



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Doctorado

Identificación Algebraica de Coeficientes  
Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en  
Chumaceras Presurizadas

presentada por  
**MC. Saulo Jesús Landa Damas**

como requisito para la obtención del grado de  
**Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica**

Director de tesis  
**Dr. Jorge Colín Ocampo**

Codirector de tesis  
**Dr. Andrés Blanco Ortega**

Cuernavaca, Morelos, México. Diciembre de 2023.

Cuernavaca, Mor., a 08 de noviembre de 2023

**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

**AT'n: DR. JORGE COLÍN OCAMPO**  
**PRESIDENTE DEL CLAUSTRO DOCTORAL**  
**DEL DEPARTAMENTO DE ING. MECÁNICA**

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante Saulo Jesús Landa Damas manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado "Identificación algebraica de coeficientes rotodinámicos de un sistema rotatorio soportado en chumaceras presurizadas", realizado bajo la dirección del Dr. Jorge Colín Ocampo y la codirección del Dr. Andrés Blanco Ortega, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.

ATENTAMENTE

  
\_\_\_\_\_  
DR. ARTURO ABÚNDEZ PUECO  
CENIDET

  
\_\_\_\_\_  
DR. ELADIO MARTÍNEZ RAYÓN  
CENIDET

  
\_\_\_\_\_  
DRA. CLAUDIA CORTÉS GARCÍA  
CENIDET

  
\_\_\_\_\_  
DR. MANUEL ARIAS MONTIEL  
U.T.M.

  
\_\_\_\_\_  
DR. JORGE COLÍN OCAMPO  
CENIDET

  
\_\_\_\_\_  
DR. ANDRÉS BLANCO ORTEGA  
CENIDET

c.c.p: Mtra. María Elena Gómez Torres Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
c.c.p: Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza Subdirector Académico  
c.c.p: Expediente



Cuernavaca, Mor.,

13/noviembre/2023

No. De Oficio:

SAC/173/2023

Asunto:

Autorización de  
impresión de tesis

**SAULO JESÚS LANDA DAMAS**  
**CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA MECÁNICA**  
**PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Identificación algebraica de coeficientes rotodinámicos de un sistema rotatorio soportado en chumaceras presurizadas”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®*  
*“Conocimiento y tecnología al servicio de México”*



**CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**

C. c. p. Departamento de Ingeniería Mecánica  
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



# AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la financiación de este proyecto de investigación.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por haberme permitido realizar mis estudios de doctorado y brindarme la oportunidad de continuar con mi formación profesional.

A mis asesores de tesis, Dr. Jorge Colín Ocampo y Dr. Andrés Blanco Ortega, por la orientación y el apoyo que me brindaron en el desarrollo de este trabajo de investigación.

A los miembros del comité revisor, Dr. Arturo Abúndez Pliego, Dra. Claudia Cortés García, Dr. Eladio Martínez Rayón y Dr. Manuel Arias Montiel, por sus valiosas aportaciones durante la revisión de este trabajo.

A toda la planta de investigadores del área de diseño mecánico de este centro de investigación, que de alguna u otra manera contribuyeron a mi formación profesional en esta etapa.

A mi amada esposa por todo el apoyo que me brinda, por sus palabras de aliento para concluir esta etapa y sobre todo por su amor sincero.

A mis familiares por el apoyo y motivación para seguir adelante con mis estudios, sin su respaldo no lo hubiera logrado.

A mis grandes amigos de generación Luis, Marcelino, Fernando, Olivia y Champion por su apoyo, consejos que siempre me brindaron, los grandes momentos compartidos y sobre todo su amistad sincera.

Al Ing. José Granados por la amistad que me brinda, por compartir sus conocimientos y experiencia en el área de la ingeniería mecánica, por sus valiosos consejos de vida y sobre todo por las grandes charlas compartidas.

Al Dr. Jesús Perfecto Xamán Villaseñor en paz descanse por su invaluable amistad, consejos brindados y su apoyo incondicional que incluso me ofreció antes de conocerme.

A la Sra. Rocío por su apoyo brindado durante mi estancia en el CENIDET.

## RESUMEN

Los cojinetes presurizados son soportes altamente utilizados en la maquinaria rotatoria debido a las características que presentan, como capacidad de resistir cargas pesadas, altas velocidades de operación, amplia vida útil, así como un bajo desgaste, debido a que la parte móvil y estacionaria del cojinete están separadas por una película de aceite reduciendo significativamente la fricción entre las partes. El funcionamiento confiable de este tipo de soportes para diferentes condiciones de operación es de suma importancia, para ello es necesaria la predicción y el control dinámico de estos cojinetes, sin embargo este comportamiento es bastante complejo resultado de la inestabilidad que puede presentar la película de fluido en el cojinete y si a esto se le añaden otras variables como el incremento en la temperatura por la fricción, la complejidad para determinar los parámetros del cojinete aumenta. Actualmente la obtención de los parámetros de rigidez y amortiguamiento del cojinete hidrodinámico se realiza mediante métodos analíticos, numéricos y experimentales que arrojan resultados aproximados pero que no han logrado ser completamente confiables. En este documento de tesis se propone el desarrollo de un método para identificar experimentalmente los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada mediante la técnica de identificación algebraica en línea. Se desarrolló un identificador algebraico, tomando como base para la identificación algebraica un modelo de un sistema rotor-chumacera de múltiples grados de libertad a velocidad angular constante. Para el desarrollo del modelo de múltiples grados de libertad se utilizó la técnica de elemento finito considerando un elemento tipo viga de cuatro grados de libertad por nodo (dos desplazamientos y dos rotaciones). Se evaluó y analizó el comportamiento del identificador algebraico propuesto de forma numérica y experimental a través del tiempo, a diferentes velocidades de rotación y diferentes presiones de inyección del fluido en la chumacera presurizada. Finalmente se validaron los coeficientes rotodinámicos identificados, comparando la respuesta de vibración del rotor experimental con la respuesta de vibración obtenida con el modelo de múltiples grados de libertad considerando como dato de entrada los parámetros rotodinámicos identificados.

Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema  
Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

NOMENCLATURA

$A(t),$ $P(t)$	Matriz de coeficientes del identificador algebraico	$N$	Velocidad angular (revoluciones por segundo)
$a$	Efecto cortante	$q_1, q_2$	Coordenadas independientes generalizadas
$B_1(t),$ $B_2(t)$	Vector de términos independientes del identificador algebraico	$r_s$	Radio de la flecha
$c_r$	Claro radial	$r_{iD}$	Radio interno del disco
$c_{ij}$	Amortiguamiento de los soportes	$r_{eD}$	Radio externo del disco
$c_{ije}$	Amortiguamiento de los soportes identificada	$S$	Número de Sommerfeld
$[C]$	Matriz de amortiguamiento global	$\delta W$	Trabajo virtual
$[C_1]$	Matriz de amortiguamiento	$T$	Energía cinética
$[C_2]$	Matriz de efecto cortante	$t$	Tiempo
$D$	Diámetro de la chumacera	$U$	Energía de deformación
$E$	Módulo de elasticidad	$u$	Fuerza externa
$e_D$	Espesor del disco	$v$	Relación de Poisson
$e$	Excentricidad de la masa de desbalance	$x$	Desplazamiento en la dirección horizontal
$f$	Función de forma modal	$y$	Desplazamiento en la dirección vertical
$F$	Vector de fuerzas	$\alpha$	Posición angular inicial de la masa de desbalance
$F_r$	Fuerza hidrodinámica radial	$\phi$	Rotación alrededor del eje x

Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema  
Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

$F_t$	Fuerza hidrodinámica tangencial	$\mu$	Viscosidad absoluta
$F_x$	Fuerza hidrodinámica dirección horizontal	$\omega$	Velocidad angular del rotor
$F_y$	Fuerza hidrodinámica dirección vertical	$\omega_n$	Frecuencia natural
$k_{ij}$	Rigidez de los soportes	$u_i, w_i$	Desplazamientos laterales
$k_{ije}$	Rigidez de los soportes identificada	$\psi_i, \theta_i$	Desplazamientos angulares
$k_r$	Rigidez del rotor	$\{\delta\}$	Vector de desplazamientos nodales
$[K]$	Matriz de rigidez global	$\{F_{u(1)}(\phi)\};$ $\{F_{u(2)}(\phi)\}$	Vectores de las componentes de fuerza centrífuga generada por el desbalance
$L$	Longitud de la chumacera	$R_0(XZY)$	Marco inercial
$l_1$	Posición de la masa de desbalance	$\Omega$	Velocidad de rotación
$l_2$	Posición del soporte	$\Theta_1, \Theta_2$	Vector de parámetros dinámicos a identificar
$L_e$	Longitud total del rotor	$D_j$	Diámetro del muñón
$m$	Masa del sistema	$L_j$	Longitud del muñón
$m_d$	Masa de desbalance	$L_j/D_j$	Relación longitud diámetro
$[M]$	Matriz de masa global	$d_p$	Diámetro del puerto de inyección
		$P_1, P_2, P_3, P_4$	Puerto de inyección del fluido

**LISTA DE FIGURAS**

Figura 1.1: Chumacera presurizada [2].	2
Figura 2.1: Chumacera de Petroff [1].	5
Figura 2.2: Representación esquemática del cojinete utilizado por Tower [1].	6
Figura 2.3: Distribución de presión, obtenidas por Tower [1].	7
Figura 2.4: Análisis de fuerzas en un cojinete hidrodinámico [1].	8
Figura 2.5: Chumacera presurizada con camisa flexible.	10
Figura 2.6: Cojinetes de película de fluido: (a) usando fluidos reológicos y (b) usando cámara de presión.	10
Figura 2.7: Modelo del rotor Jeffcott extendido y soportado por chumaceras cortas con puertas puntuales de presurización [13].	11
Figura 2.8: Respuesta de la chumacera en las direcciones X & Y en función de la relación de velocidades con el eje integro para $L/D=1/8$ , y diferentes valores de la fuerza de presurización [13].	12
Figura 2.9: Respuesta del disco en las direcciones X & Y en función de la relación de velocidades con el eje integro para $L/D=1/4$ , y diferentes valores de la fuerza de presurización [13].	13
Figura 2.10: Respuesta de la chumacera en las direcciones X & Y en función de la relación de velocidades para $L/D = 1/8$ , $B= 180^\circ$ , diferentes valores de la fuerza de presurización y profundidad de la grieta del 12.5% [13].	13
Figura 2.11: Coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada.	14
Figura 2.12: Fuerzas hidrodinámicas desarrolladas por el campo de presión [20].	15
Figura 2.13: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento adimensionales para chumaceras cortas en el sistema X-Y.	17
Figura 2.14: Coeficientes rotodinámicos adimensional [21].	17
Figura 2.15: Variación de las respuestas simulada y experimental en la dirección vertical [24].	18
Figura 2.16: Esquema utilizado por el algoritmo de optimización para encontrar los parámetros buscados [25].	19
Figura 2.17: (a) banco de pruebas experimentales, (b) diagrama esquemático [27].	20
Figura 2.18: Sistema rotor-cojinetes con disco equilibrador activo.	25
Figura 3.1: Marcos de referencia del disco sobre una flecha giratoria [26].	29
Figura 3.2: Coordenadas del centro geométrico C y un punto arbitrario B en el eje [26].	31
Figura 3.3: Rigidez y amortiguamiento de los soportes [26].	33
Figura 3.4: Masa de desbalance [26].	34
Figura 3.5: Elemento finito del eje [26].	36
Figura 3.6: Modelo del rotor [26].	48
Figura 3.7: Diagrama de Campbell, a) plataforma computacional y b) Lalanne y Ferraris [26].	50
Figura 3.8: Respuesta a masa de desbalance, a) plataforma computacional y b) Lalanne y Ferraris [26].	51
Figura 3.9: Comparación entre el Método Directo vs Método Pseudomodal.	53

# Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Figura 3.10: Respuesta a masa de desbalance, plataforma computacional, horizontal (a) y vertical (b).....	54
Figura 3.11: Respuesta resultante a una masa de desbalance, plataforma computacional. ...	54
Figura 4.1: Modelo del rotor.....	60
Figura 4.2: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.....	62
Figura 4.3: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	63
Figura 4.4: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 2.....	63
Figura 4.5: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 2. ....	64
Figura 4.6: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 100,000 muestras/s, soporte 1. ....	65
Figura 4.7: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 100,000 muestras/s, soporte 1. ....	66
Figura 4.8: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 1,000,000 muestras/s, soporte 1.....	66
Figura 4.9: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 1,000,000 muestras/s, soporte 1. ....	67
Figura 4.10: Comparación entre los coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante $K_{xxef}, K_{xzef}, K_{zxef}, K_{zzef}$ y sin utilizar filtrado $K_{xxe}, K_{xze}, K_{zxe}, K_{zze}$ a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, configuración 3. ....	71
Figura 4.11: Comparación entre los coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados utilizando filtro invariante $C_{xxef}, C_{xzef}, C_{zxef}, C_{zzef}$ y sin utilizar filtrado $C_{xxe}, C_{xze}, C_{zxe}, C_{zze}$ a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, configuración 3. ....	72
Figura 4.12: Elemento finito tipo viga, de cuatro grados de libertad por nodo.....	73
Figura 4.13: Desplazamientos nodales a una velocidad de 2,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	80
Figura 4.14: Comparación entre las pendientes calculas y las aproximadas a una velocidad de 2000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s. ....	81
Figura 4.15: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 2,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	82
Figura 4.16: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 2,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	82
Figura 4.17: Número de condición a diferentes velocidades de rotación en función del tiempo, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, la velocidad en revoluciones por minuto. ....	84
Figura 4.18: Sistema rotodinámico.....	85
Figura 4.19: Comparación entre el modelo de múltiples grados de libertad y el modelo simplificado de dos grados de libertad. ....	87

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Figura 4.20: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos, identificados a una velocidad de 1,200 rpm.....	91
Figura 4.21: Comparación entre la respuesta original y la respuesta identificada a una velocidad de 1,200 rpm. ....	91
Figura 4.22: Funcionamiento de un algoritmo genético [25]. ....	93
Figura 4.23: Comparación de la respuesta del sistema a 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	96
Figura 4.24: Comportamiento de la función objetivo, 600 rpm. ....	96
Figura 4.25: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1, a) $k_{xx}$ , b) $k_{xz}$ , c) $k_{zx}$ , d) $k_{zz}$ .....	97
Figura 4.26: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1, a) $c_{xx}$ , b) $c_{xz}$ , c) $c_{zx}$ , d) $c_{zz}$ .....	98
Figura 4.27: Respuesta del sistema a 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1..	99
Figura 4.28: Comportamiento de la función objetivo, 1,000 rpm. ....	99
Figura 4.29: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1. ....	100
Figura 4.30: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1. ....	101
Figura 4.31: Respuesta del sistema a 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1...	102
Figura 4.32: Comportamiento de la función objetivo, 600 rpm. ....	103
Figura 4.33: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1.....	104
Figura 4.34: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1.....	104
Figura 4.35: Modelo del rotor.....	109
Figura 4.36: Primer modo de vibración, horizontal y vertical. ....	110
Figura 4.37: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento modales identificados con la respuesta modal numérica a una velocidad de 300 rpm. ....	111
Figura 4.38: Comparación entre la respuesta modal numérica (color azul) y la identificada (color rojo) a una velocidad de 300 rpm.....	111
Figura 4.39: Respuesta al desbalance numérica (método directo) vs identificado en el nodo 6 (velocidad constante, forma discreta), modo 1.....	113
Figura 4.40: Respuesta al desbalance numérica Pseudo-modal (modo 1) y respuesta identificada nodo 6, corrida de 30 s, modo 1. ....	114
Figura 4.41: Primer modo de vibración, horizontal y vertical. ....	114
Figura 4.42: Respuesta al desbalance numérica contra identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 2. ....	116
Figura 4.43: Respuesta al desbalance numérica Pseudo-modal (modo 2) e identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 2. ....	117
Figura 4.44: Respuesta al desbalance numérica Pseudo-modal (modo 1 y modo 2) e identificado nodo 6, corrida de 30 s. ....	117

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Figura 4.45: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento modales identificados a una velocidad de 1800 rpm, modo 1.....	118
Figura 4.46: Comparación entre la respuesta numérica (color azul) y la identificada (color rojo) a una velocidad de 1800 rpm, modo 1.....	119
Figura 4.47: Respuesta al desbalance numérica método directo vs identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 1.....	120
Figura 4.48: Respuesta al desbalance numérica método directo vs identificado nodo 6, corrida de 2.1 s, modo1.....	121
Figura 4.49: Respuesta al desbalance numérica método Pseudo-modal vs identificado nodo 6., corrida de 30 s, modo1. ....	122
Figura 4.50: Respuesta al desbalance numérica método directo vs identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 2.....	124
Figura 4.51: Respuesta al desbalance numérica método Pseudo-modal vs identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 2. ....	124
Figura 4.52: Respuesta al desbalance numérica método directo vs suma de las respuestas identificadas con los modos por separado, nodo 6, corrida de 30 s, identificación con la repuesta modal.....	125
Figura 4.53: Respuesta al desbalance numérica método directo vs suma de las respuestas identificadas con los modos por separado, nodo 6, corrida de 30 s, identificación con la repuesta de MGD. ....	125
Figura 5.1: Banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.....	128
Figura 5.2: Esquema y discretización del banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.....	128
Figura 5.3: Respuesta al desbalance.....	129
Figura 5.4: Respuesta al desbalance y función de rendimiento.....	130
Figura 5.5: Desplazamientos nodales a una velocidad de 2,460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	132
Figura 5.6: Pendientes nodales aproximadas a una velocidad de 2,460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s. ....	132
Figura 5.7: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 2460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.....	133
Figura 5.8:Comparación de los desplazamientos nodales a una velocidad de 2460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.....	134
Figura 5.9: Comparación entre los desplazamientos nodales reales y estimados a una velocidad de 2460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.....	136
Figura 5.10: Banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.....	136
Figura 5.11: Esquema y discretización del banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.....	137
Figura 5.12: Forma modal a) horizontal y b) vertical.....	138
Figura 5.13: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 1800 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	139

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Figura 5.14: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados utilizando filtro invariante a diferentes velocidades, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	139
Figura 5.15: Comparación de los desplazamientos nodales a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	141
Figura 5.16: Desplazamientos nodales a una velocidad de 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	142
Figura 5.17: Desplazamientos nodales a una velocidad de 1,500 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	144
Figura 5.18: Desplazamientos nodales a una velocidad de 1,800 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1. ....	145
Figura 5.19: Banco de pruebas experimentales con chumacera presurizada Bently Nevada modelo RK4. ....	146
Figura 5.20: Discretización del Banco de pruebas experimentales con chumacera presurizada Bently Nevada modelo RK4. ....	146
Figura 5.21: Chumacera presurizada Bently Nevada modelo RK4. ....	147
Figura 5.22: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 2,400 rpm. ....	148
Figura 5.23: Comparación entre la respuesta experimental y la identificada a una velocidad de 2,400 rpm. ....	149
Figura 5.24: Respuesta al desbalance experimental vs identificado nodo 11. ....	149
Figura 5.25: Sistema rotodinámico con cojinetes convencionales. ....	150
Figura 5.26: Formas modales, a) horizontal y b) vertical. ....	151
Figura 5.27: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 1,800 rpm. ....	151
Figura 5.28: Comparación entre la respuesta experimental y la identificada modal a una velocidad de 1,800 rpm. ....	152
Figura 5.29: Sistema rotodinámico experimental con cojinete convencional y presurizado. ....	153
Figura 5.30: Sistema rotodinámico con cojinete convencional y presurizado. ....	153
Figura 5.31: Formas modales, a) horizontal y b) vertical. ....	154
Figura 5.32: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 36 y 10psi. ....	155
Figura 5.33: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 10psi. ....	155
Figura 5.34: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 36 y 15psi. ....	157
Figura 5.35: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 15psi. ....	157
Figura 5.36: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 36 y 20psi. ....	159
Figura 5.37: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 20psi. ....	159

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Figura 5.38: Diagramas de bode experimentales a diferentes presiones.....	160
Figura 5.39: Sistema rotodinámico con cojinete convencional y presurizado, tres discos.	160
Figura 5.40: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.....	161
Figura 5.41: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 1800 rpm.....	162
Figura 5.42: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 1800 rpm, (a) en un tiempo de 0 a 10 s y (b) un acercamiento en un tiempo de 9.5-10 s. ....	163
Figura 5.43: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi. ....	164
Figura 5.44: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi. ....	165
Figura 5.45: Segundo modo de vibración, (a) horizontal y (b) vertical. ....	165
Figura 5.46: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la segunda forma modal, nodo 11 y 10psi.....	167
Figura 5.47: Diagrama de bode resultante identificado con la segunda forma modal, nodo 11 y 10 psi. ....	167
Figura 5.48: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 7psi.....	169
Figura 5.49: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 7psi. ....	169
Figura 5.50: Sistema rotodinámico experimental con cojinete convencional y presurizado y cinco discos. ....	170
Figura 5.51: Sistema rotodinámico con cojinete convencional y presurizado y cinco discos. ....	170
Figura 5.52: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.....	171
Figura 5.53: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.....	171
Figura 5.54: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.....	173
Figura 5.55: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi. ....	173
Figura 5.56: Diagrama de bode resultante identificado con la segunda forma modal, nodo 21 y 10 psi. ....	174
Figura 5.57: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 7psi.....	176
Figura 5.58: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 7psi. ....	176
Figura 5.59: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 15 psi.....	178
Figura 5.60: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 15 psi. ....	179

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Figura 5.61: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 12 psi.....	180
Figura 5.62: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 12 psi. ....	181
Figura 5.63: Diagramas de bode experimentales a diferentes presiones.....	181
Figura 5.64: Sistema rotodinámico experimental con cojinetes presurizados y tres discos. ....	182
Figura 5.65: Sistema rotodinámico con cojinetes presurizados y tres discos.....	182
Figura 5.66: Primera forma modal, a) horizontal y b) vertical.....	182
Figura 5.67: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.....	184
Figura 5.68: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi. ....	184
Figura 5.69: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical, identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 15 psi.....	186
Figura 5.70: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 15 psi. ....	186
Figura 5.71: Diagramas de bode experimentales a diferentes presiones.....	187
Figura 5.72: Sistema rotodinámico con cojinetes presurizados y cinco discos.....	187
Figura 5.73: Primera forma modal, a) horizontal y b) vertical.....	188
Figura 5.74: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.....	190
Figura 5.75: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi. ....	190
Figura 5.76: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi.....	192
Figura 5.77: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi. ....	192

# Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1: Parámetros identificados con 10% de ruido [27].	20
Tabla 2.2: Parámetros identificados experimentalmente [27].	21
Tabla 3.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.	49
Tabla 3.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.	49
Tabla 3.3: Coeficientes rotodinámicos, simulación 1.	49
Tabla 3.4: Coeficientes rotodinámicos, simulación 2.	49
Tabla 3.5: Frecuencias en Hertz a 25 000 rpm.	50
Tabla 3.6: Comparación de las velocidades críticas.	51
Tabla 3.7: Masa de desbalance presentes en el sistema.	52
Tabla 3.8: Método Pseudo-modal.	52
Tabla 4.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.	60
Tabla 4.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.	60
Tabla 4.3: Coeficientes rotodinámicos, soporte 1.	60
Tabla 4.4: Coeficientes rotodinámicos, soporte 2.	61
Tabla 4.5: Masa de desbalance presentes en el sistema.	61
Tabla 4.6: Desviación porcentual de los valores identificados a diferentes pasos de muestreo, soporte 1.	67
Tabla 4.7: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación.	68
Tabla 4.8: Comparación de la desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 y 100,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación.	68
Tabla 4.9: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , soporte 1.	69
Tabla 4.10: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , soporte 2.	69
Tabla 4.11: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de dos nodos, soporte 1.	70
Tabla 4.12: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de dos nodos, soporte 2.	70
Tabla 4.13: Desviación porcentual de los valores identificados a diferentes pasos de muestreo, utilizando un filtro invariante soporte 1, configuración 3.	72
Tabla 4.14: Coeficientes rotodinámicos, simulación 1.	74
Tabla 4.15: Simulación 1, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.	75
Tabla 4.16: Simulación 1, desviación porcentual de entre las pendientes calculadas y las aproximadas, 10,000 muestras/s.	75

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Tabla 4.17: Simulación 1, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 100,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.....	75
Tabla 4.18: Simulación 1, desviación porcentual de entre las pendientes calculadas y las aproximadas, 100,000 muestras/s.....	75
Tabla 4.19: Coeficientes rotodinámicos, simulación 2.....	76
Tabla 4.20: Simulación 2, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.....	76
Tabla 4.21: Simulación 2, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 100,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.....	76
Tabla 4.22: Simulación 3, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.....	77
Tabla 4.23: Simulación 3, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 100,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.....	77
Tabla 4.24: Coeficientes rotodinámicos, soporte 1 y 2.....	78
Tabla 4.25: Simulación 4, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, quitando los datos atípicos, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.....	78
Tabla 4.26: Configuración 3, Parámetros identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, filtro invariante, soporte 1.....	83
Tabla 4.27: Configuración 3, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, filtro invariante, soporte 1..	83
Tabla 4.28: Propiedades mecánicas y geométricas del sistema rotodinámico.....	86
Tabla 4.29: Valores de los coeficientes rotodinámicos.....	86
Tabla 4.30: Coeficientes rotodinámicos identificados y su desviación porcentual.....	91
Tabla 4.31: Intervalo de búsqueda.....	94
Tabla 4.32: Valores identificados a 3,600 rpm, 500 generaciones POB 10.....	94
Tabla 4.33: Desviaciones porcentuales a 3600 rpm, 500 generaciones y POB 10.....	95
Tabla 4.34: Parámetros del algoritmo genético.....	95
Tabla 4.35: Intervalo de búsqueda.....	95
Tabla 4.36: Valores identificados.....	101
Tabla 4.37: Desviaciones porcentuales.....	101
Tabla 4.38: Valores identificados.....	105
Tabla 4.39: Desviaciones porcentuales.....	105
Tabla 4.40: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.....	109

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Tabla 4.41: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos. ....	109
Tabla 4.42: Coeficientes rotodinámicos, simulación 1.....	109
Tabla 4.43: Masa de desbalance presentes en el sistema. ....	109
Tabla 4.44: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo 1. ....	112
Tabla 4.45: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo 2. ....	114
Tabla 4.46: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo1. ....	119
Tabla 4.47: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo2. ....	122
Tabla 5.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.....	128
Tabla 5.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos. ....	128
Tabla 5.3: Masa de desbalance presentes en el sistema. ....	129
Tabla 5.4: Parámetros del algoritmo genético.....	130
Tabla 5.5: Intervalo de búsqueda.....	130
Tabla 5.6: Valores identificados.....	130
Tabla 5.7: Parámetros identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, soporte 1. ....	133
Tabla 5.8: Desviación porcentual entre las respuestas real y estimada. ....	135
Tabla 5.9: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.....	137
Tabla 5.10: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.....	137
Tabla 5.11: Masa de desbalance presentes en el sistema. ....	137
Tabla 5.12: Valores identificados.....	140
Tabla 5.13: Masa de desbalance presentes en el sistema. ....	147
Tabla 5.14: Coeficientes rotodinámicos directos identificados.....	147
Tabla 5.15: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 26, soportes convencionales.....	152
Tabla 5.16: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, un disco, 10 psi.....	154
Tabla 5.17: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, un disco, 15 psi.....	156
Tabla 5.18: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, un disco, 20 psi.....	158
Tabla 5.19: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 11, soporte presurizado. ....	163
Tabla 5.20: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 11, soporte presurizado. ....	166
Tabla 5.21: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, 7 psi. ....	168
Tabla 5.22: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 21, soporte presurizado, modo 1.....	171
Tabla 5.23: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 21, soporte presurizado, modo 2.....	173
Tabla 5.24: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1. ....	175

## Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

Tabla 5.25: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1. ....	177
Tabla 5.26: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1,12 psi. ....	179
Tabla 5.27: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 21, soporte presurizado, modo 1, 10psi. ....	183
Tabla 5.28: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 21, soporte presurizado, modo 1, 15psi. ....	185
Tabla 5.29: Masas de desbalance presentes en el sistema. ....	187
Tabla 5.30: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 21, soporte presurizado, modo 1, 10 psi. ....	188
Tabla 5.31: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 11, soporte presurizado, modo 1, 10psi. ....	191

<b>Nomenclatura.....</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tablas.....</b>	<b>x</b>
<b>Capítulo 1 Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo general.....	3
1.2 Objetivos específicos.....	3
1.3 Alcances .....	3
1.4 Limitaciones .....	3
1.5 Estructura de la tesis .....	4
<b>Capítulo 2 Estado del Arte .....</b>	<b>5</b>
2.1 Teoría hidrodinámica.....	5
2.2 Chumaceras presurizadas.....	9
2.3 Definición de los coeficientes rotodinámicos .....	14
2.4 Identificación de los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada .....	15
2.5 Identificación algebraica.....	24
2.6 Conclusión del estado del arte .....	27
<b>Capítulo 3 Marco Teórico .....</b>	<b>28</b>
3.1 Características de los elementos del sistema rotor-chumacera .....	28
3.1.1 El disco .....	29
3.1.2 El eje.....	30
3.1.3 Energía cinética .....	30
3.1.4 Energía de deformación.....	31
3.1.5 Soportes .....	33
3.1.6 Masa de desbalance .....	33
3.2 Modelado del sistema rotor-cojinete por el método del elemento finito.....	35
3.2.1 Modelado del disco.....	35
3.2.2 Modelado del eje .....	35
3.2.3 Modelado de los soportes .....	40
3.2.4 Modelado de la masa de desbalance.....	41
3.2.5 Ecuación general del sistema rotor-cojinete.....	41

<b>3.3</b>	<b>Solución de la ecuación general del sistema .....</b>	<b>42</b>
3.3.1	El método directo .....	42
3.3.2	El método pseudo-modal .....	44
3.3.3	Solución en estado transitorio .....	47
3.3.4	El método de integración directa de Newmark .....	47
<b>3.4</b>	<b>Implementación de la plataforma computacional y validación .....</b>	<b>48</b>
3.4.1	Solución por el método directo.....	48
3.4.2	Diagrama de Campbell .....	49
3.4.3	Respuesta a masa de desbalance.....	50
3.4.4	Método Pseudo-Modal .....	52
3.4.5	Respuesta al desbalance método de Newmark .....	53
<b>Capítulo 4 Simulación Numérica de los Identificadores Algebraicos de los Coeficientes Rotodinámicos.....</b>		<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete con un modelo de múltiples grados de libertad a velocidad constante .....</b>	<b>55</b>
4.1.1	Desarrollo del modelo matemático del identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete a velocidad constante .....	56
4.1.2	Simulación numérica del identificador algebraico .....	59
4.1.3	Efecto del tiempo de muestreo en la identificación algebraica .....	64
4.1.4	Identificación algebraica considerando la fuerza de excitación igual con cero	68
4.1.5	Identificación algebraica en función de los grados de libertad del sistema.....	69
4.1.6	Filtro invariante en el tiempo .....	70
4.1.7	Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos con las pendientes nodales aproximadas .....	72
4.1.8	Identificación algebraica a velocidad constante utilizando pendientes aproximadas y filtro invariante e identificando en función del número de condición ..	79
4.1.9	Conclusión de la sección .....	84
<b>4.2</b>	<b>Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos utilizando un modelo simplificado de dos grados de libertad a velocidad constante.....</b>	<b>84</b>
4.2.1	Modelo matemático del sistema rotor-cojinete de dos grados de libertad .....	85
4.2.2	Comparación entre el modelo de múltiples grados de libertad y el modelo simplificado de dos grados de libertad.....	86

# Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

4.2.3	Modelo matemático del identificador algebraico en línea de los coeficientes rotodinámicos a velocidad constante.....	87
4.2.4	Simulación del identificador algebraico simplificado.....	90
4.2.5	Conclusión de la sección .....	92
<b>4.3</b>	<b>Estimación de parámetros con algoritmos genéticos.....</b>	<b>92</b>
4.3.1	Descripción del algoritmo .....	92
4.3.2	Ventajas del uso de algoritmos genéticos.....	93
4.3.3	Desventaja del uso de algoritmos genéticos.....	93
4.3.4	Modelo considerando ocho coeficientes .....	94
4.3.5	Identificación algebraica combinada con optimización .....	95
4.3.6	Conclusión de la sección .....	105
<b>4.4</b>	<b>Identificación algebraica de la rigidez y amortiguamiento modal de los soportes a velocidad constante.....</b>	<b>105</b>
4.4.1	Desarrollo del identificador algebraico modal .....	105
4.4.2	Identificación modal utilizando el primer modo de vibración y la respuesta modal .....	108
4.4.3	Identificación modal utilizando el segundo modo de vibración y la respuesta modal .....	114
4.4.4	Comparación sumando las respuestas identificadas con los modos separados contra el método directo.....	117
4.4.5	Identificación con la respuesta de múltiples grados de libertad .....	117
4.4.6	Identificación modal utilizando el primer modo de vibración y la respuesta de vibración obtenida del modelo rotodinámico de múltiples grados de libertad. ....	118
4.4.7	Identificación modal utilizando el segundo modo de vibración y la respuesta de múltiples grados de libertad. ....	122
4.4.8	Comparación sumando las respuestas de vibración identificadas (primer y segundo modo de vibración) con los modos separados contra el método directo. ....	124
4.4.9	Conclusión de la sección .....	125
<b>4.5</b>	<b>Conclusión del capítulo .....</b>	<b>126</b>
<b>Capítulo 5</b>	<b>Pruebas Experimentales .....</b>	<b>127</b>
<b>5.1</b>	<b>Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete con un modelo de múltiples grados de libertad a velocidad constante de manera experimental .....</b>	<b>127</b>

# Identificación Algebraica De Coeficientes Rotodinámicos De Un Sistema Rotatorio Soportado En Chumaceras Presurizadas

---

5.1.1	Identificación algebraica de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en un sistema rotodinámico soportado con doble cojinete convencional .....	127
5.1.2	Identificación algebraica de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en un sistema rotodinámico soportado en dos cojinetes presurizados .....	136
5.1.3	Conclusión de la sección .....	145
<b>5.2</b>	<b>Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos utilizando un modelo simplificado de dos grados de libertad a velocidad constante.....</b>	<b>146</b>
5.2.1	Configuración experimental .....	146
5.2.2	Parámetros identificados a diferentes velocidades .....	147
5.2.3	Conclusión de la sección .....	149
<b>5.3</b>	<b>Identificación Algebraica Modal.....</b>	<b>150</b>
5.3.1	Identificación algebraica modal a un sistema rotodinámico soportado en cojinetes convencionales .....	150
5.3.2	Identificación algebraica modal a un sistema rotodinámico con un soporte convencional y uno presurizado .....	153
5.3.3	Identificación algebraica modal utilizando dos soportes presurizados .....	181
5.3.4	Conclusión de la sección .....	192
<b>Conclusiones Generales .....</b>		<b>194</b>
<b>Trabajos futuros .....</b>		<b>197</b>
<b>Referencias.....</b>		<b>198</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

Las principales razones por las que una máquina rotatoria entra en vibración son por desbalance, resonancia o desalineamiento. Desde la invención de la maquinaria rotatoria hasta la actualidad se han realizado diversas investigaciones para comprender estos fenómenos y así crear e implementar métodos y dispositivos para el control de vibraciones. Todos estos estudios han dado origen a una nueva disciplina a la cual se le conoce como rotodinámica.

En el control de vibraciones, los elementos sobre los cuales esta soportada la maquinaria rotatoria juega un papel muy importante. Estos elementos son las chumaceras de rodamientos, magnéticas o chumaceras presurizadas.

Una chumacera presurizada es un cojinete de superficie plana en el cual la pieza móvil y estacionaria del sistema están separadas por una película completa de lubricante que soporta a la carga, de modo que la parte rotatoria y estacionaria del sistema no se encuentran en contacto directo, reduciendo significativamente la fricción entre ambas partes [1].

De acuerdo con la literatura, las chumaceras presurizadas se clasifican en:

- Chumaceras Hidrostáticas
- Chumaceras Hidrodinámicas
- Chumaceras Híbridas

En las chumaceras hidrostáticas, su presurización es externa, esto quiere decir que se les debe suministrar fluido lubricante a una presión regulada; en contraste en las chumaceras hidrodinámicas su presurización es interna, y la presión es generada por el movimiento del muñón; por otra parte, las chumaceras híbridas, son una combinación de la hidrostática y la hidrodinámica.

Para aplicaciones industriales, las chumaceras presurizadas son de uso más común a causa de su prolongada vida útil, la capacidad de soportar cargas pesadas y mayor eficiencia en altas velocidades. Además, si el diseño de la chumacera es optimizado para minimizar el coeficiente de fricción, la pérdida de potencia puede ser considerada muy pequeña comparada con una chumacera de rodamientos de la misma capacidad de carga; en la Figura 1.1 se muestra una fotografía de chumacera presurizada.



Figura 1.1: Chumacera presurizada [2].

La operación confiable de la turbo-maquinaria soportada en este tipo de cojinetes operando a altas velocidades es vital para la industria. Son millones de dólares que se invierten cada año para evitar fallas inesperadas, las cuales pueden generar desde cuantiosas pérdidas económicas hasta exponer la integridad y vida de las personas. Por esta razón, los esfuerzos deben concentrarse en asegurar el buen funcionamiento de estos cojinetes hidrodinámicos. Para esto es necesario predecir y controlar su comportamiento; sin embargo, la dinámica que presentan es compleja debido a los fenómenos involucrados en la película de aceite que separa la parte móvil de la fija. Actualmente la obtención de los parámetros de rigidez y amortiguamiento del cojinete hidrodinámico se realiza mediante modelos numéricos a través de CFD (*Computational Fluid Dynamics*) y en la mayoría de los casos para simplificar el modelo desprecian la temperatura alejando los resultados de la realidad, por otra parte, también se intentan obtener mediante modelos analíticos que arrojan resultados aproximados pero que no han logrado ser completamente confiables. Por último, los parámetros de rigidez y amortiguamientos también se estiman de manera experimental.

En esta investigación se presenta el desarrollo de un modelo matemático de identificación para determinar de forma numérica y experimental los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada de un rotor de múltiples grados de libertad a velocidad constante. El modelo propuesto toma como datos de entrada la respuesta de vibración generada por desbalance en el sistema rotodinámico. Para el desarrollo del modelo matemático de identificación se utilizó el método de identificación algebraica, el cual ha demostrado potencial cuando se aplica en la identificación de parámetros en sistemas rotodinámicos. Posteriormente se validaron los parámetros rotodinámicos identificados utilizando el modelo de elementos finitos de un sistema rotor-cojines de múltiples grados de libertad.

## 1.1 Objetivo general

Desarrollar un modelo matemático de identificación para determinar de forma numérica y experimental los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada de un rotor de múltiples grados de libertad a velocidad constante. Para el desarrollo del modelo matemático de identificación se utilizó el método de identificación algebraica en línea tomando como base un modelo rotor-chumacera de múltiples grados de libertad soportado con chumaceras presurizadas.

## 1.2 Objetivos específicos

- Modelar matemáticamente un sistema rotor-chumacera de múltiples grados de libertad a velocidad angular constante.
- Implementar la técnica de identificación algebraica para determinar los coeficientes rotodinámicos a velocidad constante.
- Simular los identificadores algebraicos de los coeficientes rotodinámicos de forma numérica a velocidad constante.
- Determinar los coeficientes rotodinámicos experimentalmente en un sistema rotodinámico utilizando chumaceras presurizadas, operando el sistema a velocidad constante.

## 1.3 Alcances

- Desarrollar y analizar un modelo matemático de múltiples grados de libertad de un sistema rotor - chumacera a velocidad angular constante.
- Validar los modelos matemáticos de forma experimental utilizando un sistema rotor-chumacera presurizada.
- Implementar la nueva técnica de identificación algebraica, para la identificación de los parámetros de rigidez y amortiguamiento de una chumacera presurizada para diferentes presiones de inyección del fluido y diferentes velocidades de operación del rotor de manera experimental.
- Realizar pruebas experimentales de identificación de parámetros rotodinámicos utilizando únicamente flechas simétricas en el rotor experimental.

## 1.4 Limitaciones

- La identificación de los coeficientes rotodinámicos experimentales se realizará a presión constante.
- La identificación de los coeficientes rotodinámicos experimentales y numéricos se realizarán a velocidad constante.
- No se considerará el efecto de la temperatura en el fluido provocado por la fricción.

## 1.5 Estructura de la tesis

El resto del documento está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presenta el estado del arte, se describen los primeros estudios de un cojinete operando bajo condiciones hidrodinámicas; asimismo, se presenta una investigación detallada sobre los métodos de identificación de parámetros desarrollados en el campo de la rotodinámica, se describe el método de identificación algebraica y se analizan sus aplicaciones y resultados obtenidos. En el Capítulo 3 se desarrolla el marco teórico, donde se analizan los elementos teóricos necesarios para el desarrollo de la ecuación general de movimiento, que rige el comportamiento dinámico de un sistema rotor-cojinete; posteriormente se utilizan las ecuaciones deducidas para la implementación del modelo de múltiples grados de libertad mediante el método de elemento finito y por último se presenta el desarrollo y validación de una plataforma computacional en el software Matlab. Posteriormente, en el Capítulo 4 se presenta el desarrollo del identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete a velocidad constante. Se realizan diferentes simulaciones numéricas para validar el funcionamiento del identificador propuesto. En el Capítulo 5 se realizan pruebas experimentales para verificar la eficacia del identificador algebraico propuesto. Para el desarrollo de la parte experimental, se utilizó un sistema rotodinámico experimental de la marca Bently Nevada modelo RK4, así como, un par de chumaceras presurizadas de la misma marca. Finalmente, en el Capítulo 6 se exponen las conclusiones del trabajo de investigación presentado.

# CAPÍTULO 2

## ESTADO DEL ARTE

En este apartado se presenta una reseña sobre los primeros estudios de las chumaceras presurizadas, así como, su importancia en la turbo-maquinaria. También se describen los métodos de identificación de parámetros desarrollados y los resultados obtenidos en las chumaceras presurizadas, se explica brevemente el método de identificación algebraica y se analizan sus aplicaciones y resultados obtenidos en la rotodinámica.

### 2.1 Teoría hidrodinámica

En 1883 Nikilay Petroff realizó los primeros estudios de un eje y una chumacera operando bajo condiciones completamente hidrodinámicas. Petroff estudió el fenómeno de la fricción en cojinetes mediante el supuesto de que el árbol es concéntrico (ver Figura 2.1). El análisis realizado arrojó resultados de gran importancia, ya que se definen grupos de parámetros adimensionales, donde el coeficiente de fricción predicho mediante esta ley es muy exacto Ec. (2.1).

