 3

Planteamiento del problema

3.1. Definición del problema

La presencia de una masa desbalanceada en un rotor hará que este último presente vibraciones debido a fuerzas inerciales que dependen de la velocidad de rotación. Cuando en un estado de operación de una máquina rotativa no es aceptable el nivel de vibración, se debe aplicar un método para controlar su respuesta dinámica, como son las técnicas de balanceo o el uso de dispositivos de control de vibración.

Se ha demostrado en diversas investigaciones, que la incorporación de dispositivos de control pasivos en rotores minimiza su respuesta dinámica ante una fuerza de excitación. Sumado a esto, investigadores han reportado un aumento en la eficiencia de reducción de vibraciones al implementar un dispositivo inersor en diversos tipos de estructuras. Los resultados de estas investigaciones afirman que los dispositivos de control pasivo con inersores tendrán un mayor control de la respuesta dinámica de un sistema en comparación con los dispositivos convencionales con los mismos parámetros de diseño (exceptuando la inertancia), o que pueden igualar su nivel de control con un diseño más compacto.

Por las razones plasmadas anteriormente, se hace la observación de que aplicar dispositivos de control pasivo basados en inersor, como los *Tuned Inerter Dampers* (TID) o los *Inerter-based Dynamic Vibration Absorbers* (IDVA) sobre el sistema rotor-cojinete proporciona una manera de controlar las vibraciones del rotor sin la necesidad de efectuar repetidos balanceos.

3.2. Hipótesis

La aplicación de dispositivos de control de vibraciones pasivos con base en inersores, tipo TID e IDVA, permitirá controlar la respuesta de vibración de un sistema rotodinámico en resonancia debido por desbalance, sin la necesidad de identificar el desbalance presente en el sistema.

3.3. Objetivo general

Analizar el efecto de los dispositivos TID e IDVA en la respuesta de vibración de un sistema rotodinámico para el control de vibraciones por desbalance.

3.3.1. Objetivos específicos

- 1) Obtener el modelo matemático del sistema rotor-cojinete con los dispositivos TID e IDVA.
- 2) Aplicar un método de optimización para minimizar la amplitud de las vibraciones en estado estable, en las frecuencias de resonancia.
- 3) Obtener los parámetros óptimos de diseño con los cuales el absorbedor de vibraciones tendrá un comportamiento idóneo, manteniendo la amplitud de vibración baja y un rango de frecuencia estable en el sistema rotor-cojinete.
- 4) Realizar simulaciones de elemento finito del sistema para corroborar los resultados del modelo analítico.

3.4. Justificación del problema

Los rotores están presentes en muchas y diversas máquinas que se utilizan día a día. Sin embargo, se debe tener cuidado de las vibraciones cuando estos elementos trabajan cerca de sus velocidades de resonancia. La presencia del desbalance es inevitable. Los métodos de balanceo son una propuesta de solución, pero requieren del transporte del rotor al lugar en donde se tiene la máquina para realizar el proceso y/o de la asistencia a la ubicación del rotor de un profesional, además de que se requieren de repetidos ciclos de arranque y detenimiento del rotor para aplicar las metodologías desarrolladas, lo que implica gastos de energía y

económicos; esto sin olvidar que la mayoría de las metodologías son para rotores simétricos. La presencia de desbalance en rotores asimétricos se torna en un problema mucho más complejo, donde las metodologías de balanceo son más difíciles y se tiene menor cantidad de ellas.

Por lo tanto, el uso de dispositivos de control pasivo con base en inersores se presenta como una alternativa de solución para el problema de vibraciones, sin la necesidad de aplicar un método de balanceo. Estos dispositivos absorben, almacenan y disipan la energía de vibración, trabajando con base en los parámetros que caracterizan al rotor, en los cuales no influyen las posiciones de las masas desbalanceadas; esto presenta una ventaja contra los métodos de balanceo cuya base de aplicación consiste en ubicar las masas de desbalance. Además, los dispositivos de control trabajan con las variables cinemáticas (desplazamiento, velocidad y aceleración) del rotor, así que no se ve afectado por la forma ni el grado de simetría que adopta la respuesta del sistema principal, lo cual lo hace una solución atractiva que se puede extender para el control de vibraciones en rotores asimétricos.

3.5. Alcances y limitaciones

3.5.1. Alcances

- Los resultados son válidos para sistemas rotodinámicos con simetría geométrica y de soportes, y que presenten una distribución de discos con simetría respecto a la sección media del eje. Además, se consideran los efectos giroscópicos.
- Extensión de una metodología para incorporar dispositivos de control de vibraciones representadas por medio de redes mecánicas complejas a través del concepto de la admitancia mecánica, para analizar su influencia en la respuesta vibratoria de sistemas rotodinámicos.
- La metodología es válida para rotores con distintos números de discos (siempre que se mantenga la distribución simétrica) y para el primer modo de vibración (aunque se puede extender a más modos de vibración con un análisis más profundo).
- Análisis y comparación directa sobre los dispositivos TID e IDVA para el control de vibraciones de sistemas rotodinámicos.

3.5.2. Limitaciones

- El estudio se realiza únicamente de forma numérica.
- El sistema rotodinámico se analiza considerando el modelo de dos grados de libertad.
- Se analiza el desempeño dinámico de las redes mecánicas, únicamente en el primer modo de vibración del rotor.
- Se analiza un sistema rotodinámico completamente simétrico.

Capítulo 4

Marco teórico

4.1. Vibraciones

Como se describe en [45] las vibraciones u oscilaciones son los movimientos que se repiten después de un intervalo de tiempo. Un sistema vibratorio incluye un medio para almacenar energía potencial (resorte), un medio para conservar energía cinética (masa o inercia) y un medio por el cual la energía se pierde gradualmente (amortiguador). La vibración de un sistema implica la transformación de energía potencial en energía cinética y de ésta en energía potencial, de manera alterna. Si el sistema se amortigua, una parte de su energía se disipa en cada ciclo de vibración.

4.1.1. Frecuencia natural

La frecuencia natural de un sistema es la frecuencia con la cual el sistema vibra por sí mismo después de una perturbación inicial, sin la acción de fuerzas externas. Un sistema vibratorio con n grados de libertad, tendrá n frecuencias naturales. La ecuación (6) representa la frecuencia natural de un sistema modal.

$$\omega_i = \left(\frac{k_i}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ grados de libertad.

4.2. Modelo dinámico de un rotor

Las máquinas rotativas se utilizan en diversas aplicaciones prácticas. El sistema más sencillo consiste en montar un rotor pesado sobre una flecha flexible ligera que está apoyada en

rodamientos. Los sistemas rotodinámicos se ven afectados por vibraciones inducidas por desbalance; habrá desbalance en todos los rotores debido a errores de fabricación. Estos desbalances, sumado a otros efectos, como la rigidez y amortiguamiento de la flecha, y fricción de fluido en rodamientos, harán que la flecha se flexione de una manera complicada a ciertas velocidades de rotación conocidas como velocidades de remolineo o críticas. El remolineo se define como la rotación del plano formado por la línea de centros de los rodamientos y la flecha flexionada (Figura 41). Una velocidad crítica existe cuando la frecuencia de rotación de un eje es igual a una de sus frecuencias naturales. Cuando la velocidad de rotación es igual a la velocidad crítica, el rotor experimenta grandes deflexiones y la fuerza transmitida a los rodamientos puede provocar la falla en estos.

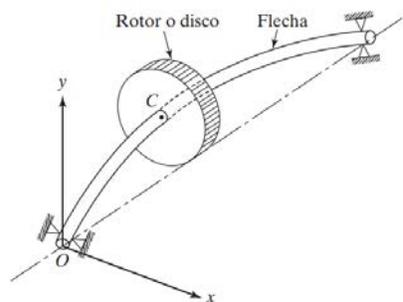


Figura 41. Remolineo de un rotor [45]

El modelo matemático de un rotor que vibra bajo el efecto de las fuerzas inerciales por desbalance, se obtiene mediante un análisis de energía, como lo describen Lalanne y Ferraris [46]. Se realiza un cálculo de energía para cada elemento que compone al rotor, los cuales son: el disco, el eje, los cojinetes y la masa de desbalance. El disco, el eje y la masa de desbalance se caracterizan con las expresiones de energía cinética, mientras que la energía potencial caracteriza la rigidez del eje. Los soportes se caracterizan calculando el trabajo virtual que generan las fuerzas sobre el eje.

4.2.1. Disco

Se asume que el disco es rígido y se caracteriza solamente por su energía cinética. Si $R_0(XYZ)$ es un marco de referencia inercial y $R(xyz)$ es un marco de referencia fijo al disco;

entonces, el marco xyz está relacionado al marco inercial XYZ a través de un conjunto de tres ángulos ψ, θ, ϕ , como se observa en la Figura 42.

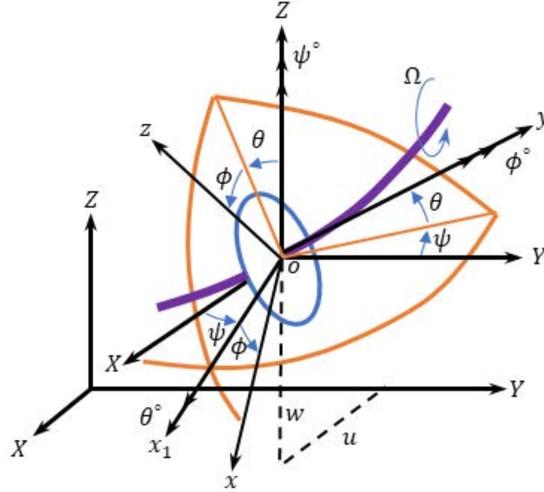


Figura 42. Marcos de referencia del disco unido a un eje en rotación [46].

La velocidad angular instantánea con respecto al marco de referencia xyz se establece en la Ecuación (7)

$$\omega_{R/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \quad (7)$$

La energía cinética del disco con respecto a su centro de masa se calcula utilizando el marco de referencia R . En este marco el vector de velocidad angular es (Ec. (8)):

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

Estableciendo u y w como las coordenadas del centro de masa del disco con respecto a R_0 , haciendo que v sea constante, y expresando la masa del disco como M_D , el tensor de inercia es:

$$I_D = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Si se considera un disco simétrico, ángulos θ y ψ pequeños, y una velocidad angular constante; entonces, la energía cinética del disco es:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (10)$$

Donde Ω , es la velocidad de rotación del eje, de acuerdo con la simbología de la Figura 42.

4.2.2. Eje

El eje se representa como una viga de sección circular y se caracteriza mediante el cálculo de energía cinética y energía elástica.

4.2.2.1. Energía cinética

La formulación de la energía cinética del eje es una extensión de las ecuaciones del disco.

Para un elemento de longitud L , la energía cinética se calcula con la Ecuación (11).

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (11)$$

Donde ρ es la densidad del material, S es el área de la sección transversal, I es el momento de inercia de área.

4.2.2.2. Energía potencial

De acuerdo con la Figura 43 y estableciendo C como el centro geométrico del eje, E como el módulo de Young del material, la energía elástica se calcula mediante la Ecuación (12).

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (12)$$

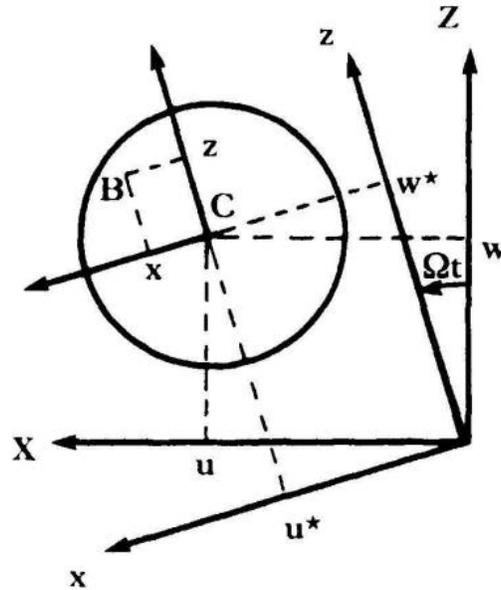


Figura 43. Coordenadas para caracterizar el eje, mediante energía elástica [46].

4.2.3. Masa de desbalance

El desbalance se define como una masa m_u situada a una distancia d del centro geométrico del eje. Este elemento se caracteriza mediante el cálculo de su energía cinética. Se supone que la masa de desbalance describe una trayectoria sobre un plano perpendicular al eje y , manteniendo constante su coordenada sobre dicho eje (Figura 44).

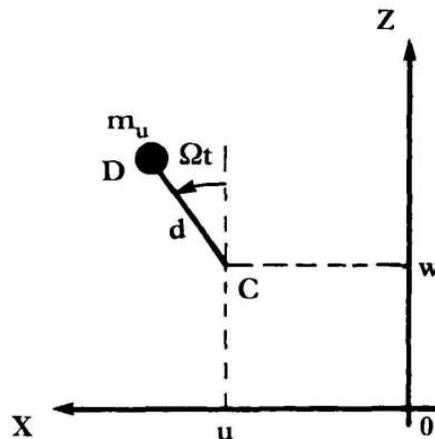


Figura 44. Sistema de coordenadas para caracterizar el desbalance [46].

Representando la posición del desbalance con respecto a R_0 mediante las coordenadas de la Ecuación 13, y la velocidad con la ecuación 14, se tiene:

$$OD = \begin{bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ constante \\ w + d \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$V_{OD} = \frac{d(OD)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (14)$$

La energía cinética de la masa de desbalance es (Ecuación 15):

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (15)$$

Donde el término $\frac{m_u \Omega^2 d^2}{2}$ no tiene influencia en la respuesta de vibración y debido a que la masa de desbalance es mucho menor que la masa del disco, los dos primeros términos se desprecian. La expresión para el cálculo de la energía cinética se reduce a (Ec. 16).

$$T_u = \Omega d m_u (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (16)$$

4.2.4. Soportes y cojinetes

Si se conocen la rigidez y el amortiguamiento del cojinete (Figura 45) y despreciando la influencia de la flexión del eje en la ubicación del cojinete, el trabajo virtual que generan las fuerzas de los soportes sobre el eje se expresa como se muestra en las Ecuaciones (17) y (18).

$$\delta W = -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zx} \dot{u} \delta w \quad (17)$$

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (18)$$

Donde F_u y F_w son las componentes generalizadas de las fuerzas ejercidas por el cojinete.

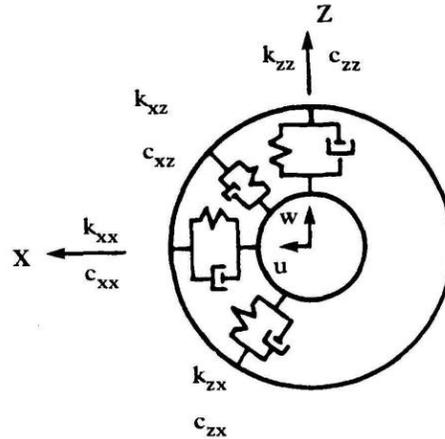


Figura 45. Esquema de un cojinete y sus parámetros de rigidez y amortiguamiento [46].

4.2.5. Funciones de forma

El modelado de un sistema rotodinámico, con eje y discos de sección transversal constantes, como el que se presenta en la Figura 46a, se realiza inicialmente estableciendo una función que describa la forma que tomará el rotor al vibrar. La función se define como función de forma y depende del modo de vibración que se analizará. El primer modo de vibración se estudia con una función de forma seno de medio ciclo. La función seno de ciclo completo puede describir el segundo modo de vibración para diversos sistemas, dependiendo de la distribución de discos del rotor.

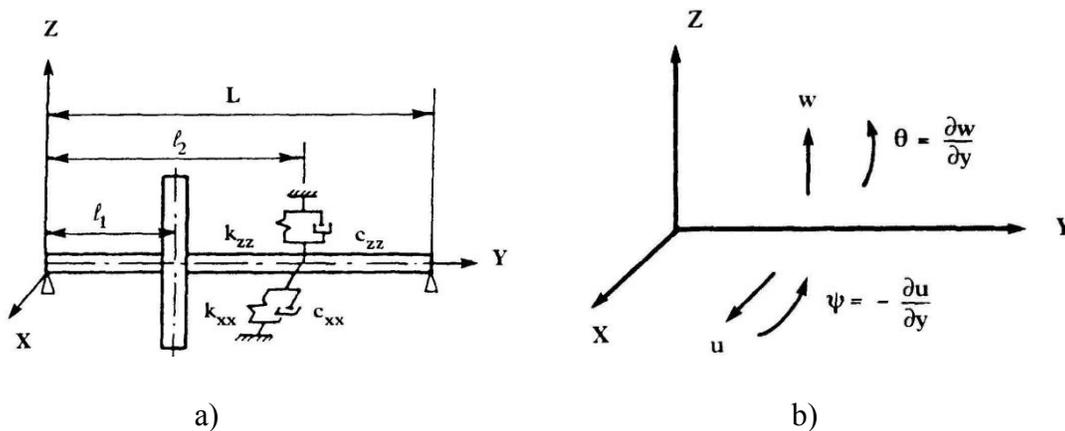


Figura 46. a) Sistema rotodinámico, b) Coordenadas para las deformaciones del eje [46].

La función de forma se expresa como $f(y)$, entonces las coordenadas u, w se expresan como se presenta en las Ecuaciones (19)-(20).

$$u(y, t) = f(y)q_1(t) \quad (19)$$

$$w(y, t) = f(y)q_2(t) \quad (20)$$

Considerando que los desplazamientos angulares ψ y θ son pequeños (Figura 46b), entonces las deformaciones angulares se expresan como (Ecs. (21)-(22)):

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y)q_2 \quad (21)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 = -g(y)q_1 \quad (22)$$

Las derivadas de segundo orden de u, w para el cálculo de la energía elástica se presentan en las Ecuaciones (23) y (24):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} q_1 = h(y)q_1 \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} q_2 = h(y)q_2 \quad (24)$$

Al emplear las Ecuaciones (19)-(24) las expresiones de energía toman la forma de las Ecuaciones (25) y (26).

$$T = T_D + T_s = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega a \dot{q}_1 q_2 \quad (25)$$

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L h(y)^2 dy (q_1^2 + q_2^2) = \frac{1}{2} K (q_1^2 + q_2^2) \quad (26)$$

Donde M, K, a son los parámetros modales del rotor que describen su comportamiento como un sistema masa-resorte equivalente con influencia de efectos giroscópicos. Las ecuaciones de movimiento del modelo, resultan de la aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange (Ec. (27)).

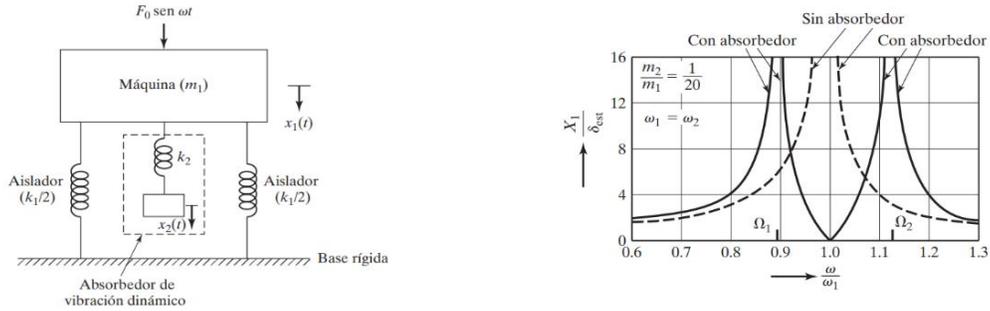
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (27)$$

4.3. Absorbedores de vibración

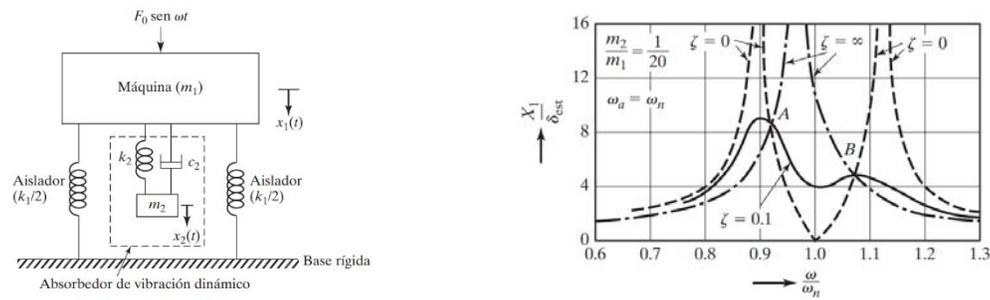
El absorbedor de vibraciones, también llamado absorbedor de vibración dinámico, es un dispositivo mecánico que se utiliza para reducir o eliminar la vibración indeseable. Se compone de otra masa y resorte agregadas a la masa principal que tiene que ser protegida contra vibración (Figura 47). Por lo tanto, la masa principal y la masa del absorbedor constituyen un sistema de dos grados de libertad, de ahí que el nuevo sistema tenga dos frecuencias naturales.

Una máquina o sistema puede experimentar vibración excesiva si en ella actúa una fuerza cuya frecuencia de excitación casi coincida con una frecuencia natural del sistema. En tales casos, la vibración del sistema se puede reducir por medio de un neutralizador de vibración o absorbedor de vibración dinámico.

Este se diseña de modo que las frecuencias naturales del sistema resultante se alejen de la frecuencia de excitación y se utiliza comúnmente en maquinaria que opera a velocidad constante, porque se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo sólo dentro de una banda angosta de frecuencias. Los dispositivos pueden ser sin o con amortiguamiento, como se indica en las Figuras 47a y 47b.



a) Modelo masa-resorte incorporando un absorbedor de vibraciones sin amortiguamiento



b) Modelo masa-resorte incorporando un absorbedor de vibraciones amortiguado

Figura 47. Sistemas masa-resorte incorporando absorbedores de vibración convencionales [45].

4.4. Inersores

Los inersores son dispositivos introducidos para completar la analogía de circuitos mecánicos y eléctricos, siendo este el tercer elemento que completa el circuito resorte-amortiguador-inersor. Un inersor es un dispositivo mecánico de dos terminales, en el que las fuerzas que genera son proporcionales a la aceleración en sus terminales (como se muestra en la ecuación (1), repetida en esta sección). Malcolm en [1] presenta diversos dispositivos inersores, analizando su diagrama y modelo matemático para el cálculo de su inercia.

$$F(t) = b(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) \quad (1)$$

donde b es la inercia, $b > 0$.

Estudios científicos han demostrado que la implementación de inersores dentro de dispositivos de control de vibración, presenta beneficios en la respuesta dinámica del sistema principal, tales como: reducción de la amplitud de vibración, aumento en el ancho de banda de control, disminución en el tiempo de estabilización en vibración libre. Hu y Chen [10] analizaron seis redes mecánicas que permiten integrar el inersor para formar dispositivos IDVA. Reportaron que cuatro de las redes presentan una mejora notable en el comportamiento comparado con el DVA convencional; además, utilizando tres de esas redes se forman dispositivos de control de vibración conocidos como TID. La conexión en serie de un resorte con un inersor, agrega un grado de libertad extra al sistema.

4.5. Optimización

Los absorbedores de vibración convencionales, y con base en inersores, se deben diseñar bajo ciertos parámetros que generen en el sistema principal la respuesta de vibración más estable y de menor amplitud. Las metodologías de optimización se trabajan utilizando la función de respuesta en frecuencia (FRF) o la función de transferencia.

Un proceso de optimización permite obtener expresiones o valores numéricos de parámetros con los cuales se obtendrá la mejor respuesta del sistema, que dependerá del enfoque escogido. Por ejemplo, la norma H_{∞} reduce la amplitud de respuesta de los valores máximos de la función; por otra parte, el método de puntos invariantes reduce la amplitud de puntos específicos de dicha función; y el criterio H_2 optimiza en función de la máxima disipación de energía.

4.5.1. Método de puntos invariantes

La metodología de puntos invariantes propuesta por Den Hartog [38] se emplea en sistemas de dos grados de libertad; como son los DVA convencionales y los sistemas TID. Estos sistemas tienen tres variables (una independiente y dos dependientes): relación de masa (variable independiente), relación de frecuencia y relación de amortiguamiento; cuyos valores permiten diseñar los elementos masa, resorte y amortiguador del absorbedor y el TID.

Este método se basa en la calibración a la misma amplitud de dos puntos, que se denominan puntos invariantes (puntos A y B en la Figura 48); los cuales, dependen únicamente de la relación de frecuencias. Posteriormente, se optimiza la relación de amortiguamiento ζ

mediante un criterio de derivadas o evaluando la función en una frecuencia intermedia de los puntos invariantes [44]. Un ejemplo de respuesta optimizada para un DVA convencional se presenta en la Figura 48b.

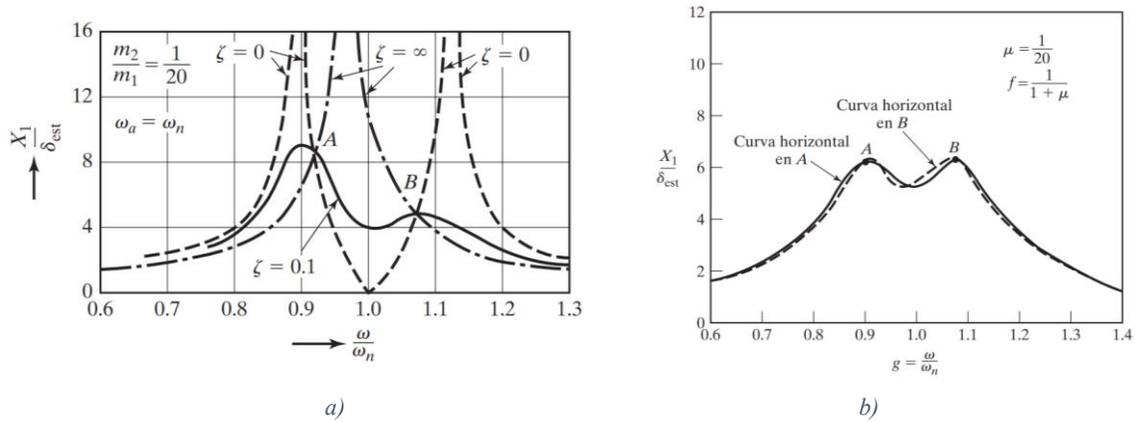


Figura 48. Optimización de un absorbedor de vibraciones. a) Gráfica con calibración de puntos invariantes. b) Gráfica de respuesta optimizada [45].

4.5.2. Método extendido de puntos invariantes

Barredo *et al.* [39] extendieron el método de puntos invariantes a sistemas de tres grados de libertad (Figura 49), como son los IDVA. Este método consiste en la calibración a la misma amplitud de cuatro puntos invariantes. Posteriormente, se iguala la amplitud en los puntos máximos de la función con la de los puntos invariantes para obtener la relación de amortiguamiento.

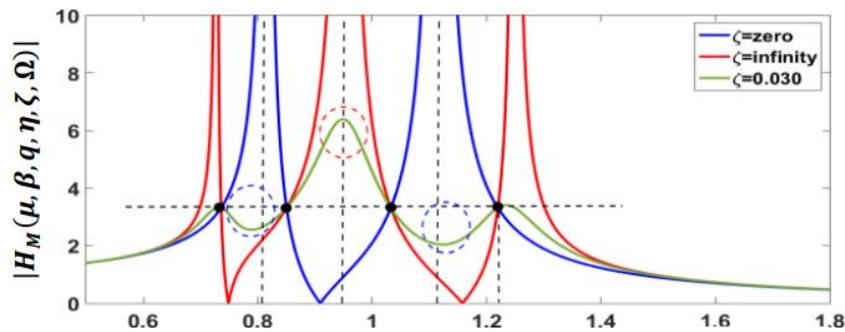


Figura 49. Metodología extendida de los puntos invariantes [39].

Los sistemas IDVA cuentan con cinco variables: una independiente, que es la relación de masa del absorbedor; y cuatro independientes, que son: la relación de inercia, relación de

frecuencia absorbedor-sistema principal, relación de frecuencias inersor-absorbedor y la relación de amortiguamiento.

4.6. Optimización H_∞

La metodología de optimización H_∞ es un criterio ampliamente utilizado en las investigaciones de sistemas de control de vibración. Consiste en igualar la amplitud de los máximos de la función de respuesta en frecuencia (o de la función de transferencia) y posteriormente reducirlos al valor mínimo posible, sujeto a criterios de valores posibles para las variables que se involucran en dicha función.

Esta norma de optimización conduce a la solución de un sistema de ecuaciones altamente no lineal. La Ecuación (28) representa la función objetivo de esta metodología.

$$\min_{\text{parámetros} \geq 0} \left(\max_{\Omega_{max}} G^2(\Omega_{max}) \right) \quad (28)$$

Donde G representa la función de respuesta en frecuencia adimensional y Ω_{max} la razón de frecuencia adimensional donde ocurren los valores máximos. La función G se utiliza para formar la función f_n (Ecuación 30).

$$G^2 = \frac{N(\Omega)}{D(\Omega)} = h \quad (29)$$

$$f_n(\Omega) = D(\Omega) - \frac{N(\Omega)}{h} = 0 \quad (30)$$

Se introduce una nueva variable r (Ec. 31); al minimizar la variable r se reduce la amplitud del cuadrado de la respuesta h . Esto genera una condición (y, por lo tanto, una ecuación) que es inherente al método; la cual es que la derivada total de r debe ser igual a cero (Ec. 32).

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} \quad (31)$$

$$dr = 0 \quad (32)$$

4.6.1. Optimización H_∞ para sistemas de dos grados de libertad

Nishihara y Asami [40] desarrollaron la metodología para analizar absorbedores de vibración con dos grados de libertad. En estos dispositivos, la función f_n toma la forma de la Ecuación (33), donde $\lambda = \Omega^2$.

$$f_n(\lambda) = \lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 \quad (33)$$

La existencia de dos raíces dobles permite expresar la Ecuación (33) de forma factorizada como (Ec. (34)):

$$f_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_A)^2(\lambda - \lambda_B)^2 \quad (34)$$

La aplicación del teorema de Vieta, permite obtener las Ecuaciones (35)-(38).

$$b_1 = -2(\lambda_A + \lambda_B) \quad (35)$$

$$b_2 = \lambda_A^2 + 4\lambda_A\lambda_B + \lambda_B^2 \quad (36)$$

$$b_3 = -2\lambda_A\lambda_B(\lambda_A + \lambda_B) \quad (37)$$

$$b_4 = \lambda_A^2\lambda_B^2 \quad (38)$$

Empleando las Ecuaciones (33)-(38) y eliminando λ_A y λ_B de las ecuaciones (35)-(38), se obtienen las Funciones $F1$ y $F2$ (Ec. (39) y (40)).

$$F1 = b_1\sqrt{b_4} - b_3 = 0 \quad (39)$$

$$F2 = \frac{b_1^2}{4} + 2\sqrt{b_4} - b_2 = 0 \quad (40)$$

El problema de optimización consiste en la solución de las ecuaciones (39), (40) y de la expresión obtenida para la Ecuación (32).

4.6.2. Optimización H_∞ para sistemas de tres grados de libertad

Asami *et al.* [41] extendieron el método de optimización de forma general para un sistema de múltiples grados de libertad; utilizando la matriz Jacobiana para obtener las ecuaciones necesarias de acuerdo con la condición de la Ecuación (32).

Para sistemas de tres grados de libertad, la función f_n es como se presenta en la Ecuación (41) y de forma factorizada, se expresa como se muestra en la Ecuación (42).

$$f_n(\lambda) = \lambda^6 + b_1\lambda^5 + b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_4\lambda^2 + b_5\lambda + b_6 = 0 \quad (41)$$

$$f_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_A)^2(\lambda - \lambda_B)^2(\lambda - \lambda_C)^2 = 0 \quad (42)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso de dos grados de libertad se llega a las Ecuaciones (43)-(45).

$$F1 = (4b_2 - b_1^2)\sqrt{b_6} + 4b_5 = 0 \quad (43)$$

$$F2 = b_1b_5 + 4b_6 + 2b_3\sqrt{b_6} = 0 \quad (44)$$

$$F3 = 4b_6(b_1\sqrt{b_6} + b_4) - b_5^2 = 0 \quad (45)$$

El problema de optimización para sistemas de tres grados de libertad consiste en la solución de un sistema de cinco ecuaciones simultáneas: Ecuaciones (43)-(45), más dos ecuaciones que se obtienen al aplicar el método de la Jacobiana descrito por Asami [41] para cumplir la condición de la Ecuación (32).

4.7. Solución de sistemas de ecuaciones no lineales: método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un método multidimensional iterativo que se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas no lineales. Como cualquier método iterativo, requiere uno o más valores supuestos para iniciar el cálculo (valores iniciales); posteriormente, los utiliza para obtener una nueva solución que se aproxime a la correcta. Este proceso se repite hasta que converge a una solución suficientemente próxima a la real.

Al ser un método iterativo, no existe garantía de que el cálculo convergerá. La solución puede divergir y dar soluciones sucesivas que se alejan de la correcta, en especial si los valores iniciales no se aproximan lo suficiente a la solución real.

El método de Newton-Raphson es una extensión del método de Newton para encontrar la solución de una ecuación no lineal en una variable independiente. Una función no lineal tiene múltiples raíces, donde una raíz se define como la intersección de la función con cualquier línea recta. Por lo general el eje cero de la variable independiente.

Con el objetivo de presentar el funcionamiento del método de Newton-Raphson, se inicia con un análisis unidimensional. En la Figura 50 se presenta una función cúbica graficada en un rango de x . Se escoge un valor inicial x_1 , entonces el algoritmo de Newton evalúa la función con x_1 y se calcula y_1 . El valor de y_1 se compara con una tolerancia seleccionada cercana a cero. Si y_1 se aproxima lo suficiente a cero, entonces se llama a x_1 la raíz. Si no, entonces la pendiente (m) de la función se calcula para x_1 . Luego se evalúa la ecuación de la pendiente (m) para determinar su intersección con el eje x , a este punto se le denomina x_2 , el cual se utiliza como un nuevo valor inicial. Se determina y_2 , el cual se compara contra la tolerancia. El proceso se repite hasta que el valor de la función y_i se aproxima a cero y al valor x_i correspondiente se la llama la raíz de la función.