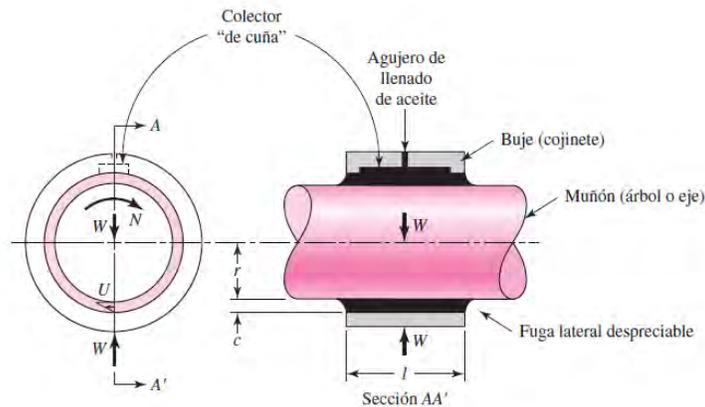


Figura 2.1: Chumacera de Petroff [1].

$$f = 2\pi^2 \frac{\mu N r}{P c} \quad (2.1)$$

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

Con

- $\mu$  Viscosidad dinámica
- $N$  Velocidad angular
- $P$  Presión del lubricante
- $r$  Radio del muñón
- $c$  Holgura radial

Posteriormente, Beauchamp Tower realizó experimentos y demostró por primera vez la existencia de un campo de presión en una chumacera hidrodinámica, los resultados obtenidos fueron publicados en una serie de cuatro reportes entre 1883 y 1891 [3]–[6]. Tower había sido contratado para estudiar la fricción en las chumaceras de ferrocarriles y aprender los mejores métodos para lubricarlas. Fue un accidente o un error, durante el curso de esta investigación, lo que incitó a Tower a considerar el problema con más detalle, lo que dio como resultado un descubrimiento que a la larga condujo al desarrollo de la teoría actual de la lubricación hidrodinámica [1]. En la Figura 2.2 se observa un dibujo esquemático de la chumacera estudiada por Tower.

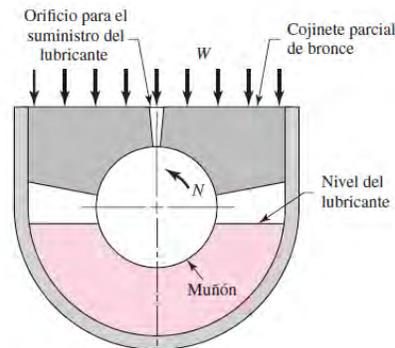


Figura 2.2: Representación esquemática del cojinete utilizado por Tower [1].

Cuando Tower puso en marcha el muñón de la chumacera, observó que el lubricante se salía por el puerto de inyección. Al notar este fenómeno procedió a conectar un manómetro en el puerto de inyección; la presión que midió fue mayor al doble de la carga unitaria del cojinete. Estos resultados llevaron a Tower a investigar con más detalle las presiones de la película en el cojinete a lo largo y ancho de éste, en la Figura 2.3 se observa la distribución de presiones obtenidas.

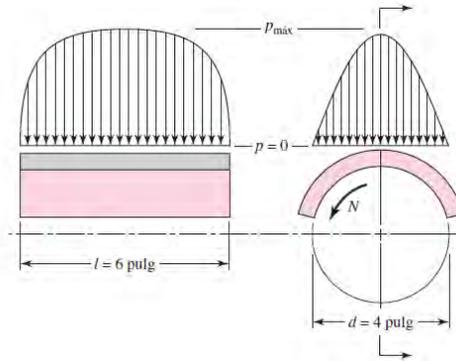


Figura 2.3: Distribución de presión, obtenidas por Tower [1].

Tower demostró de manera experimental, la existencia de un campo de presión. Sin embargo, fue Osborne Reynolds en 1886 [7] quién obtuvo una expresión matemática que explica este incremento de presión y que ha llegado a ser la base del análisis hidrodinámico del funcionamiento de las chumaceras Ec. (2.2).

Las consideraciones más importantes que utilizó Osborne Reynolds para la deducción de la expresión matemática fueron las siguientes (ver Figura 2.4) [1]:

- El lubricante obedece al efecto viscoso de Newton.
- Se omiten los efectos de las fuerzas debidas a la inercia del lubricante.
- El lubricante es incompresible.
- La viscosidad es constante en toda la película.
- La presión no varía en la dirección axial.
- El buje y el muñón se extienden de manera infinita en la dirección  $z$ , lo que significa que no puede haber flujo de lubricante en dicha dirección.
- La presión en la película es constante en la dirección  $y$ . En consecuencia, la presión sólo depende de la coordenada  $x$ .
- La velocidad de cualquier partícula del lubricante en la película sólo depende de las coordenadas  $x$  y  $y$ .

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [(U_0 - U_1)h] + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right\} \quad (2.2)$$

Donde  $p = p(\theta, z)$  es la distribución de la presión;  $\theta$  y  $z$  son las coordenadas que localizan un punto en la película de lubricante;  $h$  es el espesor de la película local;  $\mu$  es la viscosidad del fluido;  $U_0$  y  $U_1$  son las velocidades tangenciales en los límites de las dos paredes de la película;  $\frac{\partial h}{\partial t}$  es la razón de cambio del espesor de película respecto al tiempo.

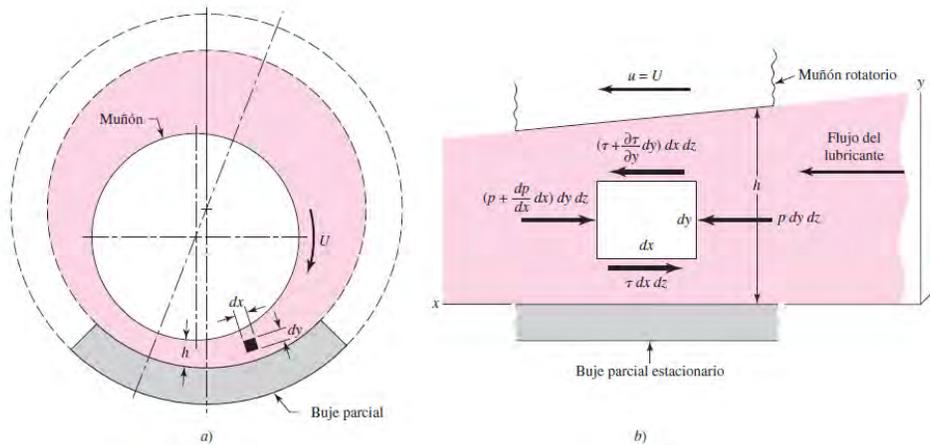


Figura 2.4: Análisis de fuerzas en un cojinete hidrodinámico [1].

Para la Ec. (2.2) no existe una solución analítica, por lo que Osborne Reynolds propuso una solución en forma de una serie de Fourier que converge para relaciones de excentricidad inferiores a 0.5 y, por lo tanto, es útil solo para rodamientos ligeramente cargados [8]. Sin embargo, a la fecha se han obtenido soluciones aproximadas considerando chumaceras largas y cortas.

Una chumacera puede ser clasificada de acuerdo con la relación que existe entre su longitud axial y su diámetro. Las razones más grandes (chumaceras largas) generan menos fugas laterales en los extremos y tienen requerimientos reducidos de flujo de aceite. Por lo tanto, a temperaturas de aceites más altas, también se reduce el coeficiente de fricción, por lo cual resulta deseable donde se opere con lubricación de película delgada o límite. Por otro lado, donde haya lubricación a presión o lubricación positiva, la relación  $L/D$  será definitivamente pequeña. La longitud de la chumacera corta provoca un flujo mayor de aceite fuera de los extremos, lo cual mantiene más fría a la chumacera, son menos susceptibles a la carga indeseable en las aristas debido a la deflexión y desalineamiento del eje [9].

Sommerfeld en 1904 [10] fue capaz de resolver la ecuación de Reynolds considerando una chumacera infinitamente larga. El supuesto es que si no existen extremos no puede haber fuga en ellos y, por tanto, dependencia alguna a la presión respecto a la coordenada  $z$ . Al aplicar este supuesto a la ecuación de Reynolds Ec. (2.2), la ecuación resultante queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6U\mu r \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.3)$$

La cual es la clásica ecuación de Reynolds para flujo unidimensional. Como se mencionó, se pasan por alto las fugas laterales, es decir, el flujo en la dirección  $z$ . La solución de la ecuación

(2.3) permite determinar el campo de presión en la película de lubricante, la solución propuesta está dada por la Ec. (2.4).

$$p = \frac{6\mu U r}{c_r^2} \left[ \frac{\varepsilon(2 + \varepsilon \cos \theta) \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right] \quad (2.4)$$

La chumacera corta ha sido estudiada y analizada por Ocvirk en 1955 [11]; consideró que el gradiente de presión alrededor de la chumacera es pequeño y se puede despreciar cuando se compara con los gradientes de presión en la dirección axial en una chumacera muy corta. Todo el fluido que choca con la superficie inclinada es desviado hacia la fuga de los extremos, de modo que el primer término en la Ec.(2.2) es despreciable.

$$r^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U\mu r \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.5)$$

La Ec. (2.5) se puede integrar fácilmente, por lo tanto, facilita el diseño y análisis de una chumacera corta. Este procedimiento se conoce como la aproximación de Ocvirk para chumaceras cortas. Esta solución es bastante precisa y permite obtener soluciones analíticas cerradas y así poder determinar el campo de presión y predecir el comportamiento de una chumacera corta, la solución de la Ec. (2.5) es:

$$p = \frac{3\mu U}{h^2} \left[ z^2 - \frac{l^2}{4} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} L/D < \frac{1}{4} \quad (2.6)$$

## 2.2 Chumaceras presurizadas

Comúnmente las chumaceras presurizadas son altamente utilizadas en la industria debido a las grandes ventajas que poseen como son: prolongada vida útil, capacidad de soportar cargas pesadas y ofrecer mayor eficiencia en altas velocidades. El fluido lubricante que utilizan las chumaceras presurizadas es muy importante ya que separa las superficies en movimiento. Dicha película de lubricante tiene un comportamiento similar al de un resorte: presenta propiedades de amortiguamiento y rigidez. Estas propiedades pueden cambiar significativamente el comportamiento dinámico de la máquina en sus velocidades críticas, respuesta al desbalance y algunos otros fenómenos que se presentan en este tipo de chumaceras. Por tal razón, las características rotodinámicas de las máquinas rotatorias son fuertemente influenciadas por los soportes del sistema. El control de vibraciones dentro de los soportes ha tenido un gran auge para disminuir la amplitud del movimiento cuando el sistema entra en resonancia, permitiendo una mayor vida útil de los soportes. Este control busca reducir la magnitud de la vibración hasta un punto de operación estable, aumentando

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

no sólo los beneficios económicos, sino también la seguridad del personal encargado de la operación y mantenimiento de la maquinaria rotatoria.

Sun y Krodkiewski propusieron un nuevo tipo de cojinete de aceite activo (Figura 2.5). El cojinete activo se suministra con un manguito flexible cuya deformación se puede cambiar durante el funcionamiento del rotor. La posición de equilibrio del manguito flexible y la chumacera se determinan por la carga y la presión, que se puede controlar durante el funcionamiento [12].

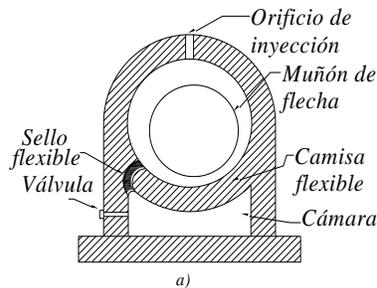


Figura 2.5: Chumacera presurizada con camisa flexible.

Hathout y El-Shafei propusieron un amortiguador híbrido de película a presión (HSFD), mostrado en la Figura 2.6, para atenuar las vibraciones en maquinaria rotatoria. Hathout y Shafei han implementado diferentes algoritmos de control (controladores tipo PID, LQR, programación de ganancia, reguladores adaptables) para el control activo de vibraciones del rotor para soportes HSFD de rotores. En este dispositivo, se puede cambiar el control de la presión del fluido en la cámara y, por lo tanto, cambiar las propiedades de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes [12].

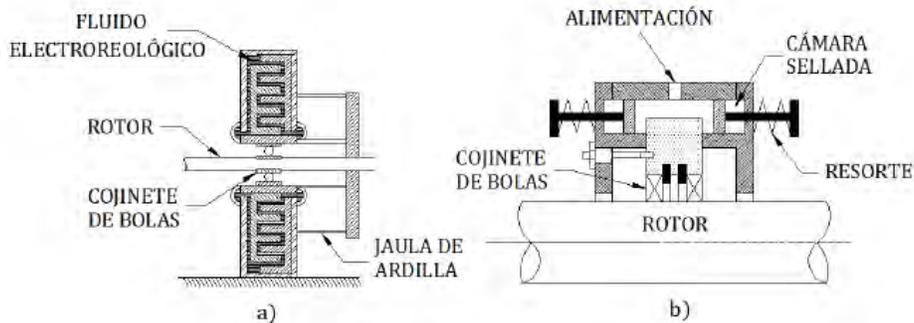


Figura 2.6: Cojinetes de película de fluido: (a) usando fluidos reológicos y (b) usando cámara de presión.

Cano [13] propuso un nuevo diseño de chumacera hidrodinámica corta con presurización puntual. Este diseño tiene el objetivo de reducir las amplitudes de vibración de un sistema rotodinámico generadas por el desbalance y fisura-desbalance. El modelo utilizado es llamado modelo del rotor Jeffcott extendido, el cual está soportado por chumaceras cortas con puertos puntuales de presurización. Considera masas tanto en el disco ( $m$ ) localizado a

la mitad del eje flexible, así como otras dos masas idénticas ( $m_j$ ) en los dos soportes extremos; dichos soportes poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento propios de las chumaceras lubricadas. También cuenta con desbalance en la masa del disco.

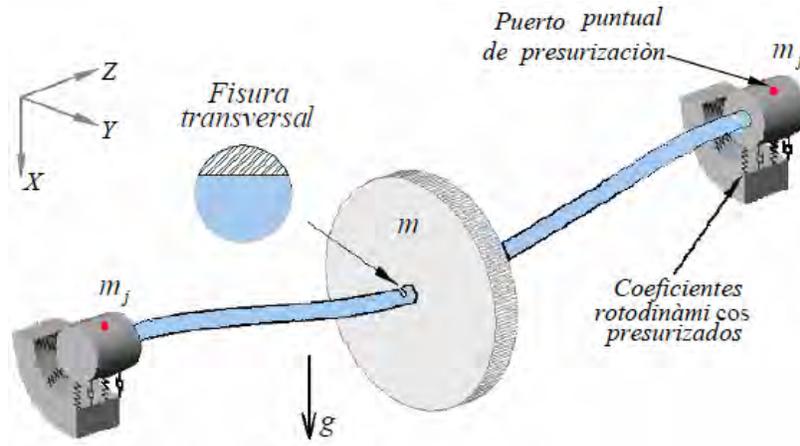


Figura 2.7: Modelo del rotor Jeffcott extendido y soportado por chumaceras cortas con puertos puntuales de presurización [13]

Los aspectos para considerar en este modelo son:

- a) El sistema es simétrico y soportado por chumaceras hidrodinámicas cortas e idénticas, las cuales están sometidas a una presurización externa en un puerto puntual de inyección, cuya ubicación axial y angular es arbitraria.
- b) Se incluyen masas en las dos localizaciones: disco  $m$  y chumaceras  $m_j$ . Además, se permite la presencia del vector desbalance en la localización del disco  $U_d$ .
- c) El amortiguamiento en el disco  $C_d$ , debido al efecto aerodinámico de su movimiento dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomaquinaria, es del tipo viscoso.
- d) El efecto de la gravedad es dominante, es decir, las vibraciones permanecen pequeñas en comparación con la deflexión del rotor bajo su propio peso.
- e) Los efectos giroscópicos en el disco son ignorados debido a la simetría del sistema.
- f) Las vibraciones axiales y torsionales del rotor del sistema son ignorados.
- g) Las fuerzas en la película de aceite de las chumaceras hidrodinámicas son determinadas por la ecuación de Reynolds como un lubricante incompresible.
- h) El acoplamiento a otros ejes es flexible, es decir, no se presenta desalineamiento.
- i) Se supone que el eje está fisurado a la mitad de su longitud en la ubicación del disco.

Aplicando la segunda ley de Newton para para el disco y las chumaceras y basándose en el modelo mostrado de la Figura 2.7 se obtiene:

$$m\ddot{x}_d + c_d\dot{x}_d + k(x_d - x_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(y_d - y_j)] = mg + m\omega^2(e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) \quad (2.7)$$

$$m\ddot{y}_d + c_d\dot{y}_d + k(y_d - y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(y_d - y_j)] = m\omega^2(e_d^y \cos \omega t - e_d^x \sin \omega t)$$

$$m_j\ddot{x}_j + f_x - \frac{k}{2}(x_d - x_j) - \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(y_d - y_j)] = m_j g + m_j \omega^2 e_j \cos \omega t$$

$$m_j\ddot{y}_j + f_y - \frac{k}{2}(y_d - y_j) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(y_d - y_j)] = m_j \omega^2 e_j \cos \omega t$$

El sistema de Ecs. (2.7) representa el modelo con dimensiones del rotor Jeffcott extendido y soportado por chumaceras cortas con puertos puntuales de presurización. En las Figuras 2.8, 2.9 y 2.10 se ilustran las amplitudes de vibración horizontal y vertical en el disco y las chumaceras, trazadas como funciones de la frecuencia de operación  $\Omega$ . Se observa el efecto de la fuerza de inyección del fluido lubricante sobre el desbalance y la fisura, para la inyección superior, utilizando las configuraciones propuestas. Las curvas obtenidas muestran el beneficio que puede aportar la inyección presurizada. Se puede observar el efecto de los distintos valores de presión de inyección de fluido lubricante sobre el desbalance, se aprecia la ventaja que ofrece la inyección presurizada del lubricante al reducir la amplitud máxima al desbalance incluso cuando el sistema se aproxima a la velocidad crítica.

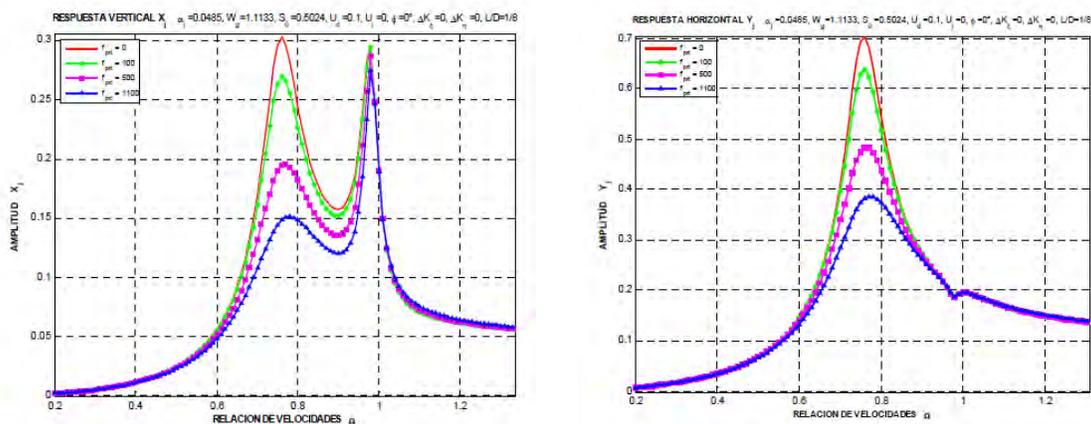


Figura 2.8: Respuesta de la chumacera en las direcciones X & Y en función de la relación de velocidades con el eje íntegro para  $L/D=1/8$ , y diferentes valores de la fuerza de presurización [13].

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

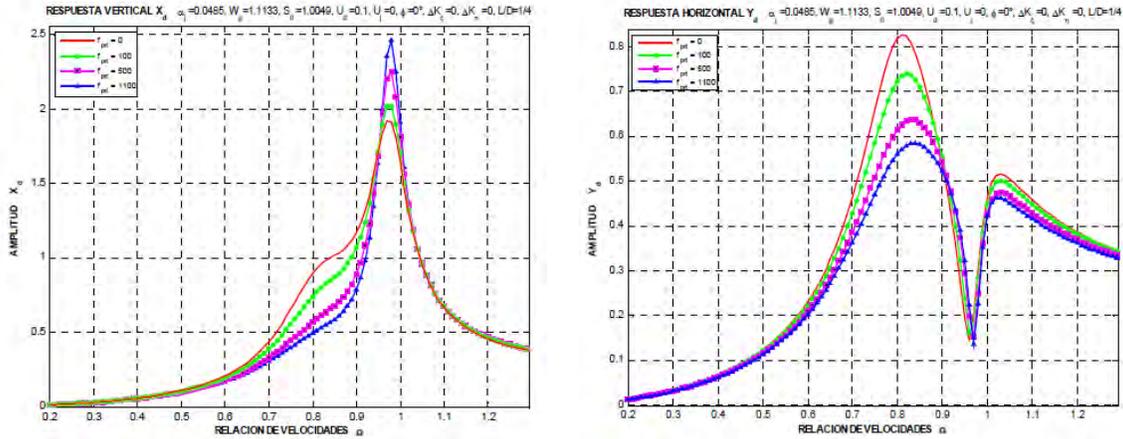


Figura 2.9: Respuesta del disco en las direcciones X & Y en función de la relación de velocidades con el eje integro para  $L/D=1/4$ , y diferentes valores de la fuerza de presurización [13].

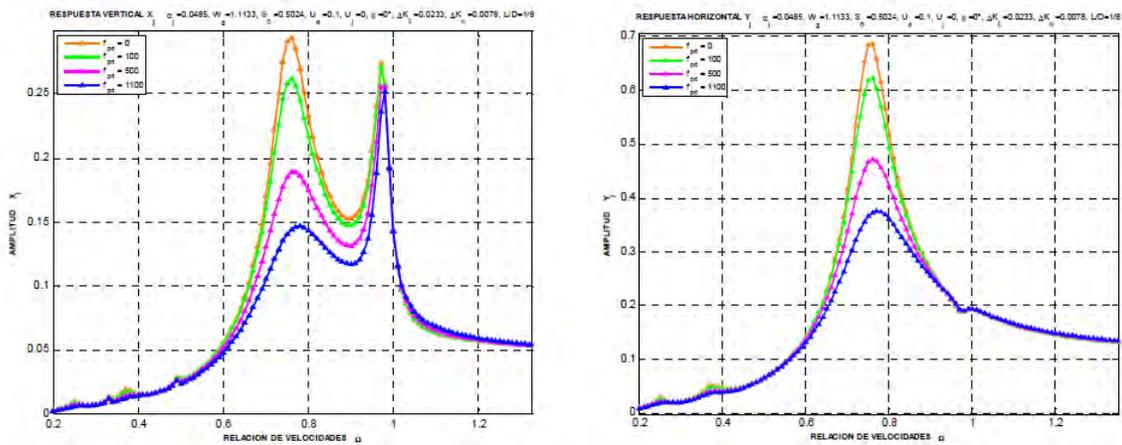


Figura 2.10: Respuesta de la chumacera en las direcciones X & Y en función de la relación de velocidades para  $L/D = 1/8$ ,  $B = 180^\circ$ , diferentes valores de la fuerza de presurización y profundidad de la grieta del 12.5% [13].

Cruz en el 2015 [14] diseñó y construyó una chumacera que utiliza como fluido de trabajo un fluido magnetorreológico. Tomando como base la teoría de lubricación hidrodinámica descrita por Reynolds en cojinetes de contacto, desarrolló un modelo modificado para representar el comportamiento dinámico del fluido magnetorreológico en el intersticio formado por el muñón y el cojinete de la chumacera, donde el fluido magnetorreológico se simuló utilizando el modelo plástico de Bingham. De la solución del modelo se obtuvieron los parámetros de diseño básicos para dimensionar la chumacera, asimismo, se presenta la simulación de la distribución del campo magnético en la chumacera requerido para lograr el cambio en las propiedades del fluido y éste tenga influencia en el comportamiento vibratorio de un sistema rotodinámico.

Como se puede observar en el control de cojinetes hidrodinámicos, el procedimiento consiste en cambiar la presión del lubricante en el cojinete, esto con el fin de cambiar las fuerzas hidrodinámicas presentes en el fluido de la chumacera, estas fuerzas hidrodinámicas están representadas por los parámetros de rigidez y amortiguamiento en la película de aceite, los cuales son muy sensibles al cambio de presión, de temperatura y de velocidad, aumentando así la complejidad para diseñar estrategias de control. Lo más conveniente es determinar primero los valores que pueden tomar estos parámetros de rigidez y amortiguamiento.

### 2.3 Definición de los coeficientes rotodinámicos

La presurización externa es una manera de cambiar las propiedades de rigidez y amortiguamiento en la película de lubricante de una chumacera presurizada. A estos parámetros de rigidez y amortiguamiento comúnmente se los conoce como coeficientes rotodinámicos, los cuales de acuerdo con Lund [15], Stodola [16], Vance [17], Dimarogonas [18] y López [19], se definen por las derivadas parciales de las fuerzas hidrodinámicas generadas por la película de fluido, Ec. (2.8). En la Figura 2.11 se muestran los ocho coeficientes rotodinámicos presentes en una chumacera presurizada.

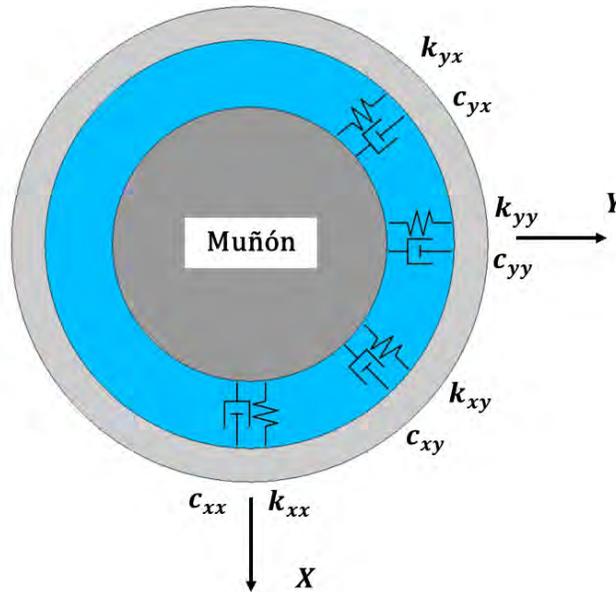


Figura 2.11: Coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada.

$$\begin{aligned}
 K_{xx} &= -\frac{\partial F_x}{\partial x} & K_{xy} &= -\frac{\partial F_x}{\partial y} \\
 K_{yx} &= -\frac{\partial F_y}{\partial x} & K_{yy} &= -\frac{\partial F_y}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

$$C_{xx} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \qquad C_{xy} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}$$

$$C_{yx} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \qquad C_{yy} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$$

Cuatro coeficientes son de rigidez y se denotan como  $(k_{ij})$ , mientras que los otros cuatro son de amortiguamiento denotados como  $(c_{ij})$ , donde el subíndice  $i$  indica la dirección de la fuerza producida. Asimismo, el subíndice  $j$  indica la dirección del movimiento que produce tal fuerza.

## 2.4 Identificación de los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada

Los coeficientes rotodinámicos de la película del fluido en chumaceras presurizadas se calculan por métodos analíticos, numéricos y también de forma experimental. El método analítico que se emplea evalúa las derivadas parciales de las componentes de fuerza alrededor de la posición de equilibrio [20], esto no es fácil de implementar de forma numérica. Cuando se obtienen numéricamente se emplea la diferenciación, este método tiene problemas para pequeños y grandes valores de excentricidad. La posición de equilibrio estático de una chumacera bajo condiciones de una carga unidireccional, como puede ser la que genera el peso del rotor, puede ser calculada al igualar las componentes de la carga con las fuerzas de presión integradas sobre la superficie del muñón donde existe película lubricante (ver Figura 2.12).

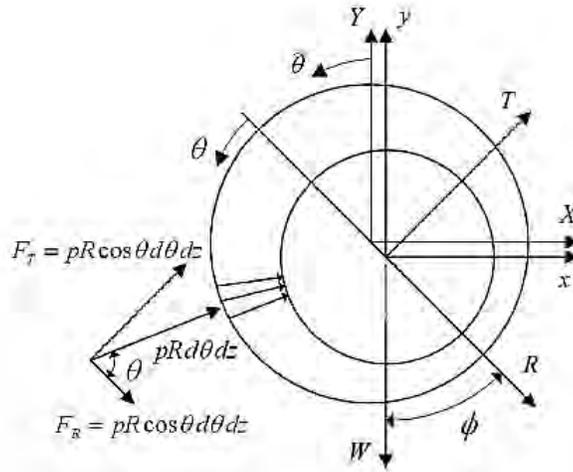


Figura 2.12: Fuerzas hidrodinámicas desarrolladas por el campo de presión [20].

$$F_r = F \cos \varphi = \int_0^l R \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \cos \theta d\theta dz$$

$$F_t = F \sin \varphi = \int_0^l R \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \sin \theta d\theta dz$$
(2.9)

Donde la presión de la película  $p$  es una función de las coordenadas de posición  $\theta$  y  $z$  donde la primera es el ángulo medido a partir de la línea de centros y la segunda es la coordenada axial. La presión  $p$  se determina resolviendo la ecuación de lubricación de Reynolds Ec. (2.10) que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, la cual es una simplificación de las ecuaciones de Navier Stokes para fluidos de tipo Newtonianos. La ecuación de Reynolds relaciona la presión del fluido en las chumaceras con las coordenadas circunferencial y axial, de tal forma que utilizando esta ecuación es posible obtener el campo de presiones. Cabe recalcar que no es posible resolver analíticamente esta ecuación, pero se pueden obtener aproximaciones dependiendo de la relación  $L/D$ ; la cual indica si la chumacera es corta o larga.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [(U_0 - U_1)h] + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right\} \quad (2.10)$$

Donde  $p = p(\theta, z)$  es la distribución de la presión;  $\theta$  y  $z$  son las coordenadas que localizan un punto en la película de lubricante;  $h$  es el espesor de la película local;  $\mu$  es la viscosidad del fluido;  $U_0$  y  $U_1$  son las velocidades tangenciales en los límites de las dos paredes de la película;  $\frac{\partial h}{\partial t}$  es la razón de cambio del espesor de película respecto al tiempo. Considerando una chumacera corta, la cual cumple la condición  $L/D < 1/2$  en el primer miembro de la Ec. (2.10) el primer término es pequeño respecto al segundo y así la ecuación de Reynolds para chumaceras cortas queda como:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [(U_0 - U_1)h] + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right\} \quad (2.11)$$

Una vez resuelta la Ec. (2.11) para  $p$  y sustituyendo este valor en la Ec. (2.9), se obtienen las componentes de la fuerza en las direcciones radial y tangencial, pero para resolver la ecuación (2.9) es necesario expresar las fuerzas hidrodinámicas de la chumacera en el sistema  $x - y$ , de manera que las fuerzas expresadas en el sistema  $r - t$  serán transformadas al sistema  $x - y$  mediante la siguiente matriz de rotación.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Después de multiplicar por la matriz de rotación correspondiente, se obtienen los coeficientes rotodinámicos clásicos en el sistema de coordenadas rectangulares.

Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio  
Soportado en Chumaceras Presurizadas

$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

Figura 2.13: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento adimensionales para chumaceras cortas en el sistema X-Y.

Gómez-Mancilla *et al.* [21] presentaron un estudio de chumaceras cortas que incluye el cálculo del campo de presión y las fuerzas generadas. Además, obtienen una expresión matemática para el espesor de la película del lubricante a partir de la cual se calculan o determinan los coeficientes rotodinámicos. De igual forma García *et al.* [22] determinaron ecuaciones para calcular los ocho coeficientes rotodinámicos adimensionales  $\tilde{k}_{ij}$  y  $\tilde{c}_{ij}$  en el sistema de coordenadas x-y (Figura 2.14), en una chumacera hidrodinámica cilíndrica plana corta. Dichas ecuaciones se obtuvieron integrando el campo de presión sobre el área de la chumacera. Los gradientes de presión se obtienen a partir de la ecuación general de Reynolds asumiendo que existen pequeños movimientos (perturbaciones) del centro del muñón en la chumacera.

Coeficientes de Rigidez $\tilde{k}_{ij}$ en el sistema X-Y	Coeficientes de amortiguamiento $\tilde{c}_{ij}$ en el sistema X-Y
$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

Figura 2.14: Coeficientes rotodinámicos adimensional [21].

Vargas [23] modela el comportamiento de la rigidez y el amortiguamiento de una chumacera corta presurizada con puerto de inyección puntual del fluido lubricante, obteniendo fórmulas analíticas de los coeficientes rotodinámicos. El ángulo de inyección se puede modificar de la

misma manera que la presión del fluido. Con este trabajo se pueden analizar efectos de la inestabilidad ocasionados por el fluido de la chumacera.

Como se mencionó anteriormente también se han realizado diferentes investigaciones para obtener los coeficientes rotodinámicos de un cojinete utilizando un enfoque experimental. Los especialistas en este campo prefieren el enfoque experimental y en la mayoría de los casos se apoyan de una fuerza de excitación externa para poder identificar los coeficientes rotodinámicos. Tiwari y Chakravarthy [24] desarrollaron dos algoritmos para identificar de manera simultánea los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada y para identificar el desbalance residual presente en un sistema rotor-cojinete. La primera metodología se llama método del impacto la cual consiste en utilizar la respuesta generada al aplicarse dos impactos sobre el rotor, uno sobre el eje vertical y otro en la dirección horizontal, dicha respuesta se transforma al dominio de la frecuencia y es usada para la estimación del desbalance y de los coeficientes rotodinámicos. La segunda metodología consiste en utilizar las fuerzas de desbalance conocidas para identificar los parámetros de desbalance residual y coeficientes rotodinámicos. Ambas metodologías son analizadas de forma numérica y experimental para diferentes velocidades de rotación. De forma numérica los valores identificados son bastantes parecidos a los valores asumidos de los mismos parámetros, tienen una desviación porcentual máxima alrededor del 10%. En la validación experimental la identificación del desbalance residual tiene una desviación porcentual máxima de la magnitud y ángulo de fase del desbalance de 44.5% y 33.5% respectivamente. Por otra parte, para validar los coeficientes rotodinámicos identificados, estos son sustituidos en un modelo numérico de la plataforma de prueba para generar respuestas simuladas, y comparar la respuesta experimental con la respuesta numérica obtenida con el modelo numérico y los coeficientes rotodinámicos identificados (ver Figura 2.15).

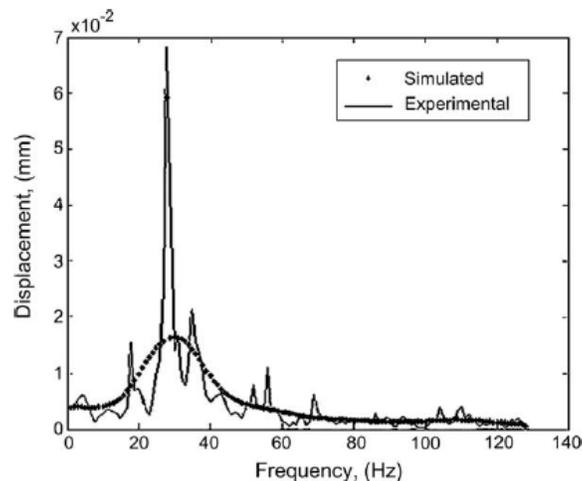


Figura 2.15: Variación de las respuestas simulada y experimental en la dirección vertical [24] .

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

R. Saldes-Arias y V. Meruane-Naranjo [25] determinaron los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento de un cojinete hidrodinámico de manera experimental mediante un método de modelamiento basado en algoritmos genéticos, esta identificación la realizaron para diferentes velocidades y diferentes presiones, comparando los resultados experimentales con un modelo fluidodinámico realizado con software CFD. El trabajo se basa en identificarlos mediante el análisis de la respuesta experimental causada por un desbalance del rotor y comparar dicha respuesta con un modelo numérico. Se obtienen los coeficientes rotodinámicos cuando se cumplen los criterios de error establecidos. Es decir, cuando la respuesta experimental y numérica son lo más parecidas se encuentran los coeficientes rotodinámicos. En la Figura 2.16 se muestra un esquema de funcionamiento del algoritmo empleado.

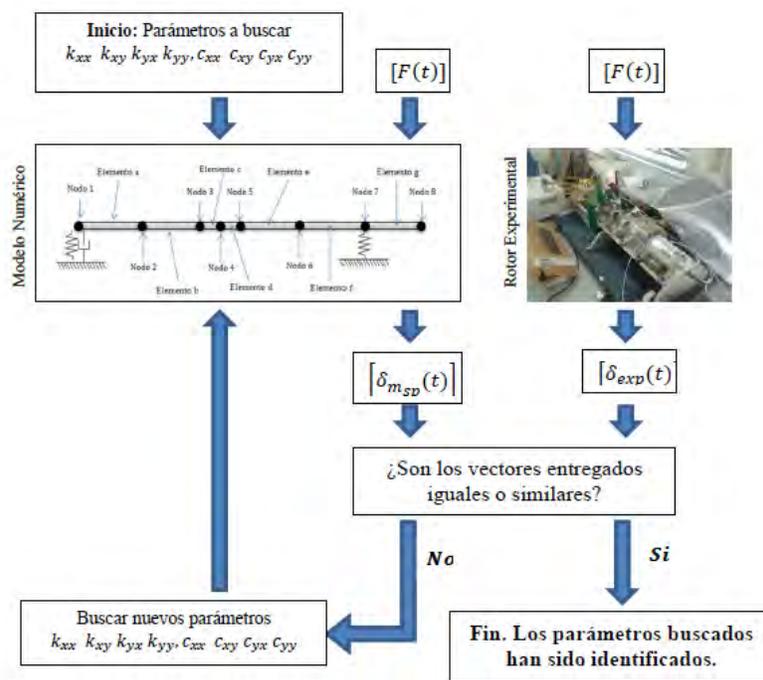


Figura 2.16: Esquema utilizado por el algoritmo de optimización para encontrar los parámetros buscados [25].

Para el modelo numérico se selecciona un sistema rotor-chumacera de múltiples grados de libertad, reportado en la literatura Lalanne y Ferraris [26]. En este sistema se modela el rotor mediante el método de elementos finitos, considerando un elemento tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo, dos traslaciones y dos rotaciones. Sin embargo, de acuerdo con el esquema presentado en la Figura 2.16 el algoritmo depende de la comparación de los desplazamientos numéricos con los experimentales y al no poder medir las rotaciones o pendientes nodales de manera experimental por la falta de sensores adecuados, solamente se compara un vector de desplazamientos únicamente con traslaciones.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Fang Han *et al.* [27] propusieron una metodología para identificar los parámetros del cojinete y el desbalance presente en un sistema rotor-cojinete de manera simultánea, dicha metodología se basa en una combinación entre el modelo sustituto de Kringin y algoritmos evolutivos (KSMEA). En este trabajo se pueden apreciar resultados numéricos y experimentales. Los autores realizaron tres simulaciones numéricas variando las muestras en el algoritmo desarrollado, la primera simulación sin considerar el efecto del ruido, la desviación porcentual obtenida es cero para todos los parámetros identificados respecto a los valores de referencia, en la segunda simulación considera el efecto del ruido (10% de ruido gaussiano) y utilizando una discretización de 30 elementos, la desviación porcentual va desde 0.2%-100 %, como se observa en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Parámetros identificados con 10% de ruido [27].

Variables	Valores de referencia	Valores identificados (desviación porcentual %)			
		40 muestras	70 muestras	100 muestras	200 muestras
$K_{xx}$ (MN/m)	50	50.3 (0.6)	50.1 (0.2)	50.1 (0.2)	50.6 (1.2)
$K_{yy}$ (MN/m)	70	70.8 (1.1)	70.5 (0.7)	70.5 (0.7)	70.6 (0.9)
$C_{xx}$ (KN s/mm)	0.5	1 (100)	0.482 (3.6)	0.482 (3.6)	0.38 (24)
$C_{yy}$ (KN s/mm)	0.7	1 (98.6)	0.467 (33.3)	0.467 (33.3)	0.01 (99)
$u$ (g mm)	200	201 (0.5)	201(0.5)	201 (0.5)	201 (0.5)
Tiempo (s)		196.21	231.32	272.27	321.99

En la parte experimental se utilizó un rotor Bently Nevada modelo RK4, mostrado en la Figura 2.17. De los resultados obtenidos que se muestran en la Tabla 2.2 se concluye que el identificador propuesto presenta resultados confiables.

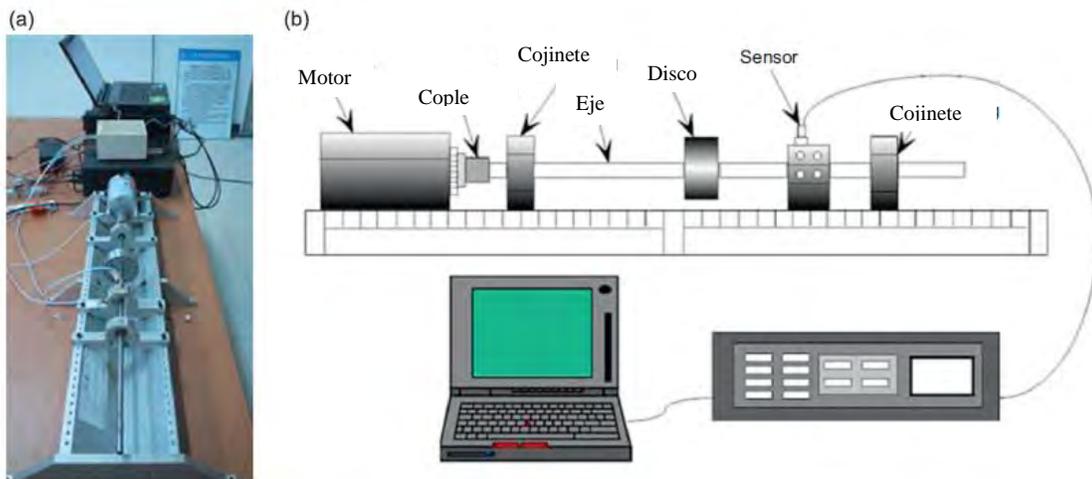


Figura 2.17: (a) banco de pruebas experimentales, (b) diagrama esquemático [27].