El método de Newton es sensible al valor inicial supuesto; puede divergir de la solución o comportarse caóticamente. Sin embargo, es casi la única opción para sistemas de ecuaciones no lineales.

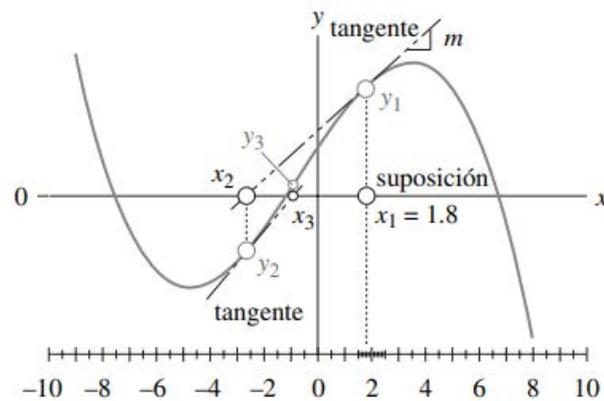


Figura 50. Método de solución de Newton-Raphson para una función no lineal en el caso unidimensional.

Método de Newton-Raphson para raíces multidimensionales

El método de Newton es fácil de ampliar a conjuntos de ecuaciones no lineales, múltiples y simultáneas. Inicialmente, se generalizan las expresiones del caso unidimensional. Se tiene la ecuación del método de Newton (Ecuación (46)).

$$x_{i+1} = x_i - \frac{y_i}{f'(x_i)} \quad (46)$$

Donde:

$$y_i = f(x_i) \quad (47)$$

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x \quad (48)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (47) y (48) en (46) se obtiene la Ecuación (49).

$$f'(x_i) * \Delta x = -f(x_i) \quad (49)$$

En el caso de la Ecuación (49), se introdujo el término Δx , el cual se aproximará a cero a medida que el cálculo converge hacia la solución; este término se debe comparar contra la tolerancia seleccionada. Es importante observar que la expresión (49) evita los términos de división, lo que permite extender la formulación a un sistema multidimensional expresado de forma matricial.

El problema multidimensional tendrá un conjunto de ecuaciones, expresados en forma de vector, como se muestra en la Ecuación (50):

$$B = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (50)$$

Se requieren las derivadas de las ecuaciones para obtener los parámetros de pendiente. Éstas se expresan de forma matricial como se muestra en la Ecuación (51):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Las derivadas parciales de la ecuación (51) forman la llamada matriz Jacobiana. Los términos de error se expresan en forma de vector como:

$$X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (52)$$

La ecuación de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales, multidimensionales, expresados de forma matricial se presenta en la Ecuación (53).

$$AX = -B \quad (53)$$

Capítulo 5

Modelado propuesto para un sistema rotodinámico como sistema masa-resorte con admitancia mecánica

5.1. Modelado de un sistema rotodinámico con soportes infinitamente rígidos

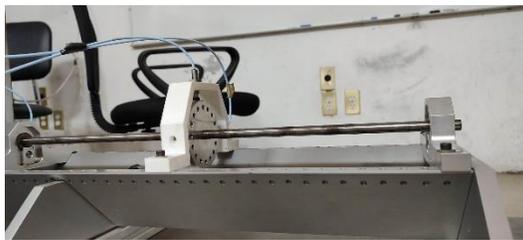
En este apartado se realiza la determinación del modelo del rotor siguiendo la metodología propuesta por Lalanne [46], con base en la energía del sistema y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange. Dependiendo de las características del rotor y de los soportes, este se clasifica como simétrico o asimétrico, y la trayectoria descrita por el rotor cambia entre estos dos sistemas; realizando un movimiento circular en el caso de rotores simétricos (subtema 4.2) y uno elíptico en el caso de asimétricos. Con base en la literatura, se presentan tres puntos importantes a considerar para realizar el desarrollo del modelo:

- Asimetría geométrica.
Se presenta cuando el eje del rotor tiene una sección no circular, lo cual indica diferente rigidez con respecto a los ejes principales de su sección transversal y debido a la rotación se experimenta una rigidez variable con respecto a un sistema inercial de referencia.
- Asimetría debido a soportes.
Esta asimetría es el resultado de la influencia de un soporte (o soportes) con características diferentes en las direcciones ortogonales x, z .
- Distribución no simétrica de discos en el rotor.
En este caso, los discos no están distribuidos de forma equidistante con respecto al centro del eje, lo cual influye en la función de forma $f(y)$ necesaria para realizar el

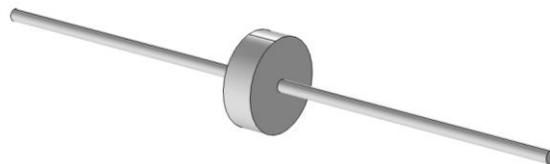
modelo cuando se analiza un modo de vibración. A diferencia de los dos casos anteriores, el rotor continúa describiendo una trayectoria de vibración característica de los rotores simétricos.

En este proyecto se desarrolla el modelo considerando un rotor con simetría tanto geométrica como de soportes, y con una distribución de discos equidistantes con respecto a la longitud media del eje.

Se realiza el modelado del rotor simétrico tipo *Jeffcott* sin influencia de soportes. El sistema está conformado por un eje circular, simplemente apoyado, que soporta un disco a la mitad y gira a una velocidad angular ω , como se observa en la Figura 51. Se analizará la primera forma modal. Con estas características del sistema, la función $f(y)$ necesaria será el medio ciclo de seno (como se indicará posteriormente).



a)



b)

Figura 51. a) Rotor de laboratorio, tipo *Jeffcott*. b) Representación virtual del rotor.

Siguiendo la teoría de Lalanne [46] para este modelo se establece una condición de desplazamiento cero en las direcciones laterales en los extremos del eje, esto es equivalente a tener rigidez infinita. Los parámetros del rotor se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. Parámetros del rotor.

Material: acero 4140			
Densidad (ρ): 7850 kg/m³			
Módulo de elasticidad (E): 200 GPa			
Eje		Disco	
Longitud (L)	0.50 m	Masa (M_D)	0.851588 kg
Radio (r)	0.005 m	Momento de inercia transversal (I_D)	34.906E-5 kg*m ²
Área (A)	7.85E-5 m ²		
Momento de inercia de área (I)	4.9087E-10 m ⁴	Momento de inercia polar (J_D)	60.94E-5 kg*m ²

En la Figura 52 se presenta el modelo y su orientación con respecto del sistema de referencia inercial fijo, también se definen ciertos parámetros que son de importancia para realizar el modelo del rotor.

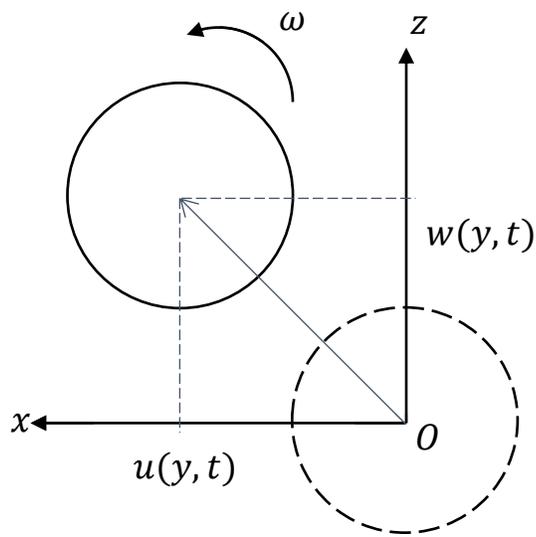
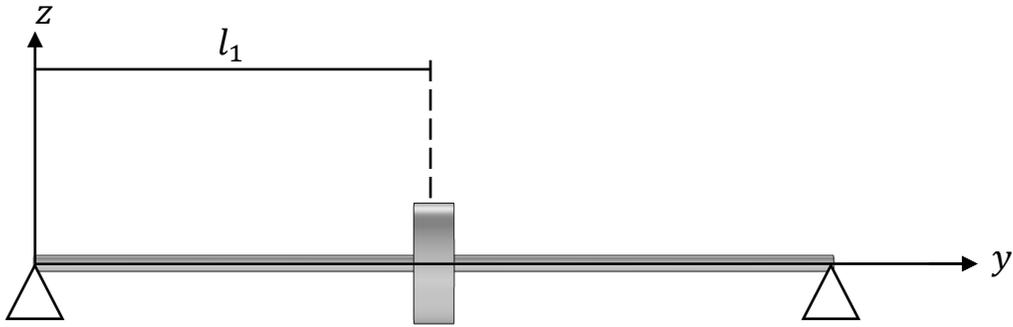


Figura 52. Orientación del rotor en el sistema de referencia fijo, y definición de las variables \$u, w\$.

Se observa que los desplazamientos laterales: \$u\$ y \$w\$ son funciones de dos variables:

$$u(y, t) = f(y) * q_1(t) \tag{54}$$

$$w(y, t) = f(y) * q_2(t) \tag{55}$$

Las variables de posición \$u, w\$ definen la posición del centroide del rotor para un tiempo \$t\$, a una distancia determinada y del eje.

Las ecuaciones para calcular la energía cinética y potencial de cada elemento son:

Disco

$$\begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{cinética} \end{array} \quad \frac{1}{2} [f^2(l_1) * M_D + g^2(l_1) * I_D] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - J_D \omega g^2(l_1) \dot{q}_1 q_2 \quad (56)$$

Eje

$$\begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{cinética} \end{array} \quad \frac{1}{2} \left[\rho A \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I \omega \int_0^L g^2(y) dy \dot{q}_1 q_2 \quad (57)$$

$$\begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{potencial} \end{array} \quad \frac{EI}{2} \left(\int_0^L h^2(y) dy \right) (q_1^2 + q_2^2) \quad (58)$$

Al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange en (56)-(58) con respecto a $q_1(t)$ y $q_2(t)$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(f^2(l_1) * M_D + g^2(l_1) * I_D + \rho A \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right) (2\ddot{q}_1(t)) - \\ & \left(2\rho I \omega \int_0^L g^2(y) dy + J_D \omega g^2(l_1) \right) (\dot{q}_2(t)) - m_a \omega^2 df(l_1) \text{sen}(\omega t) + \\ & \left(\frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy \right) (2q_1(t)) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(f^2(l_1) * M_D + g^2(l_1) * I_D + \rho A \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right) (2\ddot{q}_2(t)) + \\ & \left(2\rho I \omega \int_0^L g^2(y) dy + J_D \omega g^2(l_1) \right) (\dot{q}_1(t)) - m_a \omega^2 df(l_1) \text{cos}(\omega t) + \\ & \left(\frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy \right) (2q_2(t)) = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Cuando se analiza vibración libre, sin que el sistema esté girando, las ecuaciones (59) y (60) se reducen a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(f^2(l_1) * M_D + g^2(l_1) * I_D + \rho A \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right) (2\ddot{q}_1(t)) + \\ & \left(\frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy \right) (2q_1(t)) = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\frac{1}{2} \left(f^2(l_1) * M_D + g^2(l_1) * I_D + \rho A \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right) (2\ddot{q}_2(t)) + \left(\frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy \right) (2q_2(t)) = 0 \quad (62)$$

Si se analiza un sistema masa-resorte como el de la Figura 53 sobre las direcciones q_1 y q_2 , las ecuaciones de movimiento, después de calcular la energía del sistema y aplicar la ecuación de Euler-Lagrange, son:

$$\frac{1}{2} M (2\ddot{q}_1(t)) + \frac{1}{2} K (2q_1(t)) = 0 \quad (63)$$

$$\frac{1}{2} M (2\ddot{q}_2(t)) + \frac{1}{2} K (2q_2(t)) = 0 \quad (64)$$

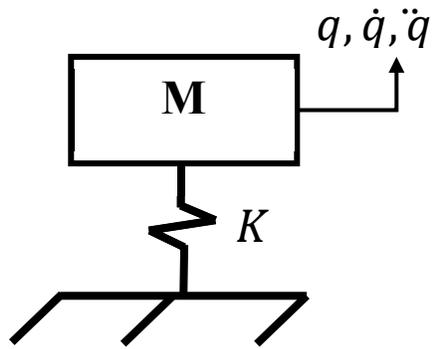


Figura 53. Sistema masa-resorte de 1 GDL con movimiento en dirección de una coordenada generalizada.

Observando que las ecuaciones (63) y (64) son equivalentes a las ecuaciones (61) y (62), se igualan los coeficientes para obtener una masa modal M y una rigidez modal K del rotor, las cuales dependerán de la función $f(y)$ del modo de vibración a estudiar.

$$M = f^2(l_1) * M_D + g^2(l_1) * I_D + \rho A \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \quad (65)$$

$$K = EI \int_0^L h^2(y) dy \quad (66)$$

De esta forma, las ecuaciones (19) y (20) ahora describen el comportamiento del rotor y el diagrama dinámico de la Figura 53 representa el movimiento del centro geométrico del rotor a lo largo de una de las coordenadas generalizadas.

La función $f(y)$ que describe la forma modal para el primer modo de vibración es el medio ciclo de la función seno, por lo tanto:

$$f(y) = \text{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (67)$$

$$g(y) = \frac{\pi}{L} * \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (68)$$

$$h(y) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (69)$$

Sustituyendo los parámetros de la Tabla 4 en las funciones (67) a (69) y evaluando en las ecuaciones (65) y (66) se obtienen los siguientes resultados:

$$M \approx 1 \text{ Kg}$$

$$K = 38\,252 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Y las ecuaciones de movimiento del modelo de la Figura 53 son:

$$\ddot{q}_1(t) + 38\,252 q_1(t) = 0 \quad (70)$$

$$\ddot{q}_2(t) + 38\,252 q_2(t) = 0 \quad (71)$$

La solución de estas ecuaciones proporciona la frecuencia natural del rotor, cuando no está girando.

$$\omega_n = \sqrt{38\,252} = 195.581 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 31.13 \text{ Hz}$$

Retomando las Ecuaciones (59) y (60) y estableciendo el parámetro

$$a = 2\rho I \int_0^L g^2(y) dy + J_D g^2(l_1) = 7.6 * 10^{-5} \text{ kg} \quad (72)$$

Las ecuaciones (59) y (60) se escriben de la forma:

$$M\ddot{q}_1(t) - a\omega\dot{q}_2(t) + Kq_1(t) = m_d\omega^2 d \text{ sen}(\omega t) \quad (73)$$

$$M\ddot{q}_2(t) + a\omega\dot{q}_1(t) + Kq_2(t) = m_d\omega^2 d \text{ cos}(\omega t) \quad (74)$$

Sustituyendo los parámetros del rotor se obtienen las Ecuaciones (75) y (76) que definen el comportamiento del rotor de la Figura 54.

$$\ddot{q}_1(t) - 7.6 * 10^{-5}\omega\dot{q}_2(t) + 38\ 252q_1(t) = m_d\omega^2 d \text{ sen}(\omega t) \quad (75)$$

$$\ddot{q}_2(t) + 7.6 * 10^{-5}\omega\dot{q}_1(t) + 38\ 252q_2(t) = m_d\omega^2 d \text{ cos}(\omega t) \quad (76)$$

Las Ecuaciones (73) y (74) (o (75) y (76)) permiten observar los fenómenos a considerar para un modelo general de un rotor simplemente apoyado, que son: Masa-Resorte-Efectos giroscópicos-Fuerza de excitación. Ahora se elabora la representación esquemática del modelo orientado sobre las direcciones q_1 y q_2 . Se escribe una expresión general utilizando las Ecuaciones (73) y (74) y el diagrama esquemático del modelo equivalente masa-resorte-efectos giroscópicos del rotor, se presenta en la Figura 54.

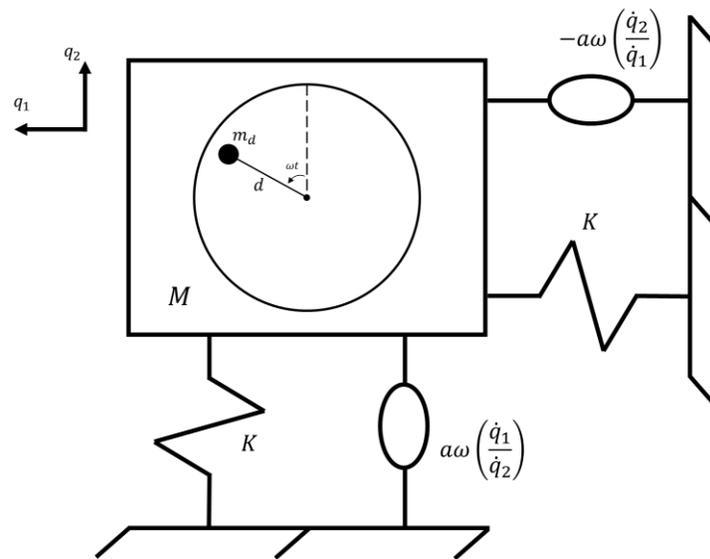


Figura 54. Modelo del rotor considerando efectos giroscópicos y fuerzas de desbalance.

En este trabajo se evalúa el modelo generado para tres configuraciones diferentes de rotores: 1) el rotor tipo *Jeffcott* modelado en la sección previa, 2) un rotor con parámetros tomados de la literatura, propuesto por Lalanne y Ferraris [46], y que se compone por un eje con dos discos ubicados cada uno a un tercio de la longitud del eje, de cada extremo y 3) un rotor de tres discos presentado en la literatura por Vance [47]. En la Tabla 5 y en la Figura 55 se presentan los parámetros modales y los modelos virtuales de los sistemas rotodinámicos, respectivamente; donde, el ϕ es un parámetro adimensional que se presenta en el subtema 5.3.

Tabla 5. Parámetros modales del rotor *Jeffcott* (laboratorio de CENIDET).

Parámetros modales			
	Rotor de un disco, tipo <i>Jeffcott</i>	Rotor de dos discos	Rotor de tres discos
K	3.825246E4 N/m	1.195389E6 N/m	1.353534E6 N/m
M	1.005765 kg	28.098931 kg	125.160618 kg
a	7.6E – 5 kg	5.740587 kg	1.443301 kg
ϕ	7.6E – 5	0.204299	0.011532

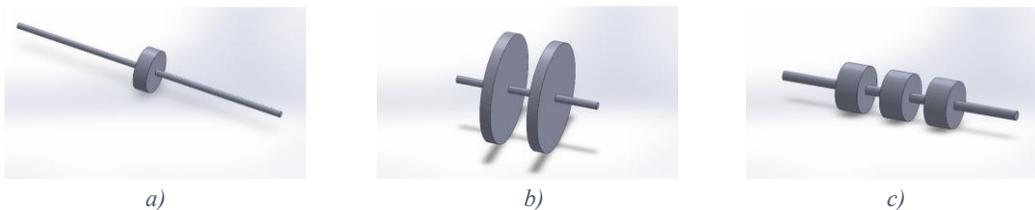


Figura 55. Diseño virtual de sistemas rotodinámicos: a) rotor de un disco tipo *Jeffcott*, b) rotor de dos discos y c) rotor de tres discos.

5.2. Influencia de soportes con rigidez y amortiguamiento finito

Siguiendo la teoría de Lalanne [46], el efecto que se genera al agregar un soporte depende de la posición l_2 a la que esté colocado (Figura 56) y, de la rigidez y amortiguamiento sobre cada dirección.

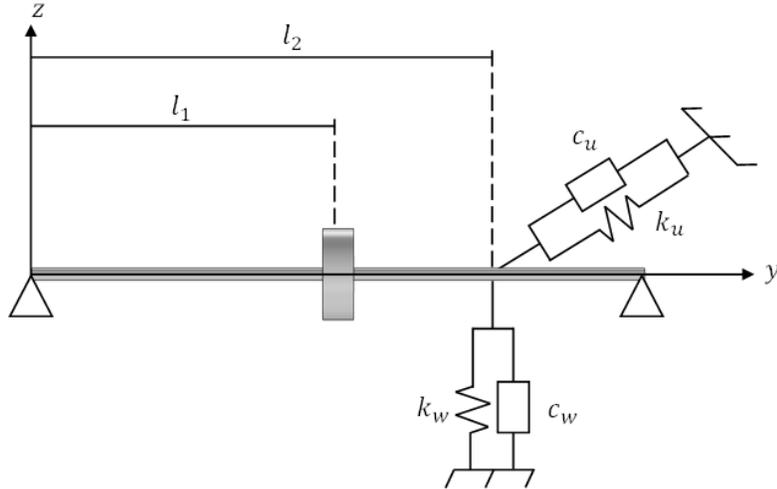


Figura 56. Diagrama del rotor considerando soportes.

Al considerar la ecuación del trabajo que genera el soporte sobre el rotor, se tiene:

$$dW = -K_u * u(t, l_2) * du(t, l_2) - K_w * w(t, l_2) * dw(t, l_2) - c_u * \dot{u}(t, l_2) * du(t, l_2) - c_w * \dot{w}(t, l_2) * dw(t, l_2) \quad (77)$$

Y sabiendo que:

$$u(t, l_2) = f(l_2) * q_1(t) \quad (78)$$

$$du(t, l_2) = f(l_2) * dq_1(t) \quad (79)$$

$$w(t, l_2) = f(l_2) * q_2(t) \quad (80)$$

$$dw(t, l_2) = f(l_2) * dq_2(t) \quad (81)$$

Se calculan las fuerzas externas que generan los soportes sobre el rotor, en la dirección de las coordenadas q_1 y q_2 , sustituyendo las Ecuaciones (78) a (81) en (77) (en este análisis no se incluyen los efectos cruzados de los soportes).

$$F_{q_1} = -K_u (f(l_2))^2 q_1(t) - c_u (f(l_2))^2 \dot{q}_1(t) \quad (82)$$

$$F_{q_2} = -K_w (f(l_2))^2 q_2(t) - c_w (f(l_2))^2 \dot{q}_2(t) \quad (83)$$

Sabiendo que las fuerzas ejercidas por el resorte y el amortiguador del soporte en el modelo masa-resorte son:

$$F_r = -K_m q(t)$$

$$F_a = -c_m \dot{q}(t)$$

El subíndice m indica que son parámetros considerados dentro del modelo masa-resorte, el subíndice r hace referencia al resorte y el subíndice a se refiere al amortiguador. Empleando las expresiones de las fuerzas del modelo en las ecuaciones (82) y (83), se obtiene:

$$K_{m u} = K_u (f(l_2))^2 \quad (84)$$

$$K_{m w} = K_w (f(l_2))^2 \quad (85)$$

$$c_{m u} = c_u (f(l_2))^2 \quad (86)$$

$$c_{m w} = c_w * (f(l_2))^2 \quad (87)$$

Las ecuaciones (84) a (87) presentan la influencia de los soportes en el modelo matemático del rotor para una forma modal a estudiar. En el caso general $K_{m u} \neq K_{m w}$ y $c_{m u} \neq c_{m w}$, esto implica un modelo asimétrico debido a las condiciones de los soportes, lo cual resulta en trayectorias elípticas del rotor en lugar de circulares, como se mencionó anteriormente. En este proyecto se trabaja en condiciones simétricas de los soportes. Las ecuaciones (84) a (87) se simplifican de la siguiente manera:

$$K_{m u} = K_{m w} = K_m = K_u * (f(l_2))^2 = K_w * (f(l_2))^2 \quad (88)$$

$$c_{m u} = c_{m w} = c_m = c_u * (f(l_2))^2 = c_w * (f(l_2))^2 \quad (89)$$

El efecto de la rigidez del soporte (K_m) se suma directamente a la rigidez modal del rotor, esto aumenta la rigidez total y la frecuencia natural para el caso de $\omega = 0$. El amortiguamiento es un término adicional que se agrega a las ecuaciones (73) y (74). Las ecuaciones de movimiento para el modelo de rotor con influencia de soportes son:

5.3. Ecuaciones de solución del modelo

Las ecuaciones (93) y (94) conducen a soluciones expresadas como vector complejo de la siguiente forma:

$$q_2(t) = Q_2 e^{j\omega t} \quad (94)$$

$$q_2(t) = Q_2 e^{j\omega t} \quad (95)$$

Sustituyendo las soluciones en la ecuación diferencial se obtiene la siguiente ecuación, representada en forma matricial. Para simplificar las expresiones; se considera $K_m = 0$, y se sustituye $c_m = c$.

$$\begin{bmatrix} -M\omega^2 + j\omega c + K & a\omega^2 \\ a\omega^2 & -M\omega^2 + j\omega c + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d d \omega^2 \\ m_d d \omega^2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Aplicando el teorema Pi de Buckingham se adimensionan las ecuaciones, utilizando los siguientes parámetros:

Factor de desplazamiento del rotor en la dirección q_1 .

$$G_1 = \frac{M * Q_1}{m_d * d}$$

Factor de desplazamiento del rotor en la dirección q_2 .

$$G_2 = \frac{M * Q_2}{m_d * d}$$

Frecuencia natural del rotor sin efectos giroscópicos (sin giro).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Frecuencia de la red mecánica.

$$\omega_b = \sqrt{\frac{K_1}{b}}$$

Relación de frecuencia de la red.

$$\gamma = \frac{\omega_b}{\omega_n}$$

Relación de amortiguamiento.

$$\zeta = \frac{c}{2 * M * \omega_n}$$

Parámetro de efectos giroscópicos

$$\phi = \frac{a}{M}$$

(depende de las características del rotor).

Razón de inercia-masa.

$$\delta = \frac{b}{M}$$

Relación de frecuencia forzada.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Sustituyendo estos parámetros en la ecuación (96), se obtiene el sistema matricial de forma adimensional.

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 + \frac{j Y_i \Omega}{\omega_n M} + 1 & \phi \Omega^2 \\ \phi \Omega^2 & -\Omega^2 + \frac{j Y_i \Omega}{\omega_n M} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 \\ \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (97)$$

La solución de la Ecuación (97) conduce a las siguientes expresiones:

$$G_1 = - \frac{\Omega^2 M \omega_n (-(\phi + 1)\Omega^2 - 1) M \omega_n + j Y_i \Omega}{((\phi - 1)\Omega^2 + 1)((\phi + 1)\Omega^2 - 1) M^2 \omega_n^2 + 2 j \Omega Y_i (\Omega + 1) M (\Omega - 1) \omega_n + \Omega^2 Y_i^2} \quad (98)$$

$$G_2 = - \frac{\Omega^2 M \omega_n (-(\phi + 1)\Omega^2 - 1) M \omega_n + j Y_i \Omega}{((\phi - 1)\Omega^2 + 1)((\phi + 1)\Omega^2 - 1) M^2 \omega_n^2 + 2 j \Omega Y_i (\Omega + 1) M (\Omega - 1) \omega_n + \Omega^2 Y_i^2} \quad (99)$$

Al observar las ecuaciones (98) y (99) se aprecia que $G_1 = G_2$. La solución presenta estas características debido a la simetría en los elementos mecánicos del modelo para ambas direcciones. Por lo tanto, la trayectoria que describe el rotor continúa siendo circular y el comportamiento es el mismo en las direcciones q_1 y q_2 .

El hecho de que G_1 y G_2 tengan la misma expresión, indica que hacen referencia al mismo vector, cuyas componentes representan los desplazamientos en las direcciones q_1, q_2 . Entonces el vector respuesta es:

$$G = - \frac{\Omega^2 M \omega_n (- ((\phi + 1)\Omega^2 - 1) M \omega_n + j Y_i \Omega)}{((\phi - 1)\Omega^2 + 1)((\phi + 1)\Omega^2 - 1) M^2 \omega_n^2 + 2 j \Omega Y_i (\Omega + 1) M (\Omega - 1) \omega_n + \Omega^2 Y_i^2} \quad (100)$$

Interpretación gráfica del vector G

En la Figura 58 se observan los vectores de desbalance ($dm_d \omega^2$) y respuesta (G) en fase sobre el plano complejo, el cual tiene los ejes ortogonales alineados con las direcciones q_1 , q_2 . Las ecuaciones de movimiento en estas coordenadas generalizadas son la proyección del vector G sobre los ejes real e imaginario del plano. Como se percibe en la ecuación (100), G es un número complejo: $G = a_1 - j b_1$.

Se tiene entonces que el vector G , en fase con el desbalance es:

$$\vec{G} = G e^{j\omega t} \quad (101)$$

$$G = a_1 - j b_1 = |G| e^{-j\theta} \quad (102)$$

$$|G| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (103)$$

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \quad (104)$$

$$\vec{G} = |G| e^{j(\omega t - \theta)} \quad (105)$$

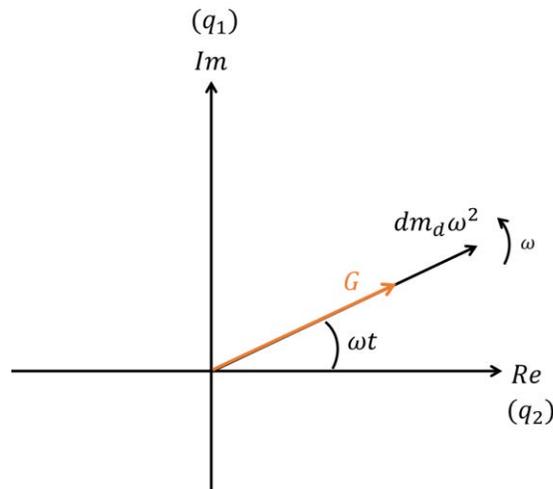


Figura 58. Representación de los vectores de excitación por desbalance y de respuesta, en el plano complejo.

La Ecuación (105) indica que la respuesta está desfasada un ángulo θ con respecto a la excitación, donde $|G|$ es el módulo del número complejo (Ecuación (103)) y magnitud del vector respuesta (Ecuación (105)).

Para reducir la respuesta de vibración es necesario minimizar la magnitud de $|G|$. En la Figura 59 se observa que el vector G describe la circunferencia adimensional de la trayectoria que toma el rotor al vibrar; por lo tanto $|G|$ representa el radio de este círculo. Se debe notar que los ejes real e imaginario, y las direcciones generalizadas q se encuentran alineadas.

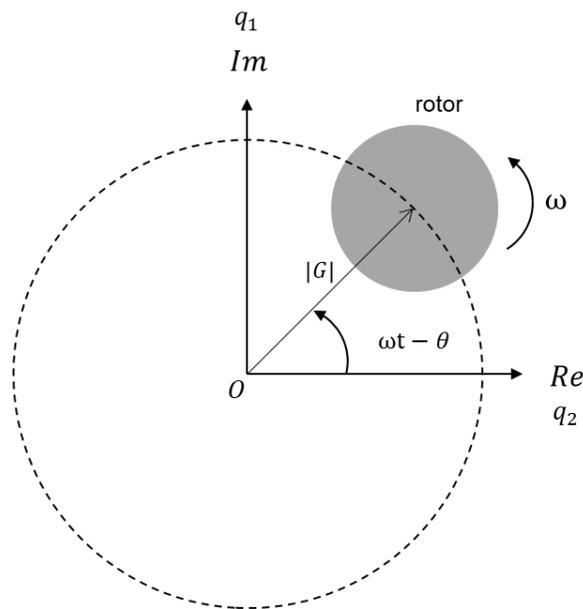


Figura 59. Trayectoria de movimiento del rotor simétrico, en forma adimensional.

5.4. Análisis de redes mecánicas y la admitancia mecánica

Una combinación de elementos mecánicos en serie y paralelo (Figura 15), conocida como red mecánica, puede ser sustituida por un elemento de tipo amortiguador equivalente, con un coeficiente que entregue el efecto de la red; a este coeficiente se le denomina admitancia mecánica. Además, este elemento puede expresarse en forma de un resorte o inersor equivalente dependiendo de si su respuesta será función del desplazamiento o aceleración; pero, representarlo en forma de amortiguador mantiene el enfoque de la analogía fuerza-corriente entre sistemas mecánicos y eléctricos, y es el que se utiliza en esta investigación.

En la Figura 15 se observan las seis configuraciones básicas, analizadas por Hu *et al* [10]. Para integrar estas redes al modelo, se expresan en forma de un amortiguador equivalente y se calcula la admitancia Y_i , de esta forma es posible sustituirla directamente en la Ecuación (100).

La ecuación de fuerza de un elemento considerado como amortiguador equivalente en el dominio de Laplace es la siguiente:

$$F = c_{eq}s(X_1(s) - X_2(s)) \quad (106)$$

Para obtener el coeficiente de amortiguamiento equivalente de un resorte, un amortiguador y un inersor, se igualan las ecuaciones (107)-(109) con la ecuación (106).

Elemento	Ecuación en el dominio de Laplace	
Resorte	$F = K(X_1(s) - X_2(s))$	(107)
Amortiguador	$F = cs(X_1(s) - X_2(s))$	(108)
Inersor	$F = bs^2(X_1(s) - X_2(s))$	(109)

Sustituyendo K por K_1 , que representan el coeficiente de rigidez dentro de la red mecánica, se obtienen los siguientes coeficientes de amortiguamiento equivalentes:

Elemento	Amortiguamiento equivalente en el dominio de Laplace	
Resorte	$C_{eq} = \frac{K_1}{s}$	(110)
Amortiguador	$C_{eq} = c$	(111)
Inersor	$C_{eq} = bs$	(112)

Con los coeficientes de (110)-(112) y sustituyendo $s = j\omega$, donde $j = \sqrt{-1}$, se obtiene la admitancia en el dominio de la frecuencia para cada red mecánica.

Configuración	Admitancia Y_i	
C1	$Y_1 = c + j\omega b$	(113)
C2	$Y_2 = \frac{j\omega bc}{c + j\omega b}$	(114)
C3	$Y_3 = \frac{j\omega K_1 cb}{(K_1 - b\omega^2)c + j\omega K_1 b}$	(115)
C4	$Y_4 = \frac{-cb\omega^2 + j\omega K_1 b}{K_1 - b\omega^2 + j\omega c}$	(116)
C5	$Y_5 = \frac{(K_1 - b\omega^2)c}{K_1 - b\omega^2 + j\omega c}$	(117)
C6	$Y_6 = \frac{K_1(c + jb\omega)}{K_1 - b\omega^2 + j\omega c}$	(118)

Capítulo 6

Modelo rotodinámico propuesto con dispositivos TID optimizados

En la sección 5.2 se presentó el modelo del rotor que incorpora efectos de un soporte instalado sobre el eje a una longitud arbitraria. Posteriormente, en el subtema 5.3 se obtuvo una ecuación para la función de transferencia, expresada de forma general para un amortiguador o para las redes mecánicas mediante la admitancia Y_i . En esta sección se utiliza la admitancia de las redes para obtener la función de transferencia $|G|$ correspondiente a cada configuración.

La función $|G|$ se obtiene sustituyendo las expresiones de admitancia (Ec. (113)-(118)) en la Ecuación (100) y posteriormente calculando el módulo del número complejo. En los siguientes subtemas, primero se presenta la respuesta adimensional para el caso en el que solo se tiene amortiguamiento y posteriormente se expresará la solución $|G|$ para las seis redes mecánicas.

6.1. Solución del sistema considerando un amortiguador

En este sistema no hay ninguna red mecánica por lo cual solo se considera como un soporte y el elemento Y_i de la Figura 57 es sustituido por un amortiguador de coeficiente c . La función de respuesta en frecuencia para este caso es:

$$|G| = \frac{\Omega^2}{\sqrt{1 + (\phi - 1)^2 * \Omega^4 + (4\zeta^2 + 2\phi - 2) * \Omega^2}} \quad (119)$$

Si se desprecian los efectos giroscópicos en la Ecuación (118) se obtiene la expresión para el desbalance (Ecuación (120)) dada por Rao en [45].

$$\frac{Mx}{me} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \quad (120)$$

6.2. Solución del sistema incorporando redes mecánicas

En esta sección se incorporan las redes mecánicas en el modelo del rotor. Esquemáticamente, se sustituye cada red en el elemento amortiguador equivalente, como se muestra en la Figura 60.

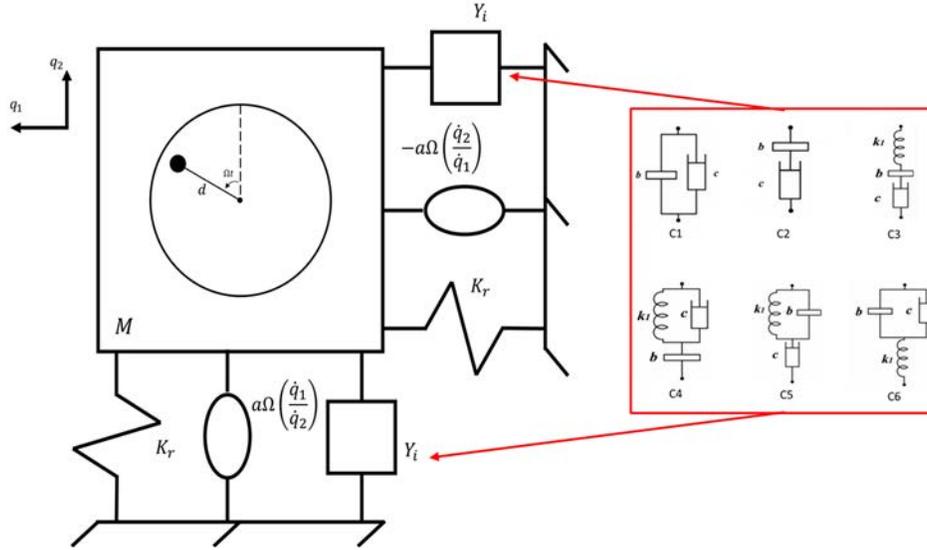


Figura 60. Modelo del rotor incorporando redes mecánicas. Diagrama de redes mecánicas [10].

La respuesta del sistema para el caso de la red C1, se presenta en la Ecuación (121):

$$|G| = \frac{\Omega^2}{\sqrt{1 + (\phi - 1 - \delta)^2 \Omega^4 + (4\zeta^2 - 2\delta + 2\phi - 2)\Omega^2}} \quad (121)$$

La Ecuación (122) es la función respuesta al incorporar la red C2.

$$|G| = \frac{\Omega^2 \sqrt{\Omega^2 \delta^2 + 4\zeta^2}}{\sqrt{4(-\Omega^2 \delta + \Omega^2 \phi - \Omega^2 + 1)^2 \zeta^2 + \Omega^2 \delta^2 (\Omega^2 \phi - \Omega^2 + 1)^2}} \quad (122)$$

La respuesta al integrar la red C3 se presenta en la Ecuación (123), en este modelo se tienen los tres elementos conectados en serie. Como se estableció en el subtema 4.5, este sistema adquiere un grado de libertad extra teniendo así un modelo de dos grados de libertad, por lo tanto, C3 es la primera red que conforma un TID. Las funciones de respuesta en frecuencia

de las redes C4, C5 y C6 se presentan en las Ecuaciones (124), (125) y (126), respectivamente. Los coeficientes $A_{TID\ C_i}$, $B_{TID\ C_i}$, $C_{TID\ C_i}$, $D_{TID\ C_i}$, para $i = 3, 4, 5, 6$ se detallan en el Apéndice A. La demostración de las redes que funcionan como TID se realiza en la sección 6.3.1.1.

$$|G| = \sqrt{\frac{A_{TID\ C3} + B_{TID\ C3}}{C_{TID\ C3} + D_{TID\ C3}}} \quad (123)$$

$$|G| = \sqrt{\frac{A_{TID\ C4} + B_{TID\ C4}}{C_{TID\ C4} + D_{TID\ C4}}} \quad (124)$$

$$|G| = \sqrt{\frac{A_{TID\ C5} + B_{TID\ C5}}{C_{TID\ C5} + D_{TID\ C5}}} \quad (125)$$

$$|G| = \sqrt{\frac{A_{TID\ C6} + B_{TID\ C6}}{C_{TID\ C6} + D_{TID\ C6}}} \quad (126)$$

6.3. Optimización de dispositivos TID

6.3.1. Criterio de optimización de puntos invariantes

La metodología de optimización se encuentra establecida para sistemas de dos grados de libertad; como es el caso del modelo de estudio que incorpora un TID, donde un grado de libertad es proporcionado por el sistema principal y el segundo por la conexión en serie del el inersor y el resorte en la red mecánica.

Con este método se controla la amplitud de los puntos invariantes, los cuales se ubican cerca de los puntos máximos de desplazamiento. Así, se restringen las amplitudes máximas a las

cercanías de los puntos invariantes. Den Hartog establece que este es el mejor comportamiento que se puede obtener para la respuesta del sistema.

Se cuenta con seis configuraciones de redes mecánicas para conformar un TID. Cada red se evalúa haciendo que su relación de amortiguamiento tienda a cero e infinito ($\zeta = 0$ y $\zeta \rightarrow \infty$). En estos dos límites se elimina la influencia del amortiguamiento y el sistema tomará un comportamiento diferente para cada tendencia de ζ , como un sistema de uno o dos grados de libertad sin amortiguamiento. Existen una excepción al comportamiento anterior, en el que la red empleada no agrega ningún grado de libertad al sistema (redes C1, C2 y C5).

6.3.1.1. Redes mecánicas que no se comportan como un TID

Las redes mecánicas C1 y C2 (Figura 61) son configuraciones que no generan un grado de libertad extra en el sistema, por lo tanto, no entregan el efecto de un TID y no se pueden optimizar.

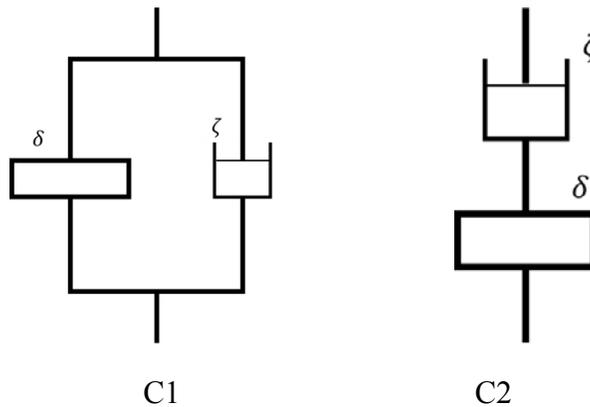


Figura 61. Redes mecánicas que no incrementan el grado de libertad del sistema.

Para el caso de la red C5, se evalúa su función de respuesta con $\zeta = 0$ y $\zeta \rightarrow \infty$. En la Figura 62 se observa el diagrama de la red. Si se hace $\zeta = 0$, entonces el amortiguador se elimina, lo que hace que la red se desconecte y, por lo tanto, se anule.

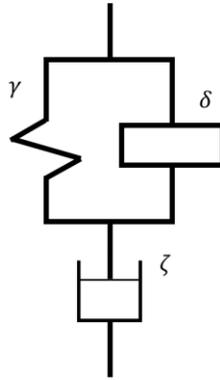


Figura 62. Diagrama de red C5.

Haciendo que $\zeta \rightarrow \infty$ el amortiguador se bloquea, de esta forma el movimiento relativo entre las terminales del amortiguador se hace cero y la red se reduce a la configuración en paralelo de un resorte y un inersor. En ninguno de los casos se agrega un grado de libertad extra al sistema; por lo tanto, la red no entrega el efecto de un TID y no se puede aplicar el método de optimización de puntos invariantes.

6.3.1.2. Optimización de dispositivos TID

Se presentan las redes mecánicas que sí entregan el efecto de un TID al sistema y la función de transferencia $|G|$ se evalúa para cada tendencia de ζ .

Red mecánica C3

En esta configuración, se incorporan los tres elementos mecánicos conectados en serie (Figura 63a). Cuando ζ se iguala a cero, la red se anula, manteniendo el comportamiento del sistema original. Si se hace que ζ tienda a infinito, el amortiguador se bloquea y no tiene movimiento relativo; haciendo que la red se reduzca a un inersor y un resorte, conectados en serie, con lo que se obtiene un sistema de dos grados de libertad. Evaluando la ecuación (123) en estas tendencias de ζ se obtienen las gráficas que se presentan en la Figura 63b.

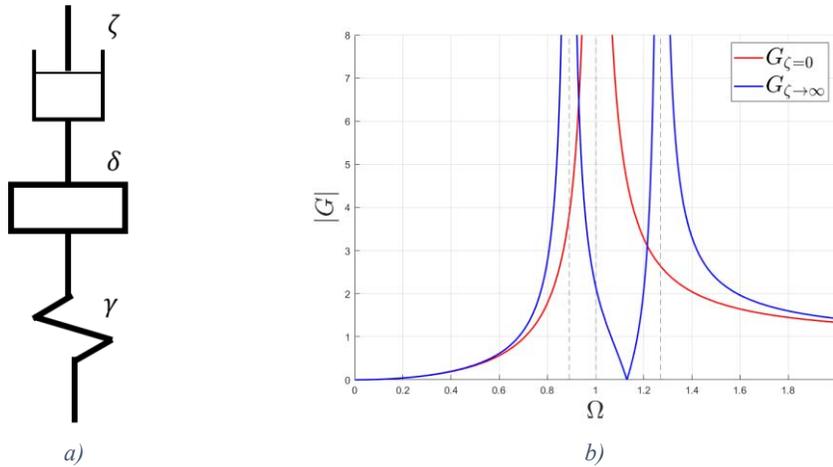


Figura 63. a) Diagrama de red mecánica C3 y b) comportamiento de la función $|G|$ en las tendencias límites de ζ .

Siguiendo la metodología, el TID se sintoniza igualando los puntos invariantes a la misma amplitud para encontrar el valor óptimo de γ (la amplitud de estos puntos varía con el parámetro γ , el incremento en la amplitud de uno de los puntos es acompañado por el decremento del otro). La expresión para obtener el valor de γ que mantiene la misma amplitud en dichos puntos se presenta en la Ecuación (127) y en la Figura 64 se observan las gráficas con la misma amplitud en las frecuencias de los puntos invariantes:

$$\gamma_{opt} = \frac{2}{\sqrt{4 - 2(\delta + 2\phi)}} \quad (127)$$

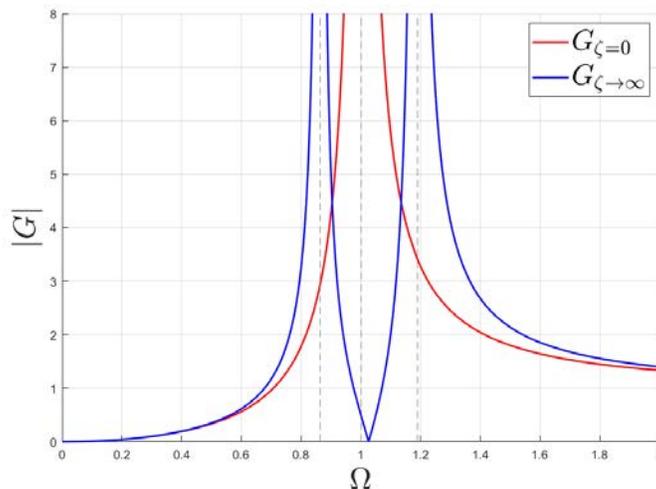


Figura 64. Comportamiento de las funciones G en las tendencias de ζ , con el parámetro γ optimizado. Para $\phi = 7.6E - 5$.

Ahora, se retoma la ecuación (123) para encontrar el valor óptimo de ζ , el cual controlará la amplitud en los máximos de la función $|G|$. En la Figura 65 se observa que existen frecuencias donde la amplitud de vibración es mayor que la de los puntos invariantes si no se utiliza un valor óptimo de ζ .

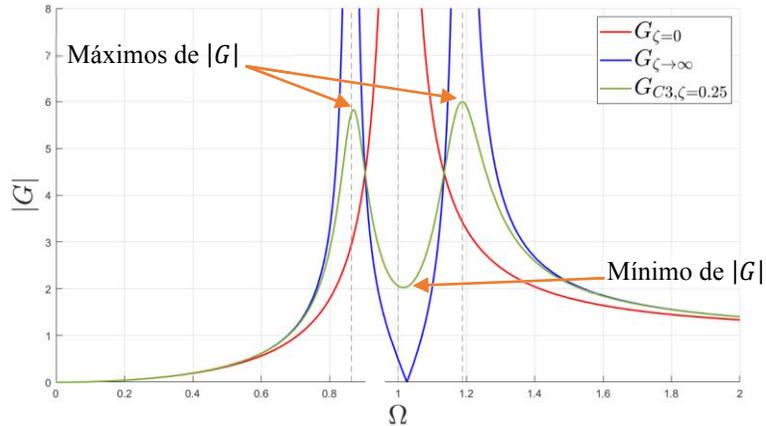


Figura 65. Comportamiento de $|G|$ sin emplear un valor óptimo de ζ . Para $\phi = 7.6E - 5$.

Se aplican los criterios de Den Hartog y Krenk para calcular expresiones de ζ que optimicen las amplitudes de vibración:

La expresión para la relación de amortiguamiento bajo el criterio de Den Hartog es:

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\delta} \sqrt{1 - \phi}}{\sqrt{18 - 18\phi - \delta}} \quad (128)$$

La expresión para la relación de amortiguamiento considerando el criterio de Krenk se presenta en la ecuación 129:

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{\delta} \sqrt{1 - \phi}}{\sqrt{8 - 8\phi - \delta}} \quad (129)$$

En la Figura 66 se presentan las gráficas optimizadas generadas al emplear el TID C3.

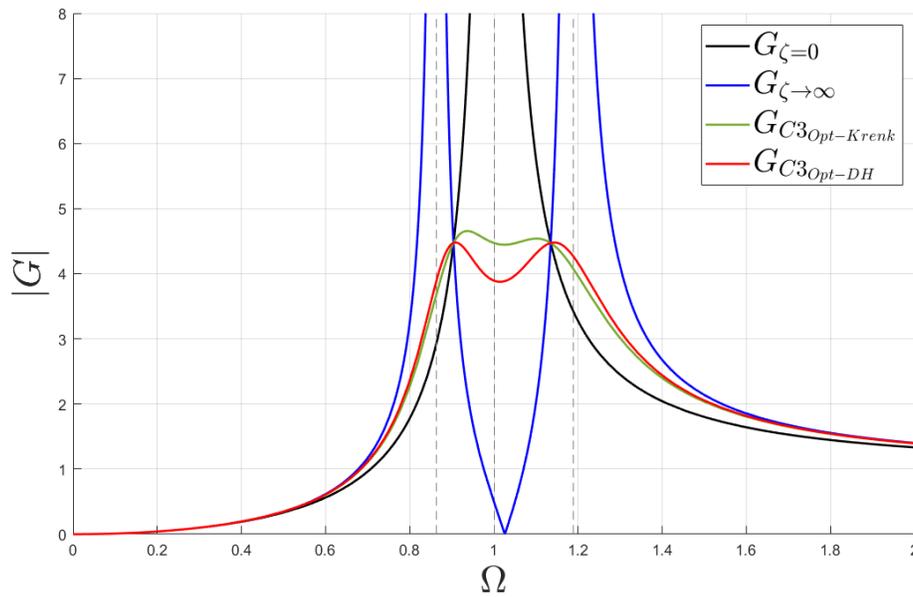


Figura 66. Gráfica de respuesta optimizada incorporando el TID C3. Para $\phi = 7.6E - 5$.

Red mecánica C4

Para la configuración C4 (Figura 67) se utiliza la Ecuación (124). Cuando ζ se iguala a cero, el amortiguador se elimina de la red, y esta se reduce a un resorte en serie con un inersor, el cual es un sistema de 2 GDL. Cuando $\zeta \rightarrow \infty$ el amortiguador se bloquea y no presenta movimiento relativo en sus terminales, por lo tanto, la red se reduce a un inersor.

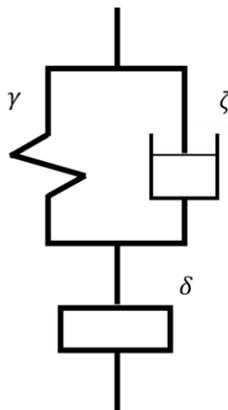


Figura 67. Red mecánica C4.

Siguiendo la metodología, los parámetros óptimos para esta red mecánica se presentan en las siguientes ecuaciones. La relación de frecuencias se expresa mediante la Ecuación (130):

$$\gamma_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \phi + \delta}} \quad (130)$$

La relación de amortiguamiento bajo el criterio de Den Hartog se obtiene por medio de la ecuación (131):

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{3} \delta^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{-2\phi + \delta + 2}\sqrt{-\phi + \delta + 1}} \quad (131)$$

La Ecuación (132) expresa la relación de amortiguamiento bajo el criterio de Krenk:

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{2} \delta^{\frac{3}{2}}}{2(1 - \phi + \delta)} \quad (132)$$

En la Figura 68 se presentan las gráficas de respuesta optimizadas para el TID con la red C4.

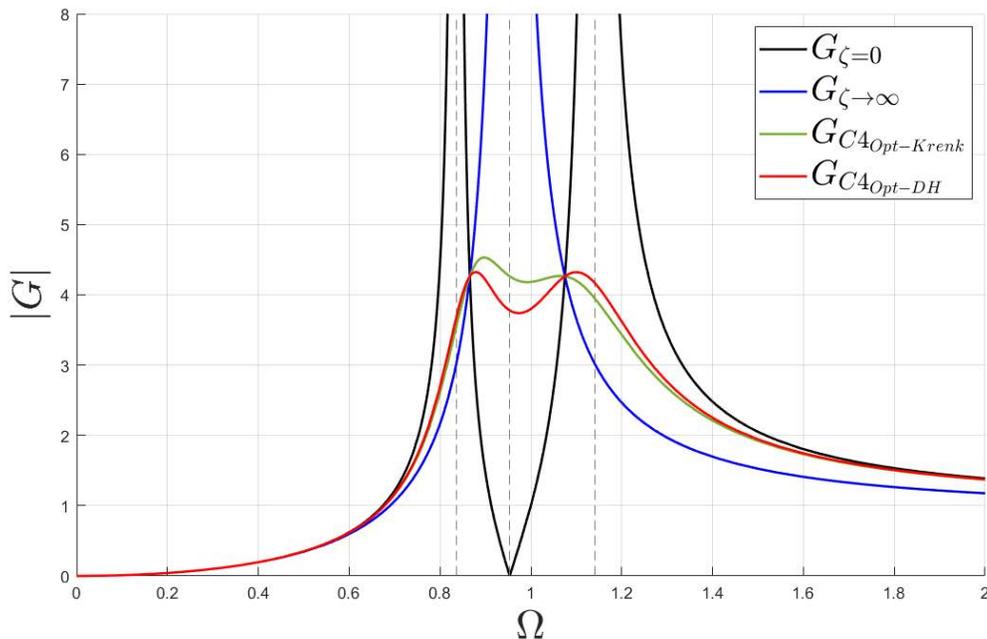


Figura 68. Gráficas de respuesta optimizada incorporando el TID C4, bajo los criterios de Krenk y Den Hartog. Para $\phi = 7.6E - 5$.

Red mecánica C6

La red C6 está conformada por una configuración en paralelo de un inersor y un amortiguador, conectados en serie a un resorte (Figura 69). Cuando se evalúa la Ecuación (126) en sus tendencias de ζ , la red se reduce de la siguiente manera: Si se iguala ζ a cero, el amortiguador se anula y la red se reduce a un inersor en serie con un resorte (sistema de 2 GDL). Si se hace que $\zeta \rightarrow \infty$, entonces el amortiguador se bloquea y no existe movimiento relativo entre sus terminales, así la red se reduce a un resorte.

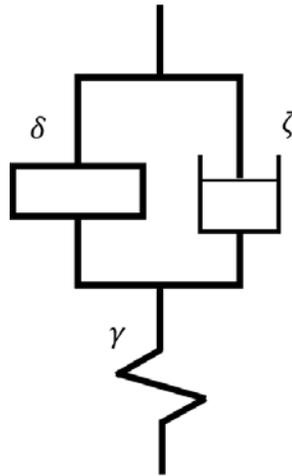


Figura 69. Red mecánica C6.

Para obtener una expresión compacta de la relación de amortiguamiento óptima en esta red, únicamente se utiliza el enfoque de Krenk evaluando en la frecuencia de resonancia del sistema reducido a un grado de libertad.

De esta forma se generaron las siguientes expresiones de los parámetros óptimos:

La relación de frecuencia se expresa mediante la Ecuación (133).

$$\gamma_{opt} = \frac{-\sqrt{1-\phi-4\delta} + \sqrt{1-\phi}}{2\delta} \quad (133)$$

La relación de amortiguamiento óptima se calcula con la Ecuación (134).

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{1-\phi}(\phi-1+3\delta)(\phi-1+\delta)\sqrt{1-\phi-4\delta} + (\phi-1+2\delta)(\delta^2+4(\phi-1)\delta+(\phi-1)^2)}}{2\sqrt{\sqrt{1-\phi}(1-\phi-\delta)\sqrt{1-\phi-4\delta} + (1-\phi)(\phi-1+3\delta)}} \quad (134)$$

En la Figura 70 se presenta la gráfica de respuesta optimizada empleando el TID C6.

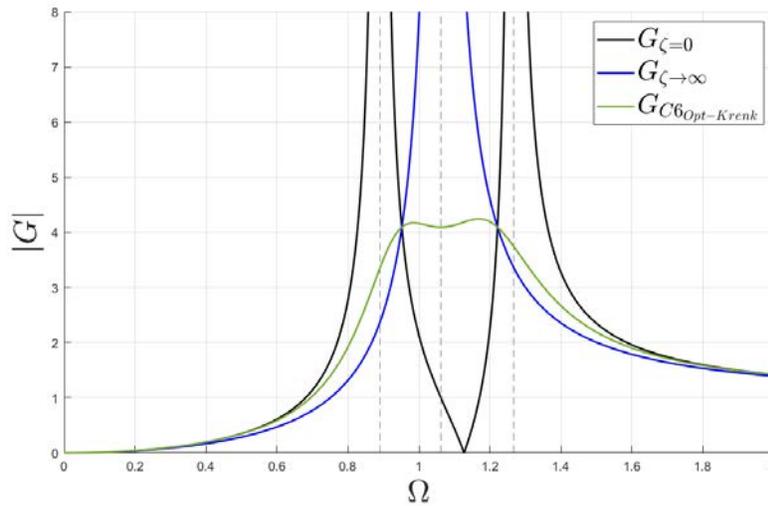


Figura 70. Gráfica de respuesta optimizada del sistema incorporando el TID C6. Para $\phi = 7.6E - 5$.

Como se observa, los parámetros óptimos son funciones de dos variables: δ y ϕ ; por lo tanto, se presentará la superficie de los parámetros óptimos para las tres redes del TID.

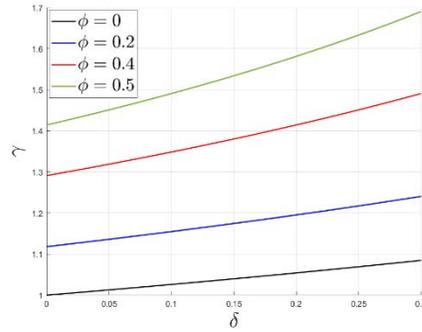
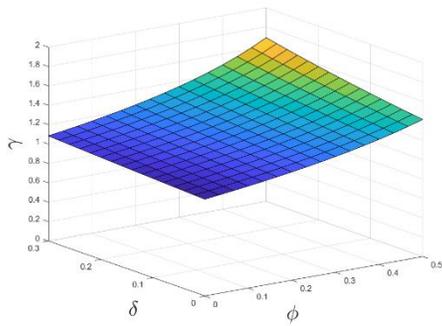
6.3.1.3. Comportamiento de los parámetros óptimos

TID con red mecánica C3

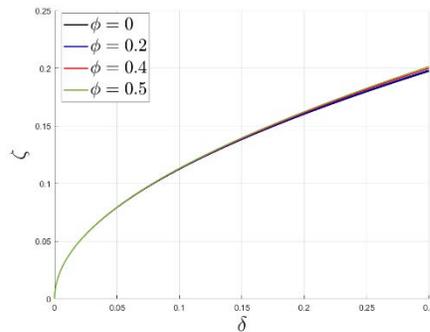
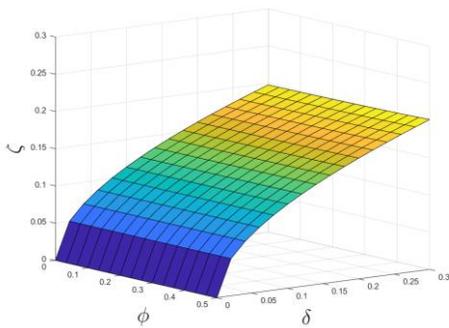
En la Figura 71 se presentan las superficies de los parámetros óptimos para la red C3, así como sus proyecciones para diversos valores de ϕ . De las gráficas, y sus ecuaciones respectivas, es evidente que los parámetros γ y ζ se incrementan al aumentar δ y ϕ . Es visible que el parámetro ϕ tiene poca influencia en el comportamiento de ζ (Figura 71).

Después de estas observaciones, se analizan los parámetros para identificar si es posible despreciar los efectos giroscópicos en las ecuaciones. Se graficará la función $|G|$, realizando cuatro comparaciones, que se muestran en la Figura 72.

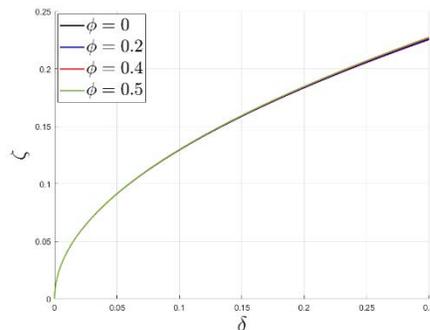
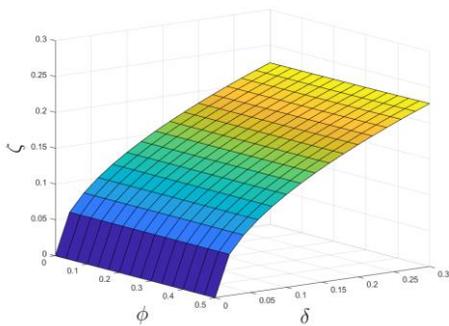
- 1) Utilizando las ecuaciones de γ_{opt} y ζ_{opt} .
- 2) Utilizando ecuaciones de $\gamma_{opt_{\phi=0}}$ y ζ_{opt} .
- 3) Utilizando ecuaciones de γ_{opt} y $\zeta_{opt_{\phi=0}}$.
- 4) Utilizando ecuaciones de $\gamma_{opt_{\phi=0}}$ y $\zeta_{opt_{\phi=0}}$.



a) Superficie de $\gamma_{opt} = \frac{2}{\sqrt{-2\delta-4\phi+4}}$ y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .



b) Superficie de $\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{\delta}\sqrt{1-\phi}}{\sqrt{8-8\phi-\delta}}$ (criterio de Krenk) y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .



c) Superficie de $\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{3\delta}\sqrt{1-\phi}}{\sqrt{18-18\phi-\delta}}$ (criterio de Den Hartog) y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .

Figura 71. Superficies de los parámetros óptimos de la red C3.

En la Figura 72 se observa el comportamiento de la función $|G|$, evaluada para $\phi = 0.2043$ y $\delta = 0.25$. Es evidente que las cuatro gráficas tienden a dos comportamientos; la función $|G|$ utilizando " γ_{opt} y ζ_{opt} " así como " γ_{opt} y $\zeta_{opt_{\phi=0}}$ " forman la gráfica de color naranja, que es el comportamiento esperado para el sistema. Las expresiones restantes forman la gráfica azul.

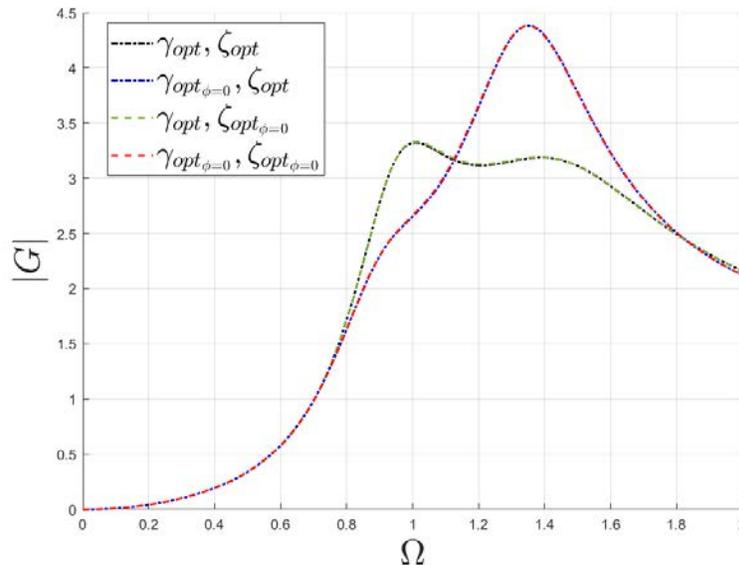


Figura 72. Función G , utilizando la red C3. Considerando diferentes expresiones de los parámetros óptimos. Evaluando en $\delta = 0.25$ y $\phi = 0.2043$.

Del análisis previo se concluye que, utilizando esta red mecánica, la función de transferencia es muy sensible a los efectos giroscópicos en el parámetro γ pero se ve poco afectada por dichos efectos en el parámetro ζ . Por esta razón se debe considerar ϕ en la expresión de γ_{opt} pero puede despreciarse en la ecuación de ζ_{opt} y obtener un comportamiento muy cercano al óptimo para el dominio de $0 \leq \phi \leq 0.5$, como se observa en la Figura 73.

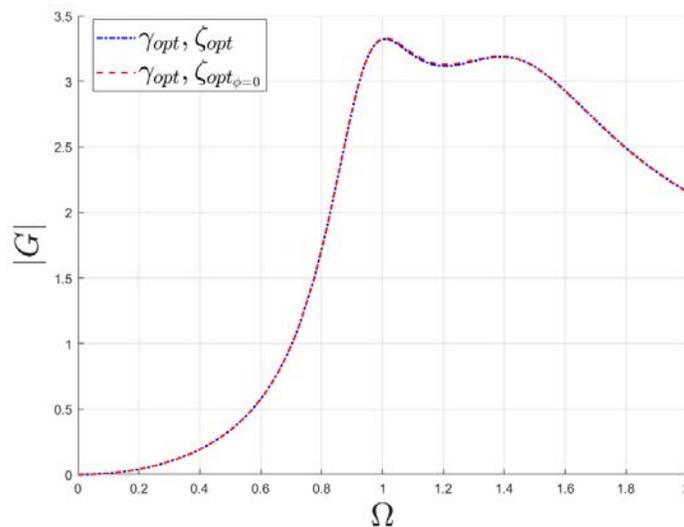
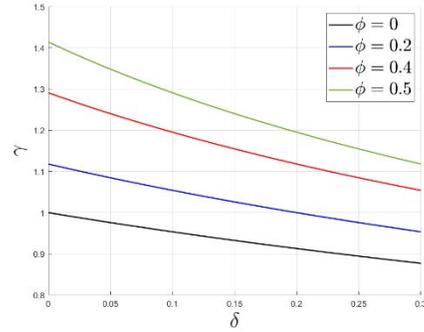
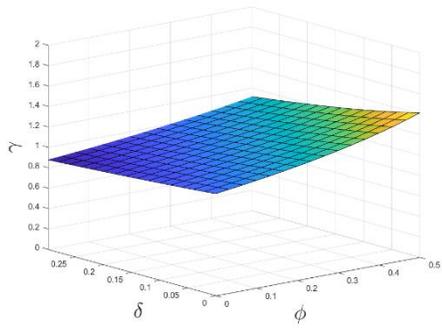


Figura 73. Función $|G|$. comparación ignorando ϕ en la ecuación de ζ_{opt} . Evaluado en $\delta = 0.25$ y $\phi = 0.2043$.