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Tabla 2.2: Parámetros identificados experimentalmente [27].

Variables	Valores de referencia	Valores identificados (desviación porcentual %)			
		40 muestras	70 muestras	100 muestras	200 muestras
$K_{xx}$ (MN/m)	28	29.3 (4.65)	27.5 (1.79)	28.4 (1.43)	28.3 (1.0)
$K_{yy}$ (MN/m)	32	100 (212.5)	36.5 (14.1)	29.1 (9.06)	30.5 (4.7)
$C_{xx}$ (KN s/mm)	-	0.1	0.25	1.59	1.23
$C_{yy}$ (KN s/mm)	-	0.1	5.58	10	5.07
$u$ (g mm)	80	80	80	80	80

Mao *et al.* [28] presentan un método inverso para identificar los coeficientes rotodinámicos de un sistema rotor cojinete deslizante con parámetros de desbalance. Dicha propuesta consiste en la aplicación del método de identificación de carga dinámica y el método de análisis de intervalos. La identificación de los parámetros dinámicos del cojinete puede ser formulada como la reconstrucción de la fuerza en la película de aceite con la respuesta de desbalance experimental. Este método de identificación de parámetros de un cojinete se basa en el método de identificación de carga dinámica y el método de análisis de intervalo. En este último, la respuesta en el dominio del tiempo se compone de la respuesta dinámica generada por la fuerza del desbalance del rotor y por la fuerza hidrodinámica de la película de fluido de los soportes. Entonces, si se conocen los parámetros de desbalance, se puede conocer por separado la respuesta dinámica de la película de aceite, la cual se utiliza como señal de identificación para el procedimiento inverso. Los autores realizaron una simulación numérica basándose en un modelo de múltiples grados de libertad utilizando el método de elementos finitos obteniendo buenos resultados con errores porcentuales bajos (1.07-8.88 %). El modelo utilizado es el siguiente:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F_e\} \quad (2.13)$$

Donde  $q$  es la respuesta del rotor,  $F_e$  es la fuerza de desbalance, definida por  $m$ ,  $e$  y fase.  $M$  es la matriz de masa,  $C$  y  $K$  consisten en el amortiguamiento y rigidez de la estructura ( $C_R$  y  $K_R$ ) y de los cojinetes deslizantes ( $C_B$  y  $K_B$ ).

$$\begin{aligned} [C] &= [C_R] + [C_B] \\ [K] &= [K_R] + [K_B] \end{aligned} \quad (2.14)$$

En un sistema rotor cojinete deslizante, el amortiguamiento y rigidez provienen de los cojinetes deslizantes y se pueden expresar por medio de las fuerzas de la película de aceite como sigue:

$$F = C_B \dot{q}_B + K q_B \quad (2.15)$$

Moviendo la fuerza de la película de aceite al lado derecho de la ecuación se obtiene:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C_R]\{\dot{q}\} + [K_R]\{q\} = \{F_e\} - \{F\} \quad (2.16)$$

De acuerdo con la Ec. (2.16) la respuesta  $q$  está compuesta por dos fuerzas, la fuerza de desbalance y la fuerza de la película de fluido, y de acuerdo con la Ec. (2.15) los parámetros

dinámicos pueden ser determinados únicamente por medio de las fuerzas de la película de fluido. Separando las fuerzas de la Ec. (2.16) se obtiene:

$$[M]\{\ddot{q}_B\} + [C_R]\{\dot{q}_B\} + [K_R]\{q_B\} = \{F\} \quad (2.17)$$

Donde

$$\{q_B\} = \{q\} - \{q_e\}$$

$q_B$ : respuesta sujeta solo a la fuerza de la película de aceite  $F$ .

$q_e$ : respuesta a la fuerza de desbalance  $F_e$ .

Se han desarrollado diversos trabajos de investigación enfocados en determinar los coeficientes rotodinámicos de un cojinete, sin importar su naturaleza. Tiwari y Chougale [29] desarrollaron un algoritmo para la estimación de parámetros dinámicos de cojinetes magnéticos activos y el desequilibrio residual del rotor; el algoritmo propuesto se basa en la técnica de ajuste de mínimos cuadrados en el dominio de la frecuencia. Por su parte, Xu *et al.* [30] presentaron un nuevo enfoque para identificar los parámetros dinámicos de los rodamientos magnéticos activos (AMBs) en un sistema de rotor flexible. Los AMB soportan rotores utilizando fuerza electromagnética en lugar de fuerzas mecánicas. La estimación de los parámetros dinámicos de rodamientos se basa en el método de actualización del modelo de matriz de transferencia. Los parámetros de rigidez y amortiguamiento de un rodamiento magnético activo se determinaron minimizando el error entre la respuesta al desbalance calculado mediante el enfoque de matriz de transferencia y la obtenida de forma experimental. M. Asadi Varnusfaderani *et al.* [31] desarrollaron un algoritmo para identificar los parámetros de los sistemas de rotor flexible equipados con cojinete magnetorreológico inteligente. Para la implementación del algoritmo de identificación, se utilizó el modelo de elementos finitos de un sistema de rotor flexible equipado con amortiguadores magnetorreológicos de película comprimida (MRSFD). Guenat y Schiffmann [32] construyeron un banco de pruebas para identificar experimentalmente los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del cojinete liso ranurado en espiga (HGJB) de un rotor perturbado por agitadores piezoeléctricos. Concluyeron que la teoría de la ranura estrecha (NGT) tiende a sobrestimar la rigidez y el amortiguamiento del HGJB. A la velocidad nominal, los valores de rigidez directa y las relaciones de amortiguamiento se midieron en un 38 % y un 27 % por debajo de la predicción de NGT.

Por otra parte, Chen *et al.* [33] propusieron un método novedoso para evitar problemas mal planteados en la identificación de coeficientes de cojinetes circulares basados en la respuesta de desequilibrio, para evitar el problema de matriz mal condicionada. Propusieron cuatro ecuaciones complementarias que son independientes de las ecuaciones dinámicas derivadas de la respuesta al desbalance. Dos ecuaciones para el amortiguamiento se derivan de la ecuación de Reynolds y otras dos para la rigidez se derivan de la expansión de Taylor de las

fuerzas estáticas que actúan sobre el rodamiento. Con estas cuatro ecuaciones, la matriz de identificación tiene un número de condición bajo, lo que permite una identificación de parámetros más estable y confiable. Recientemente Wang *et al.* [34] presentaron el desarrollo de un método para la identificación de manera simultánea del desbalance y de los parámetros dinámicos de los cojinetes en un sistema rotor-cojinetes. Una ventaja del método propuesto es que no se requieren de fuerzas externas para la identificación. El algoritmo propuesto para identificar los parámetros del sistema rotodinámico se basa en el método de Rayleigh. Este método, junto con el algoritmo de identificación, se examinaron exhaustivamente mediante simulaciones numéricas.

La maquinaria rotatoria en general juega un papel muy importante en la industria. Actualmente, se han realizado diferentes estudios sobre nuevas metodologías para el diagnóstico de fallas en maquinaria industrial [35], [36]. Recientemente, Ke Zhao *et al.* [37] diseñaron un nuevo marco de aprendizaje de transferencia llamado CWTWAE para resolver el problema del diagnóstico de fallas de rodamientos con dominios de múltiples fuentes. Existe una gran cantidad de información sobre rodamientos, cojinetes presurizados y métodos de identificación del desbalance y parámetros dinámicos de cojinetes [38], [39]. Colín *et al.* [40] propusieron una metodología para la identificación de la posición angular de la fuerza del desbalance, basada en un modelo simplificado matemático de dos grados de libertad de un rotor con momentos de inercia principales desiguales en la sección transversal del eje. Presentan esta metodología de forma numérica y experimental, obteniendo resultados alentadores. Por otra parte, Jianfei Yao *et al.* [41] propusieron una metodología integrada de expansión modal/problema inverso combinada con un procedimiento de optimización. Esta técnica permite identificar la ubicación axial del desequilibrio, su magnitud y fase. Esta técnica fue validada experimentalmente, presentando porcentajes de error aceptables. Lei Li *et al.* [42] usaron un modelo a escala y leyes de escala para identificar el desbalance para sistemas de rotor de tamaño completo. Probaron la metodología propuesta de forma numérica y experimental, concluyendo que es factible identificar los valores del desbalance del rotor con el método propuesto. Recientemente, Seung Yoon On *et al.* [43] desarrollaron una chumacera compuesta de almohadilla basculante utilizando una estructura de almohadilla híbrida compuesta por un revestimiento compuesto de fibra de carbono/epoxi y metal de respaldo para mejorar las características dinámicas del sistema de cojinete. Los parámetros de rigidez y amortiguamiento de la película de fluido del cojinete se determinaron mediante un análisis termo-hidrodinámico de lubricación utilizando el método de diferencias finitas.

Los parámetros de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes de película fluida cambian con la velocidad del rotor, la viscosidad que proporciona el tipo de aceite utilizado, los cambios de presión y los cambios de temperatura entre otros factores. Muhammad Imran Sadiq *et al.* [44] evaluaron bioaceites y aceites de base mineral en términos de rigidez y coeficientes de amortiguamiento para aplicaciones de cojinetes. El enfoque que utilizan es analítico y experimental, debido a que los coeficientes rotodinámicos se determinan con expresiones analíticas que son función de la relación de excentricidad, la cual se calcula utilizando la viscosidad dinámica del aceite. Esta viscosidad se obtiene experimentalmente para diferentes

temperaturas. Hussein Sayed y T. A. El-Sayed [45] realizaron una investigación sobre la dinámica y estabilidad de rotores soportados sobre cojinetes lisos. Este análisis se basó en los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de segundo orden presentes en los cojinetes. Utilizaron un modelo de rotor flexible apoyado en dos cojinetes lisos simétricos. Los parámetros de los cojinetes se identificaron mediante la solución directa de la ecuación de Reynolds y el método de perturbación de segundo orden dependiente del tiempo.

## 2.5 Identificación algebraica

Como se puede observar, todavía no existe un método en concreto para determinar los coeficientes rotodinámicos, ya que al haber diferentes tipos de chumaceras presurizadas se dificulta el análisis. Las investigaciones que se han hecho consideran chumaceras cortas con el fin de simplificar las ecuaciones. También tiene que ver la ubicación del puerto de inyección del fluido en la chumacera. Por otro lado, al utilizar algoritmos genéticos se incrementa el tiempo de cómputo dificultando así su implementación. Todo esto da la pauta para buscar una nueva metodología para calcular estos coeficientes generados en la película de fluido sin importar el tipo de chumacera. Actualmente, existe un método llamado identificación algebraica en línea reportado por Fliess y Sira Ramírez [46]-[47], el cual consiste en álgebra diferencial y cálculo operacional. Este método presenta buenas propiedades de robustez con respecto a perturbaciones, una de las características de la identificación algebraica es proporcionar relaciones de identificación completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema. Una comparación entre los métodos de identificación clásicos y este nuevo método se puede ver en la tesis de Juan Ramón Trapero [48].

José Gabriel Mendoza Larios [12] diseñó un disco de balanceo activo (DBA) para montarse en un rotor y cercano al disco principal (inercia desbalanceada). El objetivo del disco activo consiste en balancear el rotor en línea mediante una masa de balanceo, que se pueda mover en todas las posiciones angulares y radiales dentro del disco, por lo que se aplicó la identificación algebraica en línea para identificar la magnitud y posición angular del desbalance. De la misma manera se desarrolló un identificador algebraico de los parámetros atribuibles a los soportes. Utilizó un modelo de múltiples grados de libertad para realizar el identificador de parámetros de desbalance y el identificador de parámetros de los soportes; verificó el identificador mediante simulaciones numéricas obteniendo buenos resultados, convergiendo a los parámetros buscados en un tiempo menor a 0.1 s y con una desviación porcentual prácticamente de cero. Por otro lado, en la parte experimental no contó con los sensores adecuados para medir las rotaciones del sistema, por lo que las pendientes nodales se aproximaron de manera analítica en función de las traslaciones experimentales Ec. (2.18).

$$\begin{aligned}\theta_i &= \frac{\partial w_i}{\partial y} \cong \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta y} \\ \psi &= -\frac{\partial u_i}{\partial y} \cong -\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y}\end{aligned}\tag{2.18}$$

F. Beltrán-Carbajal *et al.* [49] propusieron un esquema de control activo al desbalance para un sistema rotodinámico de tres grados de libertad a velocidad angular variable. El control activo se basa en la compensación de las señales de fuerza de perturbación para balancear la maquinaria rotatoria. El control activo propuesto es del tipo proporcional derivativo (PD), lo que se busca con este tipo de control es estabilizar adecuadamente la respuesta del sistema rotor-cojinete, cancelar el desbalance y las fuerzas de inercia que actúan en el rotor. Debido a que el control propuesto requiere información de las fuerzas de perturbación  $\xi_x$  y  $\xi_y$  provocadas por el desbalance del rotor se proponen dos metodologías para calcular estas fuerzas.

- a) Identificación algebraica
- b) Observadores GPI

La primera metodología consiste en aplicar la técnica de identificación algebraica para diseñar un identificador algebraico para la identificación de la excentricidad del rotor, una vez determinada la excentricidad del rotor, se reconstruyen las fuerzas de perturbación. Donde  $\hat{\xi}_x, \hat{\xi}_y$  son las fuerzas identificadas debidas al desbalance y  $\hat{e}$  es la excentricidad del rotor identificada.

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_x &= m\hat{e}(\dot{\omega}\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi) \\ \hat{\xi}_y &= m\hat{e}(-\dot{\omega}\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi)\end{aligned}\tag{19}$$

Blanco-Ortega *et al.* [50] y [51] implementaron el uso de un disco activo para balancear activamente un sistema rotor-chumacera (ver Figura 2.18). Emplearon el método de identificación algebraica para estimar el parámetro de la excentricidad. El enfoque es bastante prometedor, la identificación algebraica es prácticamente instantánea, encuentra el parámetro de excentricidad en ( $t \ll 0.1s$ ) y es robusta con respecto a parámetros de incertidumbre, variaciones de frecuencia, errores de medición pequeños y ruido. De igual forma Beltrán-Carbajal *et al.* [52], [53], Arias *et al.* [54], Hernández [55] y Trapero [48] han utilizado la técnica de identificación algebraica y han llegado a las mismas conclusiones, que la identificación es prácticamente instantánea y que es robusta contra parámetros de incertidumbre, errores pequeños de medición y ruido, además de ser independiente de las condiciones iniciales del sistema.

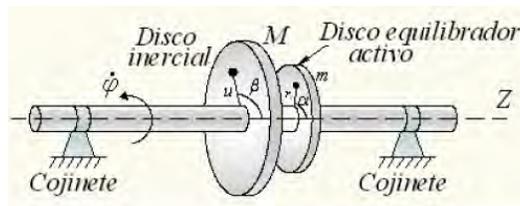


Figura 2.18: Sistema rotor-cojinetes con disco equilibrador activo.

J. Mendoza *et al.* [56] desarrollaron una metodología para balancear varios modos de vibración al mismo tiempo, utilizando discos de balanceo activo, los cuales requieren para su funcionamiento conocer el desbalance presente en el sistema. Una vez que se conoce la magnitud y posición del desbalance los discos colocan una masa de balanceo en una posición específica para contrarrestar el desbalance presente en el sistema rotor-cojinete. Para conocer la magnitud y posición angular del desbalance en el sistema rotor-cojinete, utilizaron el método de identificación algebraica en línea. Para esto, desarrollaron un modelo matemático de un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad a velocidad variable mediante el método de elementos finitos. El eje se modeló con un elemento finito tipo viga de cuatro grados de libertad por nodo, dos desplazamientos y dos rotaciones. Analizaron el comportamiento del identificador algebraico propuesto para identificar el desbalance, a través del tiempo y para diferentes desbalances ubicados en distintos nodos del rotor, tomando como dato de entrada la respuesta de vibración obtenida de la simulación numérica del sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad, con diferentes rampas de excitación de tipo lineal. De los resultados obtenidos en estas simulaciones demostraron que el identificador converge rápidamente al valor buscado y se mantiene constante en el tiempo; de igual forma, el identificador no es afectado por la velocidad de la rampa de excitación.

Recientemente S. Landa [57] determinó los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada de manera experimental, empleando el método de identificación algebraica, para el desarrollo del identificador de los coeficientes rotodinámicos. Tomó como base un modelo rotor chumacera de dos grados de libertad, e identificó los coeficientes directos a diferente velocidad y presión en la chumacera. Presentó sus resultados en forma de gráficas en función de la velocidad y los validó con la ayuda de un modelo numérico del sistema rotor-chumacera, obteniendo desviaciones porcentuales menor a 2%. Sin embargo, no identificó los coeficientes cruzados, debido al modelo utilizado para el desarrollo del identificador. Propuso utilizar como base para el identificador un modelo más robusto con el fin de poder obtener los ocho coeficientes rotodinámicos.

Mendoza Larios G. *et al.* [58], en un enfoque numérico, desarrollaron un estimador de los coeficientes dinámicos del rotor mediante la aplicación de identificación algebraica, en el que se utilizó el método de los elementos finitos para obtener numéricamente la respuesta del sistema rotatorio utilizando un modelo matemático de un sistema rotor-cojinetes de múltiples grados de libertad. El identificador propuesto requiere el vector de desplazamientos nodales por completo del nodo en donde se encuentra el soporte y de dos nodos adyacentes al soporte. Esto significa que utiliza los desplazamientos laterales y las pendientes nodales. Este trabajo fue completamente numérico ya que la complejidad de las mediciones experimentales de las pendientes nodales complica la implementación del método. Recientemente, Baltazar Tadeo L. *et al.* [59] utilizaron el método de identificación algebraica para determinar la magnitud y la posición angular del desbalance en un sistema de cojinetes de rotor asimétrico, tomando como base para el identificador algebraico un modelo matemático de un sistema de cojinetes

de rotor asimétrico de múltiples grados de libertad utilizando unos discos de equilibrio activos. Probaron el identificador propuesto de forma numérica y experimental, demostrando que es posible reducir las amplitudes de vibración en condiciones de resonancia de un rotor asimétrico en más del 95 %. Por otra parte, Landa-Damas S. *et al.* [60] aplicaron la identificación algebraica a un modelo simplificado de un sistema rotor-cojinete de dos grados de libertad con el objetivo de estimar los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada. Los resultados obtenidos demuestran la eficacia de la metodología propuesta y que es factible su implementación de manera experimental.

## 2.6 Conclusión del estado del arte

De acuerdo con la revisión del estado del arte, se puede notar la importancia que tiene la maquinaria rotatoria en la industria, y que hay una vasta literatura sobre monitoreo de fallas en maquinaria industrial. De igual forma, se observa que esta maquinaria rotatoria está soportada en diferentes tipos de cojinetes como se mencionó anteriormente y que estos cojinetes juegan un papel muy importante. Los cojinetes más utilizados son los presurizados debido a sus características de trabajar a altas velocidades, resistir cargas altas y tener muy poco desgaste. Estos cojinetes se clasifican de acuerdo con la manera en que se presurizan, como se mencionó anteriormente. El muñón y la parte fija del cojinete están separados por una película de fluido la cual es la responsable que se generen fuerzas hidrodinámicas dentro del cojinete. Las derivadas parciales de estas fuerzas hidrodinámicas generadas por la película de fluido dan origen a los coeficientes rotodinámicos. Cuatro coeficientes son de rigidez y se denotan como  $(k_{ij})$ , mientras que los otros cuatro son de amortiguamiento denotados como  $(c_{ij})$ , donde el subíndice  $i$  indica la dirección de la fuerza producida, asimismo, el subíndice  $j$  indica la dirección del movimiento que produce tal fuerza. Cambiando estos valores se puede cambiar la dinámica del sistema rotor-chumacera presurizada y así ayudar al control de vibraciones. Sin embargo, en la actualidad no existe alguna metodología en concreto para determinar los coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada. Se puede notar que ya se ha utilizado la identificación algebraica en el área de rotodinámica para la determinación de parámetros, obteniendo buenos resultados, por esta razón es que resulta factible la implementación de la metodología de identificación algebraica en línea, la cual de acuerdo con el estado del arte presenta grandes propiedades de robustez contra perturbaciones y además tiene la principal característica de ser independiente de las condiciones iniciales del sistema. Por otra parte, resulta interesante que en algunas investigaciones presentadas en el estado del arte no se pudieron determinar de manera experimental las pendientes nodales, afectando así el resultado de las investigaciones.

# CAPÍTULO 3

## MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los elementos teóricos necesarios para el desarrollo y análisis de la ecuación general de movimiento, que rige el comportamiento dinámico de un sistema rotor-cojinete. Posteriormente se utilizan las ecuaciones deducidas para la implementación del modelo de múltiples grados de libertad mediante el método de elemento finito y por último se presenta el desarrollo y validación de una plataforma computacional en el software Matlab.

### 3.1 Características de los elementos del sistema rotor-chumacera

Los elementos básicos de un sistema rotor-cojinete son: el disco, el eje, los rodamientos y los sellos [26]. Debido a que las masas de desbalance no se pueden evitar completamente, también se deben considerar en estos sistemas. Para caracterizar los elementos del rotor como el disco y la masa de desbalance, es necesario determinar las expresiones para la energía cinética. En lo referente al eje, además de la energía cinética se requiere el conocimiento de la energía de deformación. A partir del principio de los trabajos virtuales se obtienen las fuerzas derivadas de los rodamientos o los sellos que actúan sobre el eje.

Las ecuaciones generales del sistema se obtienen a partir de los siguientes pasos [26]:

1. Se determina la energía cinética  $T$ , la energía de deformación  $U$ , y el trabajo virtual de las fuerzas externas para los elementos que conforman el sistema.
2. Se aplica la ecuación de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento para cada uno de los elementos.

La ecuación de Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F q_i \quad (3.1)$$

donde  $i(1 \leq i \leq N_u)$  es el número de grados de libertad del sistema,  $q_i$  son las coordenadas generalizadas,  $F q_i$  son las fuerzas generalizadas, y  $\dot{q}_i$  indica diferenciación con respecto al tiempo  $t$ .

### 3.1.1 El disco

El disco se asume rígido, y su caracterización se lleva a cabo al considerar únicamente la energía cinética, tomando como base los marcos de referencia que se muestran en la Figura 3.1.

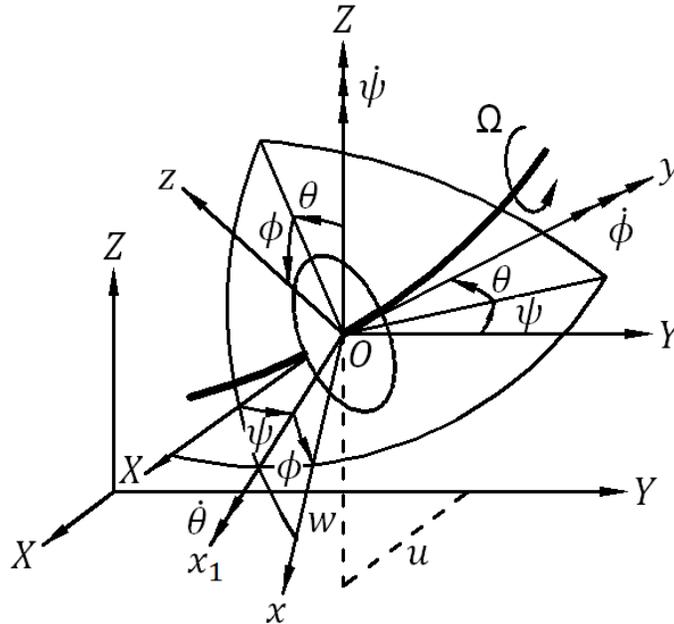


Figura 3.1: Marcos de referencia del disco sobre una flecha giratoria [26].

El vector de velocidad angular instantánea respecto al marco de referencia  $xyz$  está dado por la expresión:

$$\omega_{R/R_o} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \quad (3.2)$$

donde  $Z$ ,  $x_1$  y  $y$  son vectores unitarios a lo largo de los ejes  $Z$ ,  $x_1$  y  $y$ . El cálculo de la energía cinética del disco alrededor de su centro de masa  $O$ , se lleva a cabo utilizando el marco de referencia  $R$ . Se observa de la Ec. (3.2) que el vector de velocidad angular instantánea  $\omega_{R/R_o}$ , está en función de las coordenadas de tres diferentes marcos de referencia, entre ellos el sistema del cuerpo. Por lo tanto, se deben determinar las relaciones correspondientes para que el vector  $\omega_{R/R_o}$ , se defina únicamente en las coordenadas del sistema fijo al cuerpo. Estas relaciones se determinan a partir de transformaciones de rotación, entre los sistemas coordenados. Después de realizar las transformaciones correspondientes, el vector de velocidad angular respecto al marco de referencia  $R$  se expresa como:

$$\omega_{R/R_o}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \operatorname{sen} \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La masa del disco es  $M_D$  y sus direcciones principales de inercia son  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Por lo tanto, el tensor de inercia en  $O$  es:

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde  $I_D$  es el momento de inercia del disco.

Por lo tanto, la ecuación para el cálculo de la energía cinética del disco es:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.5)$$

La ecuación anterior se puede simplificar si consideramos un disco simétrico, es decir, ( $I_{Dx} = I_{Dz}$ ). Adicionalmente, se considera que los ángulos de rotación  $\theta$  y  $\psi$  son pequeños y que el disco gira a una velocidad angular constante  $\dot{\phi} = \Omega$ . De esta forma, a partir de estos criterios la Ec. (3.5) se convierte en:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.6)$$

De la Ec. (3.6), el término  $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$  es constante y representa la energía del disco girando a una velocidad  $\Omega$ . Por otro lado, el último término  $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ , representa los efectos giroscópicos (también llamado efecto de Coriolis).

### 3.1.2 El eje

El eje se representa como una viga con sección circular constante y su caracterización se realiza mediante el cálculo de las energías; cinética y de deformación.

### 3.1.3 Energía cinética

La ecuación general de la energía cinética de un eje de longitud  $L$  se expresa como:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \psi \theta dy \quad (3.7)$$

donde  $\rho$  es densidad del material,  $S$  es el área de la sección transversal de la viga,  $I$  es el momento de inercia de área de la sección transversal del eje a lo largo del eje neutro. La primera integral, es la expresión clásica de la energía cinética de un eje en flexión; la segunda integral, es el efecto secundario de la inercia rotacional (de acuerdo con la viga de Timoshenko); y la última integral representa el efecto giroscópico (Coriolis).

### 3.1.4 Energía de deformación

La energía de deformación del eje se obtiene tomando como base el sistema coordenado que se muestra en la Figura 3.2. De la Figura,  $C$  representa el centro geométrico del eje,  $B(x, z)$  es un punto arbitrario sobre la sección transversal y  $u^*$ ,  $w^*$  son los componentes del desplazamiento del centro geométrico respecto a los ejes inerciales  $x$  y  $z$ , respectivamente. Considerando la deformación longitudinal del punto  $B$  (Figura 3.2), la ecuación general de la energía de deformación se expresa como:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.8)$$

Donde  $E$  es el modulo de Young,  $I_x$  e  $I_z$  son los momentos de inercia respecto a los ejes  $z$  y  $x$  respectivamente.

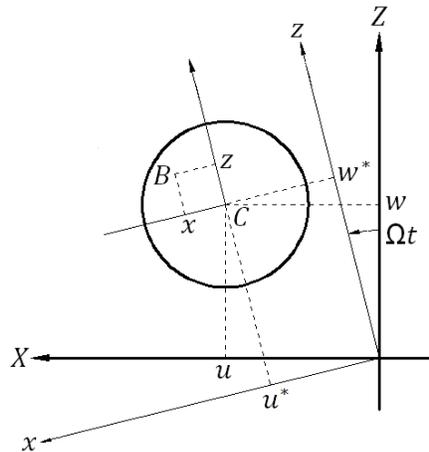


Figura 3.2: Coordenadas del centro geométrico  $C$  y un punto arbitrario  $B$  en el eje [26].

Para el caso de un eje sujeto a una fuerza axial constante  $F_0$ , la expresión de la energía de deformación está dada como:

$$U_2 = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la energía de deformación total del eje es igual a la suma de  $U_1 + U_2$

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.10)$$

Con el propósito de evitar términos periódicos dependientes del tiempo a causa de las propiedades de los soportes, la energía de deformación del eje se expresa como una función de  $u$  y  $w$ , que son las componentes de los desplazamientos en  $R_o$ . Para este fin se utilizan las siguientes relaciones:

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sen \Omega t \quad (3.11)$$

$$w^* = u \sen \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.12)$$

Las relaciones anteriores se pueden deducir de la Figura 3.2. Sustituyendo las Ecs. (3.11) y (3.12) en la Ec. (3.10) se obtiene

$$\begin{aligned} U_s = & \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sen \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + I_x \left( \sen \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \\ & + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \quad (3.13)$$

Finalmente, para el caso más común de la energía de deformación para un eje simétrico (es decir,  $I_x = I_z = I$ ) la energía de deformación se convierte en:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.14)$$

### 3.1.5 Soportes

Para la caracterización de los soportes, se considera que los términos de rigidez  $k$  y amortiguamiento  $c$  se conocen, ver Figura. 3.3.

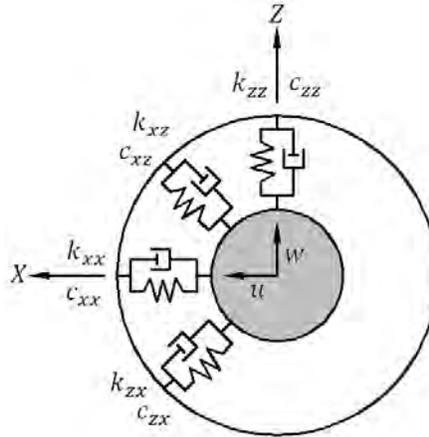


Figura 3.3: Rigidez y amortiguamiento de los soportes [26].

El trabajo virtual  $\delta W$  que realizan las fuerzas derivadas de las propiedades de los soportes que actúan sobre el eje, se determina de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w \\ & -c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \end{aligned} \quad (3.15)$$

La Ec. (3.15) también se puede escribir como:

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (3.16)$$

donde  $F_u$  y  $F_w$  son las componentes de la fuerza generalizada. En forma matricial, las Ecs. (3.15) y (3.16) se expresan como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.1.6 Masa de desbalance

El desbalance se define mediante una masa  $m_u$  localizada a una distancia  $d$  a partir del centro geométrico del eje.

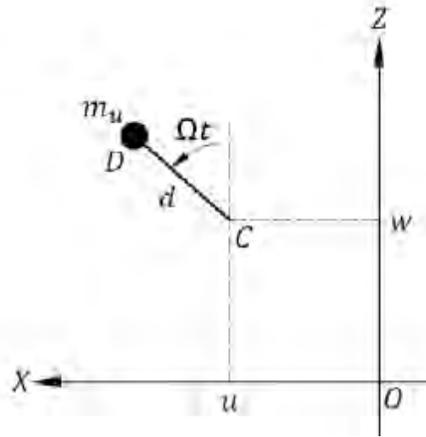


Figura 3.4: Masa de desbalance [26].

Del diagrama de la Figura. 3.4, las coordenadas de la masa de desbalance  $m_u$  con respecto a los ejes inerciales  $X$  y  $Z$ , se expresan como:

$$OD = \begin{bmatrix} u + d \operatorname{sen} \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \operatorname{cos} \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Si derivamos la Ec. (3.18) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$V = \frac{dOD}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega \operatorname{cos} \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \operatorname{sen} \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Entonces, la expresión matemática para la energía cinética a causa del desbalance está dada por:

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \operatorname{cos} \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \operatorname{sen} \Omega t) \quad (3.20)$$

En la Ec. (3.20), la masa  $m_u$  se considera pequeña con respecto a la masa del eje, de esta forma, la expresión para la energía cinética se escribe como:

$$T_u \cong m_u \Omega d (\dot{u} \operatorname{cos} \Omega t - \dot{w} \operatorname{sen} \Omega t) \quad (3.21)$$

De la aplicación de la ecuación de Lagrange a la relación anterior, se obtiene el vector de fuerza centrífuga.

### 3.2 Modelado del sistema rotor-cojinete por el método del elemento finito

En esta sección, se presenta la formulación matemática por el método del elemento finito, para cada uno de los elementos del sistema rotor-cojinete. El eje se modela utilizando un elemento finito tipo viga, el cual tiene dos nodos y cuatro grados de libertad por cada nodo.

#### 3.2.1 Modelado del disco

En un nodo dado del rotor se tienen cuatro grados de libertad: dos desplazamientos  $u$  y  $w$ , y dos rotaciones  $\theta$  y  $\psi$  alrededor de los ejes  $X$  y  $Z$ , respectivamente. Por lo tanto, el vector de desplazamiento nodal  $\delta$  del centro del disco se expresa como:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (3.22)$$

Donde el superíndice “ $T$ ” denota transpuesta. Aplicando la ecuación de Lagrange (3.1) a la Ec. (3.6) para la energía cinética del disco, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Donde la primera matriz del miembro derecho de la Ec. (3.23), es la clásica matriz de masa, mientras que la segunda, es la matriz de efectos giroscópicos (Coriolis).

#### 3.2.2 Modelado del eje

El eje se modela utilizando un elemento finito tipo viga, con una sección transversal circular constante. El elemento finito utilizado en la discretización tiene dos nodos, cada uno con cuatro grados de libertad que en conjunto suman un total de ocho por elemento (ver Figura 3.5), los cuales representan cuatro desplazamientos laterales y cuatro rotaciones (flexiones de la viga).

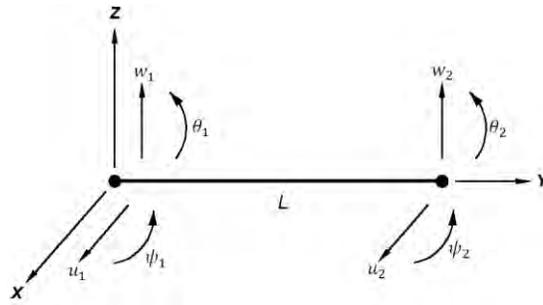


Figura 3.5: Elemento finito del eje [26].

Las relaciones entre los desplazamientos y las rotaciones son:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.24)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.25)$$

Mientras que el vector de desplazamiento nodal se define como:

$$\delta = [u_1, w_1, \psi_1, \theta_1, u_2, w_2, \psi_2, \theta_2]^T \quad (3.26)$$

que incluye los desplazamientos correspondientes a los movimientos en las direcciones X y Z; los cuales son:

$$\delta_u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (3.27)$$

$$\delta_w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (3.28)$$

Al derivar las Ecs. (3.27) y (3.28) con respecto al tiempo, se obtienen los vectores de velocidad  $\dot{\delta}$  y aceleración  $\ddot{\delta}$  respectivamente.

El elemento finito se construye a partir de:

$$u = N_1(y)\delta_u \quad (3.29)$$

$$w = N_2(y)\delta_w \quad (3.30)$$

Donde  $N_1(y)$  y  $N_2(y)$ , son las funciones de desplazamiento (funciones de forma o de interpolación) típicas de una viga en flexión, las cuales se determinan por:

$$N_1(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} ; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} ; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} ; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.31)$$

$$N_2(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} ; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} ; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} ; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.32)$$

La energía cinética del eje se obtiene de la Ec. (3.7) al sustituir las Ecs. (3.29) y (3.30)

$$T = \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w}] dy \quad (3.33)$$

$$+ \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy$$

$$- 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \Omega^2$$

Ahora, se sustituyen las funciones de desplazamiento, Ecs. (3.31) y (3.32) y sus derivadas en la Ec. (3.33). Posteriormente, después de realizar las integraciones correspondientes, la ecuación para la energía cinética del eje se convierte en:

$$T = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} \quad (3.34)$$

$$+ \Omega \delta \dot{u}^T M_5 \delta w + \rho I L \Omega^2$$

donde las matrices  $M_1$  y  $M_2$  son las matrices de masa,  $M_3$  y  $M_4$  representan la influencia del efecto secundario de la inercia rotacional, y  $M_5$  proporciona los efectos giroscópicos. De la aplicación de la ecuación de Lagrange (3.1) a la Ec. (3.34), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = [M_T + M_R] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} \quad (3.35)$$

En la cual,  $M_T$  y  $M_R$  se obtienen respectivamente de las matrices  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ ,  $M_4$  y la matriz  $C$  de  $M_5$ . Aquí,  $M_T$  y  $M_R$  representan las matrices de masa consistentes para los movimientos de traslación y rotación respectivamente, las cuales están dadas por:

$$[M_T] = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$[M_R] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

donde  $\rho$  es la densidad volumétrica del material,  $S$  es el área de la sección transversal,  $L$  es la longitud del elemento finito e  $I$  es el segundo momento de área del elemento.

Finalmente,  $C$  representa la matriz de efectos giroscópicos, la cual está en función de la velocidad de rotación del rotor. Esta matriz se define como:

$$[C] = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad de rotación.

La energía de deformación del eje se obtiene a partir de la Ec. (3.14) al sustituir las Ecs. (3.29) y (3.30), por lo tanto, la ecuación para la energía de deformación se convierte en:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (3.39)$$

$$+ \frac{Fo}{2} \int_0^L \left[ \delta u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy$$

Ahora se sustituyen las Ecs. (3.31) y (3.32) así como sus derivadas, y posteriormente, después de realizar las integraciones correspondientes,  $U_s$  se convierte en:

$$U_s = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_4 \delta w \quad (3.40)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son las matrices clásicas de rigidez, y  $K_3$  y  $K_4$  son las matrices a causa de las fuerzas axiales. Aplicando la ecuación de Lagrange (3.1) a la Ec. (3.40) se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = K \delta \quad (3.41)$$

Con

$$K = K_C + K_F \quad (3.42)$$

donde  $K_C$  viene de  $K_1$ ,  $K_2$  y de la consideración del efecto cortante en el elemento viga, y  $K_F$  viene de las matrices  $K_3$  y  $K_4$ .

Las expresiones para las matrices son las siguientes:

$$[K_C] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L(2-a)L^2 & 0 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L(4+a)L^2 & 0 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material y  $a$  es el efecto cortante, éste último se determina como:

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (3.44)$$

Con el módulo cortante como

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.45)$$

donde  $\nu$  es la relación de Poisson del material.

### 3.2.3 Modelado de los soportes

Las expresiones de trabajo virtual para los soportes están dadas por las Ecs. (3.15) y (3.16), las cuales se expresan como:

$$F_u = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (3.46)$$

$$F_w = -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \quad (3.47)$$

Como  $F_\theta = F_\psi = 0$ , el vector de fuerzas que actúan sobre el eje es:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

En la Ec. (3.48), la primera matriz es la matriz de rigidez de los soportes y la segunda es la matriz de amortiguamiento viscoso. Estas matrices generalmente son asimétricas, y los términos de las matrices pueden variar significativamente como una función de la velocidad de rotación.

### 3.2.4 Modelado de la masa de desbalance

Aplicando la ecuación de Lagrange (3.1) a la Ec. (3.21), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \text{sen } \Omega t \\ \text{cos } \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

El vector de desplazamiento se expresa como:

$$\delta = [u, w]^T \quad (3.50)$$

Por lo tanto, las fuerzas producidas por una masa de desbalance localizada en una posición angular  $\alpha$ , con respecto al eje Z en el tiempo  $t = 0$ , se expresan como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = F_2 \text{sen } \Omega t + F_3 \text{cos } \Omega t \quad (3.51)$$

donde  $F_2$  y  $F_3$  son las fuerzas producidas por la masa de desbalance en los ejes X y Z, respectivamente, las cuales se definen como:

$$\begin{aligned} F_2 &= m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \text{cos } \alpha \\ -\text{sen } \alpha \end{bmatrix} \\ F_3 &= m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

### 3.2.5 Ecuación general del sistema rotor-cojinete

Cuando la ecuación de Lagrange se aplica al modelado de un rotor, la ecuación general de movimiento de un sistema rotodinámico se expresa como:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C(\Omega)]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = F(t) \quad (3.53)$$

Con

$$\begin{aligned} F(t) &= F_1 + F_2 \text{sen } \Omega t + F_3 \text{cos } \Omega t + F_4 \text{sen } s\Omega t + F_5 \text{cos } s\Omega t \\ &\quad + F_6 \text{sen } \omega t + F_7 \text{cos } \omega t \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde  $\delta$  es el vector que contiene todos los desplazamientos nodales;  $M$  es la matriz de masa del sistema,  $C$  es la matriz de amortiguamiento, que incluye los efectos giroscópicos en función de la velocidad de rotación,  $K$  es la matriz de rigidez y  $F(t)$ , el vector de fuerza, que puede incluir desde una fuerza constante  $F_1$ , hasta fuerzas generadas por una masa de desbalance ( $F_2$  y  $F_3$ ), o fuerzas asíncronas ( $F_4$  y  $F_5$ ), y fuerzas armónicas fijas en el espacio ( $F_6$  y  $F_7$ ).

### 3.3 Solución de la ecuación general del sistema

La Ec. (3.53) es la ecuación general de movimiento del sistema rotor-cojinete, a partir de su solución se obtiene la siguiente información:

- El diagrama de Campbell, que muestra las frecuencias naturales del sistema como una función de la velocidad de rotación. Las formas modales y las zonas de inestabilidad. Esto se lleva a cabo, al solucionar la parte homogénea de la Ec. (3.53).
- Al solucionar la Ecuación particular de (3.53), se obtienen los efectos de las fuerzas de excitación sobre el sistema: masa de desbalance, fuerza asíncrona o fuerza armónica fija en el espacio.

La Ec. (3.53) se puede solucionar mediante el llamado método directo, el cual consiste en solucionar el sistema general de ecuaciones tomando incrementos en la velocidad de rotación, cabe señalarse que este método no disminuye el número de ecuaciones del sistema, lo que incrementa el tiempo de cómputo, cuando se seleccionan incrementos pequeños para la velocidad de rotación. Otro método de solución es el llamado método pseudo-modal, el cual reduce el número de ecuaciones a solucionar, debido a que desacopla los modos de vibración del sistema, teniendo como resultado un menor tiempo de cómputo.

#### 3.3.1 El método directo

De acuerdo con Lalanne y Ferraris [26] el procedimiento del método directo es el siguiente, primero se soluciona la parte homogénea de la ecuación de movimiento de un sistema rotor-cojinete, Ec. 3.35, con el fin de obtener las frecuencias naturales, el diagrama de Campbell y las formas modales.