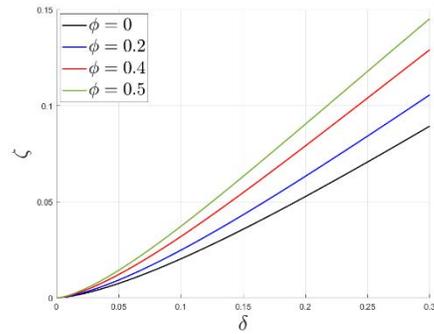
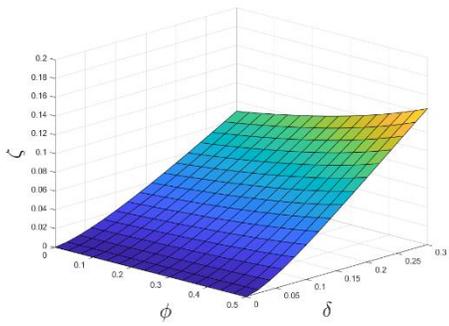
TID con red mecánica C4

Se presenta el comportamiento de los parámetros óptimos al variar δ y ϕ . La Figura 74 contiene las superficies de γ_{opt} y de ζ_{opt} , bajo los diferentes criterios sobre los que se calcularon, así como sus proyecciones sobre el plano $\gamma_{opt} - \delta$ y $\zeta_{opt} - \delta$. En las gráficas se aprecia que γ disminuye al incrementar δ , y aumenta al incrementar ϕ . La tendencia de ζ , a diferencia de γ , aumenta a mayores valores de δ y de ϕ .

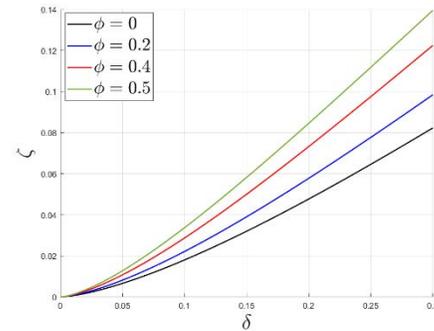
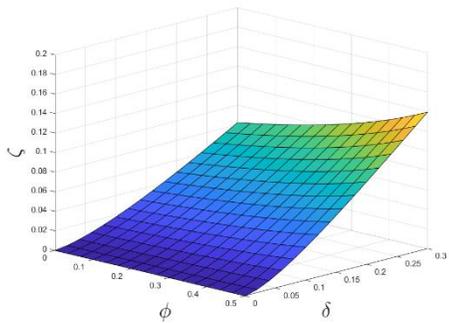
En esta red los efectos giroscópicos tienen una mayor influencia y no es posible ignorarlos de forma directa en las expresiones de los parámetros óptimos.



a) Superficie de $\gamma_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1-\phi+\delta}}$ y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .



b) Superficie de $\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{2}\delta^{\frac{3}{2}}}{2(1-\phi+\delta)}$ (criterio de Krenk) y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .



c) Superficie de $\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{3}\delta^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{-2\phi+\delta+2}\sqrt{-\phi+\delta+1}}$ (criterio de Den Hartog) y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .

Figura 74. Superficies de los parámetros óptimos de la red C4.

Se grafica la función de respuesta para demostrar que los efectos giroscópicos tienen mucha influencia en las expresiones de los parámetros óptimos. En la Figura 75 se plasman las gráficas de $|G|$ evaluadas en $\delta = 0.25$ y $\phi = 0.2043$, aplicando el mismo método de comparación que se utilizó con la red C3. Es visible que, empleando esta red los parámetros óptimos se ven mayormente afectados por ϕ . Por lo tanto, no se pueden ignorar los efectos giroscópicos.

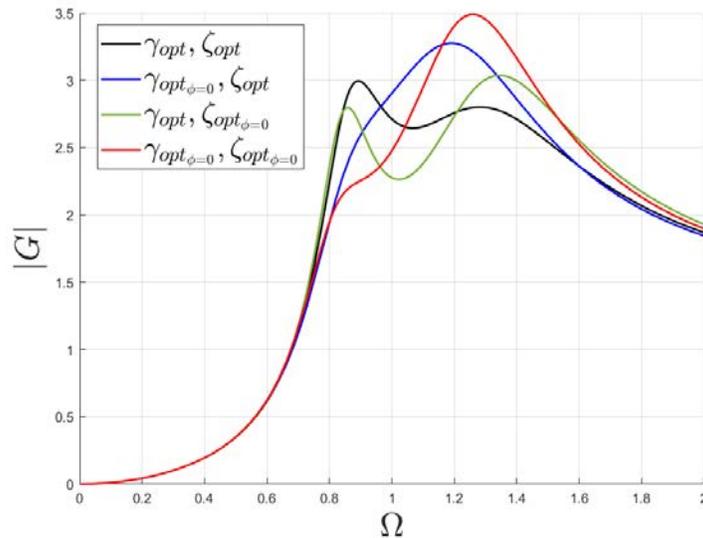
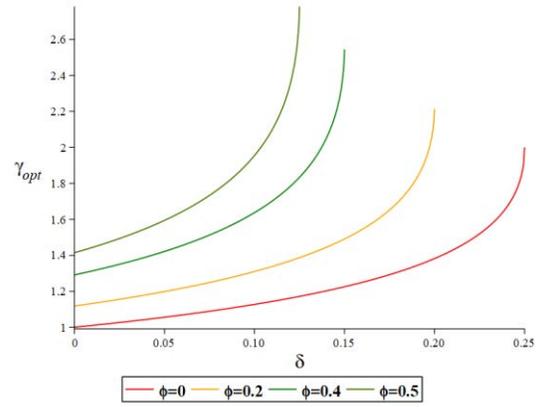
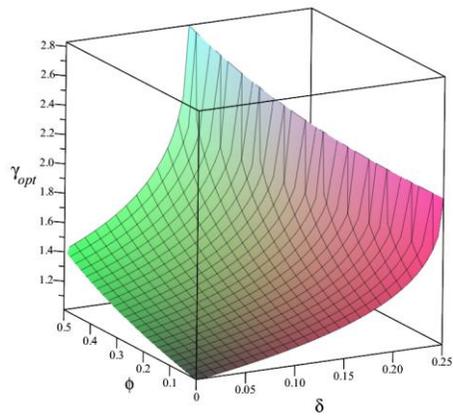


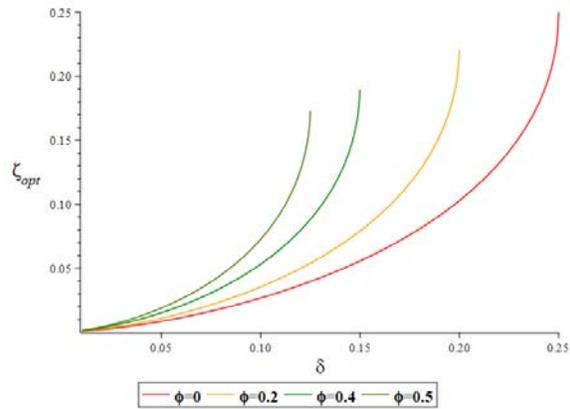
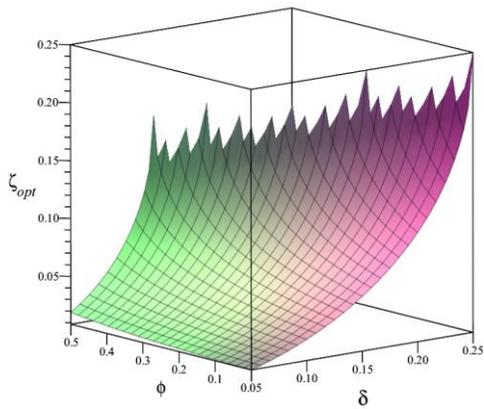
Figura 75. Función G , utilizando la red C4, considerando diferentes expresiones de los parámetros óptimos. Evaluando en $\delta = 0.25$ y $\phi = 0.2043$.

TID con red mecánica C6

Se analizan los parámetros óptimos del sistema que incorpora el TID con la red C6. A diferencia de las demás redes, en este caso el sistema está mayormente limitado por el dominio en el que se puede evaluar δ . En ambos parámetros el dominio de δ disminuye al aumentar ϕ , como se puede observar en las gráficas de la Figura 76.



a) Superficie de γ_{opt} para C6 y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .



b) Superficie de ζ_{opt} para C6 y sus proyecciones para ciertos valores de ϕ .

Figura 76. Superficies de los parámetros óptimos de la red C6.

En la Figura 77 se muestra la gráfica de la función de transferencia evaluada en $\delta = 0.1$ y $\phi = 0.2043$. Se observa que, similar a las redes C3 y C4, el mayor cambio en las gráficas se obtiene al ignorar los efectos giroscópicos en γ_{opt} . En esta red, similar al resultado de C4, al

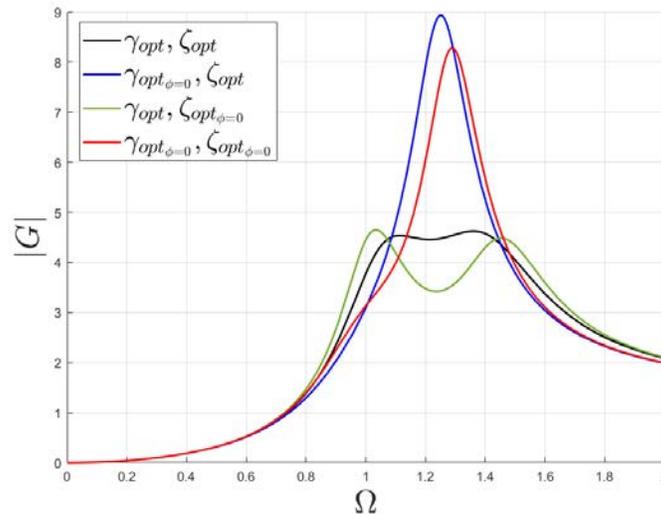


Figura 77. Comparación de los efectos giroscópicos en la función de transferencia, empleando la red C6. Evaluando en $\delta = 0.1$ y $\phi = 0.2043$.

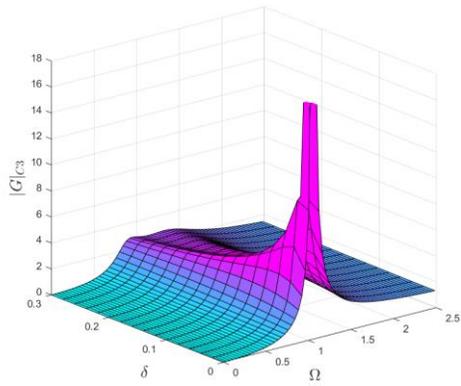
despreciar los efectos en la ecuación de ζ_{opt} , el comportamiento de $|G|$ sufre un cambio considerable. Por lo tanto, para esta red, no se pueden despreciar los efectos giroscópicos.

6.3.1.4. Comparación de la influencia de cada red mecánica en la respuesta del sistema

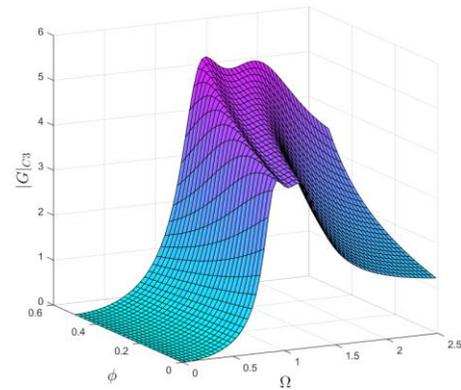
La función de transferencia del sistema es dependiente de δ , ϕ y Ω . Primero se presentan las superficies de la función de transferencia para cada red con el fin de observar su variación al cambiar los parámetros δ y ϕ . En la Figura 78 se observan las superficies de la función de transferencia. Para cada red se presenta la variación de la superficie, inicialmente manteniendo ϕ constante y posteriormente manteniendo δ constante.

Las tres redes presentan un comportamiento similar en el que la amplitud de vibración disminuye al aumentar δ , lo que coincide con estudios realizados por diversos investigadores. También se observa que dicha amplitud aumenta a mayores valores de ϕ . Existe una

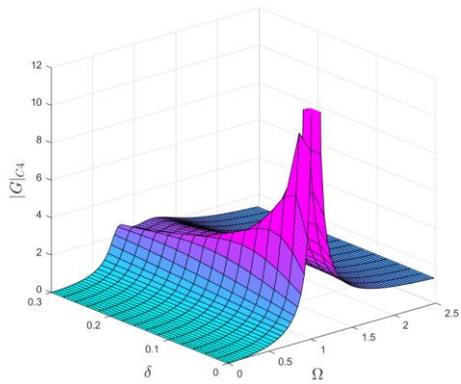
excepción en la red C6 (Figura 78g) donde la función G tiene una disminución de amplitud en sus valores más grandes de ϕ .



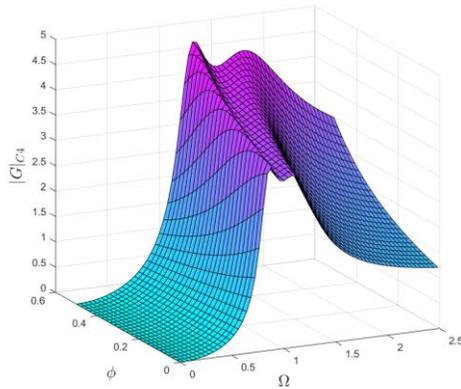
a) Superficie de C3, con $\phi = 0.1$.



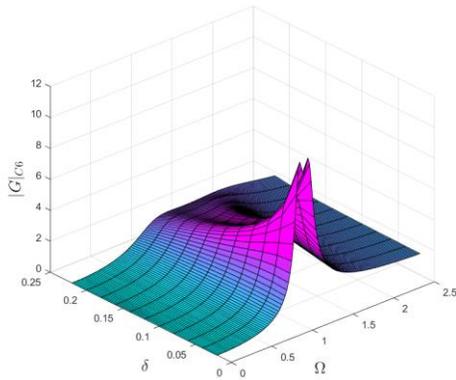
b) Superficie de C3, con $\delta = 0.15$.



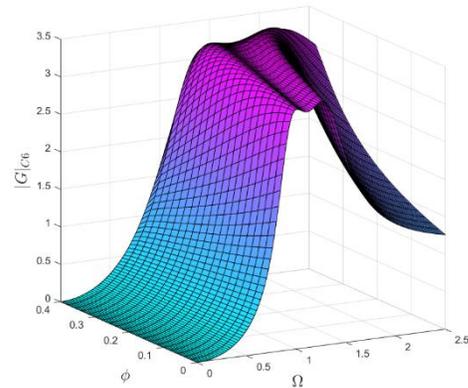
d) Superficie de C4, con $\phi = 0.1$.



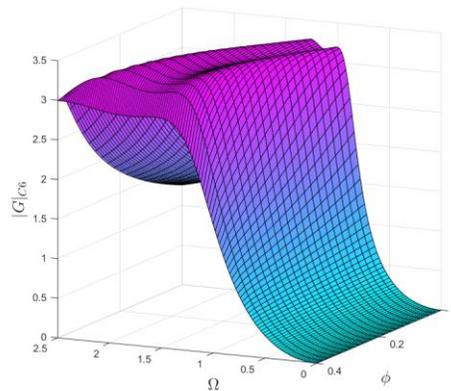
c) Superficie de C4, con $\delta = 0.15$.



e) Superficie de C6, con $\phi = 0.1$.



f) Superficie de C6, con $\delta = 0.15$.

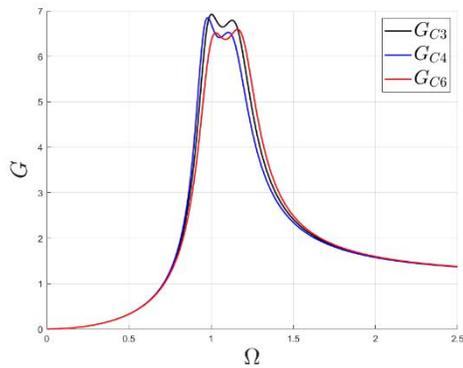


g) Superficie de C6, segunda vista, con $\delta = 0.15$

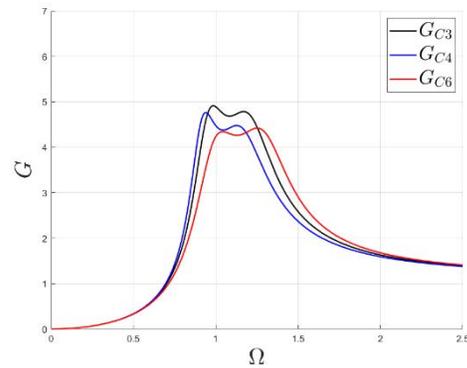
Figura 78. Superficies de la función de transferencia para las diversas redes mecánicas.

Con el objetivo de identificar la efectividad de las redes en el control de la respuesta del sistema, se analiza la respuesta $|G|$ con las tres redes, manteniendo un valor de ϕ constante y variando δ . En la Figura 79 se presentan las gráficas de respuesta. Se observa que la red C3 es la que mantiene la amplitud de vibración más alta. Por otra parte, C6 presenta la menor amplitud, así como una transición con una curva más plana entre los puntos invariantes. La red C4 mantiene un comportamiento intermedio entre las redes C3 y C6, pero tendiendo más al comportamiento de la red C3. También debe notarse que la red C4 es la que tiene una curva menos plana entre los puntos invariantes. Se observa que conforme δ aumenta, la amplitud

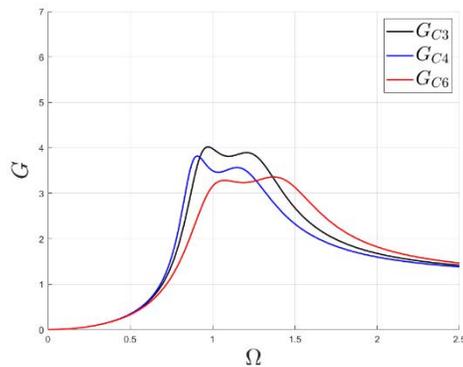
de $|G|$ en todas las redes se reduce en las frecuencias de los puntos invariantes, y el ancho de banda de estas frecuencias se extiende, aplanando la curva en las frecuencias dentro de los puntos invariantes, especialmente para C6 que presenta un desempeño mucho mayor que las redes C3 y C4.



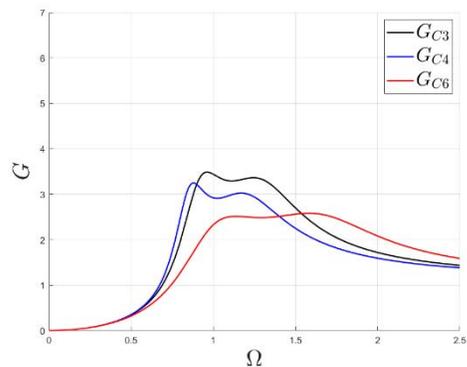
a) $\delta = 0.05$ y $\phi = 0.1$



b) $\delta = 0.10$ y $\phi = 0.1$



d) $\delta = 0.15$ y $\phi = 0.1$



c) $\delta = 0.20$ y $\phi = 0.1$

Figura 79. Comparación de la respuesta $|G|$ de los TID para diferentes valores de δ .

6.3.2. Criterio de optimización: norma H_∞ para dispositivos TID

Se realiza la optimización mediante la norma H_∞ . Las ecuaciones de los parámetros óptimos obtenidos con el método de puntos invariantes se utilizan para obtener un primer conjunto de valores, que servirán como puntos iniciales en la solución numérica de la optimización mediante la norma H_∞ . Para el caso de los TID el problema consiste en resolver un sistema de tres ecuaciones no lineales; estas ecuaciones se definen como f_1, f_2 y f_3 . En la Figura 80 se presenta un diagrama de flujo para la aplicación de esta metodología de optimización mediante el software Matlab. Para aplicar el algoritmo, las funciones f_1, f_2 y f_3 , se obtuvieron precedentemente utilizando el software Maple.

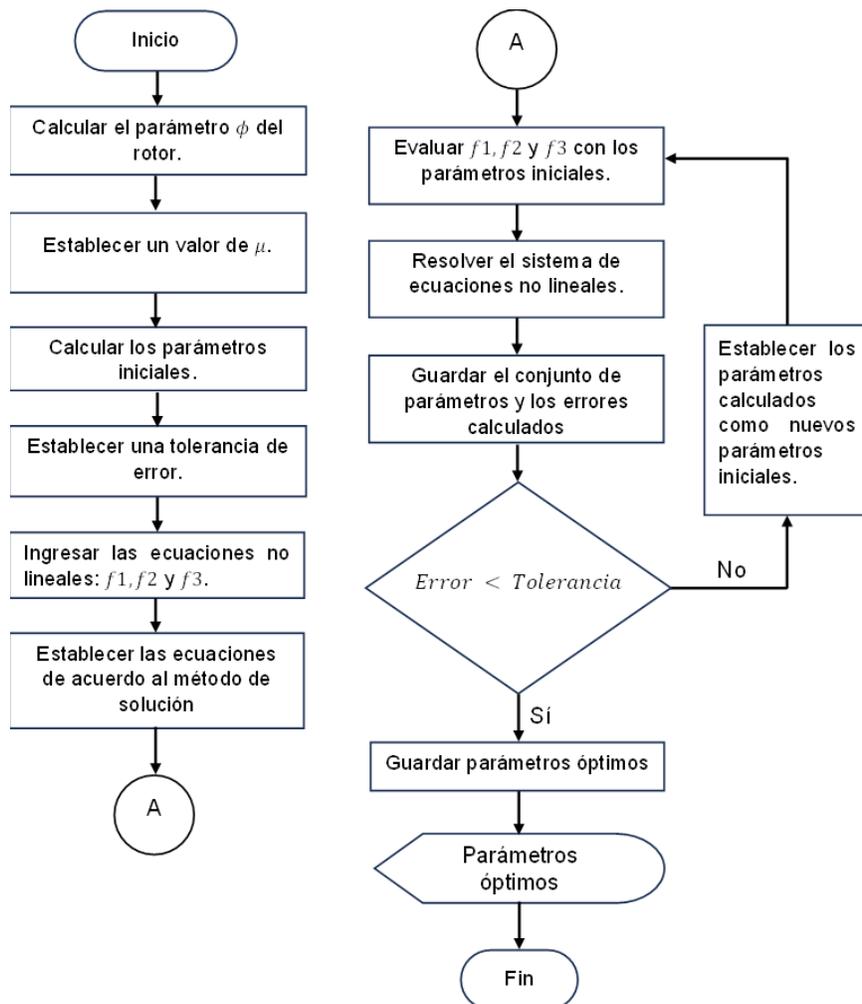


Figura 80. Diagrama de flujo para desarrollar la optimización H_∞ en sistemas de dos grados de libertad.

En el Apéndice B se presentan las tablas de parámetros óptimos bajo la norma H_∞ para los tres rotores con los que se trabaja en esta investigación. En las Figuras 81 y 82 se observa una comparación entre las respuestas optimizadas por puntos invariantes y H_∞ para el modelo que incorpora las redes C3, C4 y C6. Es evidente que la amplitud de vibración en los máximos de H_∞ es menor que la amplitud generada mediante puntos invariantes. Además de que la amplitud en los dos máximos es igual en el criterio H_∞ .

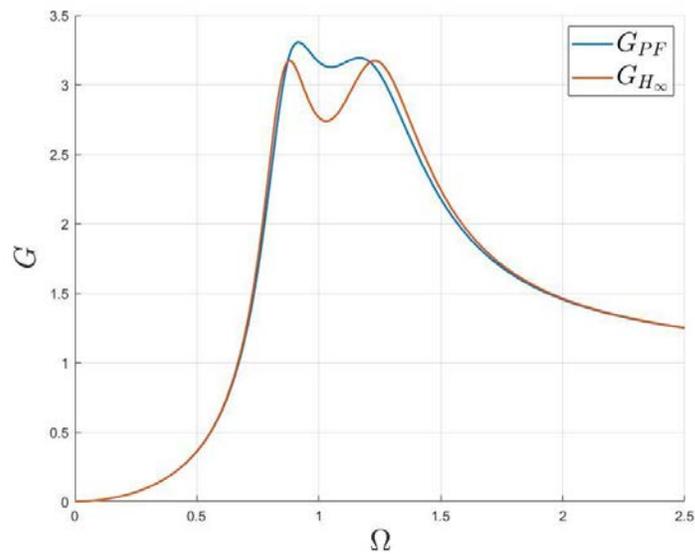


Figura 81. Comparación de gráficas optimizadas bajo las normas H_∞ y puntos invariantes para el TID C3.

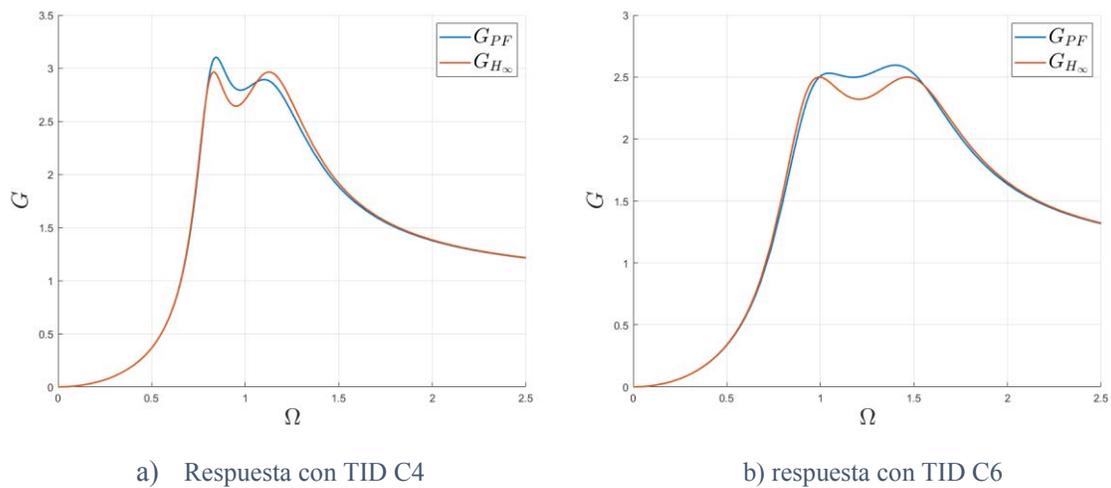


Figura 82. Comparación de respuestas optimizadas, TID C4 y TID C6.

Es evidente, como se demostró con la optimización por puntos invariantes, que, al aumentar la relación de inertancia, disminuye la amplitud de vibración y aumenta el ancho de banda; esto también se puede observar, bajo la norma H_∞ , en la Figura 83.

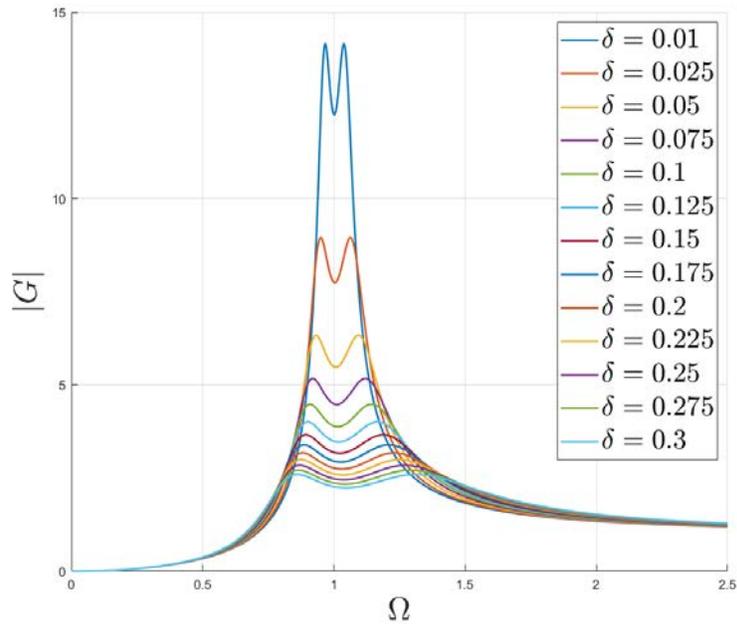


Figura 83. Comportamiento de la respuesta óptima al variar δ . Norma H_∞ .

Capítulo 7

Modelo rotodinámico propuesto con dispositivos IDVA optimizados

En este capítulo se incorporan los dispositivos absorbedores de vibración al modelo, específicamente el DVA convencional y tres configuraciones de IDVA. Las redes mecánicas que se forman con estos dispositivos son más complejas que el análisis desarrollado para los TID. Por lo tanto, se requiere un modelo independiente. En los siguientes subtemas se desarrolla el modelo para cada configuración y su optimización.

7.1. Modelo rotodinámico incorporando el absorbedor de vibraciones con base en inersor

Se modela el rotor incorporando el absorbedor de vibraciones, haciendo uso del concepto de admitancia mecánica para incluir las redes del inersor. El diagrama del modelo se presenta en la Figura 84 (siguiente página). Después de realizar un balance de fuerzas en el modelo mediante la segunda ley de Newton y de establecer soluciones de la forma:

$$q_1(t) = Q_1 e^{j\omega t} \quad (135)$$

$$q_2(t) = Q_2 e^{j\omega t} \quad (136)$$

$$q_{1a}(t) = Q_{1a} e^{j\omega t} \quad (137)$$

$$q_{2a}(t) = Q_{2a} e^{j\omega t} \quad (138)$$

Se obtienen las ecuaciones de movimiento que se expresan como se muestra en las Ecuaciones (139) – (142).

Dirección q_1

$$(K + k_a - M\omega^2 + j\omega Y_i)Q_1 + a\omega^2 Q_2 - (k_a + j\omega Y_i)Q_{1a} = m_d d\omega^2 \quad (139)$$

$$-(k_a + j\omega Y_i)Q_1 + (k_a - m_a\omega^2 + j\omega Y_i)Q_{1a} = 0 \quad (140)$$

Dirección q_2

$$(K + k_a - M\omega^2 + j\omega Y_i)Q_2 + a\omega^2 Q_1 - (k_a + j\omega Y_i)Q_{2a} = m_d d\omega^2 \quad (141)$$

$$-(k_a + j\omega Y_i)Q_2 + (k_a - m_a\omega^2 + j\omega Y_i)Q_{2a} = 0 \quad (142)$$

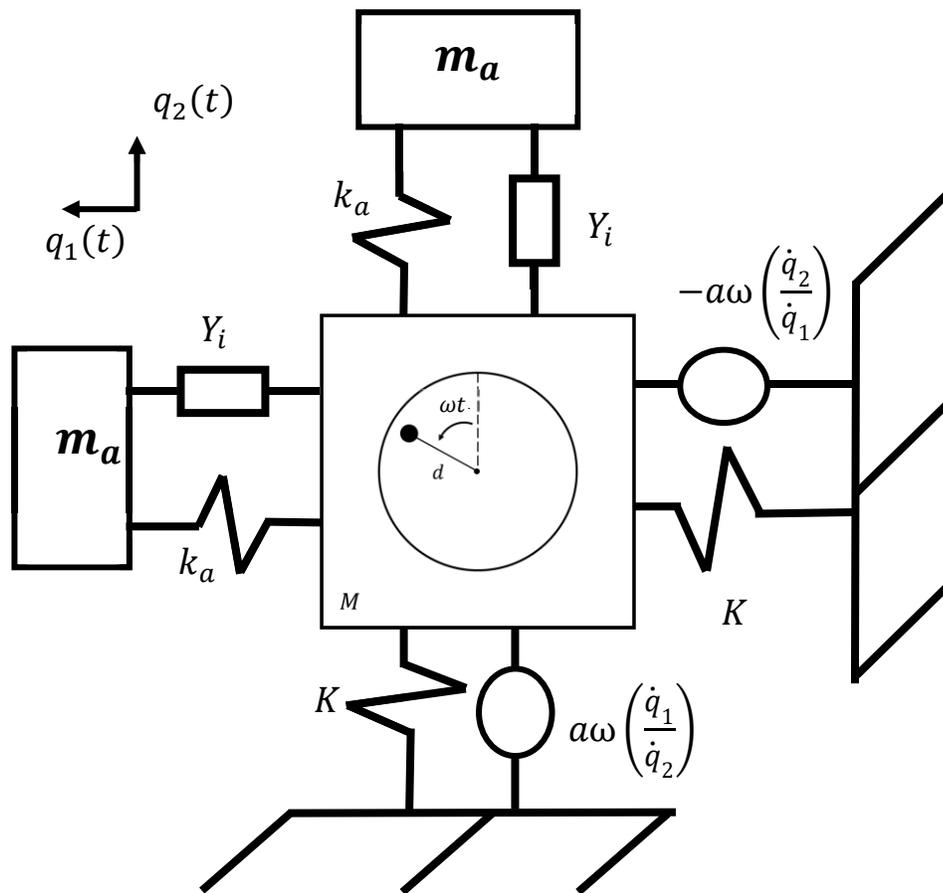


Figura 84. Modelo del rotor incorporando el absorbedor de vibraciones con elemento de admitancia mecánica.

Para el sistema que incorpora un IDVA, se utilizan los siguientes parámetros adimensionales.

Factor de desplazamiento del rotor en la dirección q_1 .
$$G_1 = \frac{M * Q_1}{m_d * d}$$

Factor de desplazamiento del rotor en la dirección q_2 .
$$G_2 = \frac{M * Q_2}{m_d * d}$$

Factor de desplazamiento del absorbedor en la dirección q_1 .
$$G_{1a} = \frac{M * Q_{1a}}{m_d * d}$$

Factor de desplazamiento del absorbedor en la dirección q_2 .
$$G_{2a} = \frac{M * Q_{2a}}{m_d * d}$$

Relación de masas del absorbedor.
$$\mu = \frac{m_a}{M}$$

Relación de inercia.
$$\delta = \frac{b}{m_a}$$

Frecuencia natural del rotor sin efectos giroscópicos (sin giro).
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Frecuencia natural del absorbedor de vibraciones
$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

Frecuencia de la red mecánica.
$$\omega_b = \sqrt{\frac{K_1}{b}}$$

Relación de frecuencia del absorbedor.
$$\eta = \frac{\omega_a}{\omega_n}$$

Relación de frecuencia de la red.
$$\gamma = \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

Relación de amortiguamiento.
$$\zeta = \frac{c}{2 * m_a * \omega_a}$$

Parámetro de efectos giroscópicos (depende de las características del rotor).
$$\phi = \frac{a}{M}$$

Relación de frecuencia forzada.
$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Adimensionando las ecuaciones (139)-(142) y expresándolas de forma matricial se obtiene la Ecuación (143):

$$C \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_{1a} \\ G_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 \\ \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (143)$$

Donde:

$$C = \begin{bmatrix} \mu\eta^2 - \Omega^2 + 1 + j\Omega a_i & \phi\Omega^2 & -\mu\eta^2 - j\Omega a_i & 0 \\ \phi\Omega^2 & \mu\eta^2 - \Omega^2 + 1 + j\Omega a_i & 0 & -\mu\eta^2 - j\Omega a_i \\ -\eta^2 - j\Omega b_i & 0 & -\Omega^2 + \eta^2 + j\Omega b_i & 0 \\ 0 & -\eta^2 - j\Omega b_i & 0 & -\Omega^2 + \eta^2 + j\Omega b_i \end{bmatrix} \quad (144)$$

$$a_i = \frac{Y_i}{M\omega_n} \quad (145)$$

$$b_i = \frac{Y_i}{m_a\omega_n} \quad (146)$$

Al resolver la Ecuación (143) se obtienen expresiones tanto para el DVA convencional, como para los IDVA. De las redes que se incorporan en el IDVA, solo con las configuraciones C3, C4 y C6 se obtiene una mejora significativa en la respuesta del sistema, además de que solo en estas redes se puede aplicar la metodología de optimización de puntos invariantes extendida. Por lo tanto, en este estudio solo se analiza la influencia de los IDVA con estas redes mecánicas en la respuesta del sistema. Por simetría $G_1 = G_2 = G$ y $G_{1a} = G_{2a} = G_a$. focalizando el análisis en la respuesta del rotor; las soluciones para cada configuración de los absorbedores se presentan en las Ecuaciones (147)-(150).

Absorbedor de vibraciones convencional:

$$G = \sqrt{\frac{\Omega^4(\Omega^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2\zeta^2\Omega^6}{((\phi - 1)\Omega^4 + (1 + (\mu - \phi + 1)\eta^2)\Omega^2 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2\Omega^2((\mu - \phi + 1)\Omega^2 - 1)^2}} \quad (147)$$

Absorbedor de vibraciones con base en inersor - red C3

$$G = \sqrt{\frac{A_{IDVA C3} + B_{IDVA C3}}{C_{IDVA C3} + D_{IDVA C3}}} \quad (148)$$

Absorbedor de vibraciones con base en inersor - red C4

$$G = \sqrt{\frac{A_{IDVA C4} + B_{IDVA C4}}{C_{IDVA C4} + D_{IDVA C4}}} \quad (149)$$

Absorbedor de vibraciones con base en inersor - red C6

$$G = \sqrt{\frac{A_{IDVA C6} + B_{IDVA C6}}{C_{IDVA C6} + D_{IDVA C6}}} \quad (150)$$

Los parámetros $A_{IDVA ci}$, $B_{IDVA ci}$, $C_{IDVA ci}$, $D_{IDVA ci}$ para $i = 3,4,6$; se detallan en el Apéndice A.

7.2. Optimización de dispositivos absorbedores de vibración

7.2.1. Metodología de puntos invariantes para el absorbedor de vibraciones convencional

Cuando el elemento de admitancia Y_i se sustituye por un amortiguador, el dispositivo de control se convierte en un absorbedor convencional; el sistema es entonces uno de dos grados de libertad y, como en el caso de los TID, se optimiza por el método de puntos invariantes de Den Hartog. Los parámetros óptimos se presentan en las Ecuaciones (151) y (152).

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\mu - \phi + 1}} \quad (151)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{2\mu - 2\phi + 2}} \quad (152)$$

En la Figura 85a se presenta la gráfica optimizada del DVA convencional. En la Figura 85b se observa que, si se grafican las respuestas del DVA convencional y del TID C4, las gráficas se superponen. Lo anterior evidencia que ambas redes son equivalentes, esto se consigue representado al elemento masa como un inersor con una terminal conectada a tierra, de esta manera el inersor puede sustituir a los elementos de masa en las redes mecánicas.

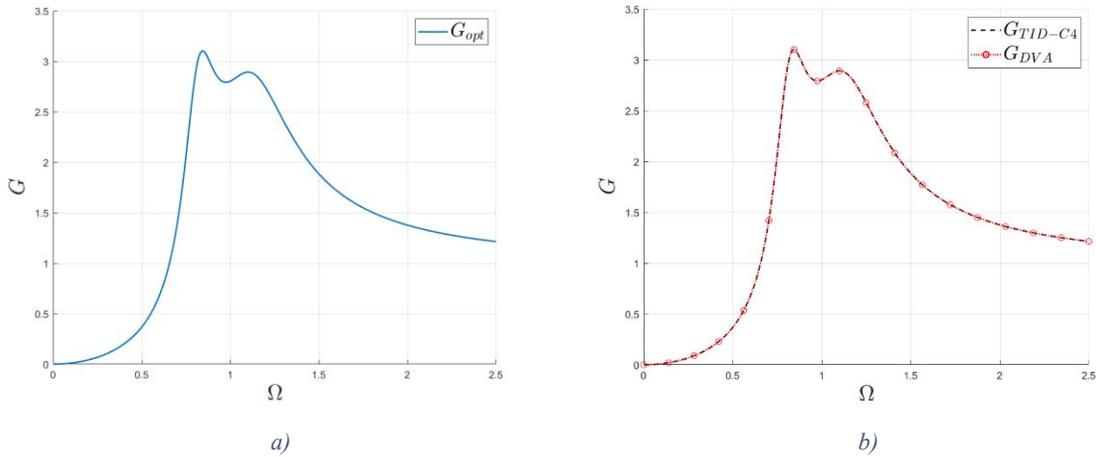


Figura 85. Respuesta del DVA. a) Respuesta del absorbedor con parámetros óptimos. b) Comparación de respuestas del DVA convencional y el TID-C4.

En la Figura 86 se observa el modelo de representación de un elemento masa como un dispositivo inersor. De acuerdo con diagrama para representar un elemento masa como un inersor; el inersor debe tener una inercancia igual a la masa que se desea sustituir y una terminal fija a tierra; la terminal móvil representa el movimiento que tendría el elemento masa.

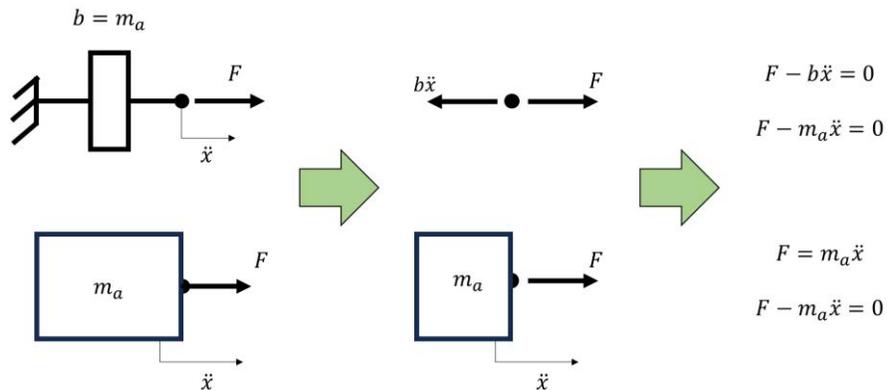


Figura 86. Representación de un elemento masa como un dispositivo inersor.

Es consistente que representando el elemento masa con un dispositivo inersor, el TID C4 generará la misma respuesta que un DVA convencional, como se presentó en la Figura 85. Empleando este procedimiento, en la Figura 87 se observa que la red de un TID C6 puede representar al “absorbedor dinámico de vibración no tradicional” analizado por Mendoza-Larios *et al.* [44] y, por lo tanto, generar la misma respuesta en el sistema (Figura 88).

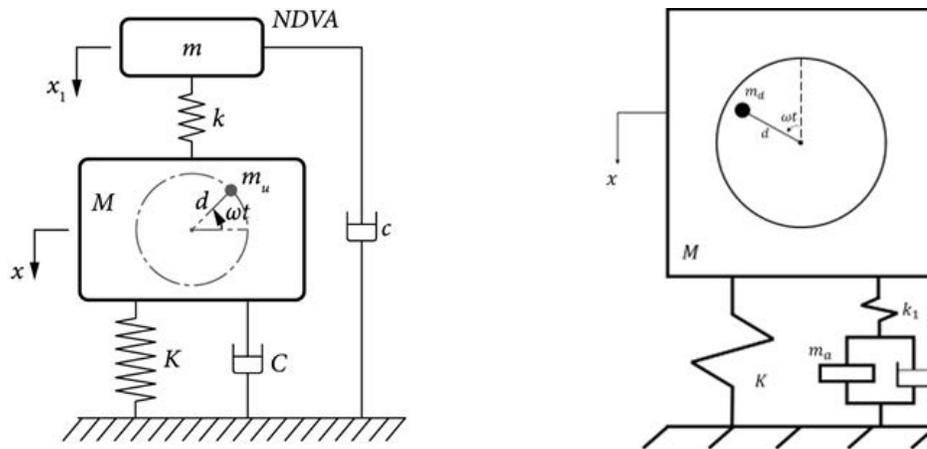


Figura 87. Diagramas de red NDVA y su equivalencia como red TID. a) Sistema con NDVA analizado en [44]. b) Sistema equivalente utilizando la red del TID

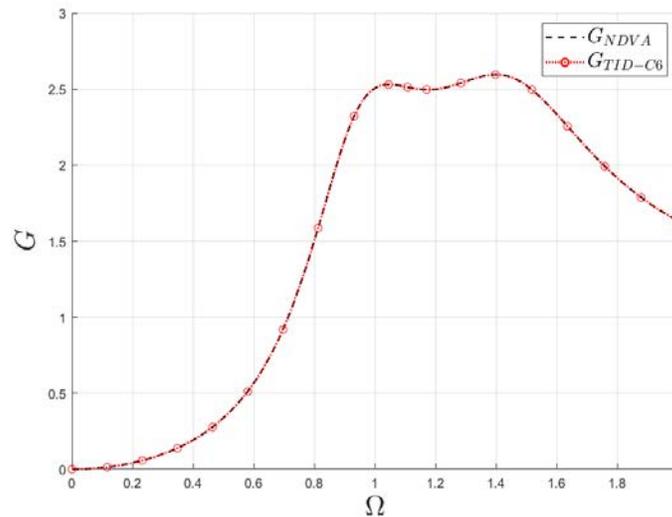


Figura 88. Comparación de respuesta incorporando el NDVA y el TID-C6.

7.2.2. Metodología de puntos invariantes extendida para absorbedores de vibraciones con base en inersor

Cuando se evalúa la función G del sistema, haciendo que $\zeta = 0$ y $\zeta \rightarrow \infty$, se obtienen dos comportamientos como sistemas de dos y tres grados de libertad, sin amortiguamiento. Siguiendo la metodología de optimización, se tendrán cuatro puntos invariantes que se deben calibrar a la misma magnitud para posteriormente calcular el parámetro ζ_{opt} que mantiene la amplitud de la función G , en todo el ancho de banda, cercana a la amplitud de los puntos invariantes.

Absorbedor de vibraciones con base en inersor – red C3

Al graficar la función G de la red C3 en las tendencias de ζ , sin sintonizar, se obtienen las gráficas presentadas en la Figura 89, donde se observan los cuatro puntos invariantes del sistema.

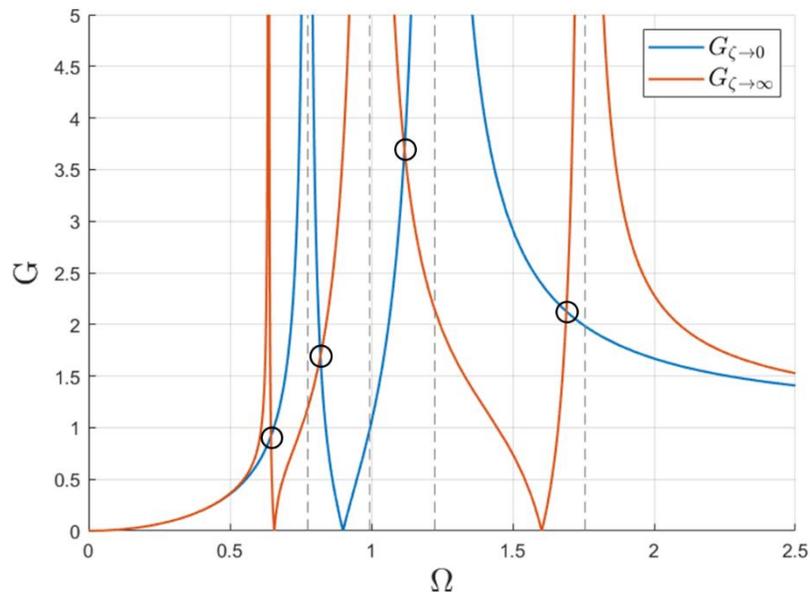


Figura 89. Gráficas del IDVA-C3 sin sintonizar evaluado en las tendencias límites de ζ .

Al sintonizar el sistema, se obtiene una ecuación para la amplitud de los puntos invariantes y tres ecuaciones para los parámetros óptimos que sintonizan al sistema

(Ecuaciones (153)-(156)), como se observa en la Figura 90. El parámetro H de la Ecuación (153) establece la amplitud de los puntos invariantes.

$$H = \frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{1-\phi}} \quad (153)$$

$$\delta_{opt} = \frac{2\mu}{1-\phi} \quad (154)$$

$$\eta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1-\phi}} \quad (155)$$

$$\gamma_{opt} = \sqrt{\frac{1-\phi}{1-\mu-\phi}} \quad (156)$$

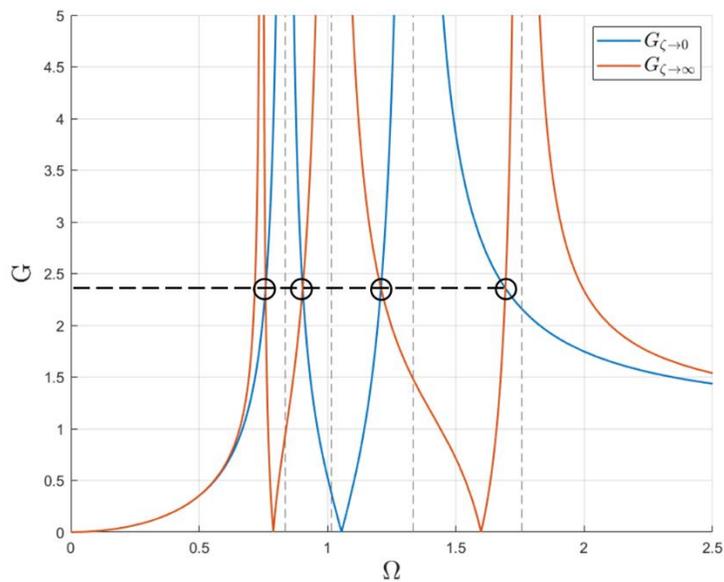


Figura 90. Gráficas del IDVA-C3 sintonizado evaluado en las tendencias límites de ζ .

Para obtener una expresión de ζ_{opt} , la metodología establece que se debe evaluar la magnitud de G en los tres valores de Ω donde ocurre la resonancia, dentro del ancho de banda, e igualarla a la de los puntos invariantes. En el presente documento se denomina a estas relaciones de frecuencia como: Ω_1, Ω_2 y Ω_3 .

El método descrito para obtener ζ_{opt} no se pudo resolver analíticamente para la red C3, sin embargo, se puede utilizar la frecuencia de antirresonancia del sistema de dos grados de libertad, denominada Ω_4 , para aproximar Ω_2 (Figura 91); de esta manera se obtiene una expresión analítica para ζ_{opt} , Ecuación (157).

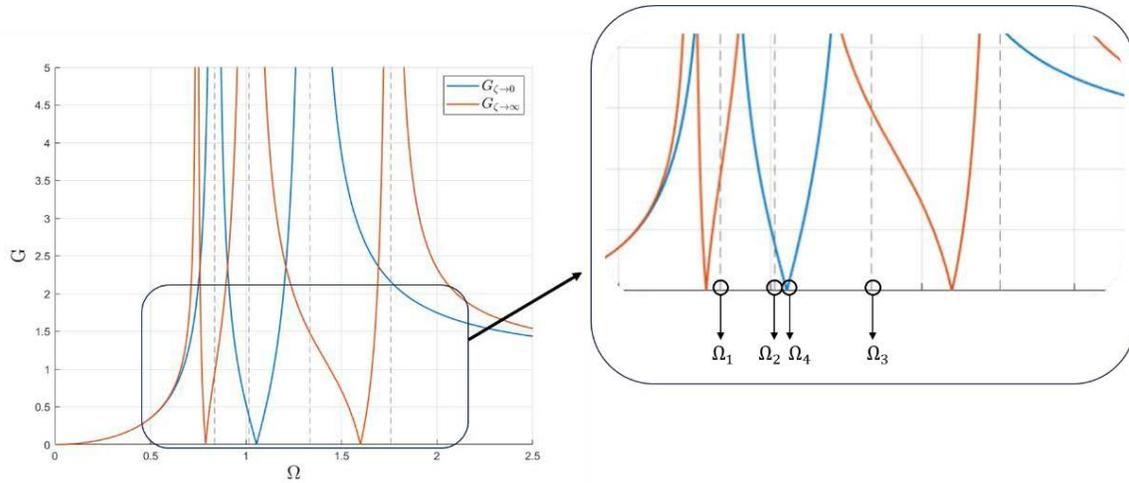


Figura 91. Identificación de las relaciones de frecuencia resonantes y antirresonantes.

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\frac{\mu(\mu^2 + (7\phi - 7)\mu + 11(\phi - 1)^2)(-3\phi + 3 + \mu)}{(\phi - 1)^2(-4 + 4\phi + \mu)(4\mu + 9\phi - 9)}}}{3} \quad (157)$$

La respuesta optimizada del modelo con el IDVA C3 se presenta en la Figura 92. Se observa en la respuesta de G_{opt} que las amplitudes de los máximos de la función, no se encuentran cercanos a los puntos invariantes (ni entre sí mismos). Se esperaba que los máximos tuvieran una amplitud muy cercana, esto es un indicador de que esta metodología presenta problemas para sistemas con excitación inercial que incorporan un IDVA.

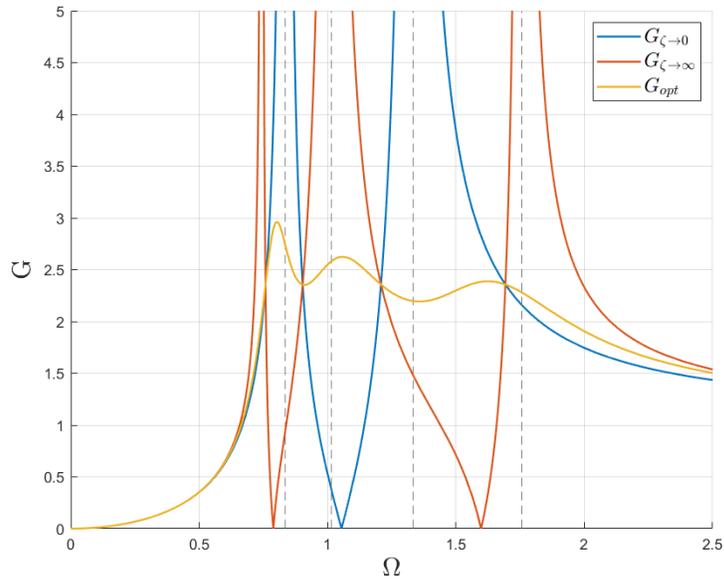


Figura 92. Respuesta optimizada, incorporando el IDVA-C3.

Absorbedor de vibraciones con base en inersor – red C4

Aplicando la metodología de optimización a la red C4 se obtienen las Ecuaciones (158)-(162). En esta configuración sí se obtuvo una solución analítica al emplear las tres frecuencias de resonancia en el cálculo de ζ_{opt} . En la Figura 93 se presenta la respuesta optimizada del sistema incorporando el IDVA C4. Se observa que el primer máximo de la respuesta presenta una gran amplitud, alejándose más de los puntos invariantes, en comparación a los dos puntos máximos restantes.

$$H = \frac{\sqrt{1 + 3\mu - \phi}}{(1 + \mu - \phi)\sqrt{\mu}} \quad (158)$$

$$\delta_{opt} = \frac{2\mu}{\mu - \phi + 1} \quad (159)$$

$$\eta_{opt} = \frac{\sqrt{1 + 3\mu - \phi}}{1 + \mu - \phi} \quad (160)$$

$$\gamma_{opt} = \frac{\sqrt{1 + \mu - \phi}}{\sqrt{1 + 3\mu - \phi}} \quad (161)$$

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{2(13\mu - 5\phi + 5)\mu^3}{3(2\mu - \phi + 1)(\mu - \phi + 1)(3\mu - \phi + 1)^2}} \quad (162)$$

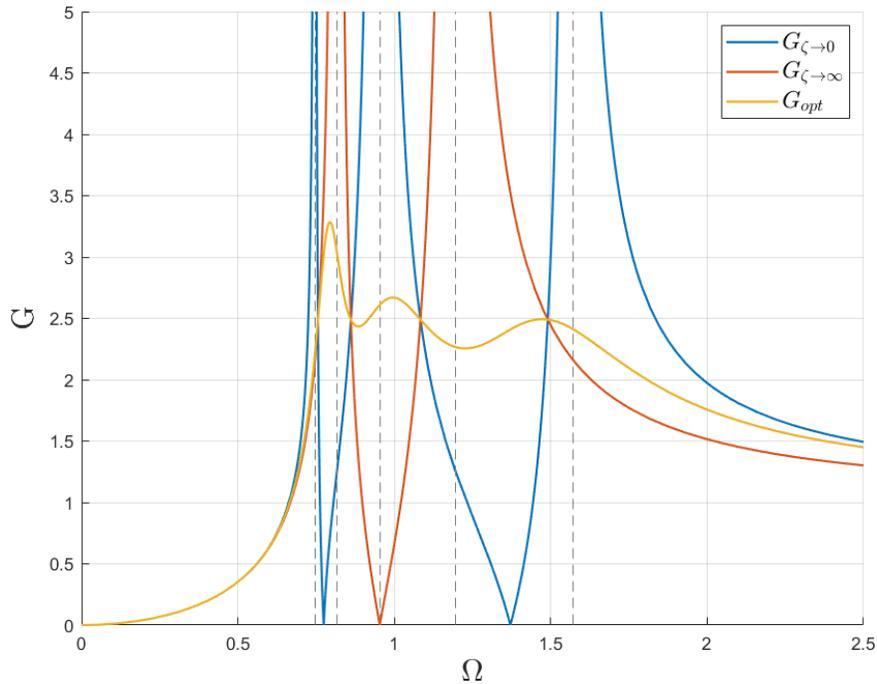


Figura 93. Respuesta optimizada, incorporando el IDVA-C4.

Absorbedor de vibraciones con base en inersor – red C6

La metodología de optimización aplicada al dispositivo IDVA C6 genera las Ecuaciones (163)-(167). En esta red se utilizó la frecuencia de antirresonancia (Ω_4) como una aproximación de la frecuencia de resonancia central (Ω_3) para poder generar una expresión analítica para el parámetro ζ_{opt} . En la Figura 94 se presenta la respuesta optimizada de este sistema, en la cual se observa un comportamiento más estable en el ancho de banda, en comparación con las redes C3 y C4.

$$H = \frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{1-\phi}} \quad (163)$$

$$\delta_{opt} = \frac{2\mu(-\mu - \phi + 1)}{(\mu - \phi + 1)^2} \quad (164)$$

$$\eta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{\mu - \phi + 1}} \quad (165)$$

$$\gamma_{opt} = \frac{\mu - \phi + 1}{-\mu - \phi + 1} \quad (166)$$

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{30}}{3} \sqrt{\frac{\mu^3}{(\mu - \phi + 1)^3}} \quad (167)$$

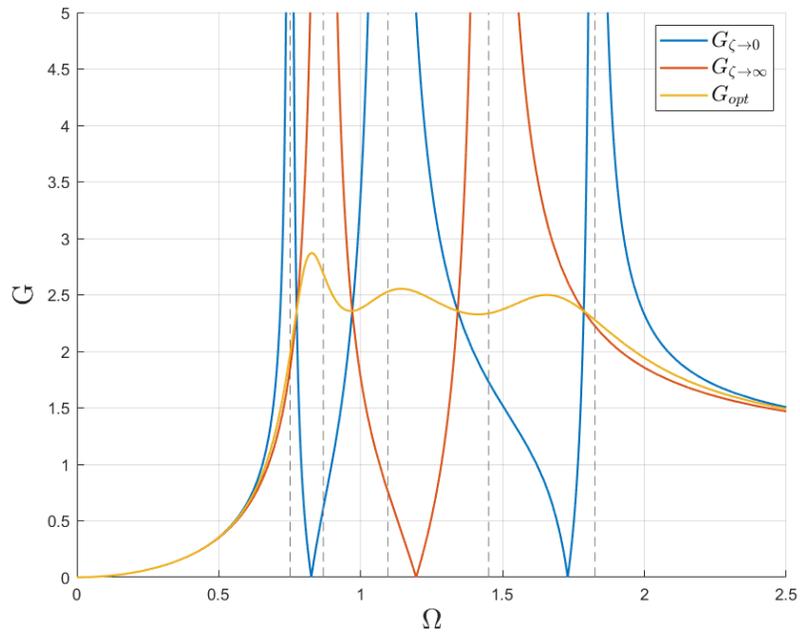


Figura 94. Respuesta optimizada, incorporando el IDVA-C6.

En la Figura 95 se presenta la comparación de las tres redes analizadas. Como se estableció anteriormente, la red C6 presenta el mejor comportamiento bajo el criterio de puntos invariantes. Sin embargo, es evidente que este criterio no consigue optimizar de forma

eficiente ninguna de las redes, por lo que se debe tomar como criterio otra metodología para optimizar sistemas excitados por fuerzas inerciales, que incorporan un IDVA.

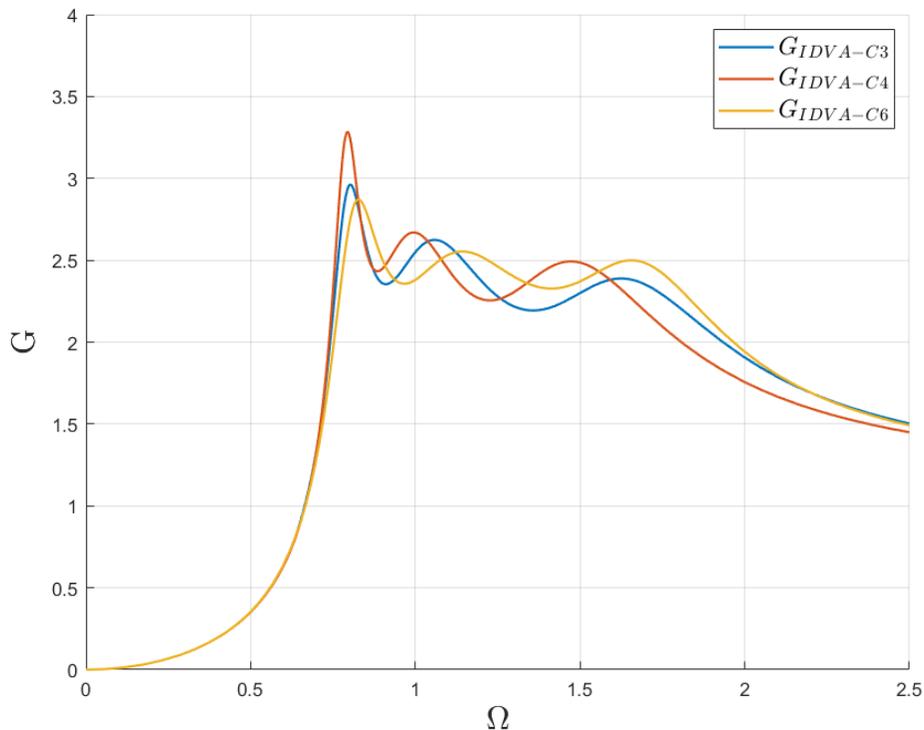


Figura 95. Respuestas óptimas de los IDVA, bajo el criterio de puntos invariantes extendido.

7.2.3. Criterio de optimización: norma H_∞ para dispositivos IDVA

Retomando el diagrama de la Figura 84, si se sustituye el elemento de admitancia por un amortiguador, se obtiene el absorbedor de vibraciones convencional, el cual es un sistema de dos grados de libertad. Por lo tanto, la optimización H_∞ para este dispositivo se realiza siguiendo la descripción hecha en el subtema 6.3.2.

Cuando se sustituye al elemento de admitancia por una red mecánica con base inercial, el problema de optimización consiste en la solución de un sistema de cinco ecuaciones no lineales: f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 . Las primeras tres ecuaciones se obtienen de la función f_n , aplicando el teorema de Vieta. Las ecuaciones restantes se generan de la matriz Jacobiana, con base [41]. Para los dispositivos IDVA que se estudian en este proyecto, la matriz Jacobiana para obtener las funciones f_4 y f_5 se expresa en la Ecuación (168) como:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \delta} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (168)$$

Y las funciones que se obtienen de la matriz Jacobiana son determinantes de submatrices de 3×3 igualadas a cero. Estas funciones son:

$$f4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \delta} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = 0 \quad (169)$$

$$f5 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0 \quad (170)$$

A diferencia de la optimización para los sistemas de dos grados de libertad, en este caso es difícil calcular expresiones analíticas simplificadas para $f1$, $f2$ y $f3$. Por lo tanto, se utiliza Maple para obtener los coeficientes c_i (para $i = 1, 2, \dots, 6$,) procedentes del teorema de Vieta, los cuales se utilizan en Matlab para solucionar el problema de optimización. En la Figura 96 se presenta el diagrama de flujo para desarrollar la optimización H_∞ .

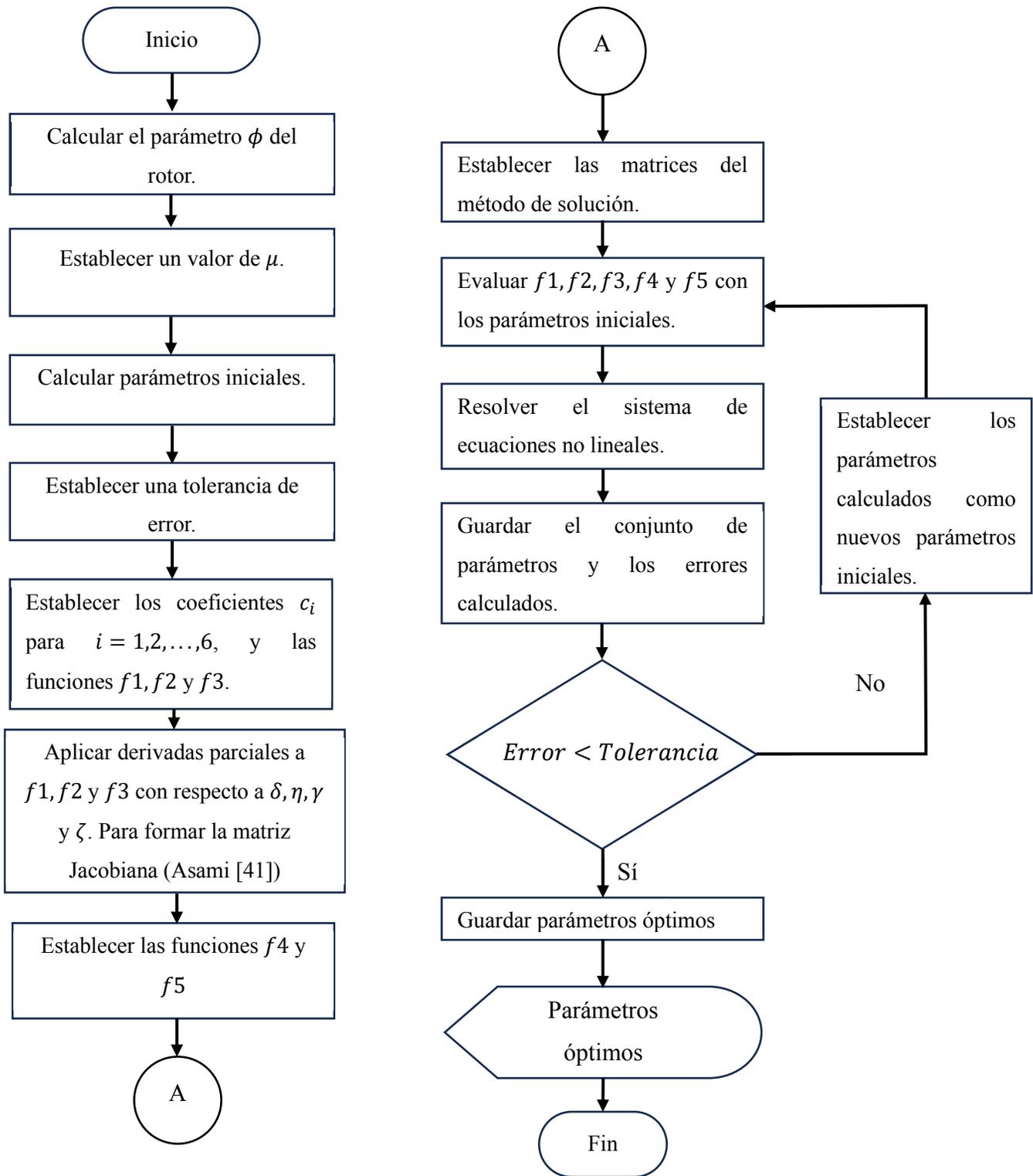


Figura 96. Diagrama de flujo para desarrollar la optimización H_{∞} en sistemas de tres grados de libertad.

Las gráficas de respuesta del sistema para el modelo del rotor de un disco tipo *Jeffcott*, optimizado mediante H_∞ se presentan en las Figuras 97-99 para las redes C3, C4 y C6 respectivamente, donde se comparan con las respuestas optimizadas mediante puntos invariantes.