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\delta = 0 \quad (3.55)$$

La solución de la ecuación es de forma exponencial

$$\delta = \Delta e^{rt} \quad (3.56)$$

Sustituyendo la Ec. (3.56) en (3.55), se obtiene

$$(r^2[M] + r[C] + [K])\Delta = 0 \quad (3.57)$$

Usando la identidad

$$[M]\Delta = [M]\Delta \quad (3.58)$$

Se obtiene la siguiente relación

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\Delta \\ \Delta \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [-K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\Delta \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

La Ec. (3.59) se puede reescribir como

$$AX = \lambda BX \quad (3.60)$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$X = \begin{bmatrix} r\Delta \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\lambda = \frac{1}{r} \quad (3.64)$$

De la solución de la Ec. (3.59) se obtienen los eigenvalores y eigenvectores del sistema rotodinámico, los cuales tienen una estructura en su forma compleja.

### Eigenvalores

$$r_i = -\frac{\alpha_i \omega_i}{\sqrt{1-\alpha_i^2}} \pm j\omega_i \quad (3.65)$$

### Eigenvectores

$$\Delta_i = R_i \pm jI_i \quad (3.66)$$

Donde  $\omega_i$  es la frecuencia natural no amortiguada de cada modo de vibración y  $\alpha_i$  es el factor de amortiguamiento modal.

Por otra parte, para calcular la respuesta del sistema rotodinámico en estado estable, considerando una fuerza centrífuga de desbalance Ec. (3.57), se sigue el siguiente procedimiento.

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\delta = \{F\} \quad (3.67)$$

Donde

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$F_1 = m_d e \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ -\text{sen}\varphi \end{Bmatrix}$$

$$F_2 = m_d e \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{Bmatrix}$$

Se agrupan términos afectados por las funciones  $\text{sen}\varphi$  y  $\cos\varphi$  obteniendo.

$$\begin{bmatrix} [K] - \Omega^2[M] & -\Omega[C] \\ \Omega[C] & [K] - \Omega^2[M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

La Ec. (3.68) se soluciona para diferentes valores de velocidad angular del rotor, calculando así en cada velocidad los desplazamientos que están dados por el vector  $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ .

### 3.3.2 El método pseudo-modal

El método pseudo-modal [26] permite una gran reducción en el tiempo de cómputo en relación con el método directo. La ventaja de este método radica en que los resultados obtenidos son muy cercanos a los arrojados por el método directo. Además, aquí es posible introducir en las ecuaciones amortiguamientos modales, lo cual es de interés cuando el amortiguamiento es bajo, el mecanismo de amortiguamiento no se conoce bien y los modos están razonablemente desacoplados. Para la aplicación de este método, primero se define una base modal a partir de la solución de la siguiente ecuación:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K^*]\delta = 0 \quad (3.69)$$

donde  $[M]$  es la matriz de masa;  $[K^*]$  es la matriz de rigidez que se obtiene a partir de  $[K]$ , en la cual los términos cruzados de rigidez introducidos por los soportes tales como,  $k_{xx}$  y  $k_{zz}$  no se consideran. Al resolver la Ec. 3.69, se forma una matriz de eigenvectores (matriz de modos de vibración) de la forma:

$$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n] \quad (3.70)$$

Al tomar como base la Ec. (3.70), se propone un nuevo conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\delta = \phi p \quad (3.71)$$

De la sustitución de la Ec. (3.71) y sus derivadas correspondientes en la Ec. (3.53), y pre-multiplicando por  $\phi^T$  se tiene:

$$\phi^T [M] \phi \{\ddot{p}\} + \phi^T [C(\Omega)] \phi \{\dot{p}\} + \phi^T [K] \phi \{p\} = \phi^T F(t) \quad (3.72)$$

De forma análoga a un sistema de un solo grado de libertad, el coeficiente de amortiguamiento para cada modo de vibración se obtiene a partir de:

$$c_i = 2\xi_i \sqrt{\phi_i^T [K] \phi_i \cdot \phi_i^T [M] \phi_i} \quad (3.73)$$

donde  $\xi_i$  es el factor de amortiguamiento para el modo  $i$ .

Los coeficientes de amortiguamiento obtenidos de la Ec. (3.73) se agregan a la diagonal de la matriz  $\phi^T [C(\Omega)] \phi$  de la Ec. (3.72). Para el cálculo de las frecuencias naturales, el diagrama de Campbell y los eigenvectores, se resuelve la Ec. (3.72) en su forma homogénea, es decir sin fuerzas externas:

$$\phi^T [M] \phi \{\ddot{p}\} + \phi^T [C(\Omega)] \phi \{\dot{p}\} + \phi^T [K] \phi \{p\} = 0 \quad (3.74)$$

Se propone una solución de tipo exponencial

$$p = P e^{rt} \quad (3.75)$$

De la sustitución de la Ec. (3.75), así como sus derivadas correspondientes en la Ec. (3.74) se obtiene la siguiente relación matemática:

$$(r^2 [M_{sm}] + r [C_{sm}(\Omega)] + [K_{sm}]) P = 0 \quad (3.76)$$

Donde

$$[M_{sm}] = \phi^T [M] \phi = \text{diag}\{\phi_i^T [M] \phi_i\} \quad (3.77)$$

$$[K_{sm}] = \phi^T [K] \phi = \text{diag}\{\phi_i^T [K^*] \phi_i\} + \phi^T [K^{**}] \phi \quad (3.78)$$

$$[K^{**}] = [K] - [K^*] \quad (3.79)$$

$$[C_{sm}(\Omega)] = \phi^T [C(\Omega)] \phi = \text{diag}\{c_i\} \quad (3.80)$$

Por otra parte, la Ec. (3.76) se puede describir como:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ [-K_{sm}^{-1}][M_{sm}] & [-K_{sm}^{-1}][C_{sm}(\Omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^P \\ P \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r^P \\ P \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

De la solución de la Ec. (3.81), los eigenvalores obtenidos son del tipo  $-\xi i \omega i (1 - \xi i 2)^{1/2} / \pm j \omega i$ , por tanto, si la parte real del eigenvalor es mayor que cero, el sistema es inestable. A partir de los resultados obtenidos, se puede graficar el diagrama de Campbell, donde se pueden determinar las velocidades críticas del sistema.

### 3.3.2.1 Respuesta al desbalance

Para determinar la respuesta al desbalance del sistema rotodinámico, se considera la siguiente ecuación:

$$[M_{sm}]\{\ddot{p}\} + [C_{sm}(\Omega)]\{\dot{p}\} + [K_{sm}]p = f_1 \text{ sen } \Omega t + f_2 \text{ cos } \Omega t \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi^T F_1 \\ f_2 &= \phi^T F_2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$F_{sm} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

Se propone una solución de la forma:

$$p = p_1 \text{ sen } \Omega t + p_2 \text{ cos } \Omega t \quad (3.85)$$

De la sustitución de la Ec. (3.85) y sus derivadas correspondientes en la Ec. (3.82), y agrupando términos en  $\text{sen } \Omega t$  y  $\text{cos } \Omega t$  se obtiene la siguiente relación matemática:

$$\begin{bmatrix} [K_{sm}] - [M_{sm}]\Omega^2 & -\Omega[C_{sm}(\Omega)] \\ \Omega[C_{sm}(\Omega)] & [K_{sm}] - [M_{sm}]\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3.86)$$

La matriz (3.86) se resuelve para un intervalo de valores dados de  $\Omega$ , donde los términos de  $p_1$  y  $p_2$  representan el vector de desplazamientos del sistema y se relacionan con  $\delta$  (Respuesta de múltiples grados de libertad) mediante la Ec. (3.71).

### 3.3.3 Solución en estado transitorio

Para encontrar la solución de la ecuación de movimiento del sistema rotodinámico en estado transitorio, es decir, que la velocidad angular varíe en función del tiempo, es conveniente utilizar un método de integración numérica debido a la complejidad de las ecuaciones. Muchos métodos de integración numérica están disponibles para la solución aproximada de dicha ecuación, los más utilizados son los métodos de integración directa debido a que presentan buenos resultados y a que no se tiene que reducir el orden de la ecuación diferencial. Tienen dos características principales, la primera es que no satisfacen la ecuación diferencial para todo el tiempo  $t$ , es decir, encuentran una solución al sistema de ecuaciones en cada intervalo discreto de tiempo  $\Delta t$ . La segunda es que dentro de cada intervalo de tiempo  $\Delta t$  un tipo específico de variación de los desplazamientos, velocidad y aceleraciones es tomado en cuenta [61].

### 3.3.4 El método de integración directa de Newmark

El método de integración directa de Newmark se basa en la suposición de que la aceleración varía linealmente entre dos instantes de tiempo utilizando los siguientes supuestos [62]:

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + [(1 - \beta)\ddot{x}(t) + \beta\ddot{x}(t + \Delta t)]\Delta t \quad (3.87)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\ddot{x}(t) + \gamma\ddot{x}(t + \Delta t)\right]\Delta t^2 \quad (3.88)$$

Donde  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros que determinan la precisión y estabilidad del método de integración. El algoritmo completo utilizando el método de Newmark se muestra a continuación [61]:

Cálculos iniciales

1. Crear matrices de rigidez  $K$ , masa  $M$  y amortiguamiento  $C$ .
2. Inicializar  $\ddot{x}(0), \dot{x}(0), x(0)$ .
3. Seleccionar  $\Delta t$  y los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ . Calcular las constantes de integración.

$$\beta = \frac{1}{2}; \gamma \geq 0.25(0.5 + \beta)^2 \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\gamma\Delta t^2}; & a_1 &= \frac{\beta}{\gamma\Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\gamma\Delta t} & a_3 &= \frac{1}{2\gamma} - 1 \\ a_4 &= \frac{\beta}{\gamma} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\beta}{\gamma} - 2\right) & a_6 &= \Delta t(1 - \beta) & a_7 &= \beta\Delta t \end{aligned} \quad (3.90)$$

4. Formar la matriz de rigidez efectiva.

$$\hat{K} = K + a_0M + a_1C \quad (3.91)$$

Para cada paso de tiempo:

1. Calcular fuerzas efectivas en  $t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}(t + \Delta t) = & F(t + \Delta t) + M(a_0x(t) + a_2\dot{x}(t) + a_3\ddot{x}(t)) \\ & + C(a_1x(t) + a_4\dot{x}(t) + a_5\ddot{x}(t)) \end{aligned} \quad (3.92)$$

2. Determinar desplazamientos en  $t + \Delta t$ :

$$x(t + \Delta t) = \hat{K}^{-1}\hat{F}(t + \Delta t) \quad (3.93)$$

3. Evaluar aceleraciones y velocidades en  $t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t + \Delta t) = & a_0(x(t + \Delta t) - x(t)) - a_2\dot{x}(t) - a_3\ddot{x}(t) \\ \dot{x}(t + \Delta t) = & \dot{x}(t) + a_6\ddot{x}(t) + a_7\ddot{x}(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.94)$$

En esta sección se definió el modelo matemático con el que se trabajará en la presente investigación; También se presentaron los métodos de solución de la ecuación de movimiento del sistema rotodinámico en estado estable y en estado transitorio. La solución en estado estable se lleva a cabo mediante el método directo. Por otra parte, para la solución en estado transitorio se utilizó el método de integración directa de Newmark.

### 3.4 Implementación de la plataforma computacional y validación

En esta sección, se presenta el desarrollo de una plataforma computacional utilizando el método del elemento finito, la plataforma contiene la formulación matemática presentada en la sección anterior. Se programó el método directo para la solución de la ecuación general de movimiento, de igual forma se realizó un programa para la solución de la ecuación, a partir del método de Newmark. Asimismo, se presenta la validación de estos programas comparándolos con resultados de la literatura (Lalanne y Ferraris [26]), con el fin de asegurar que los resultados que ofrece la plataforma son correctos y confiables.

#### 3.4.1 Solución por el método directo

El programa soluciona el sistema de Ecs. (3.55), y el código se llevó a cabo utilizando el software Matlab. Para la validación, se solucionó un ejemplo de un sistema rotor-cojinete de la literatura. La Figura 3.6, muestra un esquema del sistema rotodinámico, así como, su discretización.

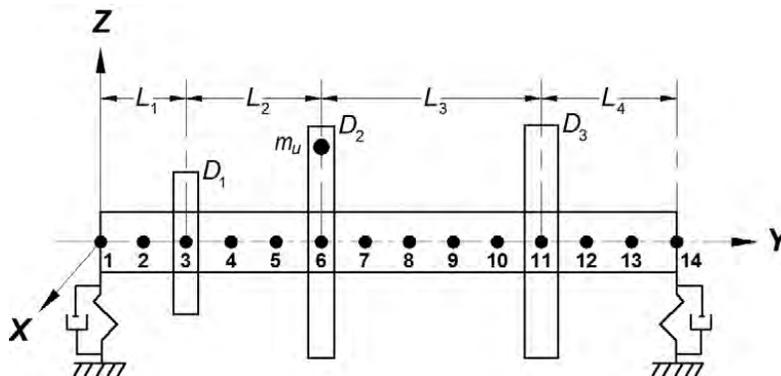


Figura 3.6: Modelo del rotor [26].

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

Para la solución del sistema por el método del elemento finito, se realizó una discretización de 13 elementos de igual longitud. Como se observa de la Figura 3.6, el rotor contiene tres discos cuya posición coincide con los nodos 3, 6 y 11, respectivamente. Asimismo, el rotor se sustenta por medio de dos soportes, los cuales se ubican en los nodos 1 y 14. La ubicación nodal de los elementos del sistema es importante, ya que asegura que la simulación corresponda con la geometría del sistema. En las Tablas 3.1 y 3.2 se muestran las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos.

Tabla 3.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Radio externo ( $r_e$ ) = 0.05 m
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L_1 = 0.2 \text{ m}; \quad L_2 = 0.3 \text{ m}$
$\nu = 0.30$	$L_3 = 0.5 \text{ m}; \quad L_4 = 0.3 \text{ m}$

Tabla 3.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.

Geometría			
Disco	$D_1$ (m)	$D_2$ (m)	$D_3$ (m)
$e_D$	0.05	0.05	0.06
$r_{iD}$	0.05	0.05	0.05
$r_{eD}$	0.12	0.20	0.20

En las Tabla 3.3 y 3.4 se muestran los parámetros de los soportes:

Tabla 3.3: Coeficientes rotodinámicos, simulación 1.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 5 \times 10^7$	$c_{xx} = 5 \times 10^2$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$
$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$c_{zz} = 7 \times 10^2$

Tabla 3.4: Coeficientes rotodinámicos, simulación 2.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 5 \times 10^5$	$c_{xx} = 10 \times 10^2$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$
$k_{zz} = 5 \times 10^4$	$c_{zz} = 14 \times 10^2$

### 3.4.2 Diagrama de Campbell

Para la obtención del diagrama de Campbell, se selecciona un rango de operación del rotor de 0 a 30 000 rpm, con incrementos de 1 rpm. Como se puede observar los diagramas de la Figura 3.7a y 3.7b son similares. En la Tabla 3.4, se comparan los valores obtenidos contra los de referencia, para una misma velocidad de rotación del rotor de 25 000 rpm.

# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

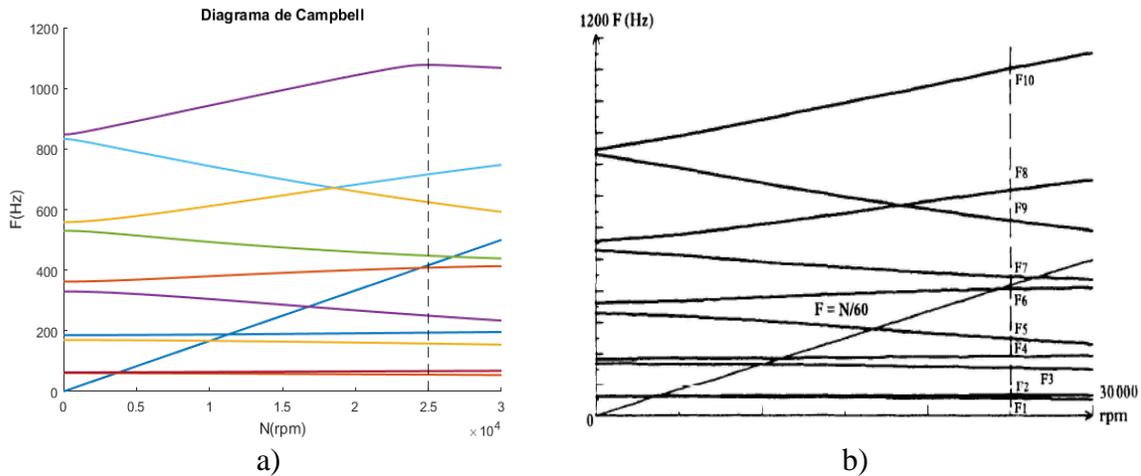


Figura 3.7: Diagrama de Campbell, a) plataforma computacional y b) Lalanne y Ferraris [26].

Tabla 3.5: Frecuencias en Hertz a 25 000 rpm.

Frecuencia	Valor de referencia [26]	Plataforma computacional	Desviación porcentual (%)
$F_1$	55.41	55.40	0.02
$F_2$	67.20	67.30	0.15
$F_3$	157.90	157.90	0
$F_4$	193.60	193.90	0.15
$F_5$	249.90	250	0.04
$F_6$	407.50	408.30	0.20
$F_7$	446.70	447.80	0.25
$F_8$	714.90	716.20	0.18
$F_9$	622.70	624.30	0.26
$F_{10}$	1076	1077	0.09

De la Tabla 3.5, se ve que la desviación máxima de los valores de las frecuencias, para una velocidad de operación del rotor de 25 000 rpm, es menor al 1%, lo que indica que los resultados proporcionados por el programa son correctos y confiables.

### 3.4.3 Respuesta a masa de desbalance

Para conocer la respuesta del sistema de la Figura 3.6 una masa de desbalance de  $2 \times 10^{-4}$  kg·m se coloca en el disco dos con una orientación de 0 grados. Los resultados de la referencia y la plataforma computacional propia son mostrados en la Figura 3.8.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

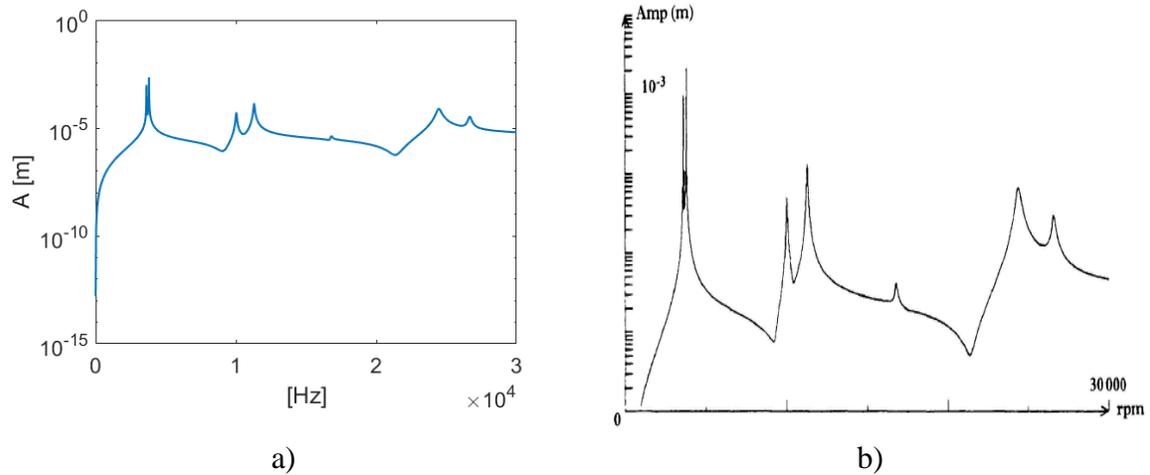


Figura 3.8: Respuesta a masa de desbalance, a) plataforma computacional y b) Lalanne y Ferraris [26].

Como se puede observar los diagramas de Bode de la Figura 3.8 son similares. En la Tabla 3.6, se muestra una comparación entre los valores calculados de las velocidades críticas y sus respectivas amplitudes de vibración, contra los respectivos valores de referencia.

Como se puede observar de la Tabla 3.6, la desviación porcentual varía en un intervalo de 0.04-13.16 % la cual está dentro del porcentaje de desviación para los cálculos ingenieriles. Cabe señalar que las mayores desviaciones se encuentra en un rango de velocidades superior a 20 000 rpm, mientras que por debajo de esta velocidad los resultados están por debajo del 7 %. Por lo tanto, se concluye que los resultados arrojados por el programa son confiables.

Tabla 3.6: Comparación de las velocidades críticas.

Velocidades críticas	Valor de referencia [26]	Plataforma computacional	Desviación (%)
<i>C</i> 1	13620.4	3622	0.04
	<sup>2</sup> 9.38E-04	9.79E-04	4.37
<i>C</i> 2	3798.1	3800	0.05
	2.10E-03	2.20E-03	4.76
<i>C</i> 3	10018	10026	0.08
	5.00E-05	5.21E-05	4.20
<i>C</i> 4	11279	11294	0.13
	1.30E-4	1.39E-04	6.92
<i>C</i> 5	16785	16798	0.08
	4.21E-06	4.24E-06	0.71
<i>C</i> 6	24408	24462	0.22
	6.84E-05	7.74E-05	13.16
<i>C</i> 7	26615	26665	0.19
	3.09E-05	3.35E-05	8.41

<sup>1</sup>Velocidad crítica en rpm

<sup>2</sup>Amplitud de vibración en metros (m)

### 3.4.4 Método Pseudo-Modal

Se programó el método Pseudo-modal para la solución de la ecuación general de movimiento de un sistema rotor-cojinete, esta parte de la plataforma computacional resuelve los sistemas de Ecs. (3.77) - (3.86). La validación del programa se llevó a cabo mediante la comparación de los resultados obtenidos a partir de este método y los resultados arrojados por el método directo. El modelo rotodinámico analizado en este apartado es el mismo utilizado en la simulación anterior. Se muestra en la Figura 3.6. Asimismo, en las Tablas 3.1 a la 3.3 se encuentran las propiedades y características del eje, los discos inerciales y los soportes, respectivamente.

Tabla 3.7: Masa de desbalance presentes en el sistema.

Desbalance (kg·m)	Posición angular (grados)
$m_u d_1 = 2 \times 10^{-4}$ nodo 6	$\alpha_1 = 0$

En la Tabla 3.8 se observa que la desviación entre los valores de las frecuencias arrojados por la plataforma computacional que utiliza el método pseudo-modal y los valores de referencia, disminuye conforme se incrementa el número de modos de vibración utilizados en la solución del sistema rotor-cojinete. Este comportamiento es ocasionado por la influencia que tienen los modos de vibración del sistema entre ellos debido a su cercanía.

Tabla 3.8: Método Pseudo-modal.

Velocidades críticas	Valor de referencia [26]	Numero de modos			
		2	4	6	8
<i>C</i> 1	13620.4	3623	3623	3622	3622
	<sup>2</sup> 9.38E-04	9.434E-04	9.435E-04	9.753E-04	9.835E-04
<i>C</i> 2	3798.1	3801	3801	3800	3800
	2.10E-03	2.273E-03	2.273E-03	2.14E-03	2.196E-03
<i>C</i> 3	10018		10050	10050	10050
	5.00E-05		5.286E-05	5.27E-05	5.181E-05
<i>C</i> 4	11279		11330	11330	11320
	1.30E-4		1.35E-4	1.365E-4	1.425E-4
<i>C</i> 5	16785			17390	16930
	4.21E-06			5.918E-06	4.149E-06
<i>C</i> 6	24408			27730	24810
	6.84E-05			6.687E-05	8.088E-05
<i>C</i> 7	26615				27050
	3.09E-05				3.137E-05

<sup>1</sup>Velocidad crítica en rpm

<sup>2</sup>Amplitud de vibración en metros (m)

En la Figura 3.9 se puede observar la comparación entre la respuesta obtenida con el método directo y la respuesta obtenida con el método Pseudo-modal utilizando ocho modos de vibración.

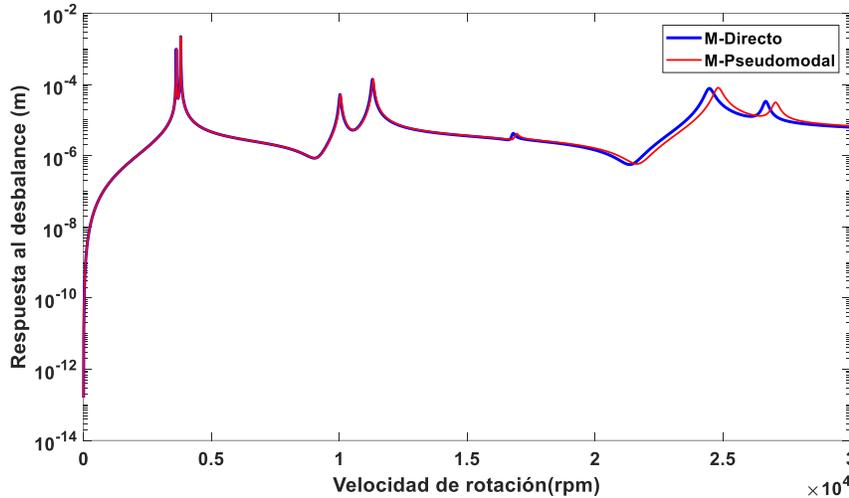


Figura 3.9: Comparación entre el Método Directo vs Método Pseudomodal.

Por otro lado, la ventaja que ofrece el método pseudo-modal con respecto al método directo es que el primero desacopla los modos de vibración, lo que ocasiona que el número de ecuaciones a solucionar se reduzca, en consecuencia, se tiene una disminución en el tiempo de cómputo. Otra ventaja importante es que, al tener los modos desacoplados, cada uno de los modos se puede trabajar como si fuera un sistema de un grado de libertad.

### 3.4.5 Respuesta al desbalance método de Newmark

Para obtener la respuesta vibratoria por el método de Newmark se utilizan los coeficientes rotodinámicos de la Tabla 3.4 y el rotor de la Figura 3.6 con una masa de desbalance  $m_u d = 2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$  en el disco 2 con una orientación angular de  $0^\circ$  grados.

En la Figura 3.10 se muestra la respuesta vibratoria horizontal y vertical en estado transitorio hasta una velocidad angular de 1,000 rpm, así como su comparación entre el método directo (Método Directo línea - color rojo) y el método de Newmark (Newmark Resultante-línea color azul). La respuesta de Newmark resultante se compone de una parte real (N Parte Real-color verde) y una parte imaginaria (N Parte Imaginaria-color negro).

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

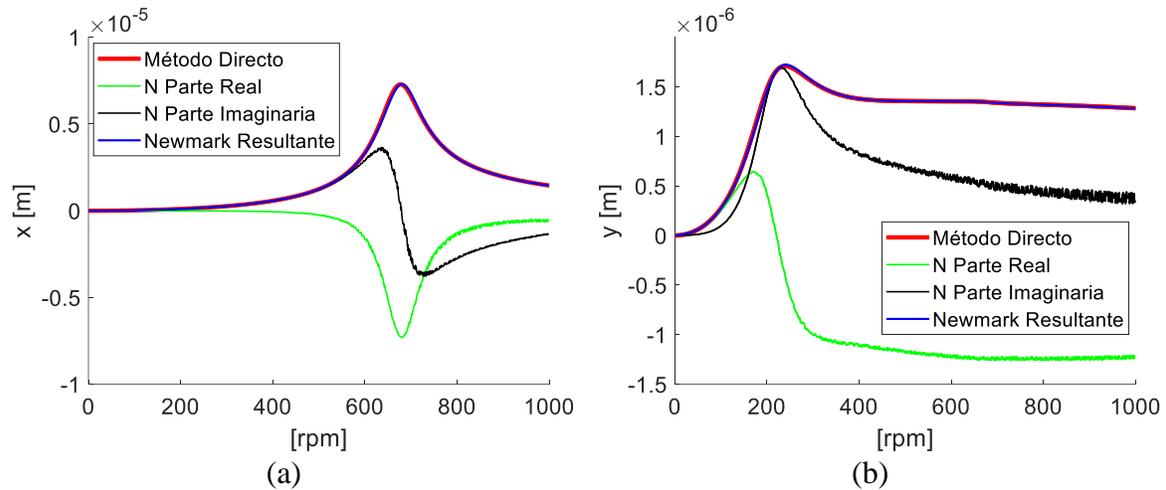


Figura 3.10: Respuesta a masa de desbalance, plataforma computacional, horizontal (a) y vertical (b).

En la Figura 3.11 se muestra la respuesta resultante de ambas direcciones en estado transitorio, así como una comparación entre la respuesta resultante obtenida con el método de Newmark (línea azul) y la obtenida con el método directo (línea roja). Se puede notar que ambas respuestas son prácticamente idénticas de esta manera se valida la plataforma computacional desarrollada.

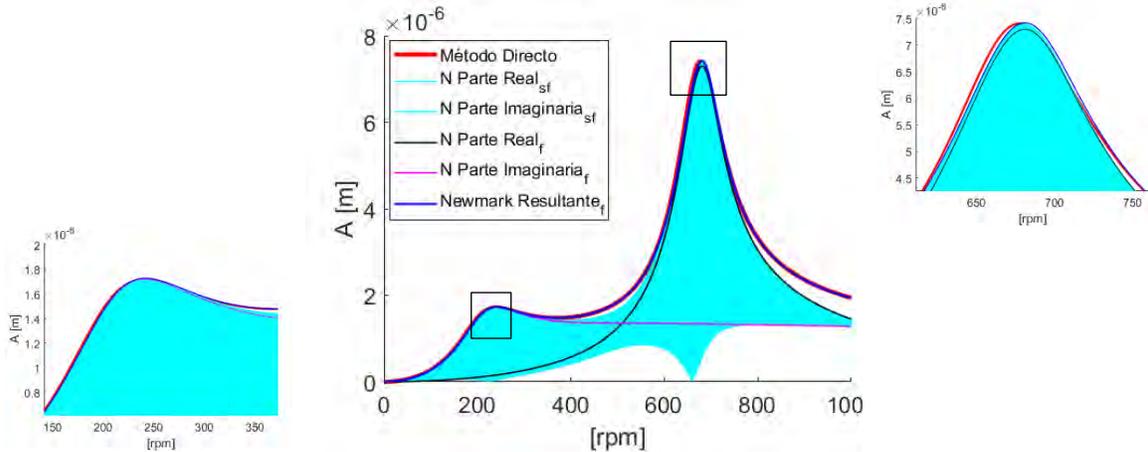


Figura 3.11: Respuesta resultante a una masa de desbalance, plataforma computacional.

En este Capítulo se muestra el desarrollo del modelo matemático de un sistema rotor-chumacera de múltiples grados de libertad, deducido por el método de los elementos finitos, utilizando un elemento finito tipo viga de cuatro grados de libertad por nodo. De igual forma se muestra la solución en estado estable y estado transitorio, así como su implementación en la plataforma Matlab, posteriormente se validó el modelo y su implementación con datos de la literatura.

## CAPÍTULO 4

# SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS IDENTIFICADORES ALGEBRAICOS DE LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS

La identificación algebraica, es un método que se apoya en el álgebra diferencial y el cálculo operacional para el desarrollo de estimadores, que permiten la determinación de parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. Una de las características de la identificación algebraica es proporcionar relaciones de identificación completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema. De este modo, las estimaciones se realizan en línea y en tiempo continuo o discreto. También, de acuerdo con Fliess y Sira-Ramírez [46], este método presenta buenas propiedades de robustez con respecto a una gran variedad de perturbaciones, además de ser eficiente. Por lo tanto, en este capítulo se utiliza el método de identificación algebraica en línea para el desarrollo de un identificador de los parámetros de rigidez y amortiguamiento en soportes de sistemas rotor-chumacera presurizada de múltiples grados de libertad a velocidad angular constante.

### **4.1 Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete con un modelo de múltiples grados de libertad a velocidad constante**

En esta sección se desarrolla un identificador algebraico en línea para determinar los coeficientes rotodinámicos de una chumacera de forma numérica. El modelo que se toma como base para el identificador algebraico es un modelo rotor-chumacera de múltiples grados de libertad a velocidad angular constante deducido en la sección 3.2.5. Una vez que se tiene el identificador se hicieron diferentes simulaciones para ver su comportamiento a través del tiempo y diferentes velocidades de operación del rotor, en las cuales el identificador convergió a los parámetros buscados en un tiempo menor a 0.1 s con una desviación porcentual de cero. Como se mencionó anteriormente el identificador necesita como dato de entrada la respuesta vibratoria del sistema, la cual será tomada del modelo matemático del sistema. Para la solución se consideró el método numérico de Newmark.

#### 4.1.1 Desarrollo del modelo matemático del identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete a velocidad constante

Para la aplicación del método de identificación algebraica en línea, se requiere el modelo matemático del sistema rotodinámico de la Ec. (3.53), a partir del cual, se desarrolla el estimador a medida de los parámetros de los soportes.

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C(\Omega)]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (4.1)$$

Donde  $\{\delta\}$  es el vector que contiene todos los desplazamientos nodales del sistema; mientras que  $C(\Omega) = [C_1 + \Omega C_2]$ , donde  $C_1$  es la matriz de amortiguamiento de los soportes y  $\Omega C_2$  son los efectos giroscópicos y  $K = [K_1 + K_2]$ , donde  $K_1$  es la matriz de rigidez de los soportes y  $K_2$  es la rigidez del eje. Si se consideran dos soportes  $C_1 = [C_{s1} + C_{s2}]$  y  $K_1 = [K_{s1} + K_{s2}]$ , tomando en cuenta estas expresiones, la Ec. (4.1) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{\delta}_i\} + ([C_{s1}] + [C_2(\Omega)])\{\dot{\delta}_i\} + ([K_{s1}] + [K_2])\{\delta_i\} &= \{F\} \\ [M]\{\ddot{\delta}_n\} + ([C_{s2}] + [C_2(\Omega)])\{\dot{\delta}_n\} + ([K_{s2}] + [K_2])\{\delta_n\} &= \{F\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Donde  $\{\delta_i\}$  y  $\{\delta_n\}$  son los desplazamientos nodales del soporte uno y dos respectivamente. En la Ec. (4.2) se puede observar que los parámetros de los soportes están en función de sus desplazamientos nodales, es decir, los desplazamientos de los nodos donde están ubicados los soportes. También, se aprecia que es un sistema de dos ecuaciones y que se puede aplicar el método de identificación algebraica de manera simultánea o independiente. Se elige realizar el identificador algebraico para cada ecuación de manera independiente, con el fin de identificar los parámetros de cualquiera de los dos soportes sin necesidad de conocer los parámetros del otro soporte.

Siguiendo la metodología propuesta por Fliess y Sira-Ramírez [46], se multiplica la Ec. (4.2) por  $t^2$  y se integra dos veces con respecto al tiempo. Los parámetros para identificar de los soportes se encuentran en las matrices  $[K_{s1}], [C_{s1}], [K_{s2}]$  y  $[C_{s2}]$ , donde el subíndice  $s1$  y  $s2$  corresponden al primer y segundo soporte respectivamente.

$$\begin{aligned} [K_{s1}] \int^{(2)} t^2 \{\delta\} + [C_{s1}] \left( \int t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(2)} t \{\delta\} \right) \\ = -[M] t^2 \delta + 4[M] \int t \delta - \Omega [C_2] \int t^2 \delta - 2[M] \int^{(2)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(2)} t \delta \\ - [K_2] \int^{(2)} t^2 \{\delta\} + \int^{(2)} t^2 \{F\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
 [K_{s2}] \int^{(2)} t^2 \{\delta\} + [C_{s2}] \left( \int t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(2)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M] t^2 \delta + 4[M] \int t \delta - \Omega [C_2] \int t^2 \delta - 2[M] \int^{(2)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(2)} t \delta \\
 - [K_2] \int^{(2)} t^2 \{\delta\} + \int^{(2)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para la solución de las Ecs. (4.3) y (4.4) se requiere igual número de incógnitas y ecuaciones, se tienen ocho incógnitas en cada ecuación, cuatro coeficientes de rigidez y cuatro de amortiguamiento, por lo tanto, dicha ecuación se integra sucesivamente tres veces para igualar el número de incógnitas con el número de ecuaciones.

### Integración 1

$$\begin{aligned}
 [K_{s1}] \int^{(3)} t^2 \{\delta\} + [C_{s1}] \left( \int^{(2)} t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(3)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M] \int t^2 \delta + 4[M] \int^{(2)} t \delta - \Omega [C_2] \int^{(2)} t^2 \delta - 2[M] \int^{(3)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(3)} t \delta \\
 - [K_2] \int^{(3)} t^2 \{\delta\} + \int^{(3)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{s2}] \int^{(3)} t^2 \{\delta\} + [C_{s2}] \left( \int^{(2)} t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(3)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M] \int t^2 \delta + 4[M] \int^{(2)} t \delta - \Omega [C_2] \int^{(2)} t^2 \delta - 2[M] \int^{(3)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(3)} t \delta \\
 - [K_2] \int^{(3)} t^2 \{\delta\} + \int^{(3)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

### Integración 2

$$\begin{aligned}
 [K_{s1}] \int^{(4)} t^2 \{\delta\} + [C_{s1}] \left( \int^{(3)} t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(4)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M] \int^{(2)} t^2 \delta + 4[M] \int^{(3)} t \delta - \Omega [C_2] \int^{(3)} t^2 \delta - 2[M] \int^{(4)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(4)} t \delta \\
 - [K_2] \int^{(4)} t^2 \{\delta\} + \int^{(4)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{s2}] \int^{(4)} t^2 \{\delta\} + [C_{s2}] \left( \int^{(3)} t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(4)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M] \int^{(2)} t^2 \delta + 4[M] \int^{(3)} t \delta - \Omega [C_2] \int^{(3)} t^2 \delta - 2[M] \int^{(4)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(4)} t \delta \\
 - [K_2] \int^{(4)} t^2 \{\delta\} + \int^{(4)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

### Integración 3

$$\begin{aligned}
 [K_{s1}] \int^{(5)} t^2 \{\delta\} + [C_{s1}] \left( \int^{(4)} t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(5)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M] \int^{(3)} t^2 \delta + 4[M] \int^{(4)} t \delta - \Omega [C_2] \int^{(4)} t^2 \delta - 2[M] \int^{(5)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(5)} t \delta \\
 - [K_2] \int^{(5)} t^2 \{\delta\} + \int^{(5)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{s2}] \int^{(5)} t^2 \{\delta\} + [C_{s2}] \left( \int^{(4)} t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(5)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M] \int^{(3)} t^2 \delta + 4[M] \int^{(4)} t \delta - \Omega [C_2] \int^{(4)} t^2 \delta - 2[M] \int^{(5)} \delta + 2\Omega [C_2] \int^{(5)} t \delta \\
 - [K_2] \int^{(5)} t^2 \{\delta\} + \int^{(5)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

A partir de la Ec. (4.3) y sus integraciones que corresponden a los parámetros del primer soporte, se obtienen dos sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}
 A(t)\Theta_1 &= B_x \\
 A(t)\Theta_2 &= B_y
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Donde

- $A$  = Matriz de coeficientes.
- $B_i$  = Vector de términos independientes.
- $\Theta_i$  = Vector de parámetros a identificar.

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Vector de términos independientes

$$B_x = \begin{bmatrix} b_{1x} \\ b_{2x} \\ b_{3x} \\ b_{4x} \end{bmatrix}; \quad B_y = \begin{bmatrix} b_{1y} \\ b_{2y} \\ b_{3y} \\ b_{4y} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Vector de parámetros a identificar

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} c_{xx} \\ c_{xy} \\ k_{xx} \\ k_{xy} \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} c_{yx} \\ c_{yy} \\ k_{yx} \\ k_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

El identificador algebraico en línea de los ocho coeficientes rotodinámicos de un cojinete se obtiene al solucionar la Ec. (4.11) y se debe cumplir la condición establecida por Fliess y Sira-Ramírez[46].

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= A^{-1}(t)B_x(t) \\ \Theta_2 &= A^{-1}(t)B_y(t) \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon] \quad (4.15)$$

Para identificar los parámetros de los soportes, se requiere el vector de desplazamientos nodales del sistema  $\{\delta\}$ , el cual contiene todos sus desplazamientos nodales, es decir la vibración lateral, así como sus pendientes nodales.

#### 4.1.2 Simulación numérica del identificador algebraico

Para la simulación del identificador algebraico se utiliza el sistema rotor-cojinetes de la literatura [63]. Cuenta con toda la información necesaria para poder llevar a cabo las simulaciones numéricas, es decir, las propiedades geométricas y mecánicas del rotor y de los discos inerciales, así como también los parámetros de rigidez y amortiguamiento atribuibles a los soportes. La Figura 4.1 muestra un esquema y discretización del sistema.

Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio  
Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

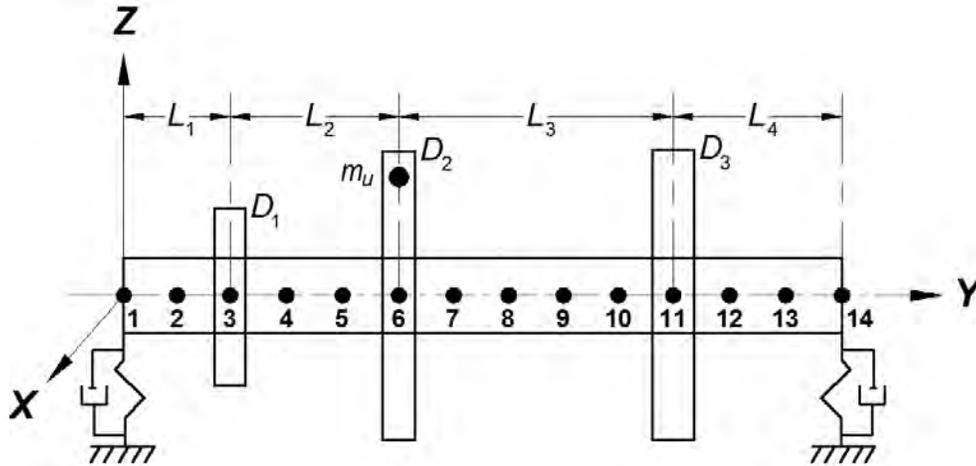


Figura 4.1: Modelo del rotor

Para la solución del sistema por el método del elemento finito, se realizó una discretización de 13 elementos de igual longitud. Como se observa de la Figura 4.1, el rotor contiene tres discos cuya posición coincide con los nodos 3, 6 y 11, respectivamente. Asimismo, el rotor se sustenta por medio de dos soportes, los cuales se ubican en los nodos 1 y 14. La ubicación nodal de los elementos del sistema es importante, ya que asegura que la simulación corresponda con la geometría del sistema. En las Tablas 4.1 a 4.5 se muestran las propiedades mecánicas y geométricas del eje y los discos.

Tabla 4.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Radio externo ( $r_e$ ) = 0.05 m
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L_1 = 0.2 \text{ m}; \quad L_2 = 0.3 \text{ m}$
$\nu = 0.30$	$L_3 = 0.5 \text{ m}; \quad L_4 = 0.3 \text{ m}$

Tabla 4.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.

	Geometría		
Disco	$D_1$ (m)	$D_2$ (m)	$D_3$ (m)
$e_D$	0.05	0.05	0.06
$r_{iD}$	0.05	0.05	0.05
$r_{eD}$	0.12	0.20	0.20

Tabla 4.3: Coeficientes rotodinámicos, soporte 1.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 5 \times 10^7$	$c_{xx} = 5 \times 10^2$
$k_{xz} = 4 \times 10^5$	$c_{xz} = 3 \times 10^2$
$k_{zx} = 2 \times 10^5$	$c_{zx} = 1 \times 10^2$
$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$c_{zz} = 7 \times 10^2$

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

Tabla 4.4: Coeficientes rotodinámicos, soporte 2.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 6 \times 10^6$	$c_{xx} = 4 \times 10^2$
$k_{xz} = 3 \times 10^5$	$c_{xz} = 2.5 \times 10^2$
$k_{zx} = 1 \times 10^5$	$c_{zx} = 1.8 \times 10^2$
$k_{zz} = 4 \times 10^6$	$c_{zz} = 6 \times 10^2$

Tabla 4.5: Masa de desbalance presentes en el sistema.

Desbalance (kg·m)	Posición angular (grados)
$m_u d_1 = 2 \times 10^{-4}$ nodo 3	$\alpha_1 = 45$
$m_u d_2 = 1 \times 10^{-4}$ nodo 6	$\alpha_2 = 135$
$m_u d_3 = 1.5 \times 10^{-4}$ nodo 11	$\alpha_3 = 270$

Con esta información se procede a identificar los coeficientes rotodinámicos de ambos soportes a velocidad constante y a diferentes velocidades de operación del rotor, no simultáneamente, pero sí de manera independiente; la identificación algebraica se determina con base en la respuesta vibratoria del rotor en función del tiempo. El vector de desplazamientos que se requiere para ser utilizado en la identificación como dato de entrada, se obtiene a partir de la solución de la Ec. (4.1) utilizando el método de integración numérica de Newmark a velocidad constante con un incremento en el tiempo de  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  s.

En las simulaciones mostradas de la Figura 4.2 a la 4.5, se observa cómo el identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos converge a los valores correctos. Es de interés apreciar que antes de converger presenta perturbaciones e incluso estados transitorios, esto se deben principalmente al tiempo de muestreo, ya que el identificador está compuesto por integrales iteradas en el tiempo. Estas integrales se solucionan utilizando métodos de integración numérica, estos métodos son sensibles al tiempo de muestreo. Por otra parte, también se observa que los coeficientes cruzados, tanto de rigidez como de amortiguamiento, presentan más perturbaciones que los directos. Por último, comparando la identificación de los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento, los de amortiguamientos tienen más perturbaciones.

# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

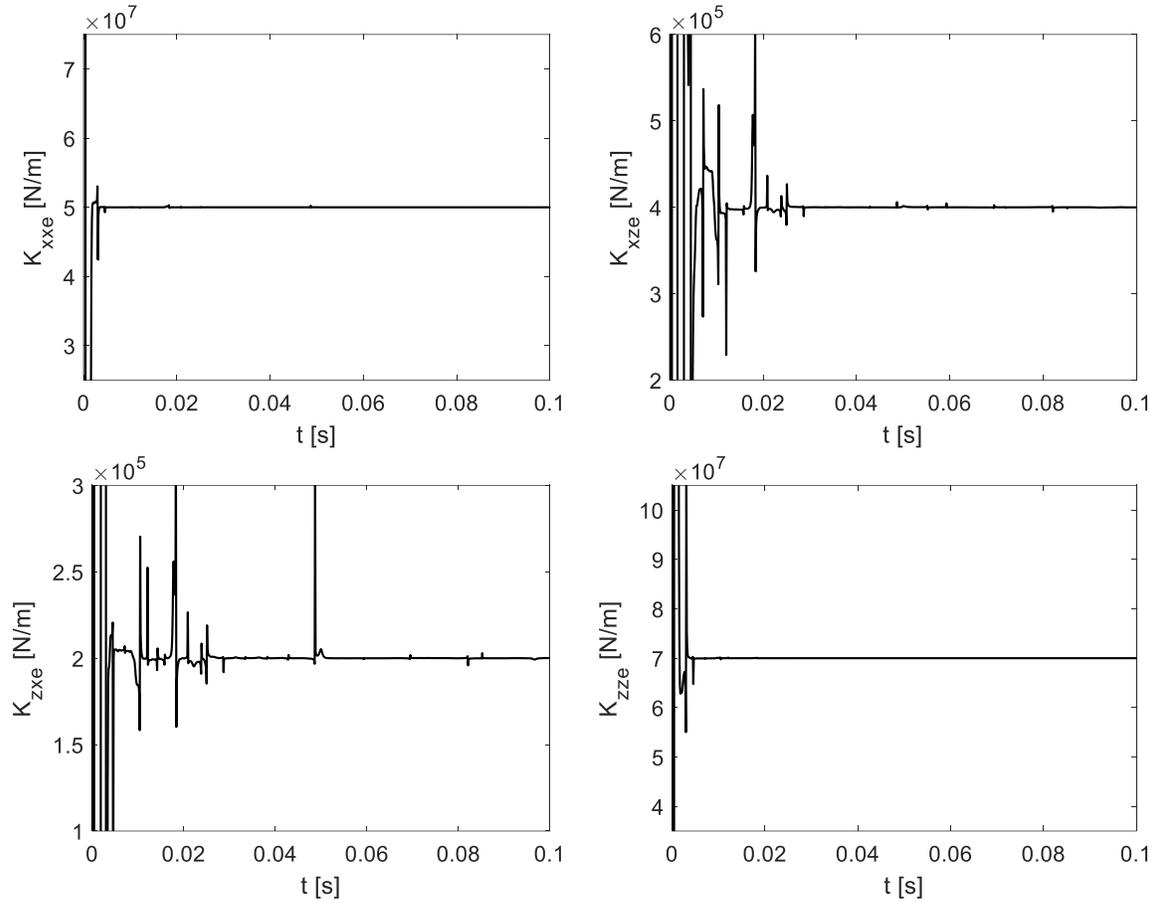
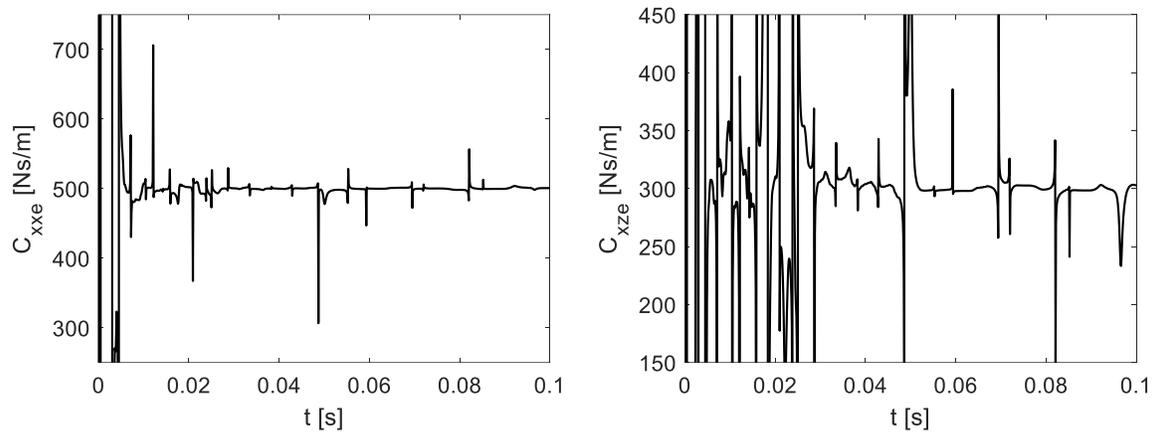


Figura 4.2: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.



# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

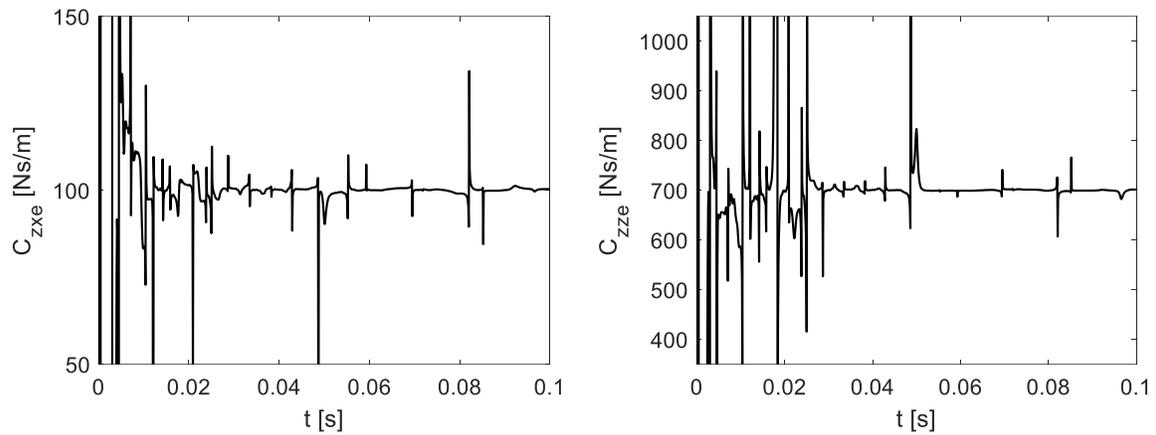


Figura 4.3: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

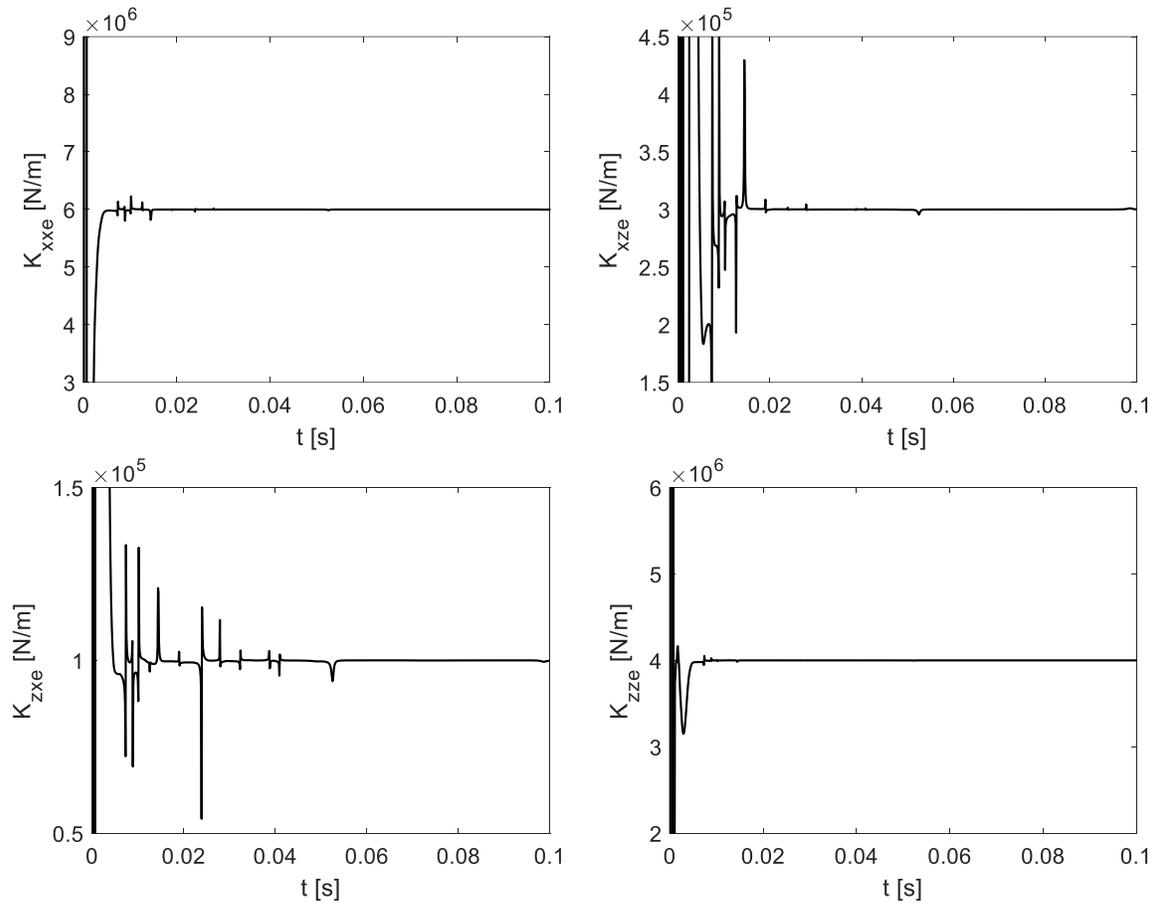


Figura 4.4: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 2.

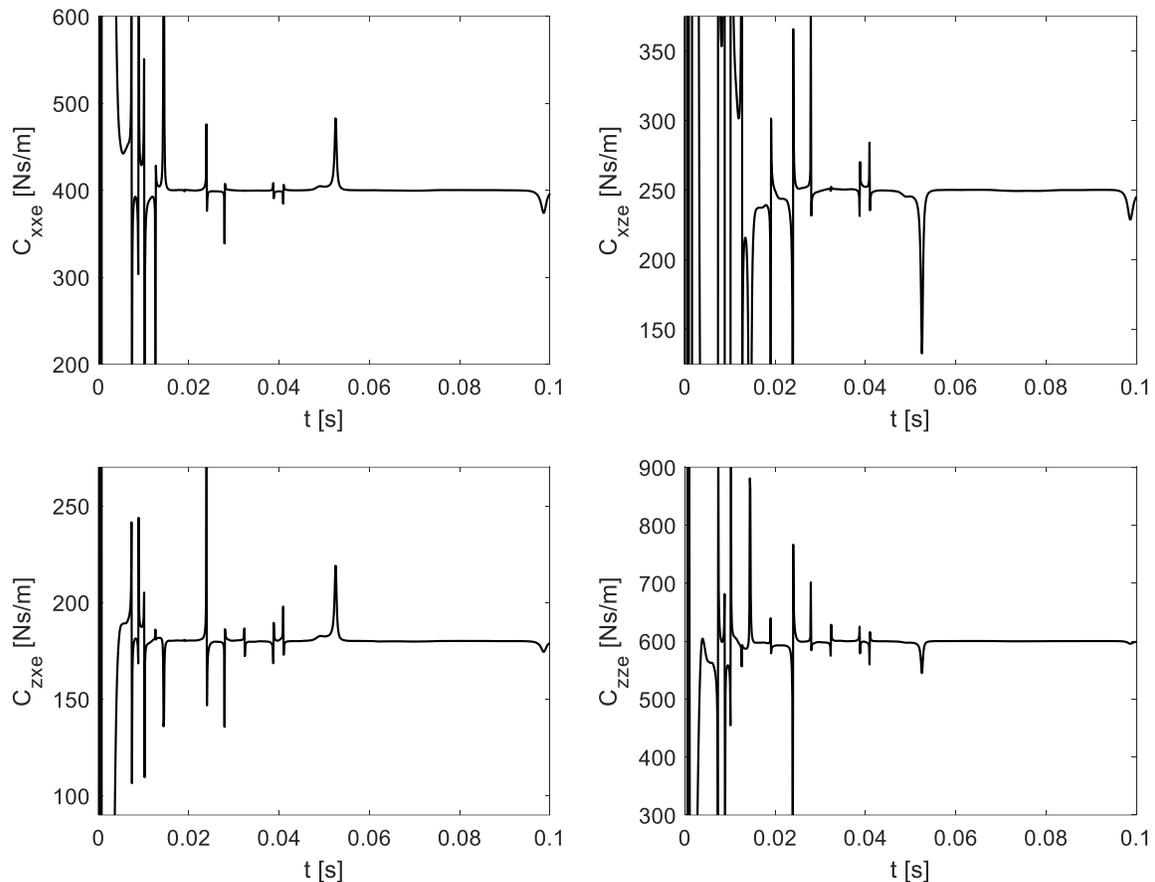


Figura 4.5: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 2.

#### 4.1.3 Efecto del tiempo de muestreo en la identificación algebraica

Se puede observar en las imágenes que el identificador converge a los valores propuestos. Sin embargo, hay perturbaciones antes de converger a un valor y estados transitorios durante la identificación. Estos estados transitorios se deben principalmente al tiempo de muestreo, el cual fue de 10,000 muestras por segundo. El tiempo de muestreo es una variable de diseño que afecta directamente el funcionamiento del algoritmo. Estimadores diseñados en un dominio de tiempo continuo pueden ser bastante sensibles al periodo de muestreo, donde tiempos de muestreo más pequeños proporcionan mejores resultados. El estimador algebraico propuesto se ha desarrollado en el dominio del tiempo continuo, por lo tanto, se espera obtener mejores estimaciones cuanto menor sea el tiempo de muestreo utilizado. Sin embargo, el número de operaciones también aumenta con lo que el programa se hace más lento. De ahí el interés de analizar el tiempo de muestreo en el identificador. Se realiza una segunda prueba de identificación de los parámetros de los soportes, utilizando los mismos datos de la simulación anterior, con la diferencia de que en éste se incrementa el tiempo de muestreo en 100,000 y 1,000,000 muestras/s. Los resultados se muestran en las Figuras 4.6 a 4.9.

# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

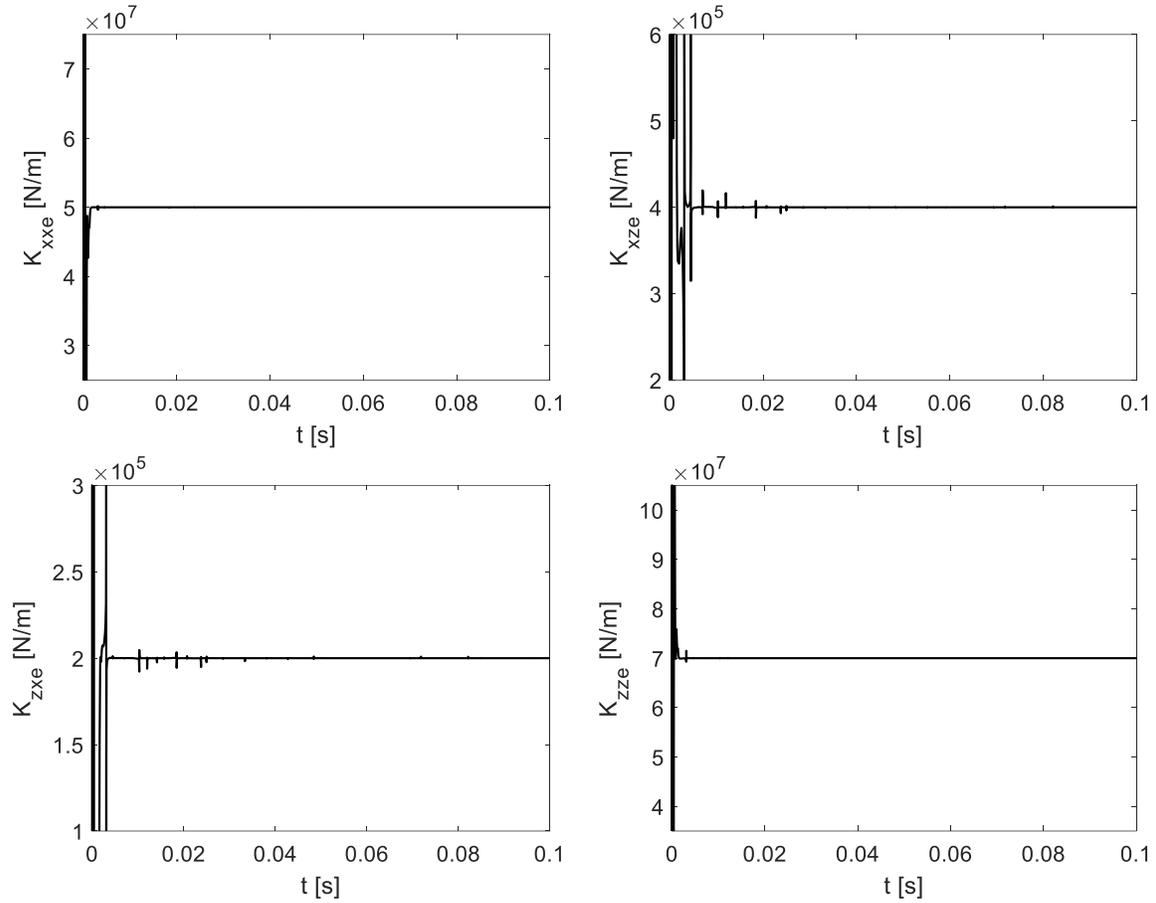
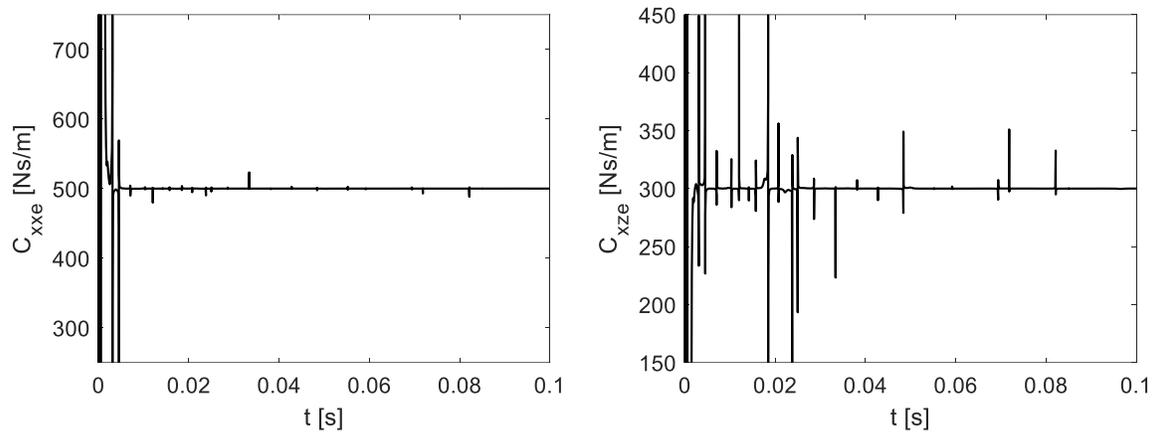


Figura 4.6: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 100,000 muestras/s, soporte 1.



# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

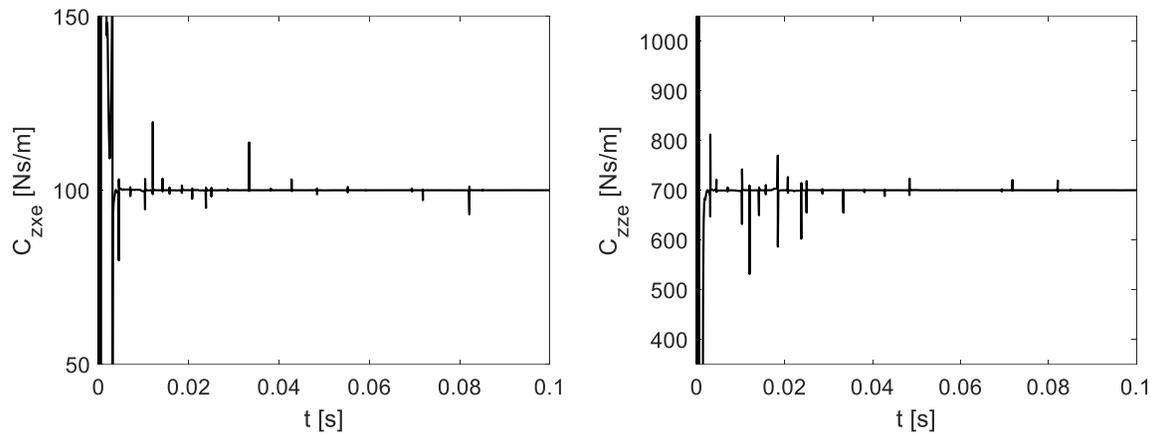


Figura 4.7: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 100,000 muestras/s, soporte 1.

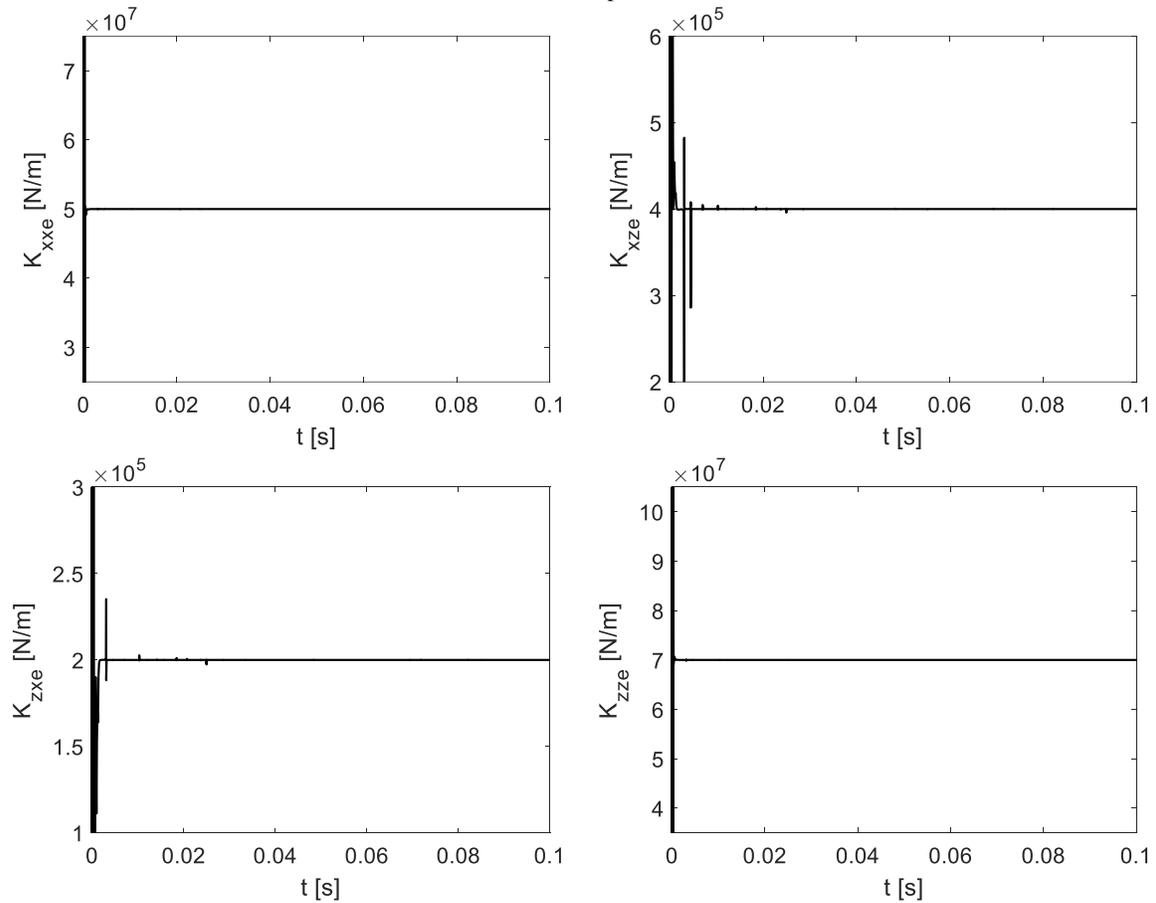


Figura 4.8: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 1,000,000 muestras/s, soporte 1.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

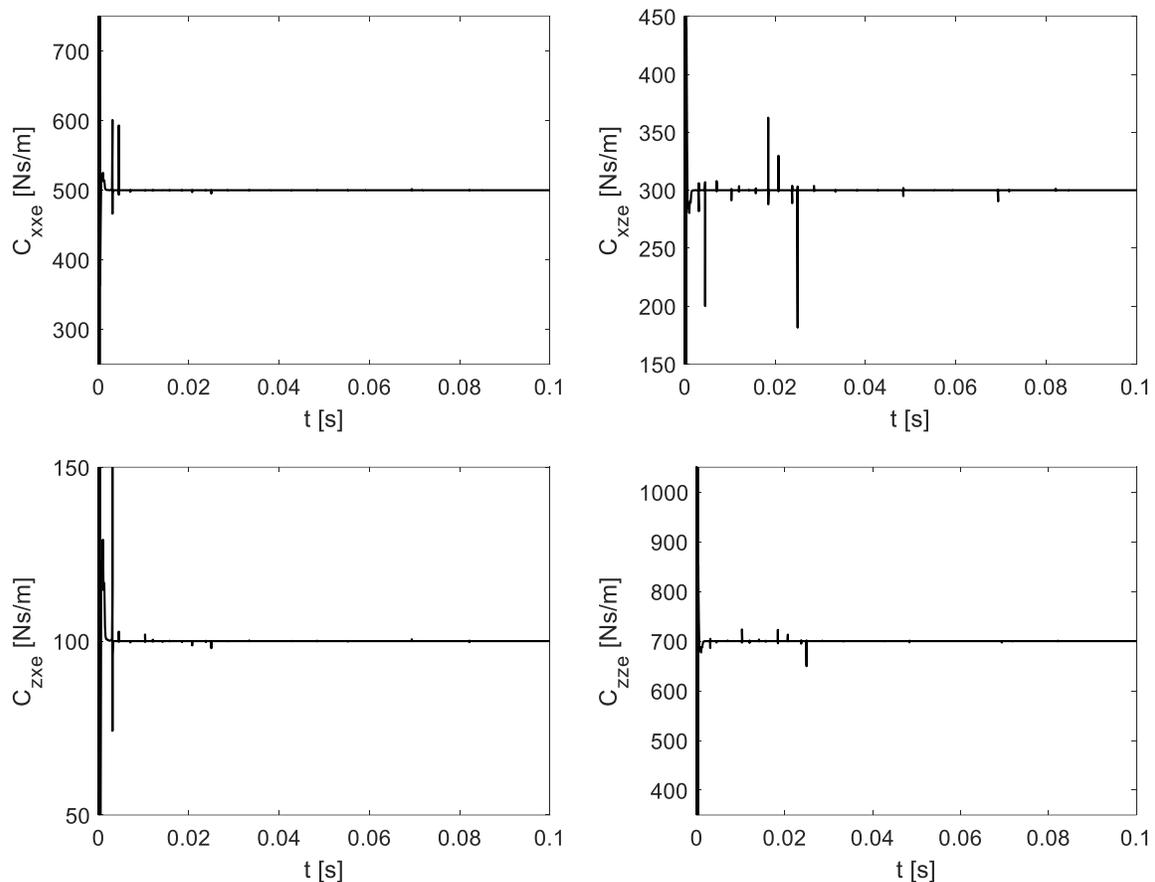


Figura 4.9: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 1,000,000 muestras/s, soporte 1.

Se observa en las imágenes anteriores que a medida que se incrementa el tiempo de muestreo, las perturbaciones y estados transitorios se reducen, pero al aumentar el tiempo de muestreo incrementamos el tiempo de cómputo. Por otra parte, al utilizar el identificador de manera experimental las tarjetas de adquisición deberían tener estas capacidades. En Tabla 4.6 se muestra una comparación de la desviación porcentual entre los valores identificados y reales variando el tiempo de muestreo. Se observa que al incrementar las muestras de 10,000 a 100,000 la desviación porcentual se redujo, pero no sucedió lo mismo al incrementarlas de 100,000 a 1,000,000 de muestras.

Tabla 4.6: Desviación porcentual de los valores identificados a diferentes pasos de muestreo, soporte 1.

rpm	$\Delta t$	Desviación porcentual (%)							
		$k_{xx}$	$k_{yy}$	$k_{zx}$	$k_{zy}$	$c_{xx}$	$c_{yy}$	$c_{zx}$	$c_{zy}$
600	$1 \times 10^{-4}$	0.000929	0.056420	0.100827	0.000147	0.466825	3.454504	1.055870	0.642465
	$1 \times 10^{-5}$	0.000010	0.000750	0.001372	0.000002	0.005924	0.037676	0.013907	0.008679
	$1 \times 10^{-6}$	0.000050	0.003096	0.004300	0.000008	0.028140	0.185226	0.066216	0.027549

En la Tabla 4.7 se observa la desviación porcentual de los coeficientes rotodinámicos identificados a diferentes velocidades de operación del rotor. La desviación se calculó

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

realizando un promedio de los valores identificados a partir de un tiempo de 0.02 s hasta un tiempo final de 1 s. Cabe destacar que en los valores promedio identificados se tomaron en cuenta los estados transitorios, los cuales se pueden reducir incrementando el tiempo de muestreo, como se comprobó anteriormente.

Tabla 4.7: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación.

rpm	S	Desviación porcentual (%)							
		$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	1	0.000929	0.056420	0.100827	0.000147	0.466825	3.454504	1.055870	0.642465
	2	0.001116	0.004802	0.212925	0.000706	0.077115	0.272534	0.414202	0.368662
1000	1	0.000902	0.049891	0.168596	0.000216	0.257895	1.914106	0.992904	0.627142
	2	0.000546	0.003421	0.170641	0.001332	0.039271	0.079076	0.450127	0.176872
2000	1	0.000463	0.014800	0.023663	0.000039	0.037432	0.473469	0.082739	0.039296
	2	0.000237	0.001581	0.022487	0.000118	0.011191	0.017144	0.025949	0.008983
5000	1	0.000592	0.021781	0.257227	0.000190	0.021522	0.273690	0.187879	0.203254
	2	0.000629	0.002592	0.107171	0.000411	0.023557	0.017350	0.118018	0.021520
10000	1	0.011390	0.253813	5.754344	0.002899	0.086144	2.763203	0.620932	2.395509
	2	0.001954	0.005903	0.457204	0.001205	0.067596	0.029547	0.365867	0.032644
20000	1	0.003619	0.066541	0.797772	0.000393	0.215602	0.713838	0.779276	0.291658
	2	0.006558	0.015359	0.712770	0.002243	0.311813	0.155298	1.658505	0.122840
30000	1	0.003561	0.275115	0.864736	0.001320	0.897452	1.398468	4.425438	0.544167
	2	0.009822	0.029805	1.342294	0.002679	0.440994	0.302633	0.982794	0.266821

S= número de soporte.

Para demostrar que el tiempo de muestreo afecta la identificación, se realizaron nuevamente las simulaciones donde están las desviaciones más grandes, incrementando a 100,000 muestras por segundo. Los resultados se muestran en la Tabla 4.8, se observa que la desviación porcentual disminuyó a valores menores de 1 %.

Tabla 4.8: Comparación de la desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 y 100,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación.

rpm	$\Delta t$	Desviación porcentual (%)							
		$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	$1 \times 10^{-4}$	0.000929	0.056420	0.100827	0.000147	0.466825	3.454504	1.055870	0.642465
	$1 \times 10^{-5}$	0.000010	0.000750	0.001372	0.000002	0.005924	0.037676	0.013907	0.008679
1000	$1 \times 10^{-4}$	0.000902	0.049891	0.168596	0.000216	0.257895	1.914106	0.992904	0.627142
	$1 \times 10^{-5}$	0.000021	0.001715	0.002133	0.000003	0.009071	0.044528	0.012245	0.007746
10000	$1 \times 10^{-4}$	0.011390	0.253813	5.754344	0.002899	0.086144	2.763203	0.620932	2.395509
	$1 \times 10^{-5}$	0.000342	0.004972	0.011669	0.000006	0.005700	0.084540	0.005983	0.004923
20000	$1 \times 10^{-4}$	0.006558	0.015359	0.712770	0.002243	0.311813	0.155298	1.658505	0.122840
	$1 \times 10^{-5}$	0.000127	0.000316	0.013813	0.000045	0.005406	0.003104	0.023509	0.002265
30000	$1 \times 10^{-4}$	0.003561	0.275115	0.864736	0.001320	0.897452	1.398468	4.425438	0.544167
	$1 \times 10^{-5}$	0.000058	0.004915	0.018588	0.000043	0.013270	0.020591	0.102596	0.011301

### 4.1.4 Identificación algebraica considerando la fuerza de excitación igual con cero

La fuerza de excitación del sistema rotodinámico depende de la masa de desbalance presente en el sistema y la excentricidad de ésta, y conocer estos parámetros resulta complejo. Una de las principales ventajas del identificador algebraico es que no necesita conocer el desbalance presente en el sistema; las simulaciones anteriores se hicieron considerando como dato de

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

entrada el desbalance en el identificador. En la Tabla 4.9, se muestran los resultados de las mismas simulaciones realizadas, con la única diferencia que se considera como cero la fuerza de excitación  $F = 0$  en el identificador algebraico.

Tabla 4.9: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	0.000929	0.056420	0.100827	0.000147	0.466825	3.454504	1.055870	0.642465
1000	0.000902	0.049891	0.168596	0.000216	0.257895	1.914106	0.992904	0.627142
2000	0.000463	0.014800	0.023663	0.000039	0.037432	0.473469	0.082739	0.039296
5000	0.000592	0.021781	0.257227	0.000190	0.021522	0.273690	0.187879	0.203254
10000	0.011390	0.253813	5.754344	0.002899	0.086144	2.763203	0.620932	2.395509
20000	0.003619	0.066541	0.797772	0.000393	0.215602	0.713838	0.779276	0.291658
30000	0.003561	0.275115	0.864736	0.001320	0.897452	1.398468	4.425438	0.544167

Tabla 4.10: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , soporte 2.

rpm	Desviación porcentual (%)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	0.001116	0.004802	0.212925	0.000706	0.077115	0.272534	0.414202	0.368662
1000	0.000546	0.003421	0.170641	0.001332	0.039271	0.079076	0.450127	0.176872
2000	0.000237	0.001581	0.022487	0.000118	0.011191	0.017144	0.025949	0.008983
5000	0.000629	0.002592	0.107171	0.000411	0.023557	0.017350	0.118018	0.021520
10000	0.001954	0.005903	0.457204	0.001205	0.067596	0.029547	0.365867	0.032644
20000	0.006558	0.015359	0.712770	0.002243	0.311813	0.155298	1.658505	0.122840
30000	0.009822	0.029805	1.342294	0.002679	0.440994	0.302633	0.982794	0.266821

En las dos tablas anteriores se puede ver que la desviación porcentual de los coeficientes identificados considerando cero la fuerza de excitación es exactamente igual que la identificación con la fuerza de excitación real. Por tal motivo se concluye que el identificador de los coeficientes rotodinámicos no necesita conocer el parámetro del desbalance del sistema, lo que lo hace muy conveniente ya que conocer el desbalance y excentricidad del sistema resulta complejo.

### 4.1.5 Identificación algebraica en función de los grados de libertad del sistema

En las simulaciones anteriores se utilizó un vector de desplazamientos de (56,1), es decir que incluye los 56 grados de libertad. De acuerdo con la discretización del rotor utilizada para las simulaciones (ver Figura 4.1), no presenta problema utilizar el vector completo de los desplazamientos nodales en la parte numérica, más que el tiempo de cómputo, ya que la respuesta del sistema se obtiene utilizando el método de integración numérica de Newmark. Sin embargo, en la parte experimental es poco factible el obtener los desplazamientos de todos los nodos, ya que se necesitaría utilizar un sensor por cada grado de libertad, siendo poco factible su implementación. Este problema se puede resolver de dos maneras, la primera es mediante un análisis modal y la segunda forma es mediante un análisis matricial. En el segundo caso, identificar hasta cuánto se puede reducir el vector de desplazamientos nodales y las matrices del sistema (masa, amortiguamiento y rigidez) sin afectar la identificación algebraica de los parámetros de los soportes. Se trabajó con la segunda alternativa, reducir el

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

vector de desplazamientos. Después de realizar diferentes pruebas se concluyó que es suficiente con la información de dos nodos, el nodo donde se encuentra el soporte y el nodo adyacente.

Tabla 4.11: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de dos nodos, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	0.000929	0.056420	0.100827	0.000147	0.466825	3.454504	1.055870	0.642465
1000	0.000902	0.049891	0.168596	0.000216	0.257895	1.914106	0.992904	0.627142
2000	0.000463	0.014800	0.023663	0.000039	0.037432	0.473469	0.082739	0.039296
5000	0.000592	0.021781	0.257227	0.000190	0.021522	0.273690	0.187879	0.203254
10000	0.011390	0.253813	5.754344	0.002899	0.086144	2.763203	0.620932	2.395509
20000	0.003619	0.066541	0.797772	0.000393	0.215602	0.713838	0.779276	0.291658
30000	0.003561	0.275115	0.864736	0.001320	0.897452	1.398468	4.425438	0.544167

Tabla 4.12: Desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de dos nodos, soporte 2.

rpm	Desviación porcentual (%)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	0.001116	0.004802	0.212925	0.000706	0.077115	0.272534	0.414202	0.368662
1000	0.000546	0.003421	0.170641	0.001332	0.039271	0.079076	0.450127	0.176872
2000	0.000237	0.001581	0.022487	0.000118	0.011191	0.017144	0.025949	0.008983
5000	0.000629	0.002592	0.107171	0.000411	0.023557	0.017350	0.118018	0.021520
10000	0.001954	0.005903	0.457204	0.001205	0.067596	0.029547	0.365867	0.032644
20000	0.006558	0.015359	0.712770	0.002243	0.311813	0.155298	1.658505	0.122840
30000	0.009822	0.029805	1.342294	0.002679	0.440994	0.302633	0.982794	0.266821

### 4.1.6 Filtro invariante en el tiempo

Como se puede observar en las Figuras 4.2 a la 4.9 que durante la identificación existen estados transitorios los cuales se muestran como perturbaciones. Generalmente son a causa del ruido, el filtrado básico utilizado en el desarrollo del identificador algebraico es la integración. Como se mostró en el desarrollo del identificador se utiliza la integración sucesiva para generar las ecuaciones necesarias para poder resolver el problema de la identificación, estas integraciones proporcionan un efecto de filtrado básico adicional en las ecuaciones. Además, es posible realizar integraciones adicionales sobre el identificador esto con el fin de mejorar la relación señal ruido (SNR).

A pesar de este filtrado, los términos que pertenecen al denominador del identificador aún pueden cruzar por el valor de cero, causando un cociente indeterminado y, en algunos casos, un proceso de identificación poco confiable. Para evitar este problema, se utiliza un enfoque de filtro invariante, el cual está sujeto a tres supuestos:

1. Los parámetros son constantes localmente.
2. Se conocen los signos paramétricos.
3. Solo nos interesa calcular sus magnitudes.