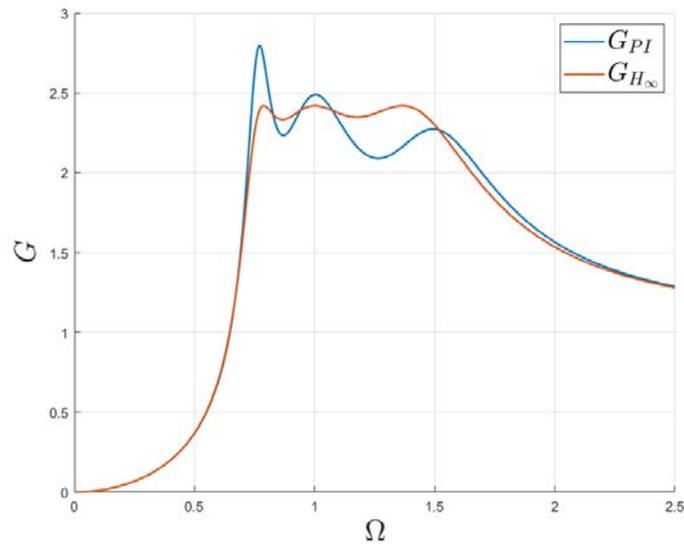


Figura 97. Respuesta optimizada empleando el IDVA-C3.

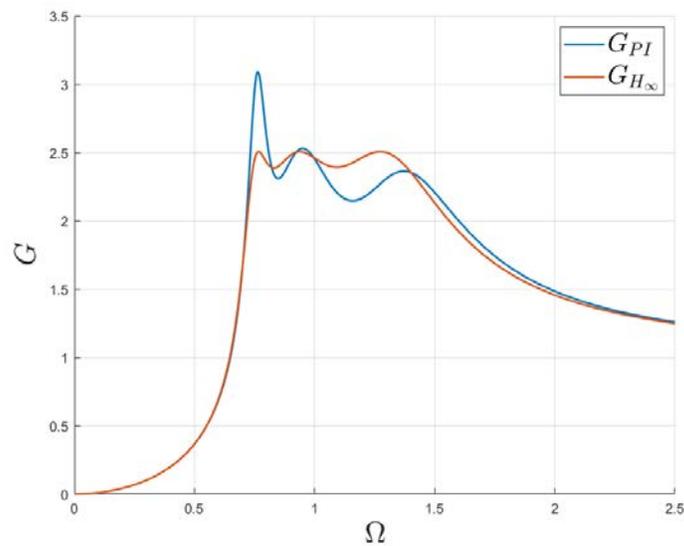


Figura 98. Respuesta optimizada empleando el IDVA-C4.

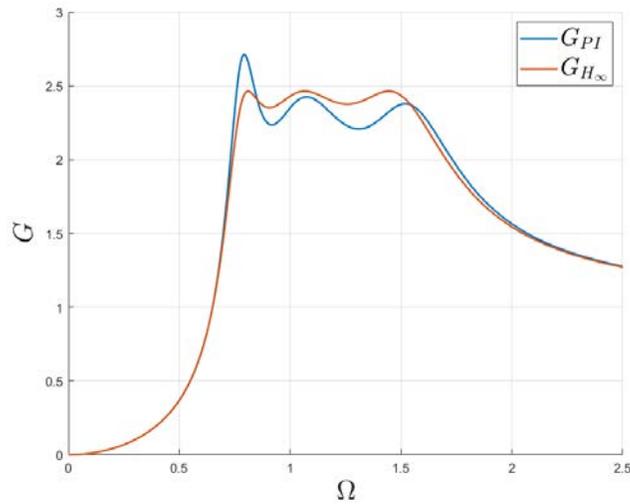


Figura 99. Respuesta optimizada, empleando el IDVA-C6.

Es evidente que, para el caso de un sistema con excitación inercial, el método de puntos invariantes extendido no genera una respuesta óptima. Sin embargo, las ecuaciones generadas son útiles para evaluar los parámetros que sirven como puntos iniciales para aplicar la metodología H_∞ . En las gráficas presentadas es visible que los máximos de la respuesta con H_∞ están calibrados a la misma amplitud. Si bien, el método de puntos invariantes no presentó una aproximación precisa a la norma H_∞ , como sí sucede en otros sistemas que no son excitados inercialmente, es de utilidad para generar soluciones cerradas que permiten evaluar numéricamente parámetros iniciales para una rápida convergencia en la norma H_∞ .

Capítulo 8

Simulaciones de elemento finito

Con el objetivo de validar los resultados obtenidos analíticamente se realizaron simulaciones de elemento finito a través del software COMSOL Multiphysics. Como su nombre lo indica, este software está orientado a realizar simulaciones de multifísica, por lo que cuenta con diversos módulos que se pueden trabajar en conjunto o de forma aislada. Para este trabajo de investigación se emplearon dos módulos de simulación de forma aislada: el primero consiste en simulaciones de redes mecánicas, con lo que se validan todos los cálculos realizados al considerar la admitancia mecánica de las redes; el segundo módulo que se emplea es de rotodinámica considerando rotor tipo viga, con lo cual se genera la geometría del rotor y se incorpora el efecto de los dispositivos de control para analizar la respuesta de vibración, de esta forma se generan resultados más cercanos al comportamiento real de un rotor.

8.1. Simulaciones con módulo de redes mecánicas

El módulo de simulación con redes mecánicas utiliza elementos mecánicos masa, resorte, amortiguador, por mencionar algunos, que se conectan entre sí a través de nodos ordenados numéricamente. Dentro de dicho modulo se cuenta con un elemento cuyo coeficiente es la admitancia mecánica, esto permite simular los efectos giroscópicos del modelo rotodinámico. Finalmente, el inersor se introduce como elemento amortiguador equivalente con su respectivo coeficiente de amortiguamiento equivalente (o admitancia), de la misma manera en que se trabajó analíticamente (subtema 5.4).

En el Apéndice C se presentan los diagramas de redes mecánicas para los siete sistemas analizados en esta investigación: las tres configuraciones de TID, el DVA convencional y las tres configuraciones de IDVA. Estos diagramas se reproducen de forma virtual en el software para realizar las simulaciones. Aunque por simetría el modelo del rotor se podría representar como uno de un grado de libertad, se realiza una red simulando el movimiento en las dos

direcciones (q_1 y q_2), como se observa en los diagramas; esto mantiene la generalidad del modelo.

Los parámetros óptimos calculados bajo la norma H_∞ se integran a los coeficientes del módulo de redes mecánicas. Se simula el modelo del rotor de un disco tipo *Jeffcott* y se comparan las respuestas de vibración obtenidas mediante simulación contra las respuestas analíticas. En las Figuras 100-106 se presentan las contraposiciones entre las respuestas de vibración obtenidas en COMSOL contra las respuestas analíticas. Se observa que las gráficas se superponen, esto confirma que la función de transferencia, para cada red, al igual que los parámetros óptimos se dedujeron correctamente.

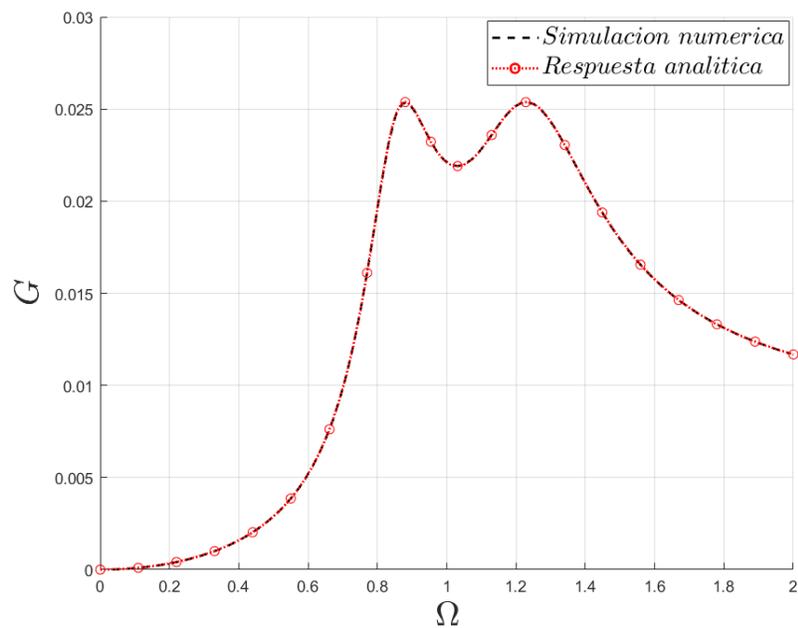


Figura 100. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.

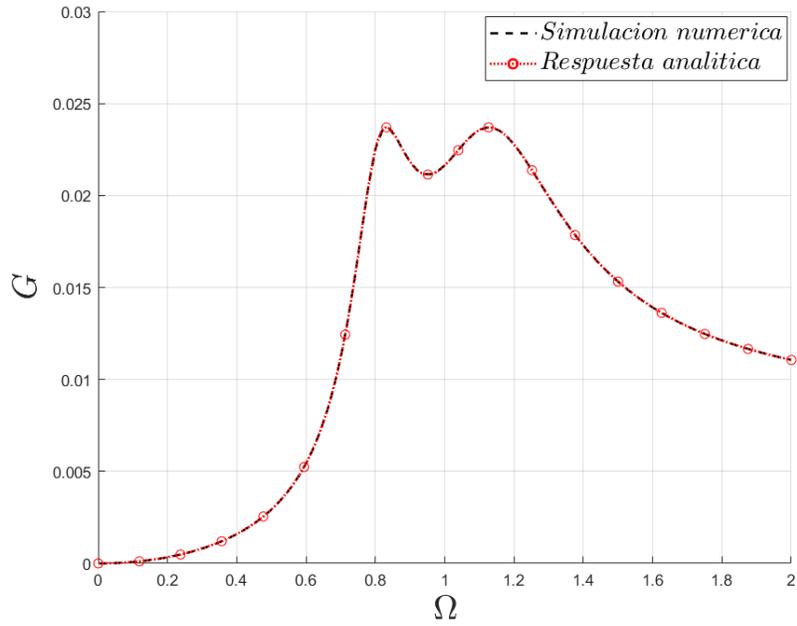


Figura 101. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.

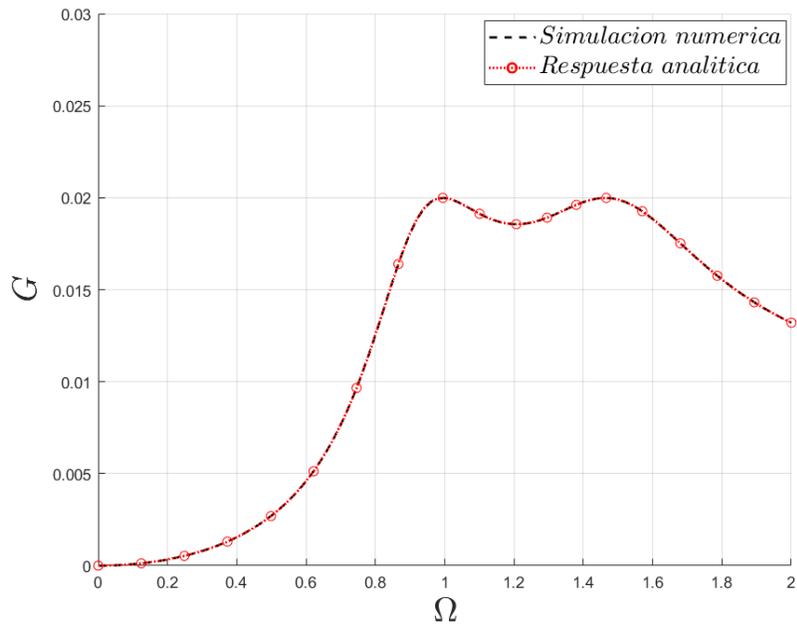


Figura 102. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.

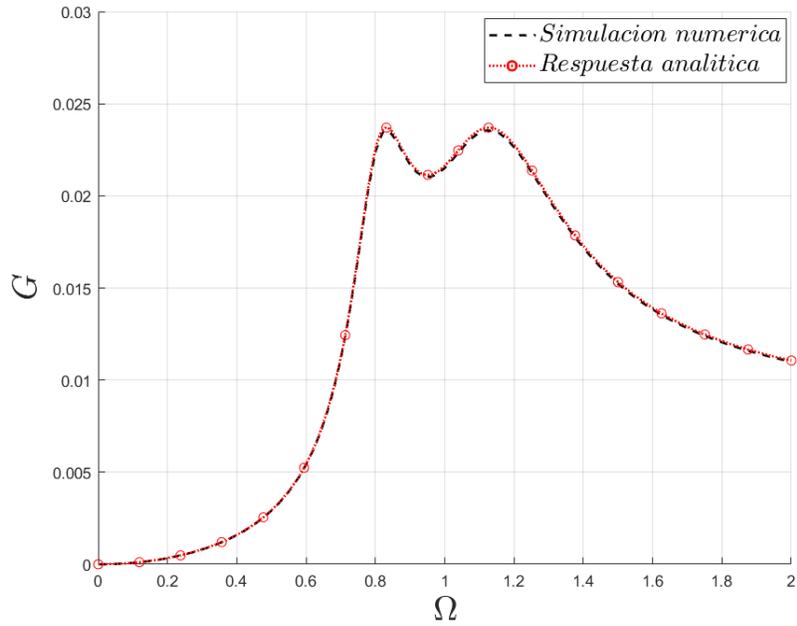


Figura 103. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo DVA. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.

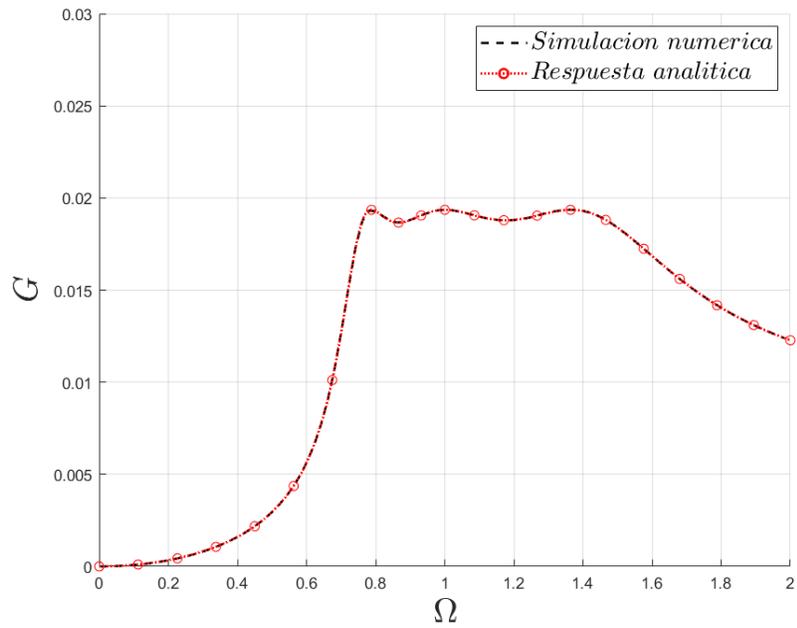


Figura 104. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.

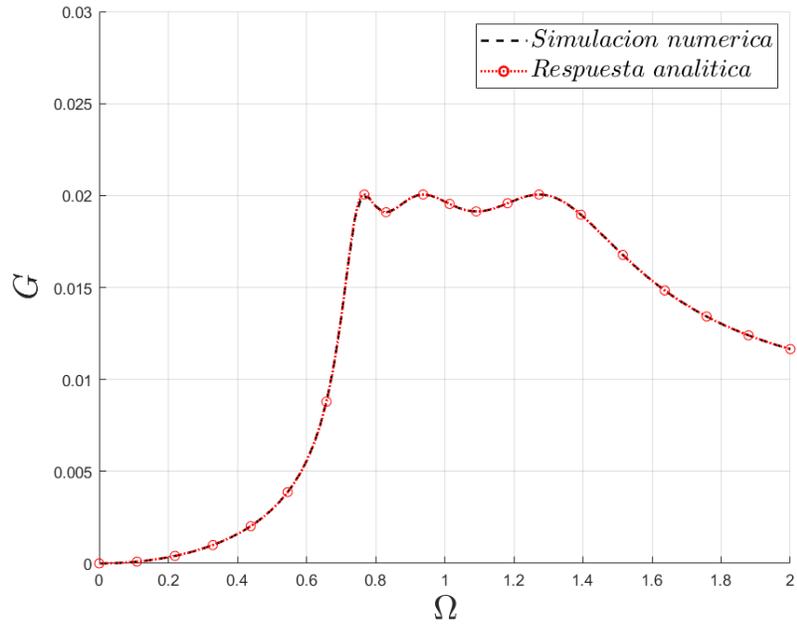


Figura 105. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.

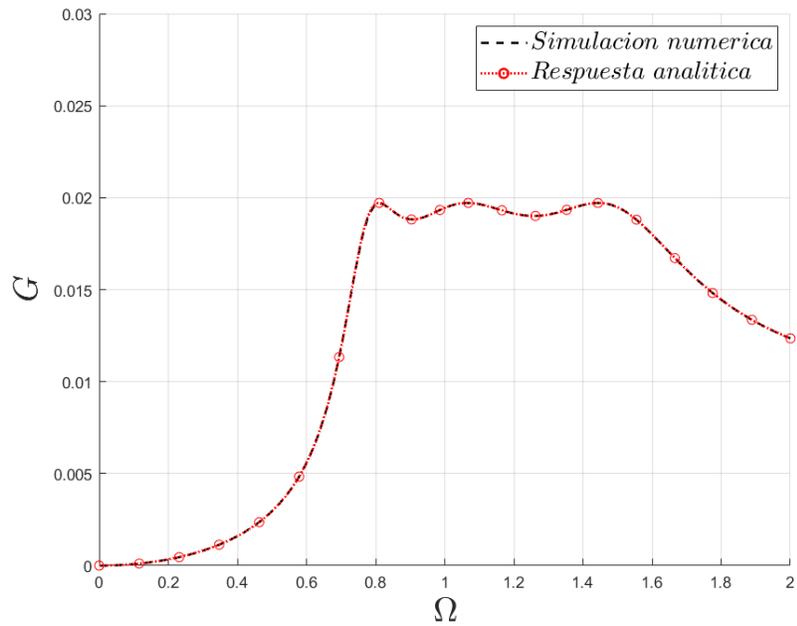


Figura 106. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de redes mecánicas.

8.2. Simulaciones con el módulo de rotodinámica

El módulo de rotodinámica cuenta con un tipo de análisis “rotor de viga” en el que se describen las características del rotor utilizando elementos finitos tipo viga, sobre el cual se indican las ubicaciones de cojinetes, discos, fuerzas de excitación, entre otras cosas. Como ejemplo, en la Figura 107a se modela el rotor tipo *Jeffcott* excitado por desbalance, utilizando elementos finitos tipo viga. En la Figura 107b se observa la representación tridimensional del rotor que simula el software.

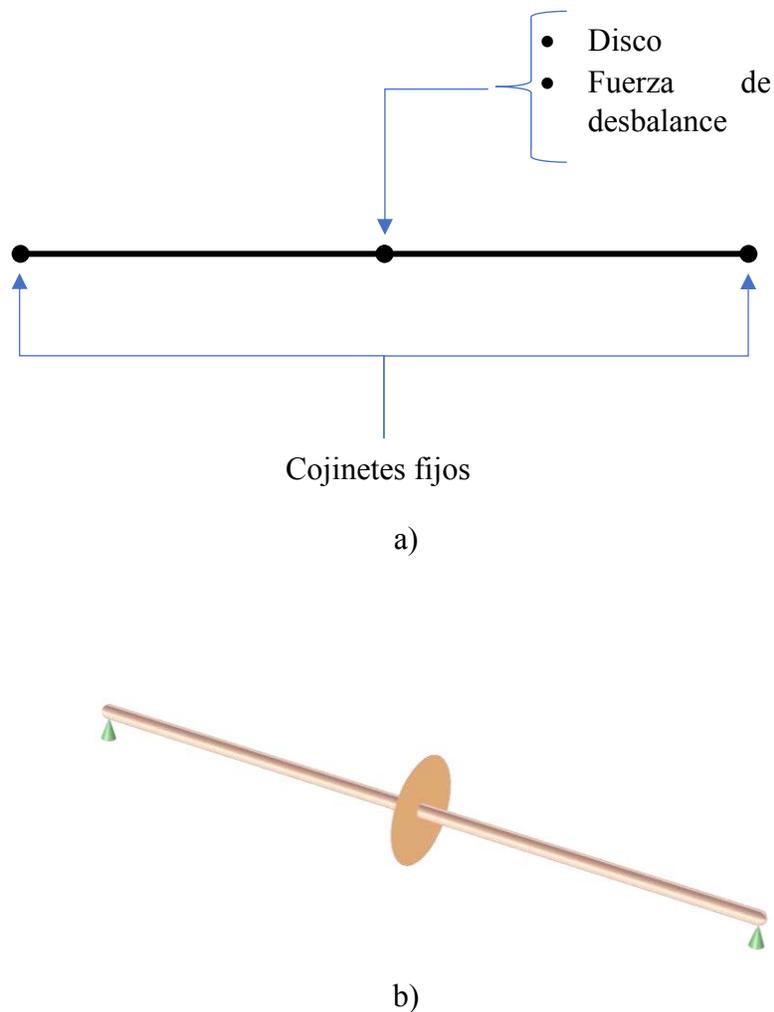


Figura 107. Modelo virtual del rotor en el módulo de rotor de viga. a) Definición con elementos finitos. b) Representación tridimensional.

En este módulo solo se representan elementos rotativos, lo cual implica un problema para agregar los efectos del absorbedor de vibraciones, debido a que contiene un elemento masa que no gira con el rotor. Como solución a esta problemática se utiliza la representación de elementos de masa como dispositivos inersores, tal y como se trató en el subtema 7.2.1.

Con el método mencionado previamente, la red del absorbedor se trata como si estuviese compuesta por elementos resorte-amortiguador-inersor. Dicha red se puede representar como un amortiguador equivalente (subtema 5.4), cuya admitancia entrega el efecto completo del absorbedor. Las admitancias de las redes para realizar las simulaciones en COMSOL se presentan en el Apéndice D.

El amortiguador equivalente se introduce al rotor como un soporte con rigidez cero y amortiguamiento igual a la admitancia del absorbedor (Figura 108).

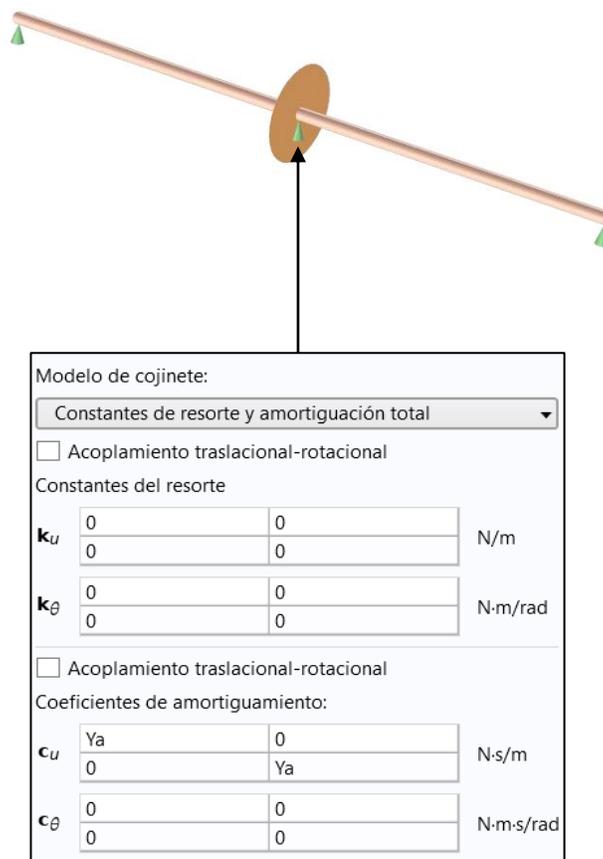


Figura 108. Integración del absorbedor de vibraciones como un amortiguador equivalente con admitancia Y_a .

En las Figuras 109-115 se presentan las comparaciones de las gráficas de respuesta de vibración obtenidas mediante simulación contra las respuestas analíticas.

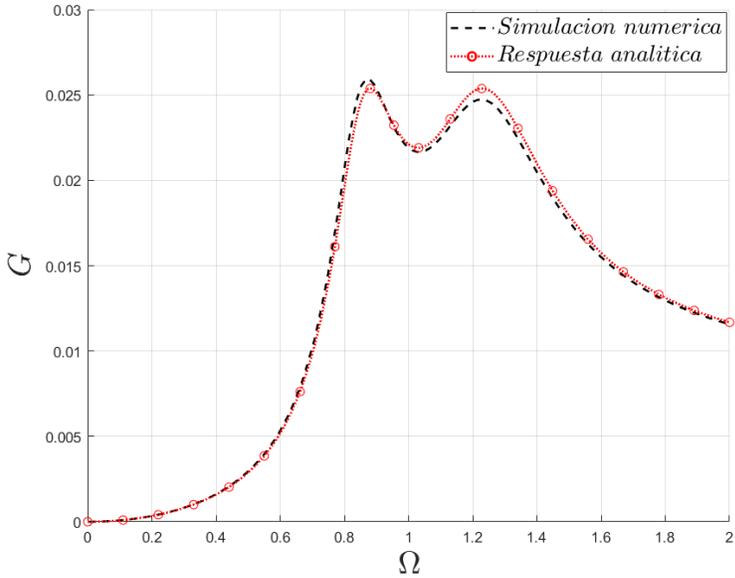


Figura 109. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.

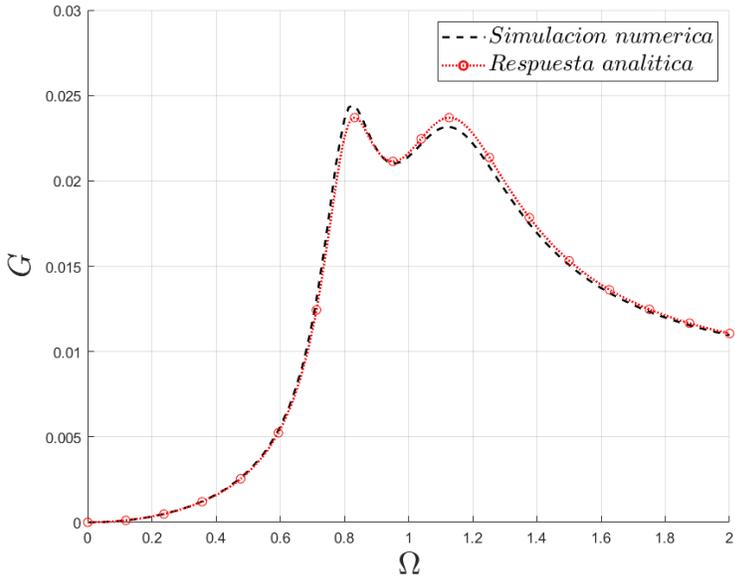


Figura 110. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.

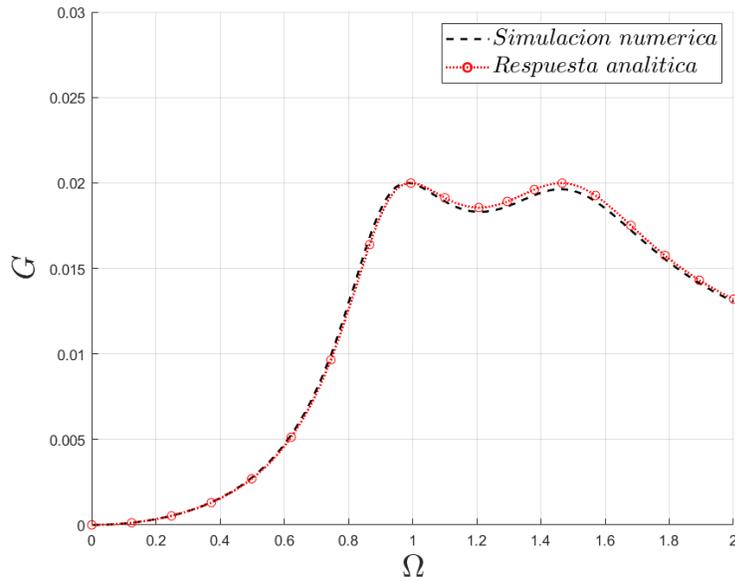


Figura 111. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo TID-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.

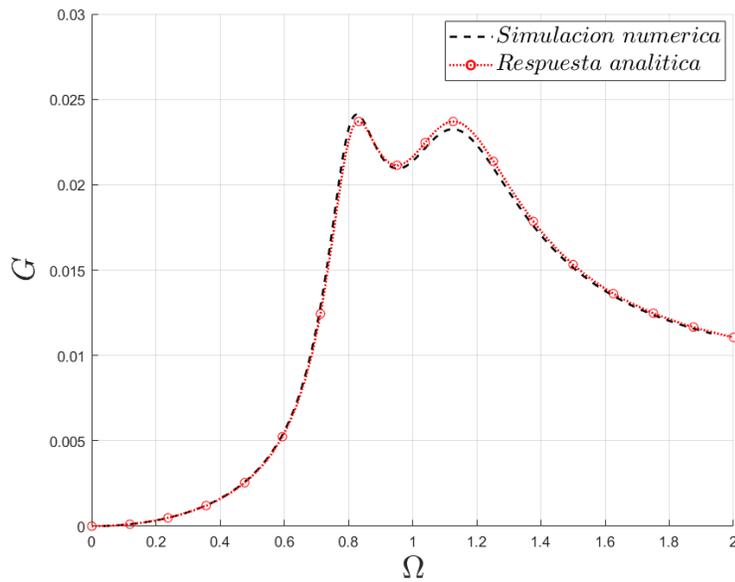


Figura 112. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo DVA. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.

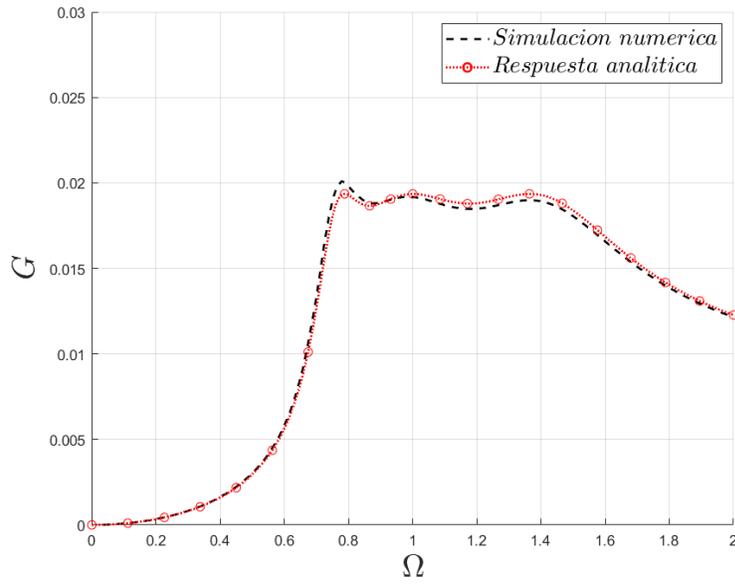


Figura 113. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C3. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.

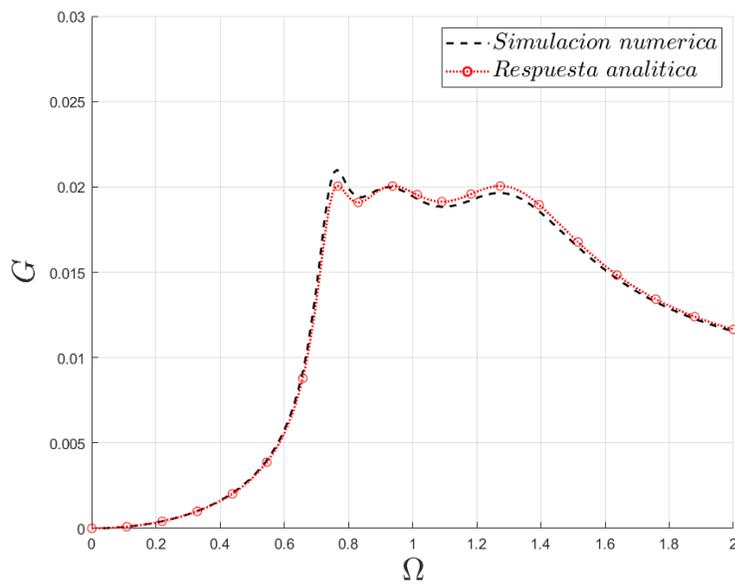


Figura 114. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C4. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.

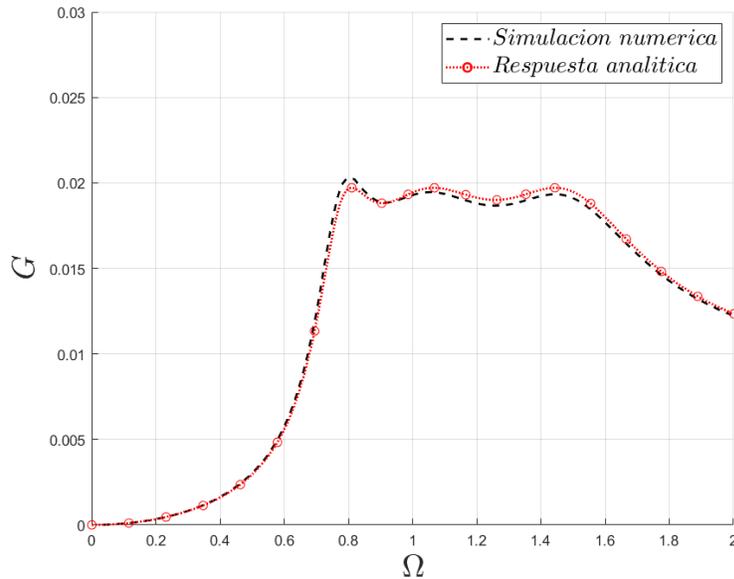


Figura 115. Gráfica de respuesta del sistema rotodinámico incorporando el dispositivo IDVA-C6. Contraposición de la respuesta analítica y la respuesta de simulación con el módulo de rotodinámica.

Como se observó en los resultados de simulaciones, el concepto de la admitancia mecánica resultó ser una herramienta útil para integrar el efecto de los absorbedores de vibración como elementos tipo amortiguador equivalente en el módulo de rotodinámica, agregando así el efecto de sistemas no rotativos. Los resultados obtenidos muestran gran precisión para todo el dominio de Ω evaluado. Otro punto importante es que este método de simulación presenta una complejidad menor en comparación con trabajar en un módulo que permita integrar elementos que estén girando con elementos que no lo hacen. Los tiempos de computación son relativamente cortos.