Considere el siguiente identificador para un determinado parámetro positivo  $a > 0$ :

$$a = \frac{n(t)}{d(t)} \quad (4.16)$$

Si tomamos la integral del valor absoluto de las funciones  $n(t)$  y  $d(t)$ , la fracción se mantiene invariante:

$$a = \frac{\int_0^t |n(t)| dt}{\int_0^t |d(t)| dt} \quad (4.17)$$

Aplicando la metodología descrita, se obtiene un nuevo identificador con filtro invariante el cual evita los cruces por cero e induce un comportamiento más suave. En las Figuras 4.10 y 4.11 se muestra una comparación del comportamiento entre el identificador original (línea azul) y el comportamiento del nuevo identificador con filtrado invariante (línea negra), se observa como desaparecen los estados transitorios. En la Tabla 4.13 se muestra la desviación porcentual para tres incrementos de tiempo diferentes, las desviaciones porcentuales se reducen al no considerar los estados transitorios.

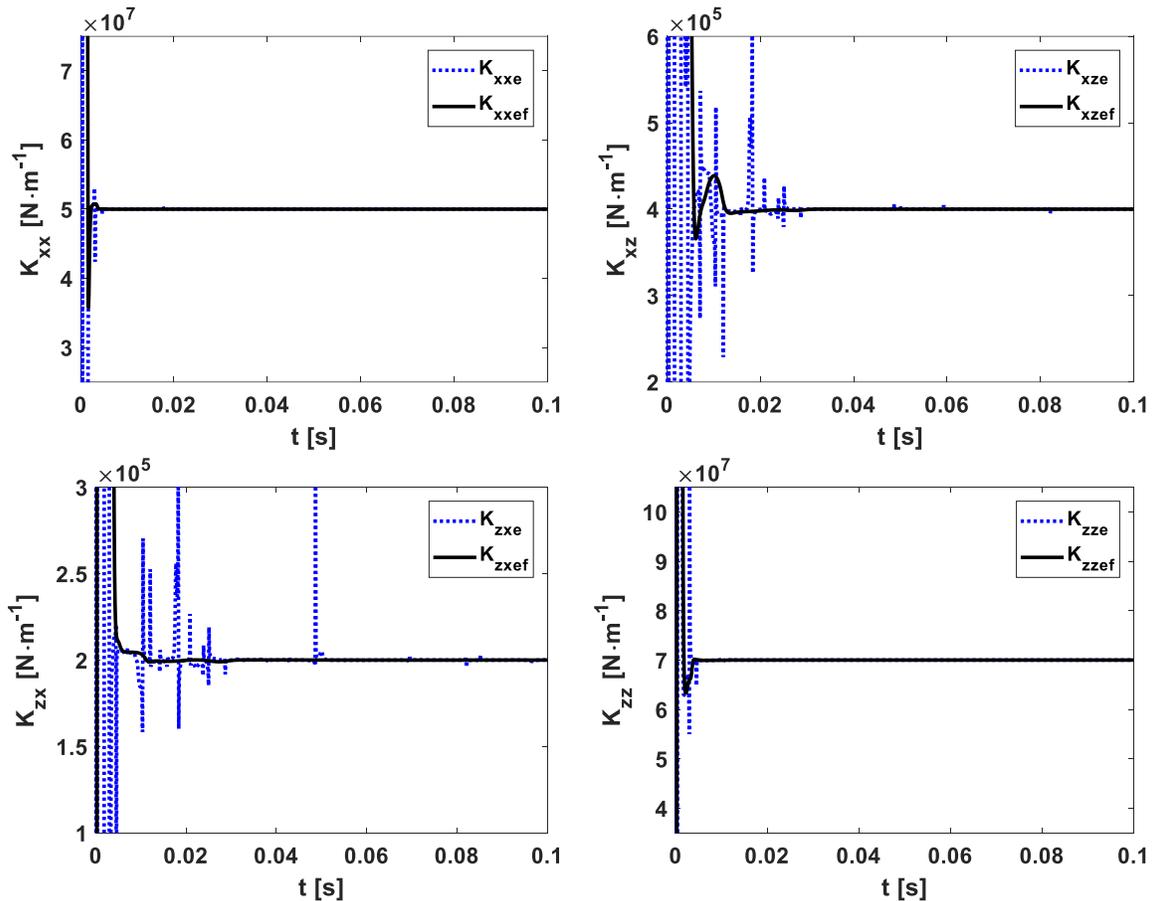


Figura 4.10: Comparación entre los coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante ( $K_{xxef}, K_{xzef}, K_{zxef}, K_{zxef}$ ) y sin utilizar filtrado ( $K_{xxe}, K_{xze}, K_{zxe}, K_{zze}$ ) a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, configuración 3.

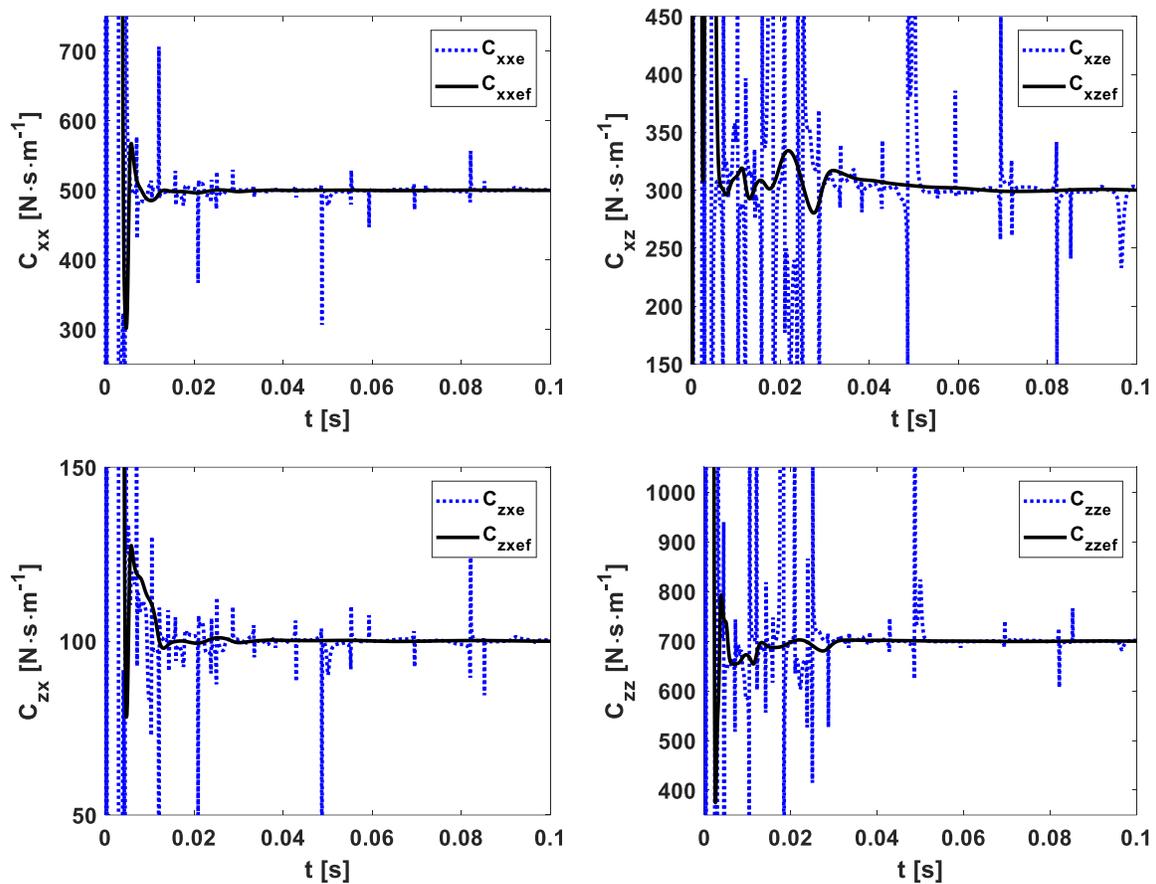


Figura 4.11: Comparación entre los coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados utilizando filtro invariante ( $C_{xxef}$ ,  $C_{xzef}$ ,  $C_{zxef}$ ,  $C_{zzef}$ ) y sin utilizar filtrado ( $C_{xxe}$ ,  $C_{xze}$ ,  $C_{zxe}$ ,  $C_{zze}$ ) a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, configuración 3.

Tabla 4.13: Desviación porcentual de los valores identificados a diferentes pasos de muestreo, utilizando un filtro invariante soporte 1, configuración 3.

rpm	$\Delta t$	Desviación porcentual (%)							
		$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	$1 \times 10^{-4}$	0.000053	0.004341	0.003869	0.000014	0.013416	0.200786	0.026881	0.023443
	$1 \times 10^{-5}$	0.000001	0.000044	0.000045	0	0.000146	0.001969	0.000305	0.000275
	$1 \times 10^{-6}$	0	0.000011	0.000016	0	0.000099	0.001192	0.000196	0.000202

#### 4.1.7 Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos con las pendientes nodales aproximadas

Como se mencionó anteriormente el identificador algebraico requiere únicamente como dato de entrada las propiedades físicas y geométricas del rotor, así como también los desplazamientos nodales. Se tienen cuatro grados de libertad por cada nodo del sistema, siendo los dos primeros desplazamientos lineales y los otros dos desplazamientos angulares, mejor conocidos con pendientes nodales ver Ec. (4.18).

$$\delta_i = \{u_i, w_i, \theta_i, \psi_i\}^T \quad (4.18)$$

Experimentalmente los desplazamientos laterales del rotor se pueden obtener mediante sensores de desplazamiento (desplazómetros). Por otro lado, no es posible determinar de forma experimental las pendientes nodales. Sin embargo, si se conocen los desplazamientos laterales de tres nodos adyacentes, se pueden aproximar las pendientes nodales a partir de las Ecs. (4.19) y (4.20):

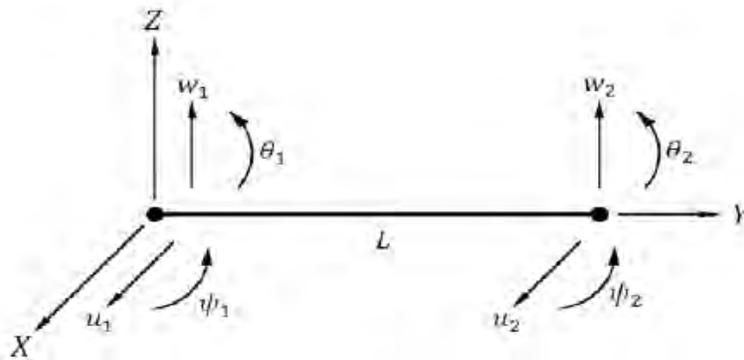


Figura 4.12: Elemento finito tipo viga, de cuatro grados de libertad por nodo.

$$\theta_i = \frac{\partial w_i}{\partial y} \quad (4.19)$$

$$\varphi_i = -\frac{\partial u_i}{\partial y} \quad (4.20)$$

Las Ecs. (4.19) y (4.20) se solucionan utilizando un enfoque de diferencias finitas [63].

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (4.21)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (4.22)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (4.23)$$

Las Ecs. (4.21)-(4.23) son llamadas diferencias finitas. La Ec. (4.21) se recomienda para hallar la derivada del punto inicial de una curva, la Ec. (4.22) se recomienda para hallar la derivada del punto final de una curva, y la Ec. (4.23) es la ecuación de diferencias centrales, y se recomienda para hallar la derivada en los puntos intermedios de una curva. En el caso cuando las diferencias  $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = \Delta x$  son constantes para todo el dominio, las ecuaciones de diferencias finitas quedan:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (4.25)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4.26)$$

#### 4.1.7.1 Identificación considerando coeficientes cruzados igual con cero

En las simulaciones descritas a continuación se procede a identificar los coeficientes rotodinámicos utilizando las pendientes nodales aproximadas y considerando diferentes valores de los coeficientes rotodinámicos en cada simulación. Es decir, en la primera y segunda simulaciones se consideran coeficientes rotodinámicos cruzados igual con cero. Esto con el objetivo de verificar la eficacia del identificador algebraico ante diferentes situaciones.

##### 4.1.7.1.1 Simulación 1

Se procede a identificar utilizando las ecuaciones de diferencias finitas para aproximar las pendientes nodales en función de los desplazamientos laterales y utilizando la configuración del sistema rotor chumacera de la Figura 4.1. Se consideran tanto las propiedades mecánicas y geométricas (Tabla 4.1 y Tabla 4.2) del sistema rotodinámico, como las propiedades de los soportes (Tabla 4.14), en la cual los coeficientes cruzados son igual con cero.

Tabla 4.14: Coeficientes rotodinámicos, simulación 1.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 5 \times 10^7$	$c_{xx} = 5 \times 10^2$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$
$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$c_{zz} = 7 \times 10^2$

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

Las desviaciones porcentuales de los parámetros identificados respecto a los reales utilizando 10,000 muestras/s se muestran en la Tabla 4.15, mientras que en la Tabla 4.16 se puede apreciar la desviación porcentual entre las pendientes nodales reales y las aproximadas, se puede notar que es muy poca la diferencia y aun así logra impactar en los resultados de los parámetros identificados. Esta misma identificación se repitió cambiando únicamente las muestras utilizadas a 100,000 muestras/s, esto con el objetivo de verificar si es posible mejorar los resultados (ver Tabla 4.17 y

Tabla 4.18) pero las desviaciones permanecieron muy cercanas y aumentó el tiempo de cómputo, por lo que es recomendable utilizar 10,000 muestras/s.

Tabla 4.15: Simulación 1, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)			
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
600	1.69	1.55	10.31	1.49
1000	1.84	2.13	29.89	229.07
2000	1.78	1.84	28.67	21.70
5000	1.81	1.97	14.76	12.11
10000	2.07	1.90	22.29	3.43
20000	1.94	1.83	103.75	106.16
30000	3.20	3.31	2199.77	1721.25

Tabla 4.16: Simulación 1, desviación porcentual de entre las pendientes calculadas y las aproximadas, 10,000 muestras/s.

rpm	Desviación porcentual (%)			
	$\theta_1$	$\varphi_1$	$\theta_2$	$\varphi_2$
600	0.06	0.05	0.03	0.04
1000	0.09	0.05	0.03	0.04
2000	0.06	0.05	0.04	0.03
5000	0.06	0.07	0.03	0.04
10000	0.59	0.90	0.37	0.46
20000	4.67	3.31	1.00	0.23
30000	4.29	2.84	0.20	0.30

Tabla 4.17: Simulación 1, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 100,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)			
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
600	1.68	1.87	23.75	53.27
1000	1.72	1.41	60.69	25.85
2000	1.60	7.21	29.42	13.92
5000	1.85	1.97	3.53	9.44
10000	2.05	2.02	2.59	0.41
20000	0.03	3.32	1096.41	3573.76
30000	1.93	2.15	5.86	32.94

Tabla 4.18: Simulación 1, desviación porcentual de entre las pendientes calculadas y las aproximadas, 100,000 muestras/s.

rpm	Desviación porcentual (%)			
-----	---------------------------	--	--	--

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

	$\theta_1$	$\varphi_1$	$\theta_2$	$\varphi_2$
600	0.08	0.08	0.12	0.09
1000	0.08	0.08	0.31	0.09
2000	0.06	0.05	0.04	0.03
5000	0.08	0.10	0.11	0.10
10000	0.66	1.56	2.07	0.60
20000	29.01	15.36	1.01	0.39
30000	4.58	2.96	0.40	0.43

### 4.1.7.1.2 Simulación 2

Utilizando la misma configuración de la simulación 1, únicamente cambiando los parámetros de los soportes por los de la Tabla 4.19, se utilizan los mismos parámetros en ambos soportes.

Tabla 4.19: Coeficientes rotodinámicos, simulación 2.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 5 \times 10^5$	$c_{xx} = 10 \times 10^2$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$
$k_{zz} = 5 \times 10^4$	$c_{zz} = 14 \times 10^2$

En las Tablas 4.20 y 4.21 se observan los resultados obtenidos utilizando 10,000 muestras/s y 100,000 muestras/s. se puede notar que las desviaciones porcentuales son aceptables, pero esto se debe principalmente que no se consideran los coeficientes cruzados para la identificación algebraica.

Tabla 4.20: Simulación 2, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)			
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
600	2.12	5.43	2.01	1.41
1000	2.20	4.24	1.46	2.98
2000	3.74	5.44	5.99	4.09
5000	3.73	16.44	14.72	4.18
10000	4.49	58.33	3.92	1.43
20000	1.66	6.64	4.97	15.05
30000	1.78	3.68	1.53	1.39

Tabla 4.21: Simulación 2, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 100,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)			
-----	---------------------------	--	--	--

Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio  
Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
600	2.12	5.46	2.01	1.41
1000	2.42	5.12	1.78	1.37
2000	2.72	7.81	1.79	1.90
5000	2.91	8.65	21.79	2.33
10000	1.75	17.36	5.82	6.48
20000	3.05	1.54	7.81	1.89
30000	2.55	2.56	4.75	1.77

#### 4.1.7.1.3 Simulación 3

En esta simulación se considera la misma configuración del sistema rotor-chumacera, se le agregan las masas de desbalance de la Tabla 4.5 y los parámetros de los soportes de la Tabla 4.3 y

Tabla 4.4, se consideran distintos coeficientes para cada soporte, los desviaciones porcentuales a las diferentes velocidades y para 10,000 muestras/s y 100,000 muestras/s se muestra en la Tabla 4.22 y Tabla 4.23, se puede notar que estas desviaciones son mayores que las de las simulación 1 y 2, esto se debe principalmente que esta simulación se consideran los coeficientes cruzados.

Tabla 4.22: Simulación 3, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	1.76	5.08	4.62	1.67	25.74	230.22	184.15	20.75
1000	2.34	0.94	167.41	1.87	16.90	1438.39	785.06	655.23
2000	1.65	3.63	0.75	1.81	13.38	87.43	202.73	1.61
5000	1.93	9.96	2.44	1.84	14.48	20.72	88.01	1.52
10000	51.87	1036.06	3556.09	3.52	56.94	12282.11	113.20	1422.18
20000	10.38	61.73	1867.72	1.89	63.08	1832.48	962.40	726.61
30000	1.87	27.89	28.22	1.51	29.74	355.24	106.73	188.14

Tabla 4.23: Simulación 3, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 100,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	1.68	10.13	11.70	1.67	108.60	52.43	204.31	84.42
1000	1.68	7.29	44.23	2.09	27.82	45.13	1798.99	163.04
2000	1.72	0.53	0.81	1.82	5.02	11.25	226.01	1.92
5000	1.88	2.88	4.19	1.80	8.94	45.82	105.23	8.08
10000	1.39	0.21	238.84	1.98	57.66	180.84	542.29	92.93
20000	0.26	64.92	221.94	1.42	3.10	577.86	667.76	15.58
30000	1.31	100.83	325.30	0.70	121.68	4.57	1870.89	103.20

De las Figuras y Tablas de esta sección se puede concluir que un pequeño cambio en las pendientes nodales produce grandes cambios en los parámetros identificados, esto se debe a

que el sistema es un sistema mal acondicionado. Por tal motivo es necesario identificar los parámetros en función del número de condición del sistema como se verá más adelante. Se observa que, durante la estimación, se obtienen algunos valores grandes esto es debido al mal acondicionamiento de las ecuaciones de los identificadores algebraicos. Sira-Ramírez *et al.* [64] proponen utilizar un subsistema de conexión y desconexión en función de un parámetro centinela el cual debe ser conocido, esto con el fin de garantizar que los parámetros buscados son los correctos, por otra parte, Trapero Arenas *et al.* [65] realizan un análisis del tiempo requerido para obtener la estimación de los parámetros en función del número de condición de la matriz involucrada en el sistema de ecuaciones del identificador algebraico.

#### 4.1.7.1.4 Simulación 4

De las simulaciones anteriores se puede notar que el identificador si converge a los parámetros buscados para el caso de los coeficientes de rigidez, tiene desviaciones por arriba del 5% para algunos casos de los coeficientes cruzados de rigidez, por otra parte la identificación de los coeficientes de amortiguamiento presenta más dificultad, prácticamente todas sus desviaciones están por arriba del 5%, esto se debe que al comparar los valores de amortiguamiento contra los de rigidez estos son valores mucho menores, por tal razón se realiza una cuarta simulación considerando valores altos de amortiguamiento tomados de la literatura [66].

Para esta simulación se considera la misma configuración anterior, lo único que cambia son los valores de los soportes (Ver Tabla 4.24), los cuales se consideran idénticos. Los resultados obtenidos en la Tabla 4.25 demuestran que el identificador converge para los ocho coeficientes rotodinámicos a los valores correctos, con desviaciones porcentuales en 1% y 2% para la mayoría de las velocidades, para el caso de 20, 000 y 30,000 rpm se tienen desviaciones entre 1% y 6%, que son valores aceptables.

Tabla 4.24: Coeficientes rotodinámicos, soporte 1 y 2.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 7.8128 \times 10^6$	$c_{xx} = 0.2006 \times 10^6$
$k_{xz} = 38.9999 \times 10^6$	$c_{xz} = 0.0369 \times 10^6$
$k_{zx} = -33.6307 \times 10^6$	$c_{zx} = 0.0369 \times 10^6$
$k_{zz} = 13.9253 \times 10^6$	$c_{zz} = 0.1846 \times 10^6$

Tabla 4.25: Simulación 4, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, quitando los datos atípicos, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
20000	1.2	1.5	1.8	2.1	1.0	1.2	1.5	1.8
30000	1.5	1.8	2.1	2.4	1.2	1.5	1.8	2.1

Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio  
Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

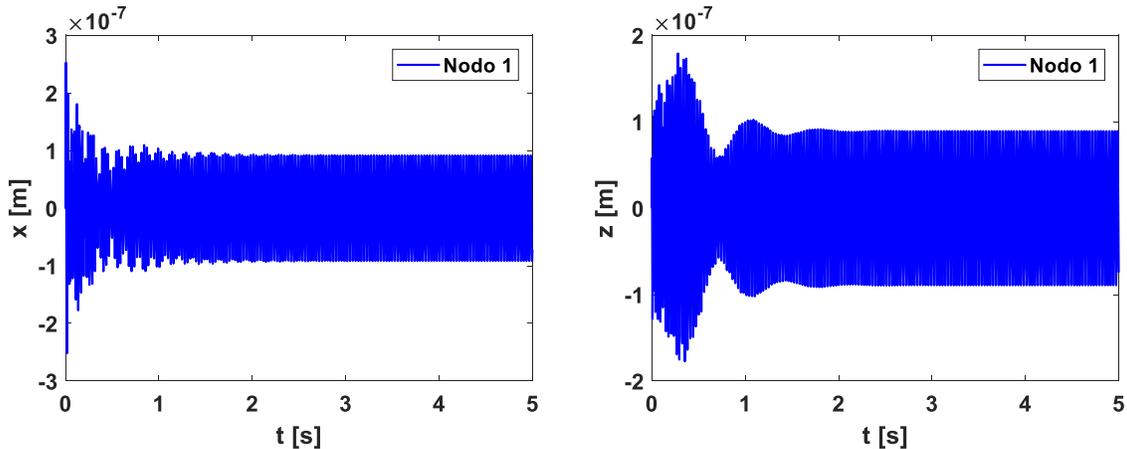
600	1.75	1.68	1.70	1.73	1.72	1.80	1.60	1.70
1000	1.78	1.68	1.70	1.75	1.71	1.75	1.63	1.71
2000	1.86	1.68	1.70	1.85	1.70	1.74	1.76	1.73
5000	2.30	1.64	1.72	2.14	1.68	1.15	2.28	1.77
10000	2.52	1.75	1.84	2.50	1.78	1.14	2.90	1.93
20000	5.55	1.94	2.26	4.64	2.02	1.72	6.73	2.56
30000	5.22	2.07	2.24	4.46	2.14	1.17	6.46	2.52

De los resultados que se muestran en la Tabla 4.25 se concluye que el identificador es capaz de determinar por completo los coeficientes rotodinámicos, cuando se consideran parámetros de rigidez y amortiguamientos elevados, en contraste con las simulaciones anteriores en las que por lo general identifica solo coeficientes de rigidez.

#### 4.1.8 Identificación algebraica a velocidad constante utilizando pendientes aproximadas y filtro invariante e identificando en función del número de condición

En esta simulación se considera la misma configuración del sistema rotor-chumacera, se le agregan las masas de desbalance de la Tabla 4.5 y los parámetros de los soportes de la Tabla 4.3 y

Tabla 4.4, se consideran distintos coeficientes para cada soporte, los resultados se muestran a continuación. En la Figura 4.13 y 4.14 se muestran los desplazamientos y las pendientes nodales a utilizar en el proceso de identificación algebraica.



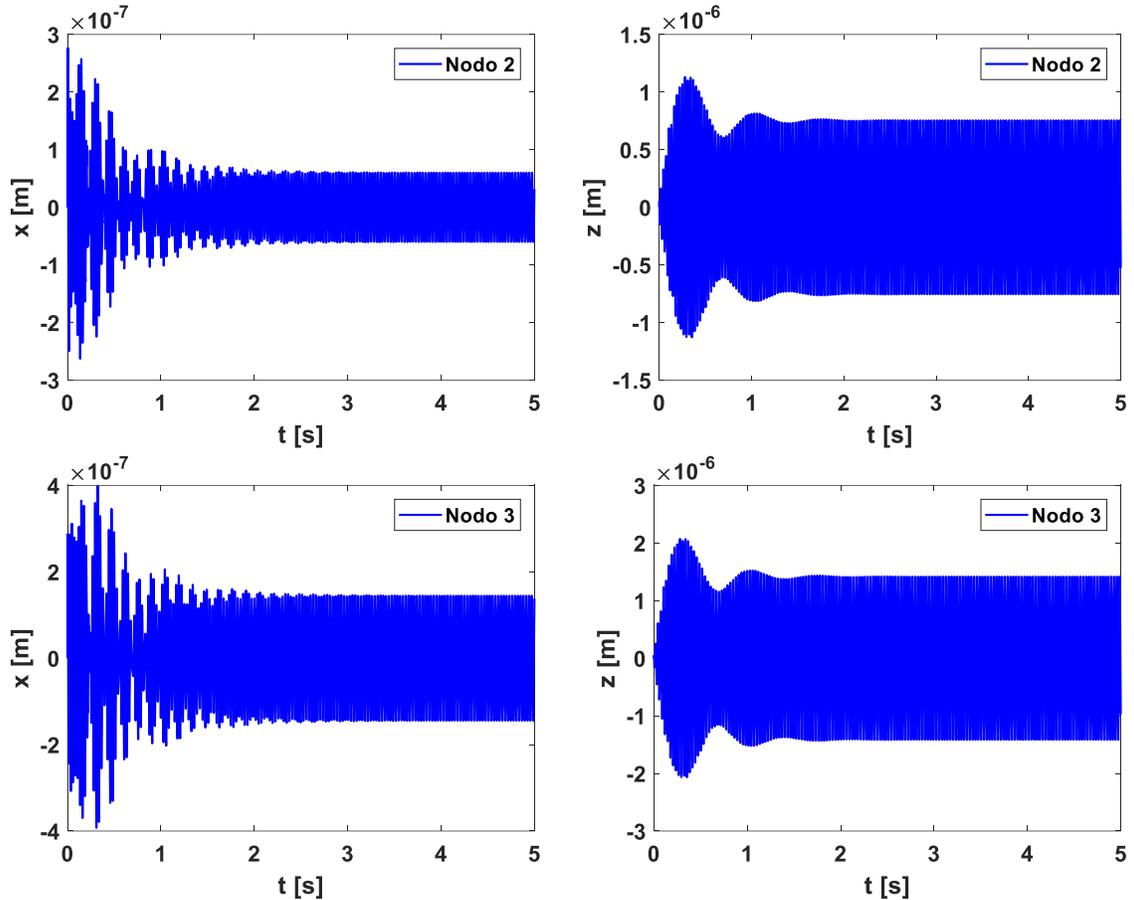
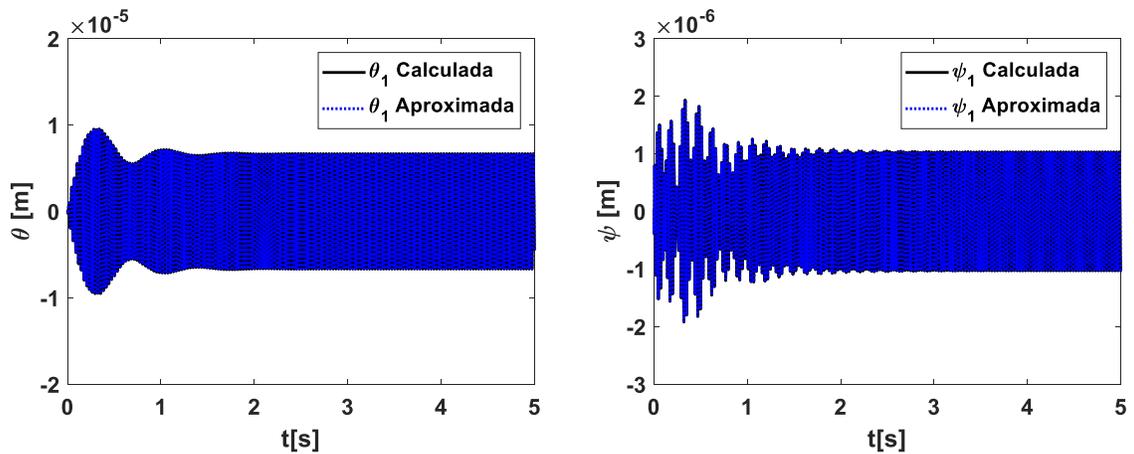


Figura 4.13: Desplazamientos nodales a una velocidad de 2,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

Se puede notar en la Figura 4.14 que las pendientes nodales calculadas y las aproximadas son prácticamente idénticas. En el proceso de identificación se utilizarán las aproximadas debido a que en la parte experimental no se contarán con las reales, sino con una aproximación a partir de los desplazamientos laterales.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

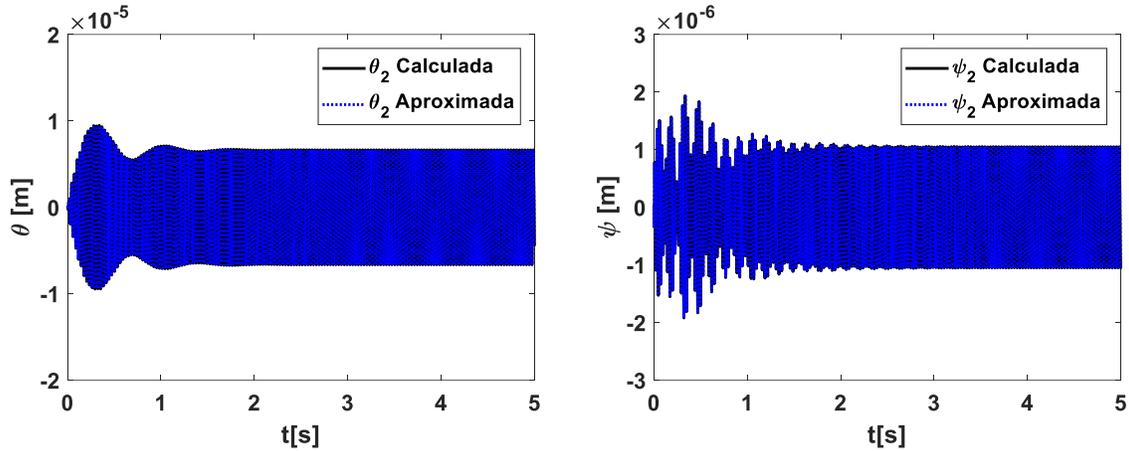
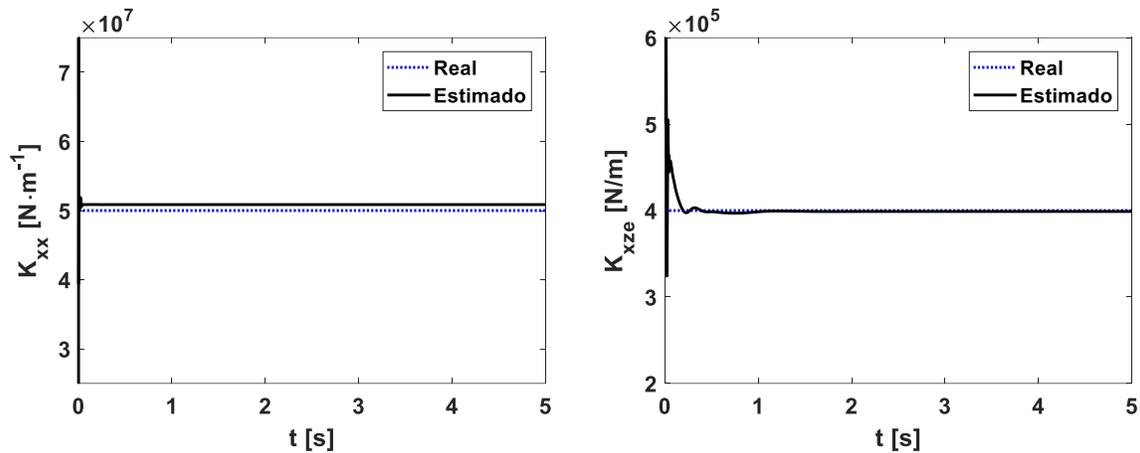


Figura 4.14: Comparación entre las pendientes calculas y las aproximadas a una velocidad de 2000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s.

En la Figura 4.15 y 4.16 se muestran los resultados de la identificación algebraica utilizando las pendientes nodales aproximadas, una velocidad de 2,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, e identificando en el soporte uno, se puede notar una identificación estable, libre de perturbaciones, se resalta que se utiliza el filtro invariante para eliminar las perturbaciones no deseadas. También se aprecia que las mayores diferencias entre los parámetros reales y estimados se presentan en los coeficientes de amortiguamiento.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

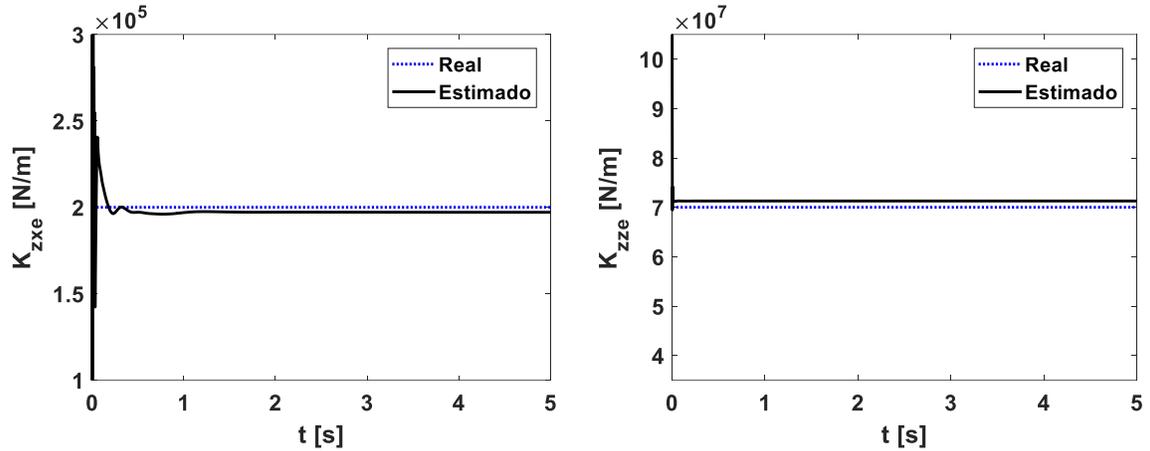


Figura 4.15: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 2,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

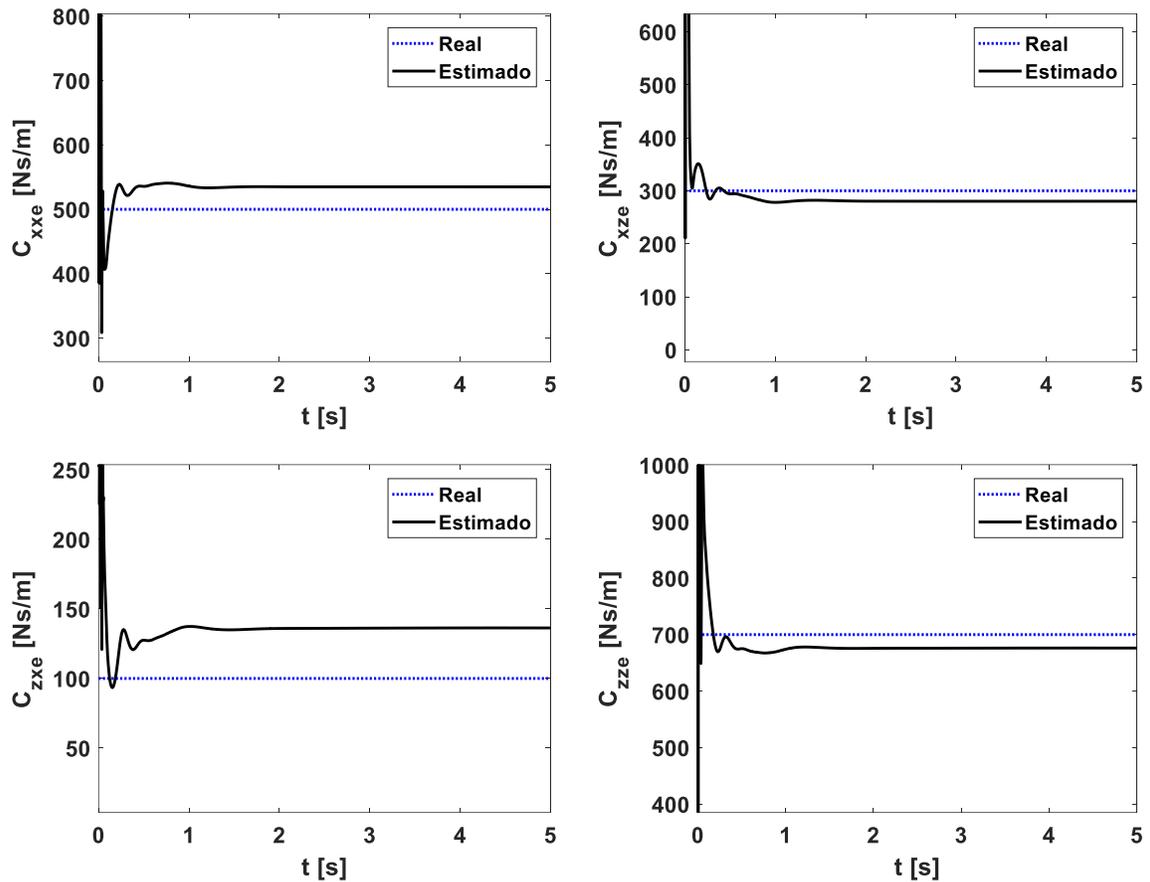


Figura 4.16: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 2,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

En la Tabla 4.27 se muestra la desviación porcentual de los coeficientes identificados (Tabla 4.26) a diferentes velocidades, utilizando pendientes aproximadas y el filtro invariante

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

descrito anteriormente, se puede notar que a la velocidad de 2,000 rpm se obtienen los mejores resultados. Esto se debe a que esta velocidad el número de condición de la matriz involucrada en el algoritmo algebraico es menor y se muestra más estable, es decir no presenta tantas oscilaciones, como a otras velocidades.

Tabla 4.26: Configuración 3, Parámetros identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, filtro invariante, soporte 1.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	$5.09 \times 10^7$	$4.10 \times 10^5$	$2.02 \times 10^5$	$7.12 \times 10^7$	$6.27 \times 10^2$	$1.65 \times 10^3$	$2.98 \times 10^2$	$9.06 \times 10^2$
1000	$5.09 \times 10^7$	$4.07 \times 10^5$	$2.04 \times 10^5$	$7.12 \times 10^7$	$5.93 \times 10^2$	$1.04 \times 10^3$	$3.39 \times 10^2$	$8.45 \times 10^2$
2000	$5.09 \times 10^7$	$4.04 \times 10^5$	$2.00 \times 10^5$	$7.13 \times 10^7$	$5.27 \times 10^2$	$3.79 \times 10^2$	$1.31 \times 10^2$	$7.00 \times 10^2$
5000	$5.10 \times 10^7$	$3.79 \times 10^5$	$1.99 \times 10^5$	$7.13 \times 10^7$	$5.68 \times 10^2$	$3.90 \times 10^2$	$1.94 \times 10^2$	$7.19 \times 10^2$
10000	$5.11 \times 10^7$	$3.89 \times 10^5$	$2.37 \times 10^5$	$7.12 \times 10^7$	$5.16 \times 10^2$	$1.04 \times 10^3$	$5.15 \times 10^2$	$7.19 \times 10^2$
20000	$5.06 \times 10^7$	$5.56 \times 10^5$	$5.00 \times 10^5$	$7.10 \times 10^7$	$6.47 \times 10^2$	$1.02 \times 10^3$	$9.20 \times 10^2$	$9.02 \times 10^2$
30000	$5.08 \times 10^7$	$5.28 \times 10^5$	$6.24 \times 10^5$	$7.10 \times 10^7$	$1.13 \times 10^3$	$1.15 \times 10^3$	$1.32 \times 10^3$	$1.69 \times 10^3$

Tabla 4.27: Configuración 3, desviación porcentual de los valores identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, con  $F = 0$ , considerando los grados de libertad de tres nodos, utilizando pendientes aproximadas, filtro invariante, soporte 1.

rpm	Desviación porcentual (%)								Error acumulado(%)
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$	
600	1.73	3.20	2.81	1.70	25.43	449.29	197.97	31.56	713.69
1000	1.75	2.47	2.93	1.73	19.22	247.49	238.60	23.34	537.53
2000	1.74	1.81	2.76	1.82	8.16	31.83	31.22	6.13	85.47
5000	1.96	7.85	6.29	1.83	14.05	32.74	94.03	4.66	163.41
10000	2.25	6.21	23.99	1.75	6.86	246.79	415.37	8.10	711.32
20000	1.15	39.62	150.18	1.46	30.60	239.44	820.28	29.61	1312.34
30000	1.58	33.16	211.86	1.48	126.40	282.19	1224.17	142.05	2022.80

En la Figura 4.17 se muestra el comportamiento del número de condición de la matriz de regresión del identificador algebraico, el cual se calcula en cada instante de tiempo y a las diferentes velocidades de rotación. Se puede notar que el número de condición presenta valores altos lo que es señal de un problema mal acondicionamiento de la matriz del identificador. En color amarillo se tiene el número de condición a una velocidad de 2,000 rpm, se observa que de todos es el de menor valor y que se comporta de manera más estable, por tal motivo es que se tiene una mejor identificación de los parámetros buscados a esa velocidad de rotación. Por otra parte, la línea roja que representa una velocidad de 30,000 rpm es la que presenta más oscilaciones y sus desviaciones porcentuales son las más altas.

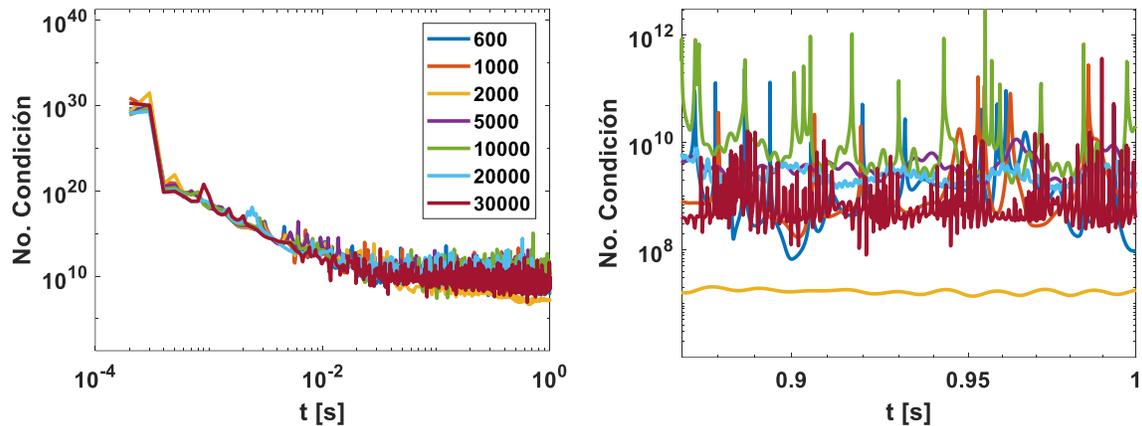


Figura 4.17: Número de condición a diferentes velocidades de rotación en función del tiempo, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, la velocidad en revoluciones por minuto.

Con base en lo descrito anteriormente de la relación que existe entre los parámetros identificados y el número de condición de la matriz del identificador algebraico, se propone estimar los coeficientes rotodinámicos en función del número de condición, es decir elegir una velocidad de rotación la cual entregue un número de condición bajo y estable, con estas condiciones el identificador algebraico proporcionara resultados aceptables. También se propone combinar la técnica de identificación algebraica con algoritmos genéticos, ya que estos han demostrado ser una herramienta útil en la búsqueda y optimización de parámetros.

#### 4.1.9 Conclusión de la sección

De acuerdo con los resultados obtenidos de las simulaciones del identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos utilizando un modelo múltiples grados de libertad a velocidad constante, se concluye que el utilizar las pendientes aproximadas afecta considerablemente los resultados del identificador algebraico en particular cuando se consideran los ocho coeficientes rotodinámicos. Esto se debe principalmente a que se tiene un problema de mal acondicionamiento en las matrices del identificador algebraico, esto es común en los problemas inversos, como es este caso. La solución de este problema es compleja por lo que se opta por probar otros modelos para el desarrollo del identificador algebraico y con esto mejorar los resultados en las simulaciones numéricas y posteriormente en las experimentales.

#### 4.2 Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos utilizando un modelo simplificado de dos grados de libertad a velocidad constante

En la presente sección se desarrolla un identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos utilizando un modelo de dos grados de libertad a velocidad constante, este nuevo identificador únicamente necesita los desplazamientos laterales y a diferencia del desarrollado en la sección anterior no necesita las pendientes nodales, siendo esta su principal ventaja.

#### 4.2.1 Modelo matemático del sistema rotor-cojinete de dos grados de libertad

Siguiendo la metodología propuesta por Lalanne y Ferraris [26] al rotor mostrado en la Figura. 4.18, el modelo matemático correspondiente al sistema rotor-chumacera de dos grados de libertad a velocidad variable se puede expresar de la siguiente manera:

Las expresiones para los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $z$  son respectivamente:

$$\begin{aligned} u(y, t) &= f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \\ w(y, t) &= f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Donde  $q_1$  y  $q_2$  son coordenadas generalizadas independientes y  $f(y)$  es la función de desplazamiento la cual es la primera forma modal de una viga con sección transversal constante simplemente apoyada en ambos extremos.

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} \quad (4.28)$$

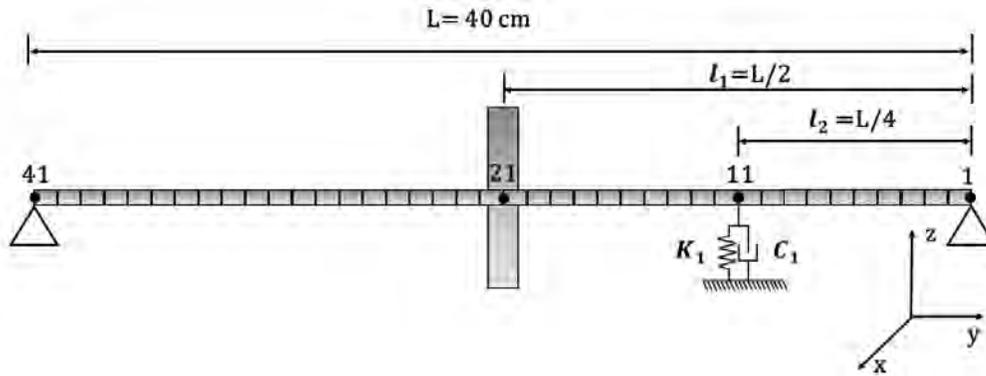


Figura 4.18: Sistema rotodinámico.

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_{xx}f^2(l_2)\dot{q}_1 + k_r q_1 + k_{xx}f^2(l_2)q_1 &= m_u df(l_1)(\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\Omega t + \alpha)) \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_{zz}f^2(l_2)\dot{q}_2 + k_r q_2 + k_{zz}f^2(l_2)q_2 - a\ddot{\phi} q_2 &= m_u df(l_1)(\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) + \ddot{\phi} \sin(\Omega t + \alpha)) \end{aligned} \quad (4.29)$$

De forma matricial

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C_1]f^2(l_2) + [C_2(\Omega)])\{\dot{q}\} + ([K_1]f^2(l_2) + [K_2] + [K_3(\ddot{\phi})])\{q\} = \{F\} \quad (4.30)$$

Donde  $C_1$  es la matriz de amortiguamiento de los soportes,  $\Omega C_2$  son los efectos giroscópicos y, donde  $K_1$  es la matriz de rigidez de los soportes,  $K_2$  es la rigidez del eje y  $[K_3]$  que es un término de rigidez que está en función de la aceleración angular del rotor.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; & [C_1] &= \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 \\ 0 & c_{zz} \end{bmatrix}; & f_1 &= m_u df(l_1)(\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\Omega t + \alpha)) \\
 [C_2] &= \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}; & [K_1] &= \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{zz} \end{bmatrix}; & f_2 &= m_u df(l_1)(\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) + \ddot{\phi} \sin(\Omega t + \alpha)) \\
 [K_2] &= \begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_r \end{bmatrix}; & [K_3] &= \begin{bmatrix} 0 & -a\ddot{\phi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & a &= I_{Dy} g^2(l_1) \\
 q &= \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}; & \{F\} &= \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 4.2.2 Comparación entre el modelo de múltiples grados de libertad y el modelo simplificado de dos grados de libertad

El objetivo de comparar ambos modelos es el de demostrar que con el modelo simplificado se puede tener aproximaciones aceptables y confiables evitando el costo computacional de trabajar con un modelo de elemento finito. Además, es más sencillo y práctico, ya que sus ecuaciones son menos complejas y lo más importante, que en la parte experimental se requieren menos sensores ya que solo se consideran las respuestas horizontal y vertical. Por otra parte, al trabajar con un modelo de múltiples grados de libertad de manera experimental el número de sensores aumenta considerablemente ya que se consideran cuatro grados de libertad por nodo, correspondientes a dos traslaciones y dos grados de libertad de rotación, estos últimos no se pueden medir de manera experimental convirtiéndose en una desventaja. Por estas razones se propone utilizar un modelo simplificado para identificar los coeficientes rotodinámicos.

En la Tabla 4.28 y 4.29 se presentan las propiedades mecánicas, geométricas y parámetros de los soportes que se utilizan en las simulaciones de esta sección.

**Tabla 4.28: Propiedades mecánicas y geométricas del sistema rotodinámico**

Propiedades mecánicas	Geometría del eje	Geometría del disco	
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Radio ( $r_s$ ) = 0.01 m	$e_D$	0.03 m
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L = 0.40 \text{ m}; L_e = 0.01 \text{ m}$	$r_{iD}$	0.01 m
$\nu = 0.30$	$l_1 = 0.20 \text{ m}; L_2 = 0.10 \text{ m}$	$r_{eD}$	0.15 m

**Tabla 4.29: Valores de los coeficientes rotodinámicos**

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 2 \times 10^5$	$c_{xx} = 3 \times 10^2$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$
$k_{zz} = 5 \times 10^5$	$c_{zz} = 7.5 \times 10^2$

En la Figura 4.19 se muestran la respuesta al desbalance entre un modelo de múltiples grados de libertad y un modelo simplificado de dos grados de libertad, se puede notar que son similares en velocidades alejadas de la zona de resonancia, y que las diferencias más notorias se encuentran en velocidades cercanas a la resonancia del sistema rotodinámico.

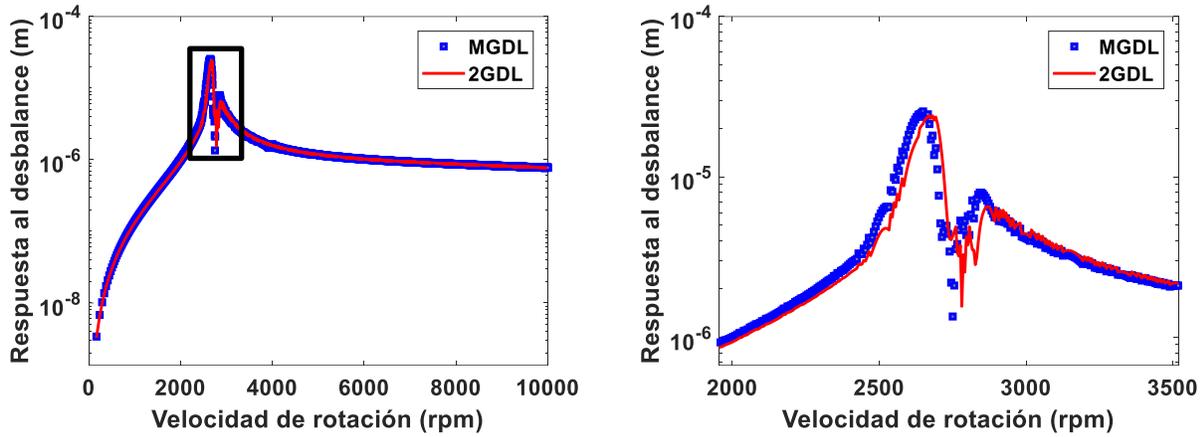


Figura 4.19: Comparación entre el modelo de múltiples grados de libertad y el modelo simplificado de dos grados de libertad.

#### 4.2.3 Modelo matemático del identificador algebraico en línea de los coeficientes rotodinámicos a velocidad constante

La identificación algebraica, es un método que se apoya en el álgebra diferencial y el cálculo operacional para el desarrollo de estimadores, que permiten la determinación de parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. Al considerar que la velocidad de rotación del sistema es constante, la Ec. (4.29) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_{xx}f^2(l_2)\dot{q}_1 + k_r q_1 + k_{xx}f^2(l_2)q_1 &= m_u f(l_1)d\Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_{zz}f^2(l_2)\dot{q}_2 + k_r q_2 + k_{zz}f^2(l_2)q_2 &= m_u f(l_1)d\Omega^2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (4.31)$$

De forma matricial

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C_1]f^2(l_2) + [C_2(\Omega)])\{\dot{q}\} + ([K_1]f^2(l_2) + [K_2])\{q\} = \{F\} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \{F\} &= \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_u f(l_1)d\Omega^2 \sin \Omega t \\ m_u f(l_1)d\Omega^2 \cos \Omega t \end{Bmatrix} \\ \{\delta\} &= \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Para el desarrollo del modelo del identificador en línea, se tomó como base el modelo matemático del comportamiento dinámico del rotor expresado por la Ec. (4.26). Siguiendo la metodología propuesta por Fliess y Sira-Ramírez, se multiplica la Ec. (4.26) por el tiempo al cuadrado  $t^2$  y se integra dos veces con respecto al tiempo  $t$ , dando como resultado la expresión matemática base siguiente:

$$\begin{aligned}
 f^2(l_2)[K_1] \int^{(2)} t^2\{\delta\} + f^2(l_2)[C_1] \left( \int t^2\{\delta\} - 2 \int^{(2)} t\{\delta\} \right) \\
 = -[M]t^2\delta + 4[M] \int t\delta - \Omega[C_2] \int t^2\delta - 2[M] \int^{(2)} \delta \\
 + 2\Omega[C_2] \int^{(2)} t\delta - [K_2] \int^{(2)} t^2\{\delta\} + \int^{(2)} t^2\{F\}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Para la solución de las Ec. (4.33) se requiere igual número de incógnitas y ecuaciones, en este problema en particular se tienen cuatro incógnitas ( $k_{xx}, k_{zz}, c_{xx}, c_{zz}$ ) y solamente dos ecuaciones, por lo tanto, dicha ecuación se integra una vez más para igualar el número de incógnitas y de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 f^2(l_2)[K_1] \int^{(3)} t^2\{\delta\} + f^2(l_2)[C_1] \left( \int^{(2)} t^2\{\delta\} - 2 \int^{(3)} t\{\delta\} \right) \\
 = -[M] \int t^2\delta + 4[M] \int^{(2)} t\delta - \Omega[C_2] \int^{(2)} t^2\delta - 2[M] \int^{(3)} \delta \\
 + 2\Omega[C_2] \int^{(3)} t\delta - [K_2] \int^{(3)} t^2\{\delta\} + \int^{(3)} t^2\{F\}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Donde

$\int^{(N)} \varphi(\sigma_N)$  son integrales iteradas en el tiempo ( $t$ ) de la forma:

$\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{(\sigma_{N-1})} \varphi(\sigma_N) d\sigma_N \dots d\sigma_1$ , con  $\int \varphi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$  y  $N$  un número positivo.

A partir de la Ec. (4.33) y sus integraciones se obtienen dos sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}
 A(t)\Theta_1 &= B_1(t) \\
 P(t)\Theta_2 &= B_2(t)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} & B_1(t) &= \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} & \Theta_1 &= \begin{bmatrix} k_{xx} \\ c_{xx} \end{bmatrix} \\
 P(t) &= \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} & B_2(t) &= \begin{bmatrix} b_3(t) \\ b_4(t) \end{bmatrix} & \Theta_2 &= \begin{bmatrix} k_{zz} \\ c_{zz} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
 a_{11}(t) &= \int^{(2)} t^2 u_i dt; & a_{12}(t) &= \int t^2 u_i dt - 2 \int^{(2)} t u_i dt
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio  
Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

$$\begin{aligned}
 a_{21}(t) &= \int^{(3)} t^2 u_i dt; & a_{22}(t) &= \int^{(2)} t^2 u_i dt - 2 \int^{(3)} t u_i dt \\
 p_{11}(t) &= \int^{(2)} t^2 w_i dt; & p_{12}(t) &= \int t^2 w_i dt - 2 \int^{(2)} t w_i dt \\
 p_{21}(t) &= \int^{(3)} t^2 w_i dt; & p_{22}(t) &= \int^{(2)} t^2 w_i dt - 2 \int^{(3)} t w_i dt
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -[M]t^2 u_i + 4[M] \int t u_i - \Omega[C_2] \int t^2 u_i - 2[M] \int^{(2)} u_i + 2\Omega[C_2] \int^{(2)} t u_i \\
 &\quad - [K_2] \int^{(2)} t^2 u_i + \int^{(2)} t^2 \{F\} \\
 b_2 &= -[M] \int t^2 u_i + 4[M] \int^{(2)} t u_i - \Omega[C_2] \int^{(2)} t^2 u_i - 2[M] \int^{(3)} u_i + 2\Omega[C_2] \int^{(3)} t u_i \\
 &\quad - [K_2] \int^{(3)} t^2 u_i + \int^{(3)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 b_3 &= -[M]t^2 w_i + 4[M] \int t w_i - \Omega[C_2] \int t^2 w_i - 2[M] \int^{(2)} w_i + 2\Omega[C_2] \int^{(2)} t w_i \\
 &\quad - [K_2] \int^{(2)} t^2 w_i + \int^{(2)} t^2 \{F\} \\
 b_4 &= -[M] \int t^2 w_i + 4[M] \int^{(2)} t w_i - \Omega[C_2] \int^{(2)} t^2 w_i - 2[M] \int^{(3)} w_i \\
 &\quad + 2\Omega[C_2] \int^{(3)} t w_i - [K_2] \int^{(3)} t^2 w_i + \int^{(3)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

El identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete se obtiene al solucionar la Ec. (4.35) y se debe cumplir la condición establecida por Fliess y Sira-Ramírez [46].

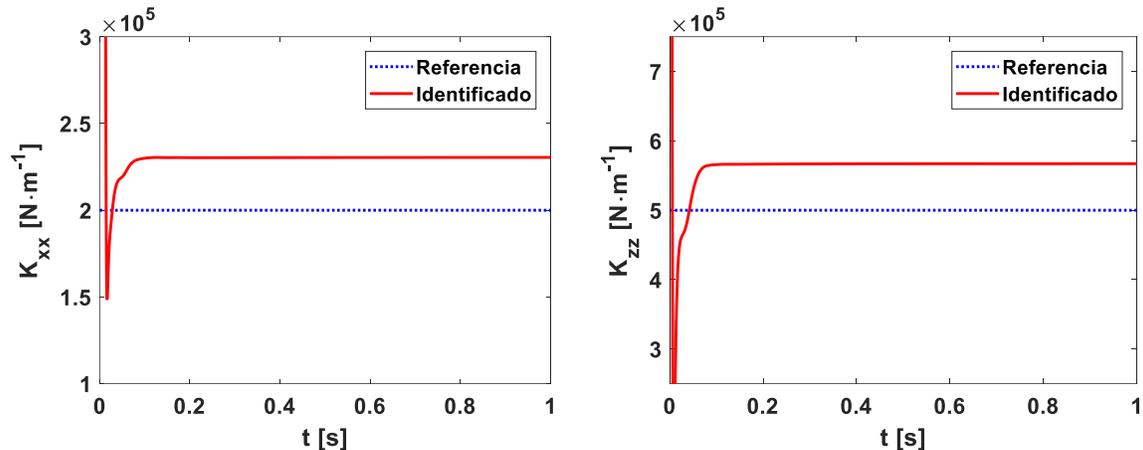
$$\left. \begin{aligned}
 \Theta_1 &= A^{-1}(t)B_1(t) \\
 \Theta_2 &= P^{-1}(t)B_2(t)
 \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon] \tag{4.41}$$

Para identificar los parámetros de los soportes, se requieren el vector de desplazamientos nodales del sistema  $\{\delta\}$ , es decir la vibración lateral. De la Ec. (4.41) se puede observar que el vector  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  es identificable algebraicamente sí, y solo sí, la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez [46], es decir, las trayectorias o el comportamiento dinámico del sistema satisface la condición  $\det[A(t)] \neq 0$ .

En general, esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño  $(t_0, t_0 + \epsilon]$ , donde  $\epsilon$  es un valor positivo y pequeño.

#### 4.2.4 Simulación del identificador algebraico simplificado

La identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos se determina a partir de la respuesta de desequilibrio de sistema rotor-cojinetes en función del tiempo. Esta respuesta se obtiene resolviendo la Ec. (4.30) a velocidad constante; en este caso se utilizó una frecuencia de muestreo de 10,000 muestras por segundo (s). La identificación de los coeficientes rotodinámicos del rotor se simuló numéricamente considerando el sistema rotodinámico con un disco inercial colocado en el centro, dos cojines idénticos en los extremos y un cojinete presurizado en el nodo 11 (ver Figura 4.18). Las características del rotor y los parámetros del cojinete a identificar se encuentran en la Tabla 4.28 y Tabla 4.29 respectivamente. En la Figura 4.20 se muestran los resultados obtenidos del identificador algebraico a una velocidad de 1,200 rpm. Se puede notar que converge a un valor cercano a los parámetros buscados en un tiempo menor a 0.2 s, la identificación es estable y confiable, la desviación porcentual así lo demuestra (ver Tabla 4.30). Únicamente se requiere la respuesta numérica del nodo en donde se encuentra ubicado el soporte a identificar. Posteriormente con los parámetros identificados y el modelo desarrollado con elemento finito se procede a obtener una respuesta vibratoria identificada para compararla con la numérica (original), esto con el objetivo de demostrar que los parámetros identificados, reproducen la dinámica del sistema (ver Figura 4.21).



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

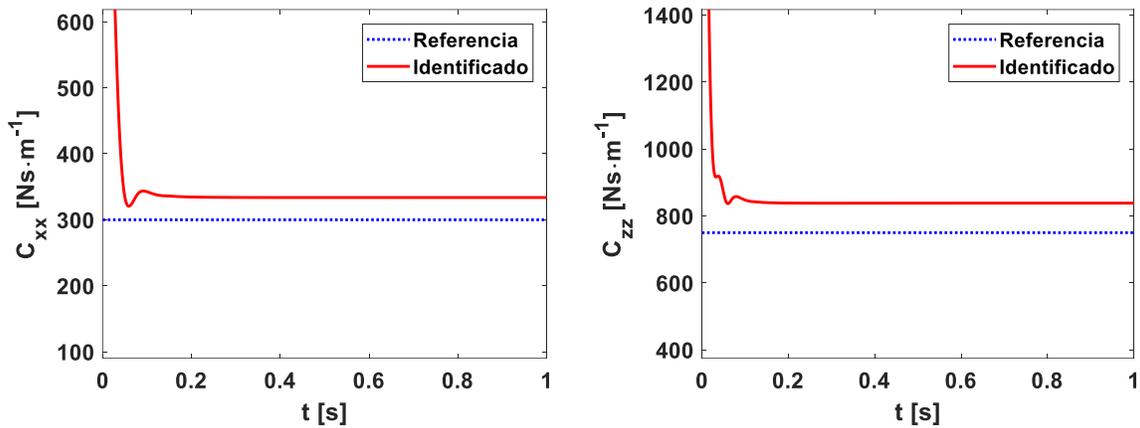


Figura 4.20: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos, identificados a una velocidad de 1,200 rpm.

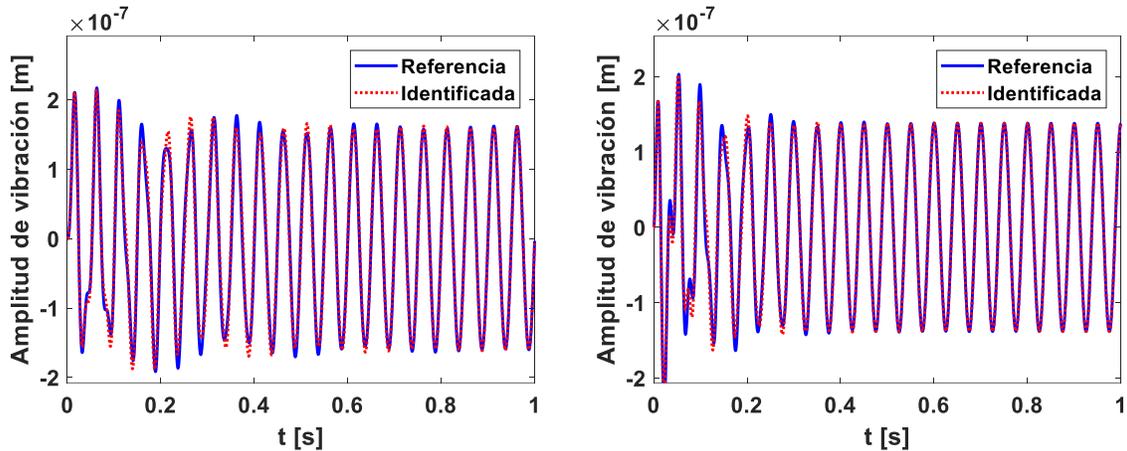


Figura 4.21: Comparación entre la respuesta original y la respuesta identificada a una velocidad de 1,200 rpm.

Se realizaron tres simulaciones a diferentes velocidades de operación para evaluar el identificador algebraico, los resultados de estas simulaciones juntos con sus respectivas desviaciones ( $\epsilon$ ) se encuentran en la Tabla 4.30.

Tabla 4.30: Coeficientes rotodinámicos identificados y su desviación porcentual.

Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)								
rpm	$k_{xx}$	$\epsilon(\%)$	$k_{zz}$	$\epsilon(\%)$	$c_{xx}$	$\epsilon(\%)$	$c_{zz}$	$\epsilon(\%)$
1200	$2.30 \times 10^5$	15.19	$5.67 \times 10^5$	13.37	$3.34 \times 10^2$	11.36	$8.38 \times 10^2$	11.79
2400	$1.57 \times 10^5$	21.52	$4.54 \times 10^5$	9.21	$2.96 \times 10^2$	1.38	$7.38 \times 10^2$	1.73
3000	$1.28 \times 10^5$	36.13	$3.72 \times 10^5$	25.61	$2.96 \times 10^2$	1.38	$6.59 \times 10^2$	12.15

#### **4.2.5 Conclusión de la sección**

De acuerdo con los resultados obtenidos se puede observar que el identificador es más robusto y que la identificación es más estable. Sin embargo, hay una diferencia notoria en los parámetros identificados, la cual se refleja en las desviaciones porcentuales de los resultados, esto se debe principalmente porque para el desarrollo de identificador algebraico se tomó como base un modelo de dos grados de libertad, y el identificador se alimentó de la respuesta de un modelo de múltiples grados de libertad, un modelo más complejo, pero que emula el comportamiento de un sistema rotodinámico real. De igual manera utilizar este identificador limita las configuraciones del sistema rotodinámico que se pueden utilizar y esto afecta su implementación en la práctica. Cabe mencionar que el utilizar un modelo simplificado también reduce significativamente el número de condición de las matrices del identificador algebraico, impactando de manera positiva al identificador.

### **4.3 Estimación de parámetros con algoritmos genéticos**

Los algoritmos genéticos son métodos adaptativos, generalmente usados en problemas de búsqueda y optimización de parámetros, basados en la reproducción sexual y en el principio de supervivencia del más apto. Más formalmente, y siguiendo la definición dada por Goldberg, los Algoritmos Genéticos son algoritmos de búsqueda basados en la mecánica de selección natural y de la genética natural. Combinan la supervivencia del más apto entre estructuras de secuencias con un intercambio de información estructurado, aunque aleatorizado, para construir así un algoritmo de búsqueda que tenga algo de las genialidades de las búsquedas humanas.

#### **4.3.1 Descripción del algoritmo**

Los Algoritmos Genéticos trabajan sobre una población de individuos. Cada uno de ellos representa una posible solución al problema que se desea resolver. Todo individuo tiene asociado un ajuste que es representado por la función objetivo la cual indica si los individuos de la población representan o no buenas soluciones al problema planteado. En la Figura 4.22 se muestra el funcionamiento de un Algoritmo Genético.

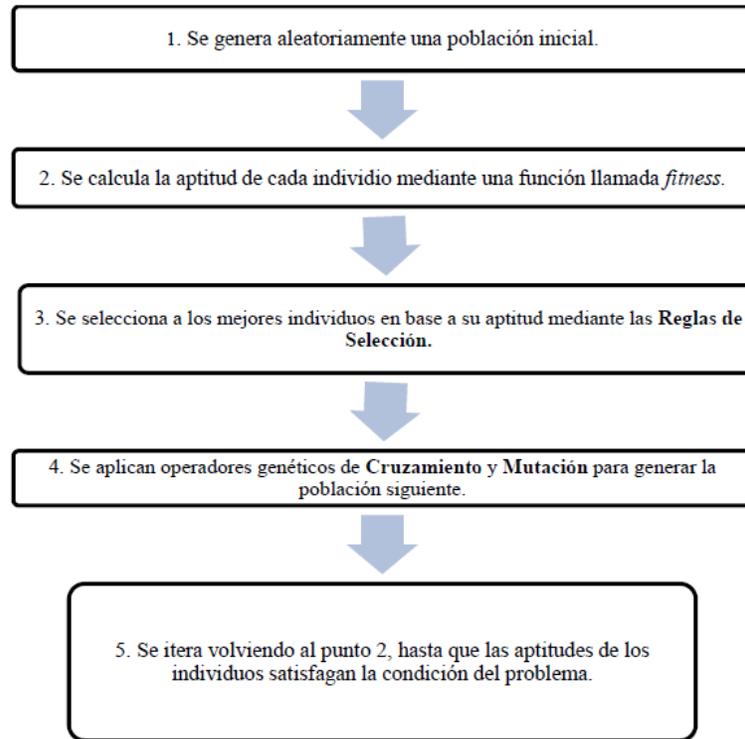


Figura 4.22: Funcionamiento de un algoritmo genético [25].

#### 4.3.2 Ventajas del uso de algoritmos genéticos

Son intrínsecamente paralelos, pueden operar simultáneamente varias soluciones, en lugar de trabajar de forma secuencial como otros métodos tradicionales. Exploran varios tipos de soluciones, desechando las que no sirven automáticamente. Y específicamente en este problema tiene la ventaja de trabajar sin necesitar las pendientes nodales.

#### 4.3.3 Desventaja del uso de algoritmos genéticos

Puede tardar mucho en converger o nunca hacerlo, dependiendo de los parámetros que se usen para resolver el problema, como tamaño de población, número de generaciones o las condiciones de convergencia.

El algoritmo genético desarrollado se basa en un modelo de un sistema rotor-cojinetes de múltiples grados de libertad. Se estiman los coeficientes mediante el análisis de la respuesta al desbalance del sistema rotodinámico, es decir, para esta simulación se utilizan datos de la literatura los cuales son introducidos al modelo numérico de MGDL para obtener la respuesta de este y compararla con el modelo numérico inmerso en el algoritmo genético que tiene como variables de entrada los coeficientes a buscar. Se encuentran los mejores coeficientes cuando ambas respuestas son lo más cercanas posible.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Para lograr lo descrito anteriormente se utiliza la siguiente función objetivo:

$$f = \min \left( \sum_{i=1}^n |\delta_E - \delta_N| \right) \quad (4.42)$$

Como se puede notar la función objetivo consiste en la minimización entre la diferencia de las respuesta experimental y numérica. Un análisis más detallado sobre la función objetivo se encuentra en [68].

### 4.3.4 Modelo considerando ocho coeficientes

En la Tabla 4.31 se muestran los valores identificados utilizando un sistema rotor-chumaceras de la literatura [12]. Los coeficientes que se identifican son los correspondientes del soporte 1, se utilizan 500 generaciones y una población de diez individuos. El tiempo de las simulaciones se considera en función de los periodos (**T**) de la onda sinusoidal hasta un máximo de diez periodos, con el objetivo de disminuir el tiempo de cómputo.

Tabla 4.31: Intervalo de búsqueda.

Coeficientes	Valor	
	Referencia	Intervalo de búsqueda
$k_{xx}$	$5 \times 10^7$	$(0, 5 \times 10^8)$
$k_{xz}$	$4 \times 10^5$	$(0, 4 \times 10^6)$
$k_{zx}$	$2 \times 10^5$	$(0, 2 \times 10^6)$
$k_{zz}$	$7 \times 10^7$	$(0, 7 \times 10^8)$
$c_{xx}$	$5 \times 10^2$	$(0, 5 \times 10^3)$
$c_{xz}$	$3 \times 10^2$	$(0, 3 \times 10^3)$
$c_{zx}$	$1 \times 10^2$	$(0, 1 \times 10^3)$
$c_{zz}$	$7 \times 10^2$	$(0, 7 \times 10^3)$

Rigidez (N/m)-Amortiguamiento (Ns/m)

En la Tabla 4.32 se observan los valores identificados a 3,600 rpm y en la Tabla 4.33 se observa que hay desviaciones elevadas a causa de que los intervalos de búsqueda son muy grandes y es complicado que el algoritmo genético converja a un óptimo global debido a que el número de incógnitas es elevado (ver [25]).

Tabla 4.32: Valores identificados a 3,600 rpm, 500 generaciones POB 10.

T	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)								t(h,min,seg)	Función objetivo
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$		
1	$4.94 \times 10^7$	$8.89 \times 10^4$	$4.62 \times 10^5$	$7.20 \times 10^7$	$6.29 \times 10^2$	$2.00 \times 10^1$	$1.40 \times 10^1$	$9.66 \times 10^2$	0:4:21	$2.713 \times 10^{-6}$
2	$5.18 \times 10^7$	$4.81 \times 10^5$	$3.97 \times 10^5$	$6.99 \times 10^7$	$5.67 \times 10^2$	$1.80 \times 10^3$	$3.38 \times 10^2$	$1.34 \times 10^3$	0:9:22	$8.079 \times 10^{-6}$
3	$5.08 \times 10^7$	$4.99 \times 10^5$	$2.69 \times 10^5$	$6.94 \times 10^7$	$6.76 \times 10^2$	$1.28 \times 10^3$	$9.05 \times 10^2$	$9.33 \times 10^2$	0:11:51	$6.461 \times 10^{-6}$
10	$4.97 \times 10^7$	$1.85 \times 10^5$	$8.26 \times 10^5$	$7.33 \times 10^7$	$5.21 \times 10^2$	$1.20 \times 10^3$	0.00e+00	$1.17 \times 10^3$	0:38:44	$4.824 \times 10^{-6}$

T: periodo

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Tabla 4.33: Desviaciones porcentuales a 3,600 rpm, 500 generaciones y POB 10.

T	Desviación porcentual (%)								Error acumulado (%)
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$	
1	1.20	77.78	131	2.86	25.80	93.33	86	38	455.97
2	3.60	20.25	98.50	0.14	13.40	500	238	91.43	965.32
3	1.60	24.75	34.50	0.86	35.20	326	805	33.29	1261.2
10	0.60	53.75	313	4.71	4.20	300	100	67.14	843.4

### 4.3.5 Identificación algebraica combinada con optimización

Se propone combinar la técnica de identificación algebraica con algoritmos genéticos con el objetivo de encontrar mejores resultados al estimar los coeficientes. Como se demostró anteriormente en las simulaciones numéricas con identificación algebraica, se obtienen buenos resultados pero que todavía pueden mejorar, es ahí donde entran los algoritmos genéticos. Los parámetros estimados resultantes de la identificación algebraica se usarán para delimitar los intervalos de búsqueda en el algoritmo genético, reduciendo así significativamente el tiempo de cómputo. Para la simulación se toma el caso de estudio anterior y los parámetros del algoritmo genético se muestran a continuación.

Tabla 4.34: Parámetros del algoritmo genético.

Genes por individuo	8
Tamaño de la población	10
Elitismo	2
Probabilidad de cruce	0.90
Probabilidad de mutación	0.90
Algoritmo de selección	Torneo determinístico + aleatorio
Algoritmo de cruce	Cruce en dos puntos
Algoritmo de mutación	Reemplazo aleatorio

#### 4.3.5.1 Simulación a 600 rpm

Para el caso en que la velocidad de rotación es igual a 600 rpm, los parámetros estimados utilizando la identificación algebraica están en la Tabla 4.35. La población inicial del algoritmo genético partirá de esos parámetros (Tabla 4.35), es decir que el intervalo de búsqueda estará en función de los coeficientes estimados con la identificación algebraica.

Tabla 4.35: Intervalo de búsqueda.

Coeficientes	Valor	
	Identificación algebraica	Intervalo de búsqueda
$k_{xx}$	$5.086401 \times 10^7$	$\pm 2\%$
$k_{xz}$	$4.097257 \times 10^5$	$\pm 2\%$
$k_{zx}$	$2.024694 \times 10^5$	$\pm 2\%$
$k_{zz}$	$7.119074 \times 10^7$	$\pm 2\%$
$c_{xx}$	$6.270242 \times 10^2$	$\pm 30\%$
$c_{xz}$	$1.647881 \times 10^3$	$\pm 500\%$
$c_{zx}$	$2.979674 \times 10^2$	$\pm 500\%$
$c_{zz}$	$9.062713 \times 10^2$	$\pm 30\%$

Rigidez (N/m)-Amortiguamiento (Ns/m)

En la Figura 4.23 se muestra una comparación entre la respuesta real y la respuesta estimada utilizando los coeficientes rotodinámicos identificados a una velocidad de 600 rpm, se puede observar que ambas respuestas son idénticas y solo se nota la diferencia al realizar un acercamiento. El tiempo que se utilizó para comparar ambas respuestas durante la ejecución del algoritmo genético es de 0.1 s, se seleccionó así para disminuir el tiempo de cómputo de algoritmo. En este lapso la respuesta aún no se ha estabilizado, pero es suficiente para determinar los parámetros buscados.

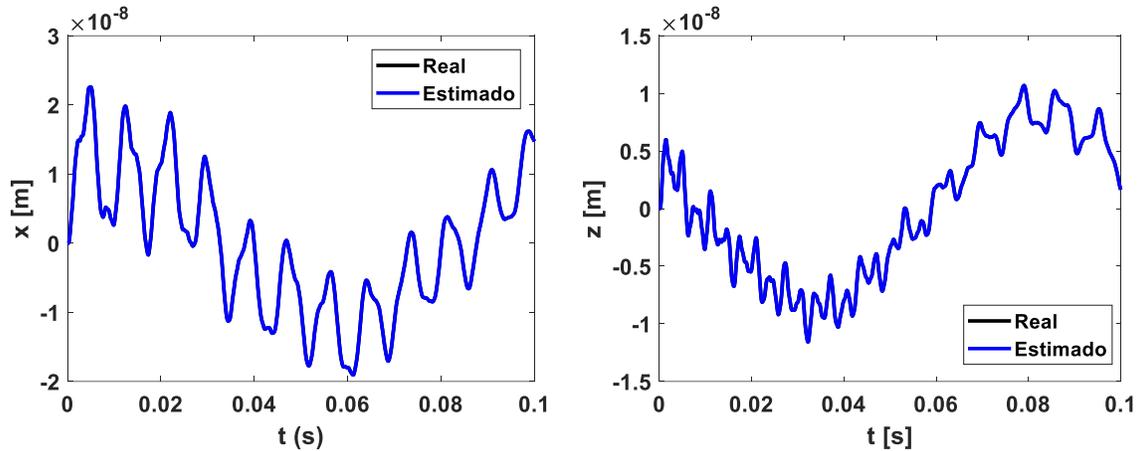


Figura 4.23: Comparación de la respuesta del sistema a 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

La función objetivo es la diferencia entre la respuesta real y la estimada con los coeficientes generados por el algoritmo de manera aleatoria dentro del intervalo de búsqueda dado, tras cada generación se realiza una comparación y se selecciona el individuo más apto. Se puede notar cómo la función objetivo disminuye tras cada generación, esto significa que los parámetros están mejorando tras el paso de las generaciones.

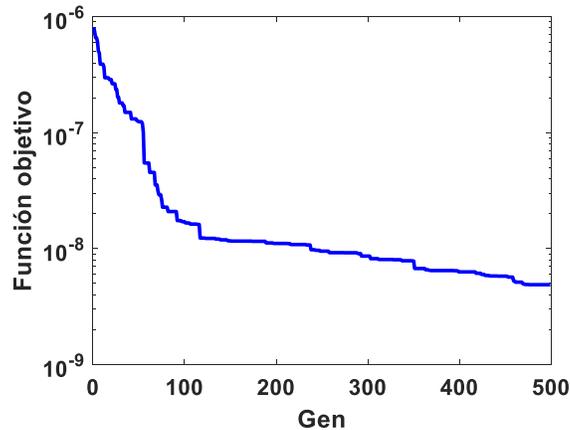


Figura 4.24: Comportamiento de la función objetivo, 600 rpm.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

En la Figura 4.25 se muestran los parámetros identificados de rigidez y amortiguamiento. Se puede notar cómo evolucionan al óptimo tras el paso de las generaciones, es importante destacar que convergen de manera más rápida debido a que el intervalo de búsqueda se redujo significativamente al utilizar los parámetros estimados con la identificación algebraica y partir de ahí para generar la población inicial del algoritmo genético. Cabe resaltar que de acuerdo con esta metodología se toma como resultado final el mejor parámetro identificado en el transcurso de todas las generaciones.

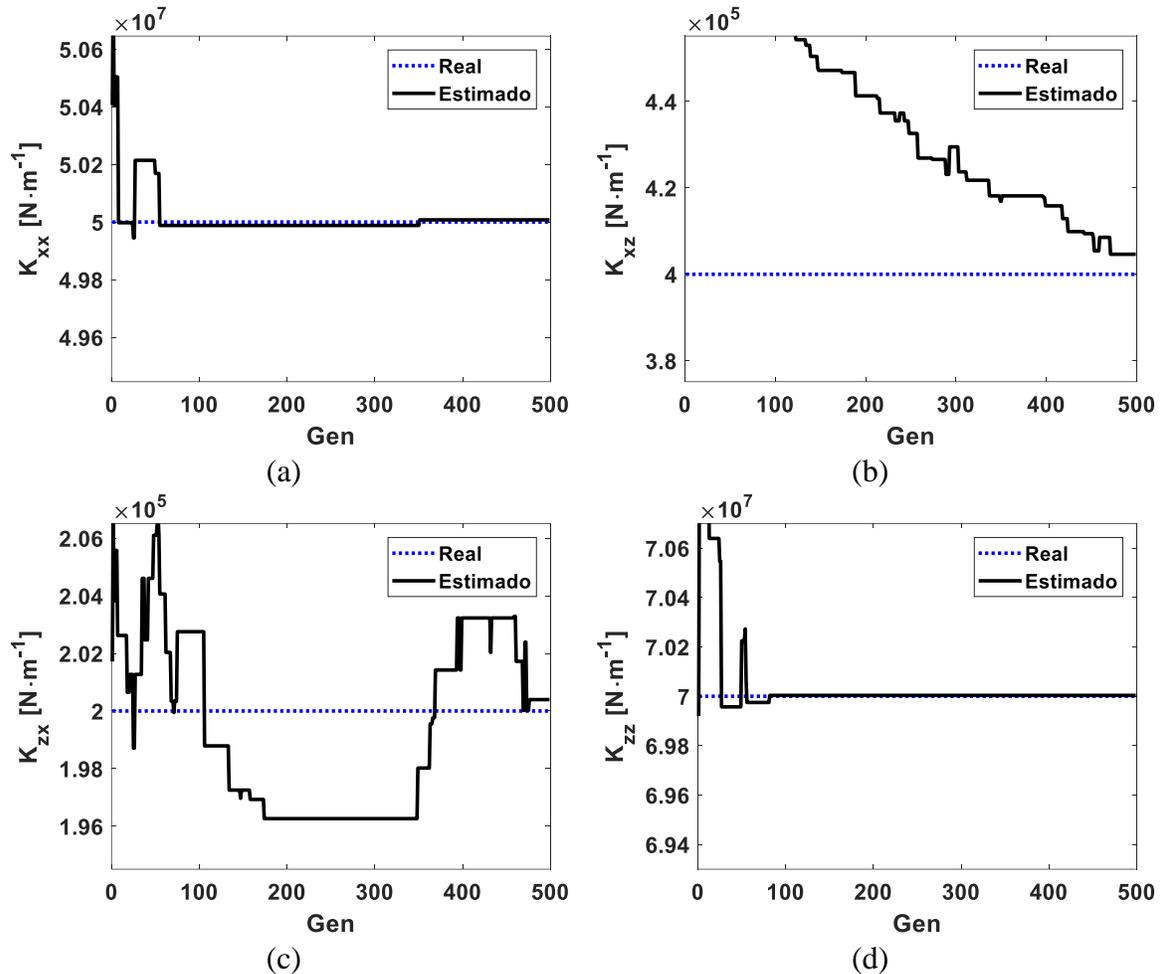


Figura 4.25: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1, a)  $k_{xx}$ , b)  $k_{xz}$ , c)  $k_{zx}$ , d)  $k_{zz}$ .