Capítulo 9

Análisis en la segunda forma modal

En este capítulo se analiza la influencia de los dispositivos de control para la segunda forma modal. Se identificó que un análisis en este modo de vibración requiere una investigación profunda debido a la forma compleja que toman los rotores y que no se pueden representar de forma precisa utilizando la función seno. Se incorpora únicamente el IDVA C3 para estudiar la respuesta dinámica. Los resultados obtenidos son cualitativos y se extrapolan para el comportamiento de los demás dispositivos con los que se trabajó en esta investigación.

9.1. Modelo rotodinámico con IDVA C3 en la respuesta dinámica para el segundo modo de vibración

Se realizó el modelado de los sistemas rotodinámicos de dos y tres discos (subtema 5.1) para obtener sus parámetros modales en el segundo modo de vibración. Se utiliza el ciclo completo de la función seno como función de forma (Figura 116). Se observa que las amplitudes máximas de la función se encuentran a $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ del ciclo de la función.

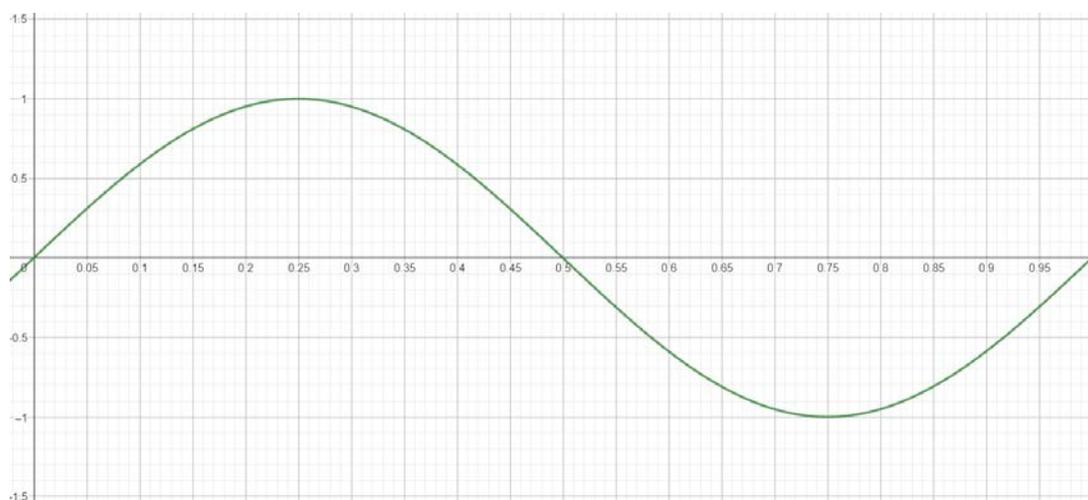


Figura 116. Función de forma seno de ciclo completo.

Siguiendo la metodología trabajada hasta ahora en esta investigación, se obtienen los parámetros óptimos y se ingresan al módulo de rotodinámico para realizar las simulaciones sobre los modelos virtuales de los rotores.

9.1.1. Modelo rotodinámico de dos discos

Como se mencionó en el subtema 5.1, se modela un rotor cuenta con dos discos equidistantes, ubicado cada uno a $L/3$ de cada extremo del eje. En la Figura 117 se presenta la gráfica de respuesta incorporando el IDVA con la red C3.

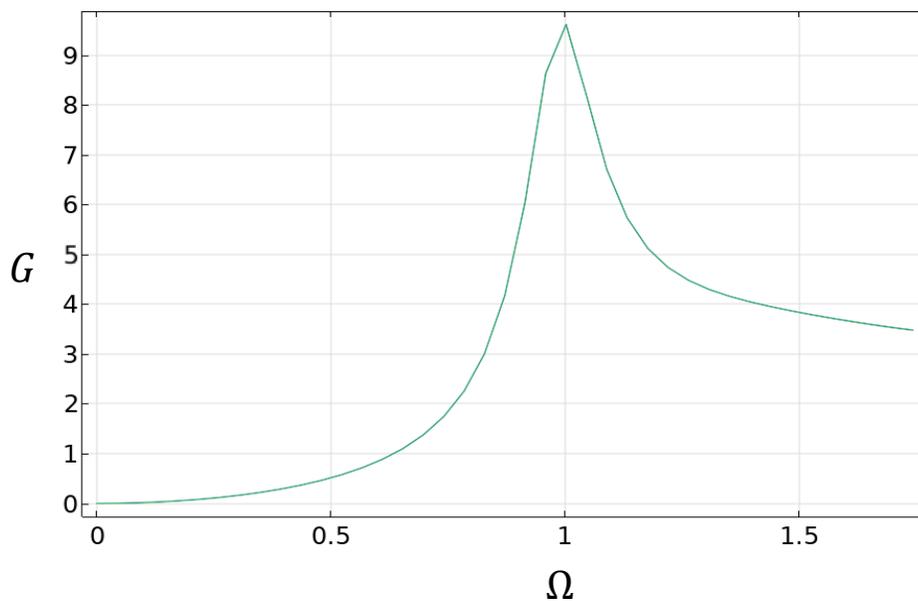


Figura 117. Respuesta vibratoria medida en el punto de ubicación del disco.

Se observa que el comportamiento que presenta la gráfica es el de un sistema de un grado de libertad. Lo cual indica que el dispositivo de control no está entregando el efecto al sistema rotodinámico. Del análisis realizado se concluyó que este comportamiento se debió a que la función de forma *seno* no representa correctamente el comportamiento de este rotor. En la Figura 118a se presenta la función de forma del rotor de dos discos obtenida con simulación y en la Figura 118b se presenta la función que tendría ese rotor si los discos estuvieran ubicados a $L/4$ en lugar de a $L/3$ de cada extremo.

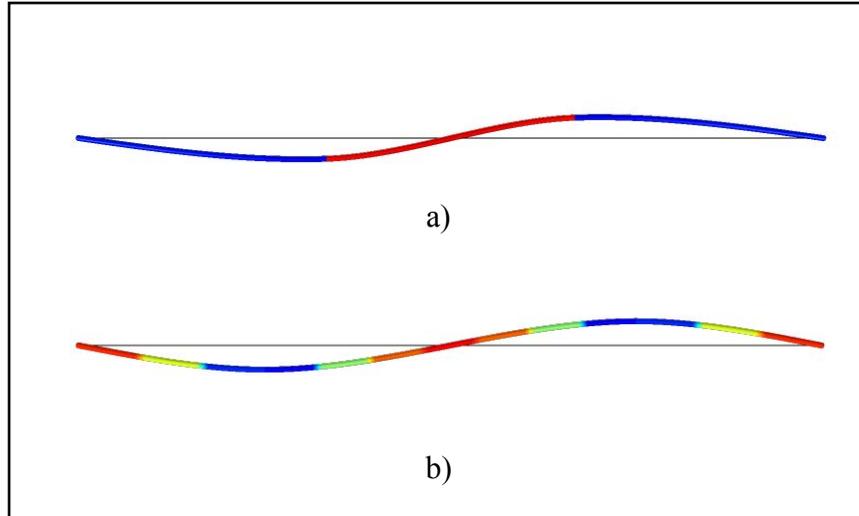


Figura 118. Funciones de forma obtenidas mediante simulación para un sistema rotodinámico de dos discos: a) Rotor con discos a $L/3$ de cada extremo y b) Rotor con discos a $L/4$ de cada extremo.

Como se observa en la Figura 118, la deflexión que sufre el rotor en el caso a es más plana que en el caso b. Además, se identifica que las amplitudes máximas en el caso b están ubicadas en $\frac{1}{4}L$ y $\frac{3}{4}L$ con respecto al extremo izquierdo, al igual que como sucede con la función seno. Suponiendo que la función seno describe de mejor manera el sistema b. Se propone mover los discos a $\frac{1}{4}L$ y $\frac{3}{4}L$ e incorporar el IDVA con la red C3. En la Figura 119 se presenta la respuesta vibratoria medida en el punto donde se encuentra el disco ($L/4$).

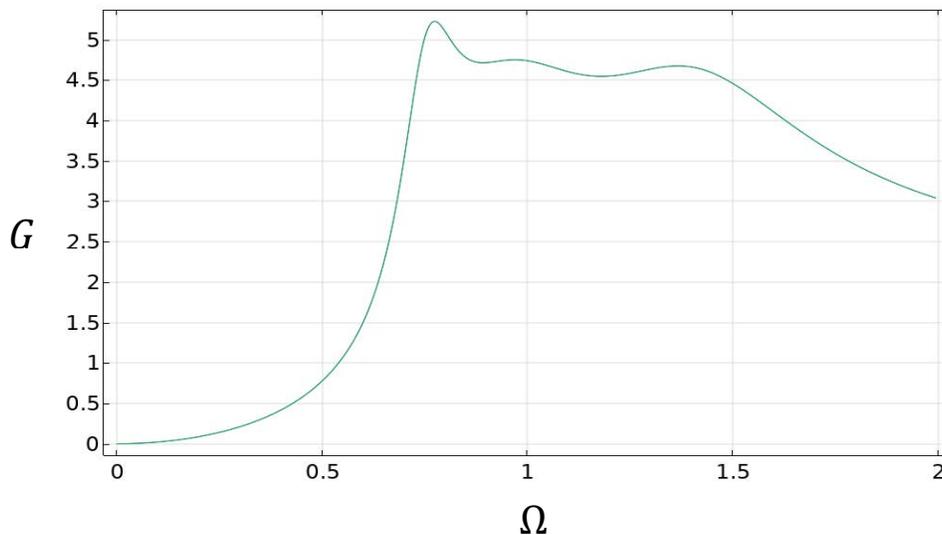


Figura 119. Respuesta vibratoria con discos colocados a $L/4$ y $3L/4$.

Si bien los cambios que presenta la deflexión de los rotores en los casos a y b de la Figura 118 parecen no tener influencia, en la gráfica de respuesta presentada en la Figura 119 se demuestra que con estos cambios las simulaciones generan el comportamiento óptimo para el que fueron optimizados los parámetros de forma modal. Aunque también es evidente que la función de respuesta no presenta el mismo comportamiento que se obtiene de forma analítica. Esto indica que la función seno aproxima el comportamiento, pero no lo define de una manera muy precisa.

Ahora se analiza la respuesta de vibración del rotor con tres discos para el segundo modo. En la Figura 120 se presenta la gráfica de respuesta para el sistema original y en la Figura 121 se presenta la gráfica que se obtiene si los discos de los extremos se mueven a $L/4$ y $3L/4$ con respecto a uno de los extremos.

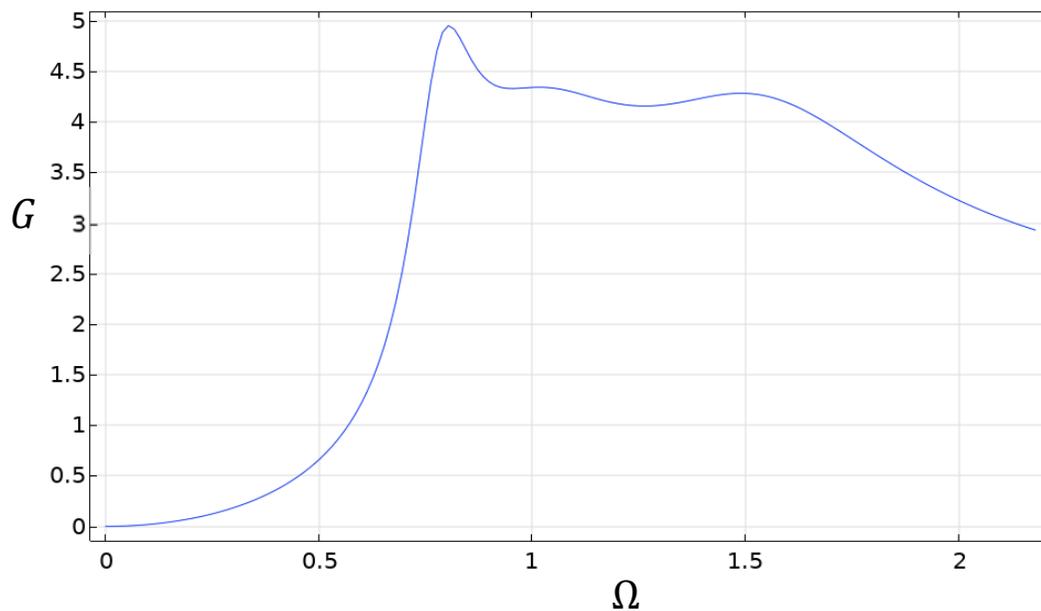


Figura 120. Gráfica de respuesta medida en la posición de los discos externos para el sistema rotodinámico original.

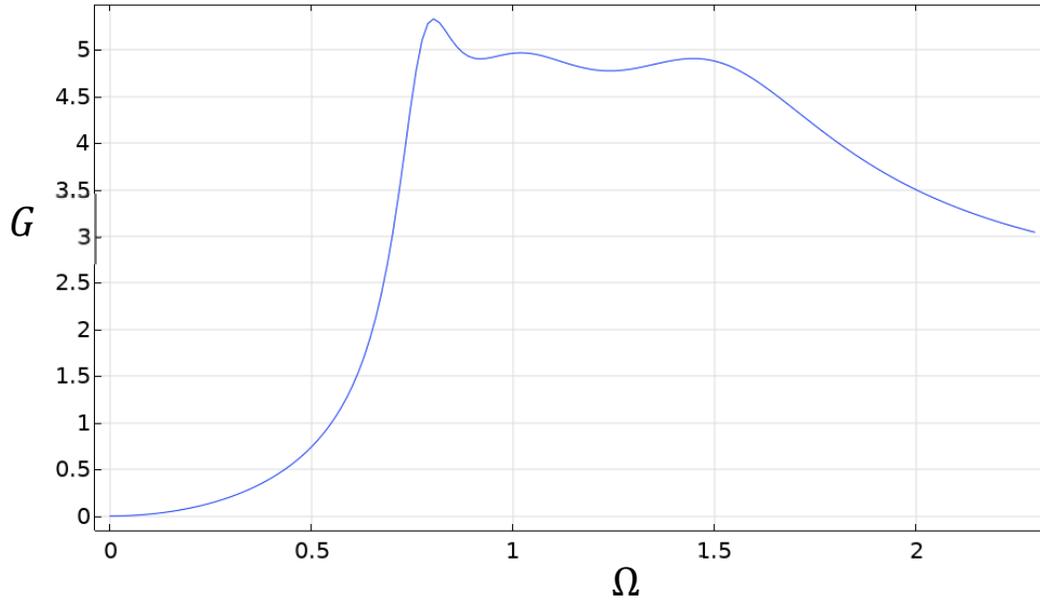


Figura 121. Gráfica de respuesta medida en la posición de los discos externos para el sistema rotodinámico original.

Al comparar las Figuras 120 y 121 se identifica que hay configuraciones en las que la función seno tiene más precisión para representar el comportamiento vibratorio. Para el caso de los rotores con dos y tres discos, analizados, el mejor comportamiento se obtuvo cuando se movieron los discos de manera que las fuerzas de desbalance, y por lo tanto las amplitudes máximas, estuvieran a $\frac{L}{4}$ y $\frac{3}{4}L$ del eje, aproximando así el comportamiento del rotor a la función seno (Figura 116).

Es evidente que las funciones de forma tienen una mayor influencia para el segundo modo de vibración. Se identifica que la función seno puede aproximar bastante bien ciertas configuraciones de rotores, pero, a diferencia del primer modo de vibración, no se puede utilizar de forma general. Se debe tener cuidado al escoger una función de forma debido a que en este modo de vibración la deflexión del rotor es más compleja. Se debe realizar un estudio minucioso sobre el modelado para este modo de vibración y establecer criterios que permitan predecir analíticamente el comportamiento vibratorio, y cuyos resultados sean validados con un software de elemento finito.

Capítulo 10

Conclusiones

En este trabajo de investigación se estudió la influencia de dispositivos de control de vibración pasivos con base en inersores en la respuesta vibratoria de sistemas rotodinámicos excitados por desbalance. Se realizó un análisis modal para el primer modo de vibración mediante la metodología de Lalanne y Ferraris [46], haciendo suposiciones de modelado que permitieron mantener características simétricas del rotor, tales como: simetría geométrica, simetría de soportes y simetría en la distribución de discos en el eje. Esto con la finalidad de poder representar el comportamiento del rotor mediante el medio ciclo de la función seno.

El método reportado para incluir efectos de soportes en rotores se extendió por medio del concepto de la admitancia mecánica para incorporar dos tipos de dispositivos de control: los *Tuned Inerter Damper* y los *Inerter-based Dynamic Vibration Absorber*. En total se estudiaron siete dispositivos de control mediante redes mecánicas: tres configuraciones de TID, un absorbedor de vibraciones convencional y tres configuraciones de IDVA.

Se aplicaron dos métodos de optimización enfocados a la minimización de la amplitud de respuesta. El primero fue el método de puntos invariantes con el que se obtuvieron soluciones cerradas y el segundo fue la norma H_∞ con la que se obtuvieron soluciones numéricas; las soluciones de H_∞ se generaron para sistemas rotodinámicos con uno, dos y tres discos.

Para el sistema vibratorio que se abordó en esta investigación, cuya excitación es inercial, el método de puntos invariantes demostró generar una buena optimización en sistemas de dos grados de libertad (TID). Pero, no ofreció un buen desempeño en la optimización de sistemas de tres grados de libertad (IDVA). Para los sistemas TID, las soluciones cerradas obtenidas por puntos invariantes permitieron analizar el comportamiento de los parámetros óptimos al generar las superficies con δ y ϕ como variables. Además, se identificó que la respuesta del DVA convencional genera el mismo comportamiento que el TID C4. Mediante este análisis, los resultados del comportamiento de los parámetros óptimos obtenidos para el TID C4 se

extrapolaron al DVA convencional, haciendo la transición adecuada para los parámetros de cada dispositivo. Asimismo, se identificó que el TID C6 genera la misma respuesta que el *absorbedor dinámico de vibración no tradicional* analizado por Mendoza Larios *et al.* [44].

Para el caso de los dispositivos IDVA no se realizó un análisis de superficies de los parámetros óptimos debido a que las soluciones cerradas no generan un buen comportamiento en la función de respuesta. Por lo tanto, se requiere que el criterio de puntos invariantes se ajuste para generar una respuesta óptima en estos modelos, antes de evaluar el comportamiento de las superficies.

Al comparar el desempeño de los siete dispositivos de control en la minimización de las amplitudes de vibración, se observó que en general los IDVA presentan una mayor reducción en la amplitud de vibración y generan un ancho de banda de vibración más largo con una curva bastante plana, aunque son más complejos de diseñar. En el caso de los TID se debe destacar que el TID-C6 presenta un comportamiento muy superior en comparación con los TID restantes y con el DVA convencional, llegando incluso a igualar el comportamiento de los IDVA para ciertos valores de su parámetro de diseño δ . Sin embargo, esta red presenta un problema característico; puesto que, a diferencia de las demás redes, se encuentra restringida a un dominio más cerrado sobre el que se puede evaluar δ , este dominio disminuye conforme la relación de efectos giroscópicos aumenta.

En esta investigación se demostró que los dispositivos TID, DVA e IDVA generan una respuesta de vibración controlada en la zona de resonancia del sistema rotodinámico original, disminuyendo la amplitud de vibración y creando una zona estable. Dichas amplitudes se pueden disminuir al aumentar el valor de las variables de diseño (δ para los TID y μ para el DVA y los IDVA); este resultado coincide con las investigaciones realizadas por diversos autores sobre sistemas de control de vibración.

Finalmente, los resultados obtenidos fueron validados mediante simulaciones computacionales. Se realizaron simulaciones de redes mecánicas para validar el desarrollo matemático y simulaciones con un módulo de rotodinámica para validar la influencia de los dispositivos en sistemas virtuales de rotores que representan de forma más cercana el comportamiento real de un sistema rotodinámico.

La incorporación de simulaciones de rotodinámica a la investigación permitió analizar el modelo para la segunda forma modal. En este modo de vibración se identificó que se necesita realizar un trabajo más minucioso para seleccionar la función de forma que se utilizará, debido a que el rotor se deflexiona de una manera más compleja que no puede representarse de forma precisa mediante la función seno. Estas observaciones requieren un estudio profundo y se propone como un trabajo futuro.

Trabajos futuros

La investigación realizada demostró que los dispositivos de control de vibraciones con base en inersores son efectivos para el control de la amplitud de vibración de la respuesta dinámica en rotores con simetría geométrica y de soportes, y con distribución simétrica de discos; para el primer modo de vibración, excitados por desbalance. Con los resultados obtenidos, se proponen los siguientes trabajos futuros.

- Reformular el método de puntos invariantes extendido para obtener una buena optimización en modelos con excitación inercial, como es el caso de rotores con desbalance.
- Realizar una validación experimental de los sistemas estudiados en esta investigación, aplicando alguno de los dispositivos de vibración a un rotor simétrico.
- Realizar un estudio profundo para el control de la respuesta vibratoria en el segundo modo de vibración, utilizando simulación por elemento finito para validar el modelo matemático.
- Extender la metodología para analizar dispositivos de control pasivo en rotores asimétricos.

Referencias

- [1] M. C. Smith, “The Inerter: A Retrospective,” *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, vol. 3. 2020. doi: 10.1146/annurev-control-053018-023917.
- [2] C. Papageorgiou, N. E. Houghton, and M. C. Smith, “Experimental testing and analysis of inerter devices,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, vol. 131, no. 1, 2009, doi: 10.1115/1.3023120.
- [3] M. Z. Q. Chen, Y. Hu, L. Huang, and G. Chen, “Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems,” *J Sound Vib*, vol. 333, no. 7, 2014, doi: 10.1016/j.jsv.2013.11.025.
- [4] X. Q. Sun, L. Chen, S. H. Wang, X. L. Zhang, and X. F. Yang, “Performance investigation of vehicle suspension system with nonlinear ball-screw inerter,” *International Journal of Automotive Technology*, vol. 17, no. 3, 2016, doi: 10.1007/s12239-016-0041-x.
- [5] F. H. Moraes, M. Silveira, and P. J. P. Gonçalves, “On the dynamics of a vibration isolator with geometrically nonlinear inerter,” *Nonlinear Dyn*, vol. 93, no. 3, 2018, doi: 10.1007/s11071-018-4262-6.
- [6] R. Ma, K. Bi, and H. Hao, “Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review,” *Engineering Structures*, vol. 243. 2021. doi: 10.1016/j.engstruct.2021.112655.
- [7] M. H. Pradono, H. Iemura, A. Igarashi, and A. Kalantari, “Application of angular-mass dampers to base-isolated benchmark building,” *Struct Control Health Monit*, vol. 15, no. 5, 2008, doi: 10.1002/stc.270.
- [8] M. Saitoh, “On the performance of gyro-mass devices for displacement mitigation in base isolation systems,” *Struct Control Health Monit*, vol. 19, no. 2, 2012, doi: 10.1002/stc.419.

- [9] J. S. Hwang, J. Kim, and Y. M. Kim, "Rotational inertia dampers with toggle bracing for vibration control of a building structure," *Eng Struct*, vol. 29, no. 6, 2007, doi: 10.1016/j.engstruct.2006.08.005.
- [10] Y. Hu and M. Z. Q. Chen, "Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers," *Int J Mech Sci*, vol. 99, 2015, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003.
- [11] P. Brzeski, M. Lazarek, and P. Perlikowski, "Experimental study of the novel tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance," *J Sound Vib*, vol. 404, 2017, doi: 10.1016/j.jsv.2017.05.034.
- [12] M. Lazarek, P. Brzeski, and P. Perlikowski, "Design and identification of parameters of tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance," *Mech Mach Theory*, vol. 119, 2018, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.09.004.
- [13] L. Marian and A. Giaralis, "Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems," *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 38, 2014, doi: 10.1016/j.probengmech.2014.03.007.
- [14] K. Xu, K. Bi, Q. Han, X. Li, and X. Du, "Using tuned mass damper inerter to mitigate vortex-induced vibration of long-span bridges: Analytical study," *Eng Struct*, vol. 182, 2019, doi: 10.1016/j.engstruct.2018.12.067.
- [15] J. Dai, Z. D. Xu, and P. P. Gai, "Tuned mass-damper-inerter control of wind-induced vibration of flexible structures based on inerter location," *Eng Struct*, vol. 199, 2019, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.109585.
- [16] Z. Zhang and B. Fitzgerald, "Tuned mass-damper-inerter (TMDI) for suppressing edgewise vibrations of wind turbine blades," *Eng Struct*, vol. 221, 2020, doi: 10.1016/j.engstruct.2020.110928.
- [17] F. S. Samani and F. Pellicano, "Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers," *J Sound Vib*, vol. 325, no. 4–5, 2009, doi: 10.1016/j.jsv.2009.04.011.

- [18] R. Ebrahimnejad and F. S. Samani, "Novel inerter-based absorbers for suppressing beams vibration under successive moving loads," *SN Appl Sci*, vol. 2, no. 11, 2020, doi: 10.1007/s42452-020-03566-5.
- [19] Z. Zhao, R. Zhang, Y. Jiang, and C. Pan, "A tuned liquid inerter system for vibration control," *Int J Mech Sci*, vol. 164, 2019, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.105171.
- [20] Y. Hu, M. Z. Q. Chen, and Z. Shu, "Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements," *J Sound Vib*, vol. 333, no. 8, 2014, doi: 10.1016/j.jsv.2013.12.016.
- [21] R. O. Campos and R. Nicoletti, "Vibration reduction in vertical washing machine using a rotating dynamic absorber," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 37, no. 1, 2015, doi: 10.1007/s40430-014-0151-1.
- [22] Y. C. Fontes and R. Nicoletti, "Rotating dynamic absorber with viscoelastic element," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 38, no. 2, 2016, doi: 10.1007/s40430-015-0328-2.
- [23] H. Yao, Z. Chen, and B. Wen, "Dynamic Vibration Absorber with Negative Stiffness for Rotor System," *Shock and Vibration*, vol. 2016, 2016, doi: 10.1155/2016/5231704.
- [24] H. ling Hu and L. dong He, "Online control of critical speed vibrations of a single-span rotor by a rotor dynamic vibration absorber at different installation positions," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 31, no. 5, 2017, doi: 10.1007/s12206-017-0404-x.
- [25] H. Heidari and B. Monjezi, "Vibration control of imbalanced Jeffcott rotor by virtual passive dynamic absorber with optimal parameter values," *Proc Inst Mech Eng C J Mech Eng Sci*, vol. 232, no. 23, 2018, doi: 10.1177/0954406217752024.
- [26] H. Yao, T. Wang, B. Wen, and B. Qiu, "A tunable dynamic vibration absorber for unbalanced rotor system," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 32, no. 4, 2018, doi: 10.1007/s12206-018-0305-7.

- [27] B. Monjezi and H. Heidari, "Active vibration control of rotor-bearing system by virtual dynamic absorber," *EPJ Applied Physics*, vol. 86, no. 3, 2019, doi: 10.1051/epjap/2019190073.
- [28] Q. Xu, J. Niu, H. Yao, L. Zhao, and B. Wen, "Fluid-Induced Vibration Elimination of a Rotor/Seal System with the Dynamic Vibration Absorber," *Shock and Vibration*, vol. 2018, 2018, doi: 10.1155/2018/1738941.
- [29] Q. Xu, Y. Luo, H. Yao, L. Zhao, and B. Wen, "Eliminating the Fluid-Induced Vibration and Improving the Stability of the Rotor/Seal System Using the Inerter-Based Dynamic Vibration Absorber," *Shock and Vibration*, vol. 2019, 2019, doi: 10.1155/2019/1746563.
- [30] H. Yao, Y. Cao, Z. Ding, and B. Wen, "Using grounded nonlinear energy sinks to suppress lateral vibration in rotor systems," *Mech Syst Signal Process*, vol. 124, 2019, doi: 10.1016/j.ymsp.2019.01.054.
- [31] H. Yao, Y. Wang, L. Xie, and B. Wen, "Bi-stable buckled beam nonlinear energy sink applied to rotor system," *Mech Syst Signal Process*, vol. 138, 2020, doi: 10.1016/j.ymsp.2019.106546.
- [32] H. Yao, Y. Wang, Y. Cao, and B. Wen, "Multi-stable nonlinear energy sink for rotor system," *Int J Non Linear Mech*, vol. 118, 2020, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103273.
- [33] J. A. Vázquez, L. E. Barrett, and R. D. Flack, "A flexible rotor on flexible bearing supports: Stability and unbalance response," *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, vol. 123, no. 2, 2001, doi: 10.1115/1.1355244.
- [34] S. Bab, S. E. Khadem, and M. Shahgholi, "Vibration attenuation of a rotor supported by journal bearings with nonlinear suspensions under mass eccentricity force using nonlinear energy sink," *Meccanica*, vol. 50, no. 9, 2015, doi: 10.1007/s11012-015-0156-6.

- [35] H. Heidari and P. Safarpour, “ H_{∞} and H_2 optimization procedures for optimal design of support parameters of a flexible rotor,” *Computational and Applied Mathematics*, vol. 38, no. 4, 2019, doi: 10.1007/s40314-019-0945-y.
- [36] J. Zapomel, P. Ferfecki, and J. Kozánek, “Effect of the controllable support elements lubricated by magnetically sensitive fluids on chaotic and regular vibration of flexible rotors during rubbing,” *Mech Mach Theory*, vol. 155, 2021, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.104096.
- [37] Y. WANG, M. A. YANHONG, and J. HONG, “Study on dynamic stiffness of supporting structure and its influence on vibration of rotors,” *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022, doi: 10.1016/j.cja.2022.01.017.
- [38] J. P. Den Hartog, *MECHANICAL VIBRATION*, 3rd Edition. McGraw-Hill, 1947.
- [39] E. Barredo *et al.*, “Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers,” *Int J Mech Sci*, vol. 144, 2018, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025.
- [40] O. Nishihara and T. Asami, “Closed-form solutions to the exact optimizations of dynamic vibration absorbers (minimizations of the maximum amplitude magnification factors),” *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, vol. 124, no. 4, 2002, doi: 10.1115/1.1500335.
- [41] T. Asami, Y. Mizukawa, and T. Ise, “Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function,” *J Vib Acoust*, vol. 140, no. 6, 2018, doi: 10.1115/1.4040229.
- [42] Y. Hu, M. Z. Q. Chen, Z. Shu, and L. Huang, “Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution,” *J Sound Vib*, vol. 346, no. 1, 2015, doi: 10.1016/j.jsv.2015.02.041.
- [43] A. Javidialesaadi and N. E. Wierschem, “Design and performance evaluation of inerter-based tuned mass dampers for a ground acceleration excited structure,” *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 140, 2021, doi: 10.1016/j.soildyn.2020.106463.

- [44] J. G. Mendoza-Larios, E. Barredo-Hernández, and I. A. Maldonado-Bravo, “Absorbedor dinámico de vibración no tradicional para controlar fuerza inercial,” *Cultura Científica y Tecnológica*, vol. 19, no. 2, 2022, doi: 10.20983/culcyt.2022.2.2.1.
- [45] S. S. Rao, *VIBRACIONES MECÁNICAS*, 5ta Edición. PEARSON EDUCACIÓN, 2012.
- [46] M. Lalanne and G. Ferraris, *Rotordynamics Prediction in Engineering*, 2nd Edition. John Wiley & Sons Ltd, 1998.
- [47] J. M. Vance, *Rotordynamics of turbomachinery*, First. John Wiley & Sons, 1988.

Apéndices

Apéndice A: Expresiones matemáticas de los coeficientes A, B, C y D de la función G del sistema.

TID C3

$$A_{TID\ C3} = 4\Omega^4(\Omega - \gamma)^2(\Omega + \gamma)^2\zeta^2.$$

$$B_{TID\ C3} = \gamma^4\Omega^6\delta^2.$$

$$C_{TID\ C3} = 4\zeta^2 \left((\Omega^4 - \gamma^2\Omega^2)\phi + \delta\Omega^2\gamma^2 + (\Omega^2 - 1)\gamma^2 - \Omega^4 + \Omega^2 \right)^2.$$

$$D_{TID\ C3} = \gamma^4\delta^2\Omega^2(\Omega^2\phi - \Omega^2 + 1)^2$$

TID C4

$$A_{TID\ C4} = \delta^2\Omega^4(\Omega - \gamma)^2(\Omega + \gamma)^2.$$

$$B_{TID\ C4} = 4\zeta^2\Omega^6.$$

$$C_{TID\ C4} = (\delta(\gamma^2\Omega^2(\delta - \phi + 1) + \Omega^4(\phi - 1) + \Omega^2 - \gamma^2))^2.$$

$$D_{TID\ C4} = 4\zeta^2\Omega^2(\Omega^2(\delta - \phi + 1) - 1)^2$$

TID C5

$$A_{TID\ C5} = \delta^2\Omega^4(\gamma^2 - \Omega^2)^2.$$

$$B_{TID\ C5} = 4\zeta^2\Omega^6.$$

$$C_{TID\ C5} = \delta^2(\Omega^4(1 - \phi) + \gamma^2\Omega^2(\phi - 1) - \Omega^2 + \gamma^2)^2.$$

$$D_{TID\ C5} = 4\zeta^2\Omega^2(\Omega^2(-\delta + \phi - 1) + \gamma^2\delta + 1)^2.$$

TID C6

$$A_{TID\ C6} = 4\Omega^6\zeta^2.$$

$$B_{TID\ C6} = \delta^2\Omega^4(\gamma^2 - \Omega^2)^2.$$

$$C_{TID\ C6} = 4\zeta^2\Omega^2(\gamma^2\delta + \Omega^2(\phi - 1) + 1)^2.$$

$$D_{TID\ C6} = \delta^2(\gamma^2\Omega^2(\delta + 1 - \phi) + \Omega^4(\phi - 1) + \Omega^2 - \gamma^2)^2$$

IDVA C3

$$A_{IDVA\ C3} = 4\Omega^4\zeta^2(\Omega^4 - (1 + (\delta + 1)\gamma^2)\eta^2\Omega^2 + \gamma^2\eta^4)^2$$

$$B_{IDVA\ C3} = \Omega^6\gamma^4\delta^2\eta^2(-\Omega^2 + \eta^2)^2$$

$$C_{IDVA\ C3} = 4\zeta^2 \left(-(\phi - 1)\Omega^6 - \left(1 + \left(((\mu - \phi + 1)\delta - \phi + 1)\gamma^2 + \mu - \phi + 1 \right) \eta^2 \right) \Omega^4 \right. \\ \left. + \eta^2(\gamma^2(\mu - \phi + 1)\eta^2 + 1 + (\delta + 1)\gamma^2)\Omega^2 - \gamma^2\eta^4 \right)^2$$

$$D_{IDVA\ C3} = \left((\phi - 1)\Omega^4 + (1 + (\mu - \phi + 1)\eta^2)\Omega^2 - \eta^2 \right)^2 \Omega^2\gamma^4\delta^2\eta^2$$

IDVA C4

$$A_{IDVA\ C4} = (\Omega^4 - (1 + (\delta + 1)\gamma^2)\eta^2\Omega^2 + \gamma^2\eta^4)^2\delta^2\Omega^4$$

$$B_{IDVA\ C4} = 4\eta^2\Omega^6((-\delta - 1)\Omega^2 + \eta^2)^2\zeta^2$$

$$C_{IDVA\ C4} = \left((-\phi + 1)\Omega^6 + \left(-1 + \left(((-\mu + \phi - 1)\delta + \phi - 1)\gamma^2 - \mu + \phi - 1 \right) \eta^2 \right) \Omega^4 \right. \\ \left. + (\gamma^2(\mu - \phi + 1)\eta^2 + 1 + (\delta + 1)\gamma^2)\eta^2\Omega^2 - \gamma^2\eta^4 \right)^2 \delta^2$$

$$D_{IDVA\ C4} = 4 \left(((-\mu + \phi - 1)\delta + \phi - 1)\Omega^4 + ((\mu - \phi + 1)\eta^2 + \delta + 1)\Omega^2 \right. \\ \left. - \eta^2 \right)^2 \Omega^2\eta^2\zeta^2$$

IDVA C6

$$A_{IDVA\ C6} = \delta^2 \Omega^4 (\Omega^4 - \eta^2 (1 + (\delta + 1)\gamma^2)\Omega^2 + \gamma^2 \eta^4)^2$$

$$B_{IDVA\ C6} = 4\eta^2 \Omega^6 \zeta^2 (\eta^2 \gamma^2 \delta - \Omega^2 + \eta^2)^2$$

$$C_{IDVA\ C6} = \delta^2 \left((-\phi + 1)\Omega^6 + \left(-1 + \left((-\mu + \phi - 1)\delta + \phi - 1 \right) \gamma^2 - \mu + \phi - 1 \right) \eta^2 \right) \Omega^4 \\ + \left(\gamma^2 (\mu - \phi + 1)\eta^2 + 1 + (\delta + 1)\gamma^2 \right) \eta^2 \Omega^2 - \gamma^2 \eta^4 \right)^2$$

$$D_{IDVA\ C6} = 4\Omega^2 \zeta^2 \left((\phi - 1)\Omega^4 + (1 + (\delta \gamma^2 + 1)(\mu - \phi + 1)\eta^2)\Omega^2 - (\delta \gamma^2 + 1)\eta^2 \right)^2 \eta^2$$

Apéndice B: Parámetros óptimos obtenidos bajo la norma H_∞ .

Parámetros óptimos del rotor de un disco tipo *Jeffcott* con propiedades y geometría del rotor del laboratorio de rotodinámica de CENIDET.

Tabla B- 1. Parámetros óptimos del TID C3, bajo la norma H_∞ .

δ	Γ	ζ	r
0.010	1.002548	0.04084	0.997498
0.025	1.00635	0.064609	0.993736
0.050	1.012789	0.091456	0.987441
0.075	1.019358	0.112117	0.981117
0.100	1.026062	0.129586	0.97476
0.125	1.032906	0.145023	0.968372
0.150	1.039894	0.159023	0.961951
0.175	1.047031	0.171938	0.955497
0.200	1.054324	0.183998	0.949008
0.225	1.061778	0.195363	0.942484
0.250	1.069399	0.206149	0.935923
0.275	1.077193	0.216445	0.929326
0.300	1.085166	0.226317	0.922691

Tabla B- 2. Parámetros óptimos del TID C4, bajo la norma H_{∞} .

δ	Γ	ζ	r
0.010	0.995074	0.000608	0.997479
0.025	0.987722	0.002383	0.993618
0.050	0.97569	0.006654	0.98697
0.075	0.963983	0.012056	0.980053
0.100	0.95257	0.018308	0.972864
0.125	0.941438	0.025241	0.965399
0.150	0.930575	0.032739	0.957654
0.175	0.91997	0.040714	0.949627
0.200	0.909611	0.0491	0.941311
0.225	0.899487	0.05784	0.932704
0.250	0.88959	0.06689	0.923799
0.275	0.879909	0.076212	0.914592
0.300	0.870436	0.085772	0.905076

Tabla B- 3. Parámetros óptimos del TID C6, bajo la norma H_{∞} .

δ	Γ	ζ	r
0.010	1.010246	0.000623	0.997459
0.025	1.02639	0.002526	0.993486
0.050	1.055846	0.007484	0.986375
0.075	1.08919	0.014474	0.978534
0.100	1.127552	0.023606	0.96978
0.125	1.172652	0.035238	0.959838
0.150	1.227321	0.050053	0.948277
0.175	1.296781	0.069375	0.934339
0.200	1.392763	0.096214	0.916432
0.225	1.556353	0.1413	0.889654

Tabla B- 4. Parámetros óptimos del DVA, bajo la norma H_{∞} .

μ	η	ζ	r
0.01	0.995064	0.061192	0.997479
0.025	0.987702	0.096641	0.993618
0.05	0.975689	0.136409	0.98697
0.075	0.963982	0.166752	0.980053
0.1	0.95257	0.192192	0.972864
0.125	0.941438	0.214487	0.965399
0.15	0.930575	0.234541	0.957654
0.175	0.91997	0.252893	0.949627
0.200	0.909611	0.269895	0.941311
0.225	0.899487	0.285794	0.932704

0.250	0.88959	0.300769	0.923799
0.275	0.879909	0.314957	0.914592
0.300	0.870436	0.328465	0.905076

Tabla B- 5. Parámetros óptimos del IDVA C3, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.023482	0.998144	1.004827	0.054908	0.995844
0.025	0.060297	0.995118	1.012129	0.086681	0.989547
0.050	0.120471	0.990271	1.024646	0.122336	0.978896
0.075	0.180529	0.985497	1.037541	0.149538	0.968043
0.100	0.240479	0.980792	1.050851	0.172345	0.956984
0.125	0.300327	0.976158	1.064604	0.192335	0.945715
0.150	0.360079	0.971593	1.078831	0.210321	0.934231
0.175	0.419742	0.967097	1.093565	0.226786	0.922529
0.200	0.479322	0.962668	1.108842	0.242047	0.910602
0.225	0.538824	0.958306	1.124703	0.256325	0.898445
0.250	0.598255	0.954011	1.141191	0.269781	0.886052
0.275	0.657619	0.949781	1.158356	0.282537	0.873416
0.300	0.716923	0.945617	1.176253	0.294689	0.860529

Tabla B- 6. Parámetros óptimos del IDVA C4, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.023651	1.00385	0.986118	0.002511	0.995874
0.025	0.057548	1.008788	0.967179	0.009225	0.989732
0.050	0.110677	1.015363	0.939514	0.023471	0.979562
0.075	0.160432	1.020323	0.915484	0.039327	0.969403
0.10	0.207487	1.024025	0.894153	0.055802	0.95919
0.125	0.252277	1.02671	0.874924	0.072446	0.948876
0.150	0.29511	1.028554	0.857389	0.089027	0.93842
0.175	0.336215	1.029688	0.841249	0.105416	0.92779
0.20	0.375772	1.030216	0.826281	0.121536	0.916957
0.225	0.413927	1.030221	0.812312	0.137346	0.905893
0.250	0.450799	1.029772	0.799205	0.152821	0.894576
0.275	0.486492	1.028925	0.786848	0.16795	0.882983
0.300	0.521093	1.027729	0.775148	0.182729	0.871091

Tabla B- 7. Parámetros óptimos del IDVA C3, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.023196	0.992117	1.024261	0.002589	0.995851
0.025	0.05462	0.980616	1.061327	0.009859	0.989599
0.050	0.099137	0.962359	1.125048	0.026284	0.979105
0.075	0.135302	0.945161	1.191306	0.045613	0.968512
0.100	0.164529	0.928925	1.260268	0.066475	0.95782
0.125	0.187968	0.913569	1.332111	0.08811	0.947023
0.150	0.206559	0.899018	1.407029	0.110047	0.936117
0.175	0.221075	0.885208	1.485235	0.131979	0.9251
0.200	0.232155	0.87208	1.566961	0.153704	0.913967
0.225	0.24033	0.859583	1.652462	0.175082	0.902713
0.250	0.246044	0.847671	1.74202	0.196024	0.891334
0.275	0.249668	0.836302	1.835945	0.216468	0.879824
0.300	0.251514	0.825438	1.934578	0.236378	0.868178

Parámetros óptimos del rotor de dos discos

Tabla B- 8. Parámetros óptimos del TID C3, empleando la norma H_{∞} .

δ	γ	ζ	r
0.010	1.12459	0.040844	0.99801
0.025	1.129965	0.064624	0.995019
0.050	1.139106	0.091501	0.990023
0.075	1.148481	0.1122	0.985012
0.100	1.158102	0.129716	0.979984
0.125	1.167978	0.145209	0.97494
0.150	1.178123	0.159271	0.969879
0.175	1.188547	0.172257	0.964801
0.200	1.199265	0.184396	0.959705
0.225	1.21029	0.195848	0.954591
0.250	1.221636	0.206729	0.949458
0.275	1.233321	0.217127	0.944306
0.300	1.245361	0.227112	0.939135

Tabla B- 9. Parámetros óptimos del TID C4, empleando la norma H_{∞} .

δ	γ	ζ	r
0.010	1.114072	0.000762	0.997991
0.025	1.103808	0.002976	0.994902
0.050	1.086983	0.008301	0.989554
0.075	1.070754	0.01499	0.983955
0.100	1.055032	0.022688	0.978105
0.125	1.039786	0.03118	0.972001
0.150	1.02499	0.040316	0.965643
0.175	1.01062	0.049987	0.959029
0.200	0.996653	0.060107	0.952159
0.225	0.983069	0.070607	0.945029
0.250	0.969848	0.081431	0.937639
0.275	0.95697	0.092533	0.929986
0.300	0.944419	0.103874	0.922069

Tabla B- 10. Parámetros óptimos del TID C6, empleando la norma H_{∞} .

δ	γ	ζ	r
0.010	1.135509	0.000786	0.997971
0.025	1.158704	0.003211	0.994767
0.050	1.202186	0.00965	0.988924
0.075	1.253518	0.019002	0.982291
0.100	1.316027	0.031746	0.974583
0.125	1.395846	0.049051	0.965298
0.150	1.50664	0.07368	0.953398
0.175	1.694807	0.115189	0.935754

Tabla B- 11. Parámetros óptimos del DVA, empleando la norma H_{∞} .

μ	η	ζ	r
0.010	1.114053	0.068583	0.997991
0.025	1.103732	0.108281	0.994902
0.050	1.086976	0.152767	0.989554
0.075	1.070753	0.186663	0.983955
0.100	1.055031	0.215048	0.978105
0.125	1.039786	0.239895	0.972001
0.150	1.02499	0.262224	0.965643
0.175	1.01062	0.28264	0.959029
0.200	0.996653	0.301543	0.952159
0.225	0.983069	0.319212	0.945029

0.250	0.969848	0.335849	0.937639
0.275	0.95697	0.351613	0.929986
0.300	0.944419	0.366624	0.922069

Tabla B- 12. Parámetros óptimos del IDVA C3, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.030326	1.118267	1.006058	0.061518	0.996692
0.025	0.075752	1.114133	1.015314	0.097118	0.991682
0.050	0.151314	1.107345	1.031215	0.137001	0.983208
0.075	0.226698	1.100682	1.047751	0.167388	0.974578
0.100	0.30192	1.094144	1.064977	0.192837	0.965791
0.125	0.37699	1.087728	1.082952	0.215123	0.956847
0.150	0.451922	1.081433	1.101744	0.23516	0.947745
0.175	0.526728	1.075257	1.121427	0.253492	0.938484
0.200	0.601419	1.069199	1.142088	0.270477	0.929065
0.225	0.676006	1.063258	1.163822	0.286364	0.919485
0.250	0.750499	1.057432	1.186739	0.301336	0.909745
0.275	0.82491	1.051721	1.210966	0.315532	0.899842
0.300	0.899246	1.046124	1.236646	0.329061	0.889776

Tabla B- 13. Parámetros óptimos del IDVA C4, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.029587	1.126344	0.982708	0.003493	0.996723
0.025	0.071567	1.132956	0.959651	0.012631	0.991861
0.050	0.136588	1.141281	0.926795	0.031491	0.983835
0.075	0.196877	1.147094	0.898855	0.051986	0.975826
0.100	0.253442	1.151017	0.874437	0.07289	0.967768
0.125	0.306921	1.153452	0.852686	0.093694	0.959615
0.150	0.357756	1.154686	0.833034	0.114156	0.951331
0.175	0.406274	1.154928	0.81508	0.134157	0.942885
0.200	0.45273	1.154342	0.798529	0.153636	0.934254
0.225	0.497329	1.153057	0.783155	0.172568	0.925417
0.250	0.540243	1.151176	0.768782	0.190947	0.916354
0.275	0.581619	1.148786	0.755266	0.208779	0.90705
0.300	0.621584	1.145956	0.742492	0.226076	0.897489

Tabla B- 14. Parámetros óptimos del IDVA C6, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.028843	1.109935	1.030537	0.003622	0.9967
0.025	0.066933	1.093905	1.077449	0.013677	0.991734
0.050	0.118648	1.068774	1.158732	0.03595	0.983415
0.075	0.158356	1.045428	1.244156	0.061586	0.975041
0.100	0.188522	1.023672	1.334065	0.088692	0.966611
0.125	0.211055	1.003339	1.428841	0.116271	0.958122
0.150	0.227448	0.984288	1.52891	0.143745	0.949574
0.175	0.23888	0.966394	1.634753	0.170767	0.940964
0.200	0.246287	0.949552	1.746911	0.197126	0.932291
0.225	0.250417	0.933667	1.865993	0.222697	0.923552
0.250	0.251874	0.918659	1.992696	0.247412	0.914745
0.275	0.251145	0.904455	2.127809	0.271239	0.905869
0.300	0.248628	0.890991	2.272239	0.294168	0.89692

Parámetros óptimos del rotor de tres discos

Tabla B- 15. Parámetros óptimos del TID C3, empleando la norma H_{∞} .

δ	γ	ζ	r
0.010	1.00837	0.04084	0.997527
0.025	1.012239	0.06461	0.993808
0.050	1.018793	0.091458	0.987587
0.075	1.02548	0.11212	0.981336
0.100	1.032307	0.129592	0.975054
0.125	1.039277	0.145031	0.968742
0.150	1.046397	0.159034	0.962398
0.175	1.053671	0.171952	0.956021
0.200	1.061105	0.184016	0.949611
0.225	1.068705	0.195385	0.943167
0.250	1.076477	0.206175	0.936688
0.275	1.084429	0.216475	0.930173
0.300	1.092566	0.226352	0.923621

Tabla B- 16. Parámetros óptimos del TID C4, empleando la norma H_{∞} .

δ	γ	ζ	r
0.010	1.000767	0.000615	0.997508
0.025	0.993288	0.00241	0.99369
0.050	0.981052	0.006729	0.987115
0.075	0.969149	0.01219	0.980272
0.100	0.957549	0.018508	0.973158
0.125	0.946238	0.025513	0.96577
0.150	0.935202	0.033088	0.958104
0.175	0.924431	0.041143	0.950156
0.20	0.913913	0.049609	0.941923
0.225	0.903636	0.058433	0.933399
0.250	0.893591	0.067567	0.92458
0.275	0.883767	0.076973	0.91546
0.300	0.874156	0.086619	0.906035

Tabla B- 17. Parámetros óptimos del TID C6, empleando la norma H_{∞} .

δ	γ	ζ	r
0.010	1.016205	0.00063	0.997488
0.025	1.032645	0.002556	0.993558
0.050	1.062676	0.007579	0.986519
0.075	1.096732	0.01467	0.978748
0.100	1.136003	0.023948	0.970057
0.125	1.182316	0.035794	0.960166
0.150	1.238705	0.050936	0.948628
0.175	1.310869	0.070801	0.934645
0.200	1.411997	0.09874	0.916496
0.225	1.592828	0.147902	0.888459

Tabla B- 18. Parámetros óptimos del DVA, empleando la norma H_{∞} .

μ	η	ζ	r
0.010	1.000756	0.061545	0.997508
0.025	0.993267	0.097197	0.99369
0.050	0.98105	0.137191	0.987115
0.075	0.969148	0.167704	0.980272
0.100	0.957549	0.193286	0.973158
0.125	0.946238	0.215704	0.96577
0.150	0.935202	0.235868	0.958104
0.175	0.924431	0.254319	0.950156
0.200	0.913913	0.271413	0.941923
0.225	0.903636	0.287396	0.933399

0.250	0.893591	0.302451	0.92458
0.275	0.883767	0.316715	0.91546
0.300	0.874156	0.330294	0.906035

Tabla B- 19. Parámetros óptimos del IDVA C3, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.024315	1.003817	1.004838	0.055208	0.99589
0.025	0.061001	1.00081	1.012282	0.087179	0.989667
0.050	0.121864	0.995881	1.02494	0.123038	0.979138
0.075	0.182615	0.991025	1.037997	0.150392	0.96841
0.100	0.243256	0.986242	1.051479	0.173325	0.95748
0.125	0.303792	0.981531	1.065416	0.193426	0.946342
0.150	0.364231	0.97689	1.079839	0.21151	0.934994
0.175	0.424579	0.972321	1.094784	0.228065	0.923431
0.200	0.484842	0.967821	1.110287	0.243409	0.911647
0.225	0.545026	0.96339	1.126392	0.257764	0.899637
0.250	0.605138	0.959027	1.143145	0.271293	0.887396
0.275	0.665183	0.954732	1.160596	0.284118	0.874917
0.300	0.725167	0.950504	1.178803	0.296336	0.862193

Tabla B- 20. Parámetros óptimos del IDVA C4, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.025782	1.010237	0.984261	0.002956	0.995951
0.025	0.058203	1.014709	0.966817	0.009378	0.989852
0.050	0.111864	1.021362	0.938921	0.023826	0.979803
0.075	0.16211	1.026367	0.914702	0.039893	0.969765
0.100	0.209611	1.030088	0.893218	0.056572	0.959675
0.125	0.25481	1.032772	0.873865	0.073411	0.949484
0.150	0.298022	1.034598	0.856224	0.090174	0.939153
0.175	0.339479	1.035702	0.839994	0.106734	0.928648
0.200	0.379367	1.03619	0.824946	0.123016	0.917942
0.225	0.417831	1.036147	0.810907	0.138976	0.907007
0.250	0.454995	1.035643	0.797736	0.154593	0.895821
0.275	0.490962	1.034736	0.785321	0.169854	0.884361
0.300	0.525823	1.033475	0.773569	0.184757	0.872605

Tabla B- 21. Parámetros óptimos del IDVA C6, empleando la norma H_{∞} .

μ	δ	η	γ	ζ	r
0.010	0.023435	0.997771	1.024498	0.002629	0.995898
0.025	0.055191	0.986062	1.062053	0.010024	0.989719
0.050	0.100064	0.967507	1.126554	0.026706	0.979347
0.075	0.136427	0.950039	1.193657	0.046318	0.96888
0.100	0.165735	0.933558	1.263533	0.067465	0.958315
0.125	0.189169	0.917978	1.336366	0.089376	0.947649
0.150	0.207692	0.903224	1.412358	0.111575	0.936877
0.175	0.222094	0.889227	1.491731	0.133752	0.925998
0.200	0.233028	0.875928	1.574725	0.155702	0.915005
0.225	0.241034	0.863274	1.661609	0.177288	0.903895
0.250	0.246565	0.851216	1.752676	0.19842	0.892663
0.275	0.249996	0.839713	1.848249	0.219037	0.881305
0.300	0.251646	0.828726	1.94869	0.239103	0.869816

Apéndice C: Diagramas de redes mecánicas para simulaciones en COMSOL en el módulo de redes mecánicas.

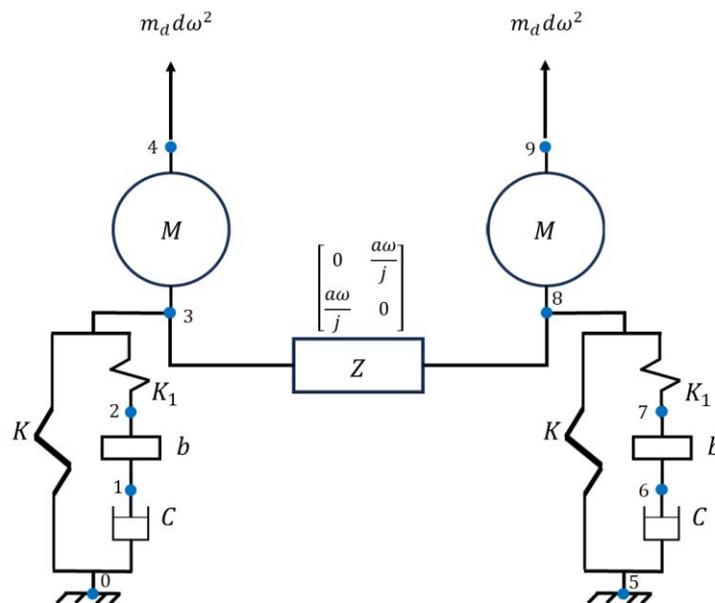


Figura C- 1. Red mecánica del modelo incorporando TID C3.

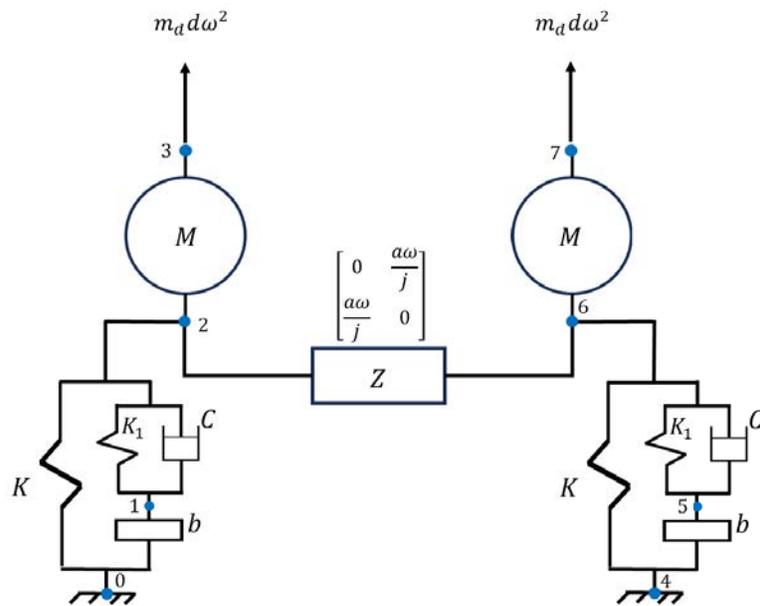


Figura C- 2. Red mecánica del modelo incorporando TID C4.

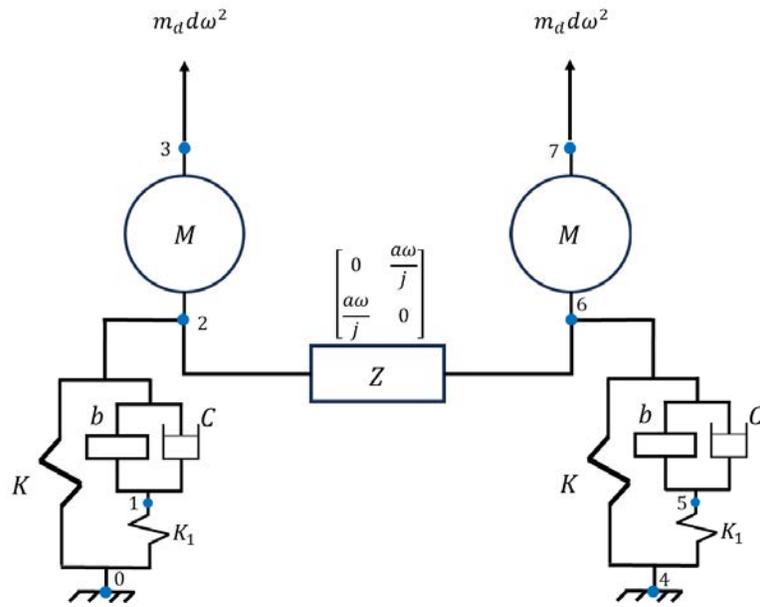


Figura C- 3. Red mecánica del modelo incorporando TID C6.

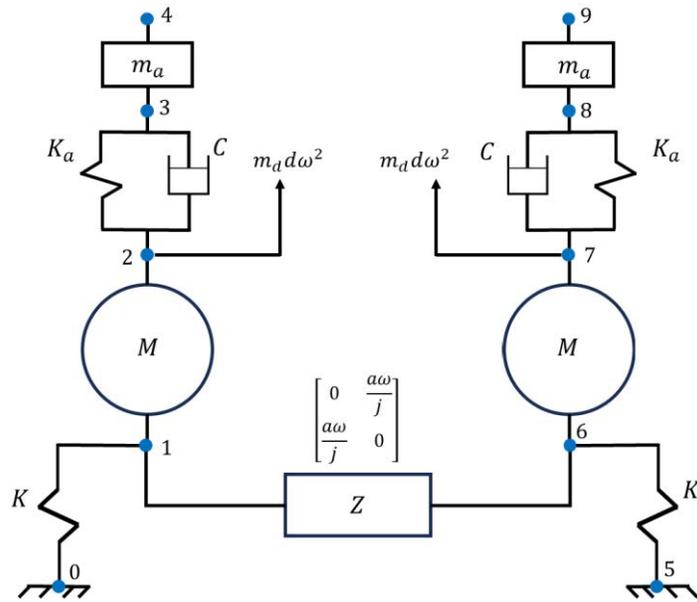


Figura C- 4. Red mecánica del modelo incorporando DVA.

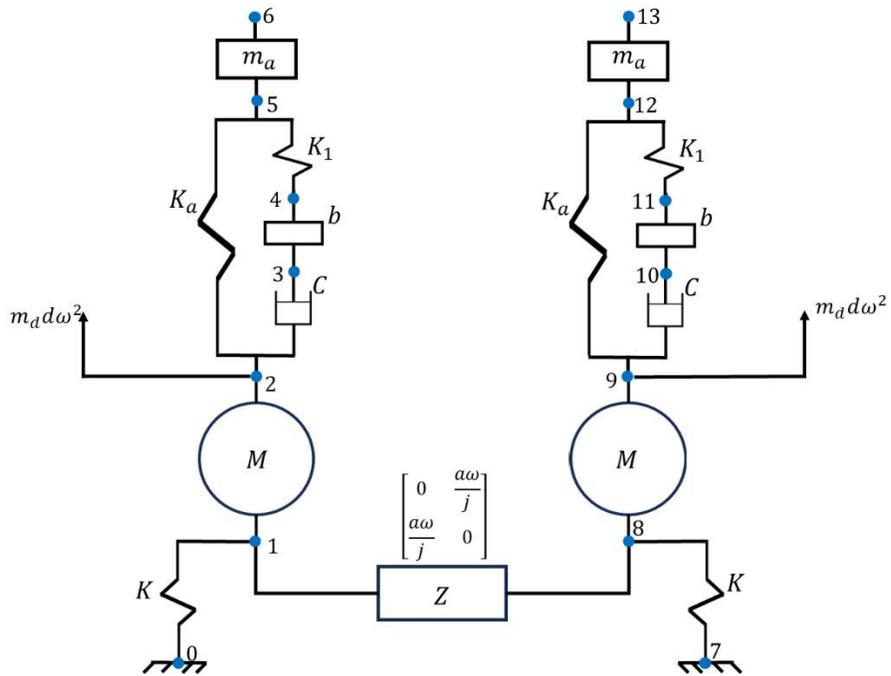


Figura C- 5. Red mecánica del modelo incorporando IDVA C3.

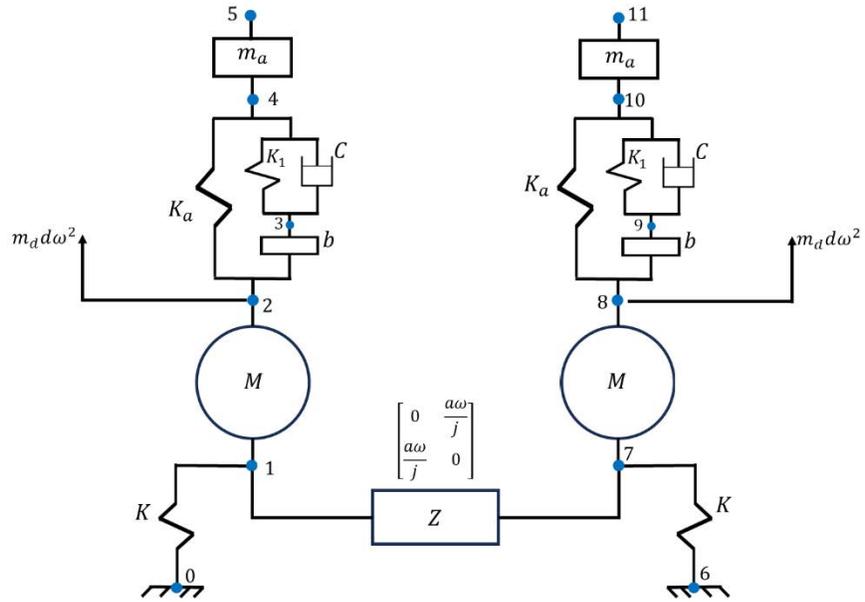


Figura C- 6. Red mecánica del modelo incorporando IDVA C4.

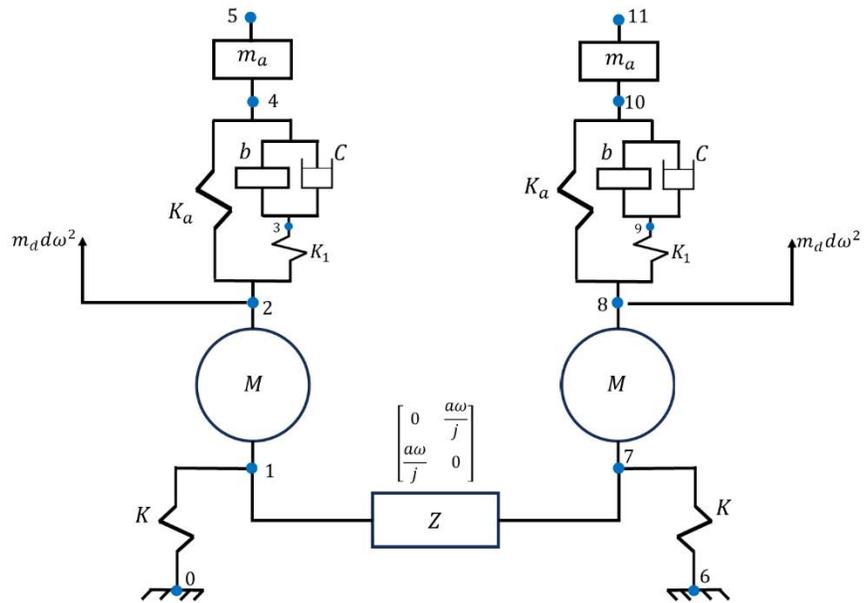


Figura C- 7. Red mecánica del modelo incorporando IDVA C6.

Apéndice D: Admitancia de las redes para simulaciones en COMSOL en el módulo de rotodinámica.

Admitancia de la red TID C3

$$Y_{TID\ C3} = \frac{j\omega k_1 c b}{k_1 c - b c \omega^2 + j\omega k_1 b}$$

Admitancia de la red TID C4

$$Y_{TID\ C4} = \frac{j\omega k_1 b - c b \omega^2}{k_1 - b \omega^2 + j\omega c}$$

Admitancia de la red TID C6

$$Y_{TID\ C6} = \frac{k_1 c + k_1 b \omega j}{k_1 - b \omega^2 + j\omega c}$$

Admitancia de la red DVA

$$Y_{DVA} = \frac{j\omega k_a m_a - c m_a \omega^2}{k_a - m_a \omega^2 + j\omega c}$$

Admitancia de la red IDVA C3

$$Y_{IDVA\ C3} = \frac{-\omega m_a [jbc(k_a + k_1)\omega^2 + bk_a k_2 \omega - jk_a k_1 c]}{bm_a c \omega^4 - [(b + m_a)k_2 + bk_a]c\omega^2 + ck_a k_2 + j(bk_2 k_a \omega - bk_2 m_a \omega^3)}$$

Admitancia de la red IDVA C4

$$Y_{IDVA\ C4} = \frac{m_a \omega [-bc\omega^3 + ck_a \omega + j[(k_a + k_1)b\omega^2 - k_a k_1]]}{-m_a b \omega^4 + [b(k_a + k_1) + m_a k_1]\omega^2 - k_a k_1 + j[c(m_a + b)\omega^3 - ck_a \omega]}$$

Admitancia de la red IDVA C6

$$Y_{IDVA\ C6} = \frac{-m_a \omega [c(k_a + k_1)\omega + j[b(k_a + k_1)\omega^2 - k_a k_1]]}{m_a b \omega^4 + (-(m_a + b)k_1 - bk_a)\omega^2 + k_a k_1 + j(c(k_a + k_1)\omega - m_a c \omega^3)}$$