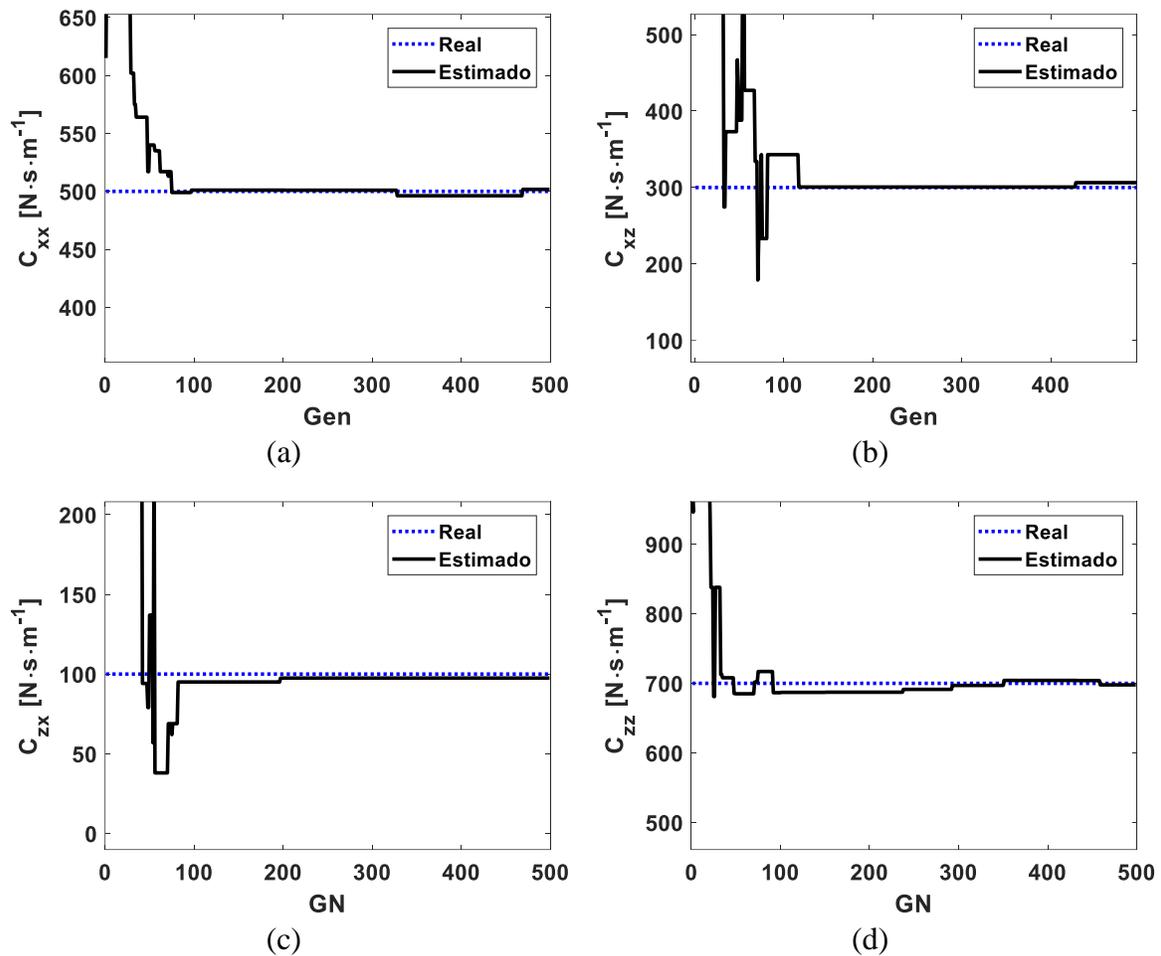


Figura 4.26: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1, a)  $c_{xx}$ , b)  $c_{xz}$ , c)  $c_{zx}$ , d)  $c_{zz}$ .

#### 4.3.5.2 Simulación a 1,000 rpm

En la Figura 4.27 se muestra una comparación entre la respuesta real y la respuesta estimada utilizando los coeficientes rotodinámicos identificados a una velocidad de 1,000 rpm, se puede observar que ambas respuestas son idénticas.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

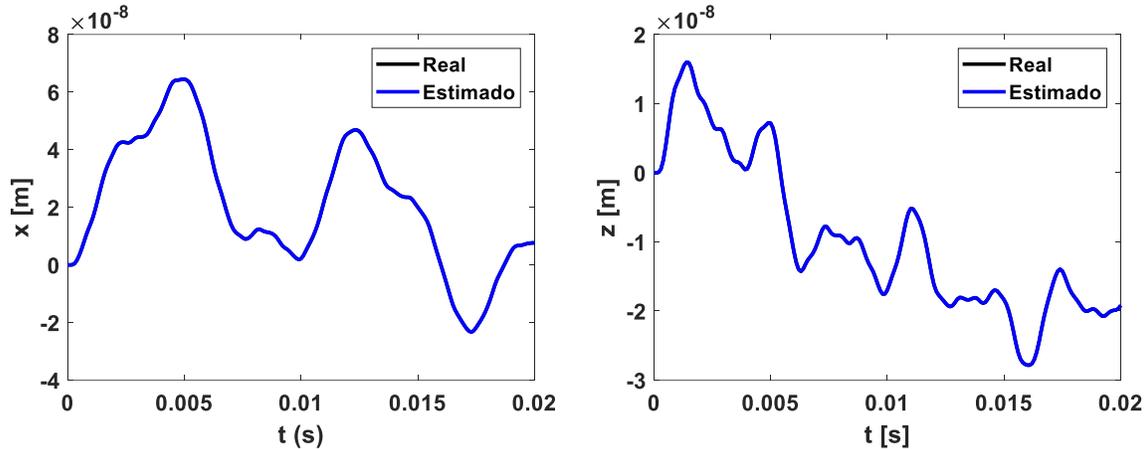


Figura 4.27: Respuesta del sistema a 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

En la Figura 4.28 se aprecia como la función objetivo disminuye conforme aumenta el número de generaciones, esto garantiza que los parámetros estimados mejoran en cada generación.

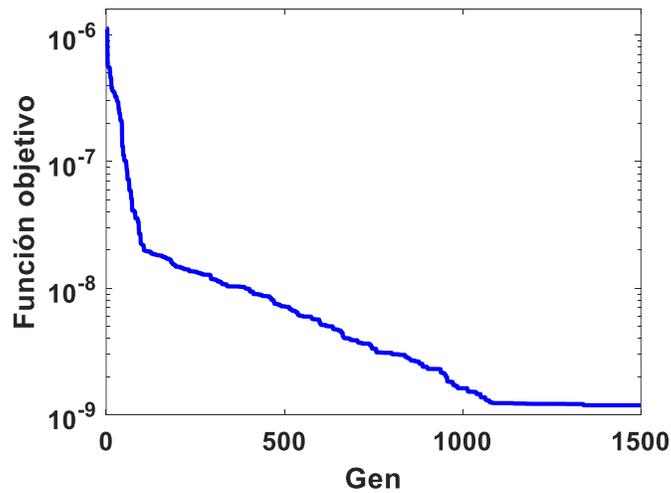


Figura 4.28: Comportamiento de la función objetivo, 1,000 rpm.

En la Figura 4.29 y Figura 4.30 se observan los coeficientes rotodinámicos estimados en función del número de generaciones, se aprecia que conforme aumentan las generaciones mejoran los parámetros estimados acercándose más a los reales.

# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

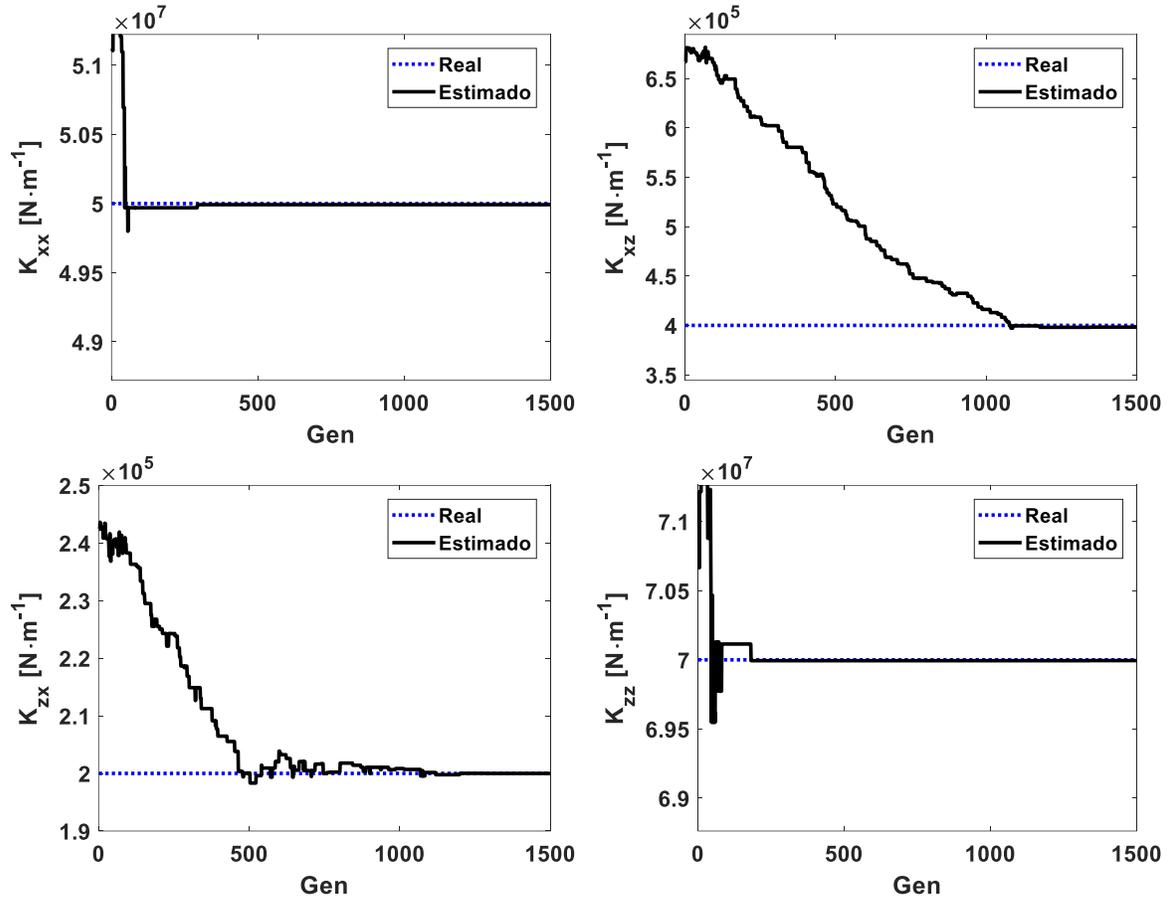
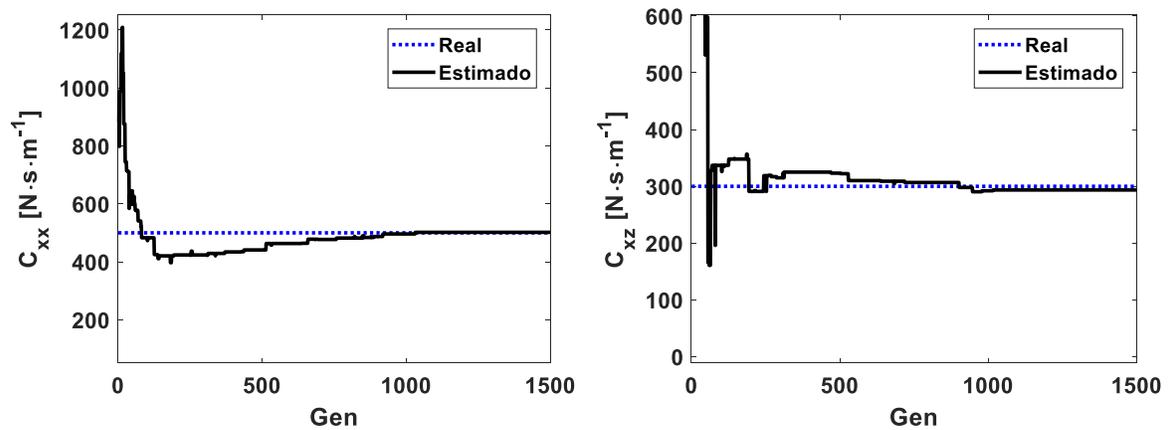


Figura 4.29: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

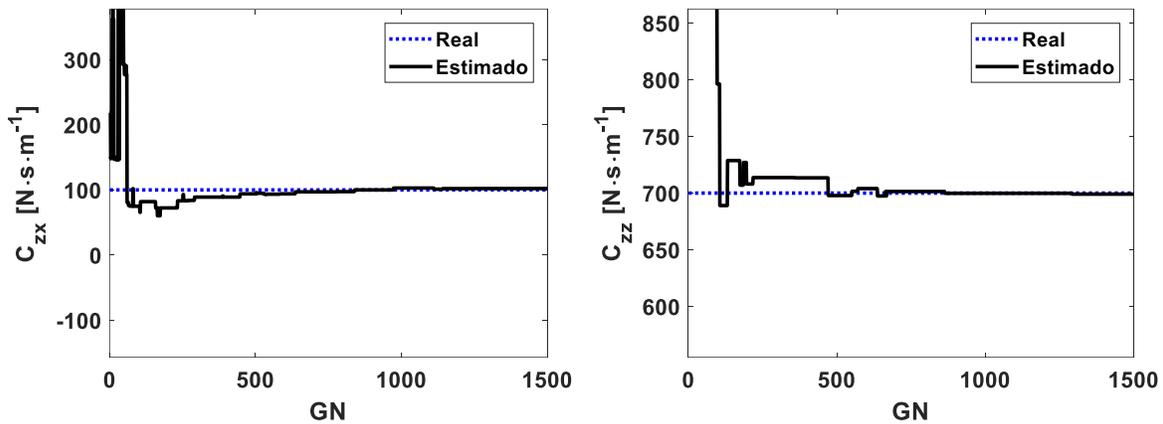


Figura 4.30: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1.

En la Tabla 4.34 se muestran los valores estimados y la desviación porcentual utilizando la identificación algebraica combinada con algoritmos genéticos se puede notar la mejoría en los parámetros estimados, el incremento en el tiempo de cómputo y el número de generaciones que se necesitan para converger a un óptimo global.

Tabla 4.36: Valores identificados.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	$5 \times 10^7$	$4.05 \times 10^5$	$2.00 \times 10^5$	$7 \times 10^7$	$5.02 \times 10^2$	$3.06 \times 10^2$	$9.75 \times 10^1$	$6.98 \times 10^2$
1000	$5 \times 10^7$	$3.98 \times 10^5$	$2.00 \times 10^5$	$7 \times 10^7$	$5.02 \times 10^2$	$2.94 \times 10^2$	$1.02 \times 10^2$	$6.99 \times 10^2$
2000	$5 \times 10^7$	$3.95 \times 10^5$	$1.99 \times 10^5$	$7 \times 10^7$	$5.02 \times 10^2$	$2.92 \times 10^2$	$9.84 \times 10^1$	$7.00 \times 10^2$
5000	$5 \times 10^7$	$4.03 \times 10^5$	$2.03 \times 10^5$	$7 \times 10^7$	$4.98 \times 10^2$	$3 \times 10^2$	$9.87 \times 10^1$	$7.06 \times 10^2$

Tabla 4.37: Desviaciones porcentuales.

rpm	t	Desviación porcentual (%)								Error acumulado	Función objetivo	t (h, min, seg)	NG
		$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$				
600	0.1	0.02	1.16	0.20	0.01	0.34	2.12	2.50	0.32	6.66	$4.88 \times 10^{-9}$	0:31:9	500
1000	0.02	0.02	0.44	0.00	0.01	0.37	2.14	2.28	0.13	5.38	$1.19 \times 10^{-9}$	0:16:50	1500
2000	0.02	0.02	1.26	0.28	0.00	0.36	2.59	1.56	0.04	6.11	$1.03 \times 10^{-8}$	0:8:15	500
5000	0.02	0.00	0.73	1.41	0.00	0.48	0.00	1.34	0.79	4.75	$1.61 \times 10^{-8}$	0:38:16	3000

NG: número de generaciones.

De los resultados de estas simulaciones se puede notar cómo los parámetros identificados mejoran al combinar la identificación algebraica con los algoritmos genéticos, sin embargo, el tiempo de cómputo también aumenta significativamente comparado con la identificación algebraica, aunque solo se está comparando un intervalo de la respuesta muy corto menor a 0.1. Faltan más simulaciones y pruebas experimentales para validar esta alternativa de estimación de parámetros.

### 4.3.5.3 Simulación considerando un intervalo de tiempo mayor

En esta simulación se considera un intervalo de tiempo mayor con el objetivo de tener una respuesta más estable y realizar una mejor comparación. Es de esperar que el tiempo de cómputo aumente.

#### 4.3.5.3.1 Simulación a 600 rpm

En la Figura 4.31 se muestra la respuesta vibratoria real y estimada durante un segundo, se puede notar que son idénticas, se le realiza un acercamiento para ver las pequeñas diferencias que existen entre ambas respuestas.

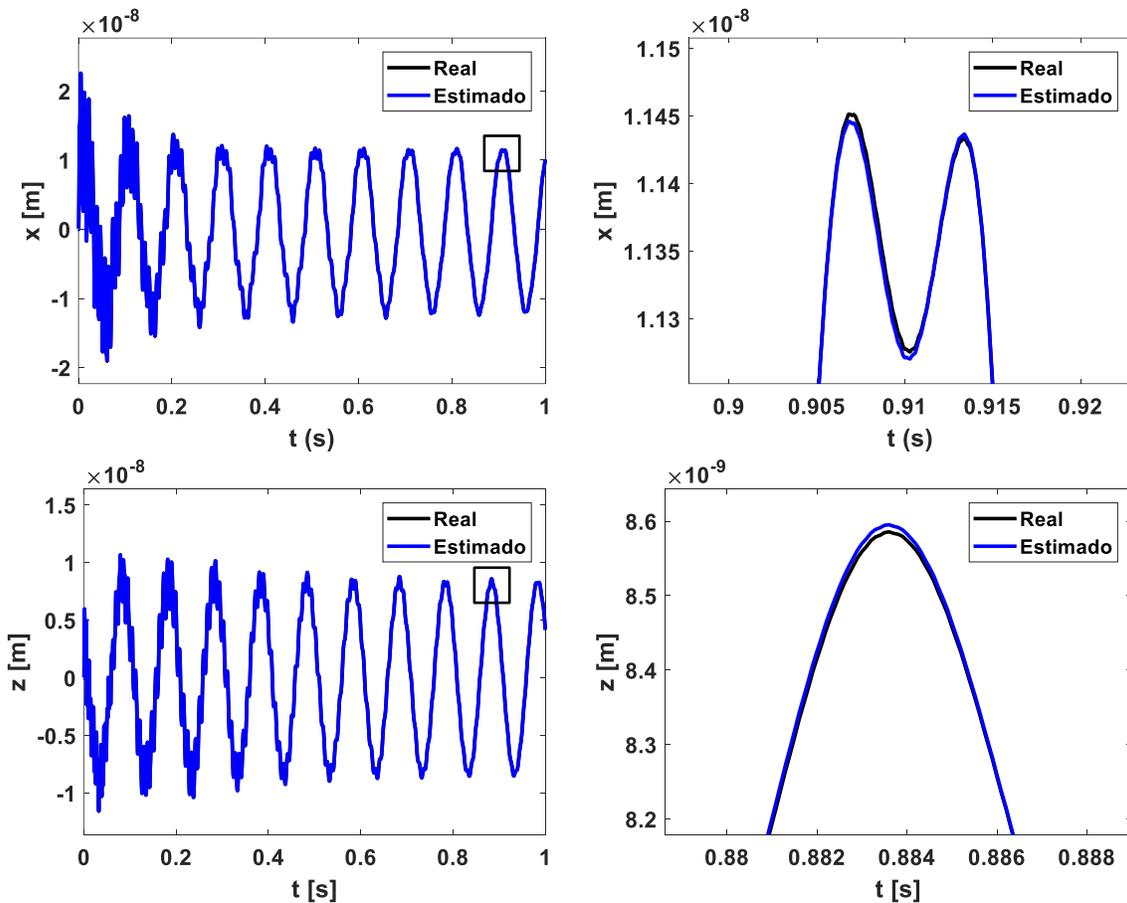


Figura 4.31: Respuesta del sistema a 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

A continuación, se muestra la función objetivo se puede observar que disminuye a través de cada generación. En este caso se consideraron únicamente 100 generaciones esto debido a que ahora se consideró un tiempo final de 1 s, lo cual incrementara significativamente el tiempo de cómputo.

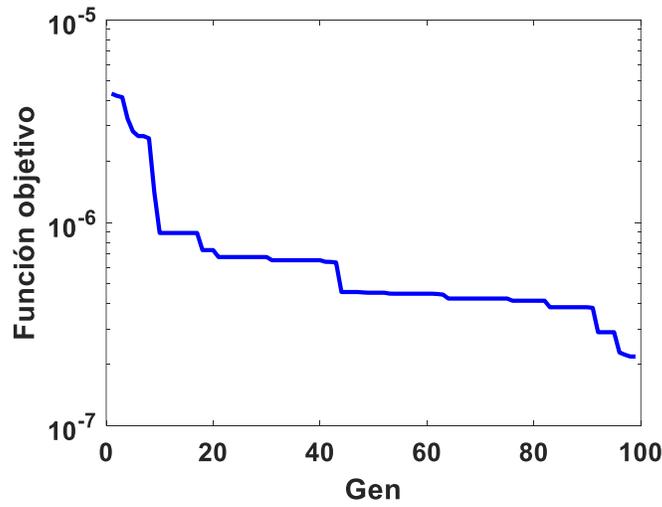
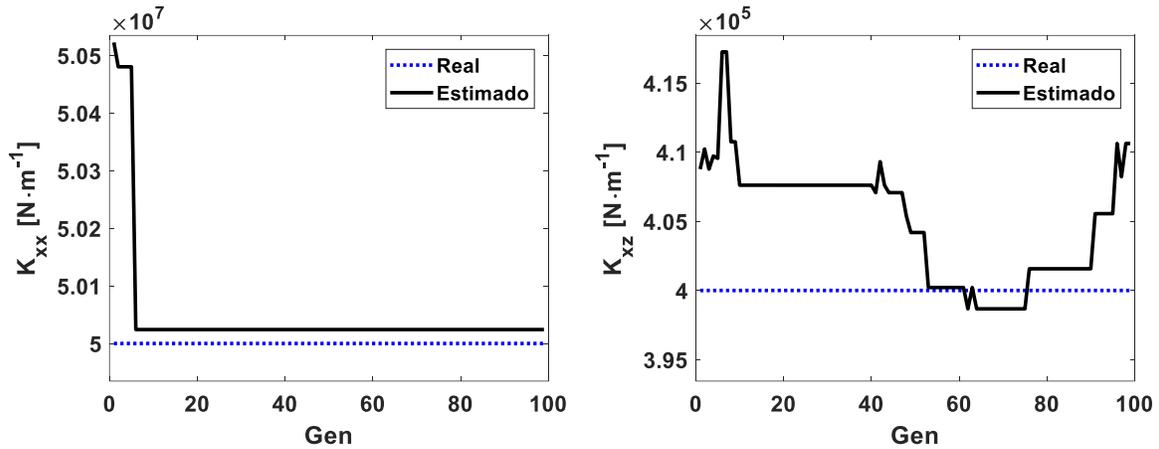


Figura 4.32: Comportamiento de la función objetivo, 600 rpm.

En la Figura 4.33 y 4.34 se muestran los parámetros estimados a través de cada generación comparados con los coeficientes reales. Se puede notar como se presenta más dificultad para estimar los coeficientes cruzados a diferencia de los coeficientes directos.



# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

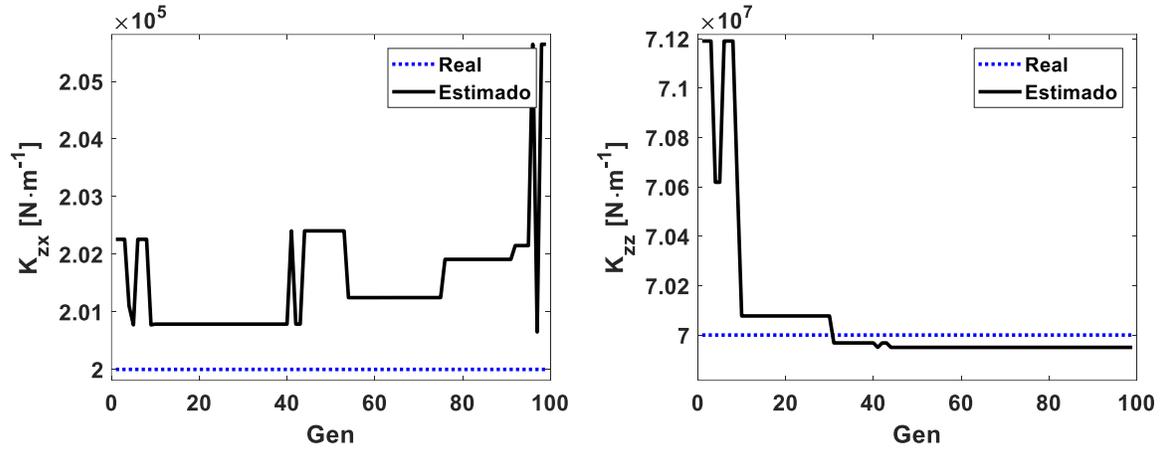


Figura 4.33: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1.

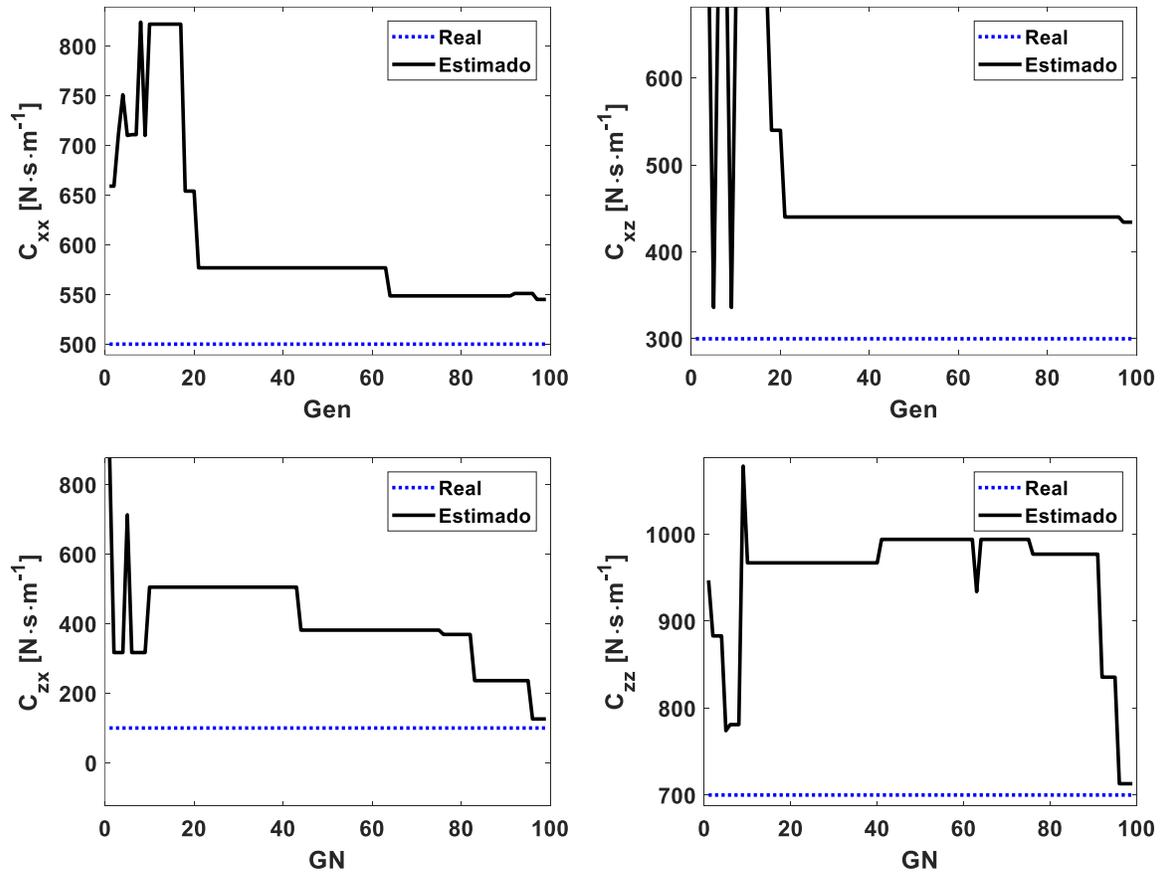


Figura 4.34: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1, Algoritmo 1.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

De la misma manera se realizó una simulación a una velocidad de 1,000 rpm, los resultados de ambas simulaciones (600 rpm y 1,000 rpm) junto con sus desviaciones porcentuales y el tiempo de cómputo se muestran en Tabla 4.38 y Tabla 4.39. Se puede notar que las desviaciones más altas se encuentran en los coeficientes cruzados de amortiguamiento.

Tabla 4.38: Valores identificados.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	$5 \times 10^7$	$4.11 \times 10^5$	$2.06 \times 10^5$	$7 \times 10^7$	$5.45 \times 10^2$	$4.34 \times 10^2$	$1.26 \times 10^2$	$7.13 \times 10^2$
1000	$5 \times 10^7$	$3.90 \times 10^5$	$1.90 \times 10^5$	$6.99 \times 10^7$	$4.98 \times 10^2$	$3.24 \times 10^2$	$1.27 \times 10^2$	$6.98 \times 10^2$

Tabla 4.39: Desviaciones porcentuales.

rpm	t	Desviación porcentual (%)								Error acumulado	Fitness	t (h, min, seg)	NG
		$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$				
600	1	0.05	2.66	2.82	0.07	9.00	44.7	26	1.86	87.15	$2.19 \times 10^{-7}$	0:53:22	100
1000	1	0.02	2.51	5.14	0.10	0.40	8	27	0.29	43.45	$3.01 \times 10^{-7}$	1:44:3	200

### 4.3.6 Conclusión de la sección

En esta sección se desarrolló un algoritmo genético para estimar los coeficientes rotodinámicos, posteriormente se combinó la identificación algebraica con el algoritmo genético para mejorar los parámetros identificados y de acuerdo con los resultados obtenidos se puede notar que hay mejoría en los coeficientes identificados, pero el tiempo de cómputo aumenta considerablemente, siendo esto una gran desventaja si se quiere aplicar control en el futuro.

## 4.4 Identificación algebraica de la rigidez y amortiguamiento modal de los soportes a velocidad constante

En esta sección se desarrolla un identificador algebraico modal, con el objetivo de reducir los grados de libertad del sistema y tener con esto un identificador más estable como fue el caso del identificador desarrollado con el modelo simplificado. Con la diferencia que el modelo que se toma como base es un modelo de múltiples grados de libertad, entonces se puede realizar cualquier configuración que se requiera y considerar todas las dinámicas del sistema rotodinámico.

### 4.4.1 Desarrollo del identificador algebraico modal

Para la aplicación de este método, se requiere el modelo matemático del sistema rotodinámico de la (3.53), a partir del cual, se desarrolla el estimador a medida de los parámetros de los soportes.

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C(\Omega)]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (4.43)$$

Donde  $\{\delta\}$  es el vector que contiene todos los desplazamientos nodales del sistema; mientras que  $C(\Omega) = [C_1 + \Omega C_r]$ , donde  $C_1$  es la matriz de amortiguamiento de los soportes y  $\Omega C_r$  son los efectos giroscópicos y  $K = [K_1 + K_r]$ , donde  $K_1$  es la matriz de rigidez de los soportes y  $K_r$  es la rigidez del eje. Si se consideran dos soportes  $C_1 = [C_{s1} + C_{s2}]$  y  $K_1 = [K_{s1} + K_{s2}]$ , tomando en cuenta estas expresiones, la Ec. (4.1) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{\delta}_i\} + ([C_{s1}] + [C_r(\Omega)])\{\dot{\delta}_i\} + ([K_{s1}] + [K_r])\{\delta_i\} &= \{F\} \\ [M]\{\ddot{\delta}_n\} + ([C_{s2}] + [C_r(\Omega)])\{\dot{\delta}_n\} + ([K_{s2}] + [K_r])\{\delta_n\} &= \{F\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Donde  $\{\delta_i\}$  y  $\{\delta_n\}$  son los desplazamientos nodales del soporte uno y dos respectivamente. En la Ec. (4.2) se puede observar que los parámetros de los soportes están en función de los desplazamientos nodales de los soportes, es decir los desplazamientos de los nodos donde están ubicados los soportes. También se aprecia que es un sistema de dos ecuaciones y que se puede aplicar el método de identificación algebraica de manera simultánea o independiente. Se elige realizar el identificador algebraico para cada ecuación de manera independiente esto con el fin de poder identificar los parámetros de cualquiera de los dos soportes sin necesidad de conocer los parámetros del otro soporte.

$$\phi^T [M] \phi \{\ddot{p}\} + \phi^T [C(\Omega)] \phi \{\dot{p}\} + \phi^T [K] \phi \{p\} = \phi^T F(t) \quad (4.45)$$

$$[M_{sm}] = \phi^T [M] \phi \quad (4.46)$$

$$[C_{sm}(\Omega)] = \phi^T [C(\Omega)] \phi \quad (4.47)$$

$$[K_{sm}] = \phi^T [K] \phi \quad (4.48)$$

$$F_{sm} = \phi^T F(t) \quad (4.49)$$

Sistema 2x2

$$[M_{sm}]\{\ddot{p}\} + [C_{sm}(\Omega)]\{\dot{p}\} + [K_{sm}]\{p\} = F_{sm} \quad (4.50)$$

$$[M_{sm}]\{\ddot{p}\} + [C_{sme}(\Omega)]\{\dot{p}\} + [K_{sme}]\{p\} = F_{sm} \quad (4.51)$$

Siguiendo la metodología establecida por Sira Ramírez [46], la Ec. (4.51) se multiplica por el tiempo al cuadrado  $t^2$  y se integra dos veces con respecto al tiempo, los parámetros a identificar de los soportes se encuentran en las matrices  $[K_{sme}], [C_{sme}]$ .

$$\begin{aligned}
 [K_{sme}] \int^{(2)} t^2 \{\delta\} + [C_{sme}] \left( \int t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(2)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M_{sm}] t^2 \delta + 4[M_{sm}] \int t \delta - 2[M_{sm}] \int^{(2)} \delta + \int^{(2)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

La Ec. (4.52) se integra para igualar el número de incógnitas y de ecuaciones.

**Integración 1**

$$\begin{aligned}
 [K_{sme}] \int^{(3)} t^2 \{\delta\} + [C_{sme}] \left( \int^{(2)} t^2 \{\delta\} - 2 \int^{(3)} t \{\delta\} \right) \\
 = -[M_{sm}] \int t^2 \{\delta\} + 4[M_{sm}] \int^{(2)} t \delta - 2[M_{sm}] \int^{(3)} \delta \\
 + \int^{(3)} t^2 \{F\}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

A partir de la Ec. (4.52) y sus integraciones que corresponden a los parámetros del primer soporte, se obtienen dos sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}
 A(t)\Theta_1 &= B_x \\
 A(t)\Theta_2 &= B_y
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Donde

- $A$  Matriz de coeficientes
- $B_i$  Vector de términos independientes
- $\Theta_i$  Vector de parámetros a identificar

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Vector de términos independientes

$$B_x = \begin{bmatrix} b_{1x} \\ b_{2x} \end{bmatrix}; \quad B_y = \begin{bmatrix} b_{1z} \\ b_{2z} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Vector de parámetros a identificar

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} k_{xsme} \\ c_{xsme} \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} k_{zsme} \\ c_{zsme} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

El identificador algebraico en línea de los ocho coeficientes rotodinámicos de un cojinete se obtiene al solucionar la Ec. (4.54) y se debe cumplir la condición establecida por Fliess y Sira-Ramírez [46].

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= A^{-1}(t)B_x(t) \\ \Theta_2 &= A^{-1}(t)B_y(t) \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon] \quad (4.58)$$

Se sabe que

$$[K_{sm}] = [K_{sopm} + K_{rm}] \quad (4.59)$$

$$[K_{sme}] = [K_{sopm} + K_{rm}] \quad (4.60)$$

$$[K_{sopme}] = [K_{sme} - K_{rm}] \quad (4.61)$$

$$[C_{sopme}] = [C_{sme} - C_{rm}] \quad (4.62)$$

#### 4.4.2 Identificación modal utilizando el primer modo de vibración y la respuesta modal

Para la solución del sistema por el método del elemento finito, se realizó una discretización de 13 elementos de igual longitud. Como se observa en la Figura 4.35, el rotor contiene tres discos cuya posición coincide con los nodos 3, 6 y 11, respectivamente. Asimismo, el rotor se sustenta por medio de dos soportes idénticos, los cuales se ubican en los nodos 1 y 14. La ubicación nodal de los elementos del sistema es importante, ya que asegura que la simulación corresponda con la geometría del sistema.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

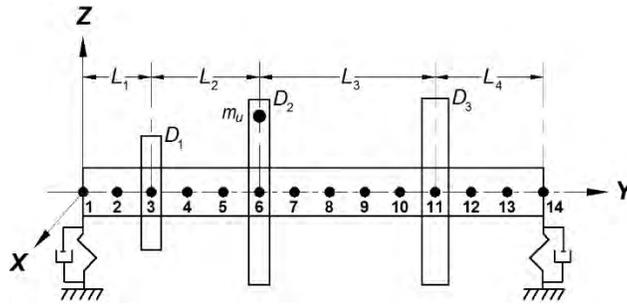


Figura 4.35: Modelo del rotor.

En las Tablas 4.40 – 4.43 se muestran las propiedades mecánicas y geométricas del rotor, así como, los parámetros de los soportes y desbalance presente en el sistema rotodinámico.

Tabla 4.40: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Radio externo ( $r_e$ ) = 0.05 m
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L_1 = 0.2 \text{ m}; \quad L_2 = 0.3 \text{ m}$
$\nu = 0.30$	$L_3 = 0.5 \text{ m}; \quad L_4 = 0.3 \text{ m}$

Tabla 4.41: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.

Geometría			
Disco	$D_1$ (m)	$D_2$ (m)	$D_3$ (m)
$e_D$	0.05	0.05	0.06
$r_{iD}$	0.05	0.05	0.05
$r_{eD}$	0.12	0.20	0.20

Tabla 4.42: Coeficientes rotodinámicos, simulación 1.

Rigidez (N/m)	Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = 5 \times 10^7$	$c_{xx} = 5 \times 10^2$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$
$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$c_{zz} = 7 \times 10^2$

Tabla 4.43: Masa de desbalance presentes en el sistema.

Desbalance (kg·m)	Posición angular (grados)
$m_u d_1 = 2 \times 10^{-4} \text{ nodo 6}$	$\alpha_1 = 0$

En la Figura 4.36 se muestra la primera forma modal para la dirección horizontal (eje X) y vertical (eje Z) correspondiente al primer modo de vibración del sistema rotodinámico. Las formas modales de la Figura 4.36 se obtuvieron de la solución en estado homogéneo de la Ec. (3.59) (eigenvectores y eigenvalores).

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

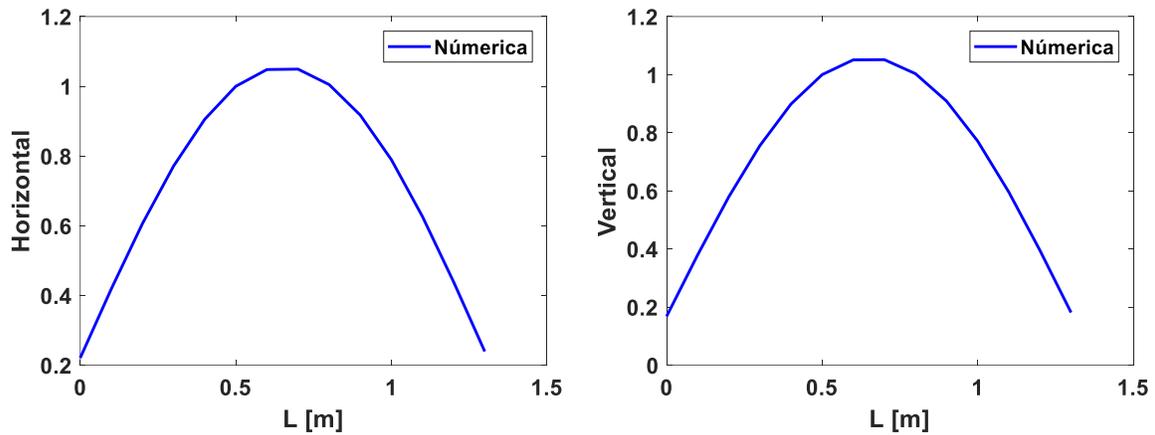
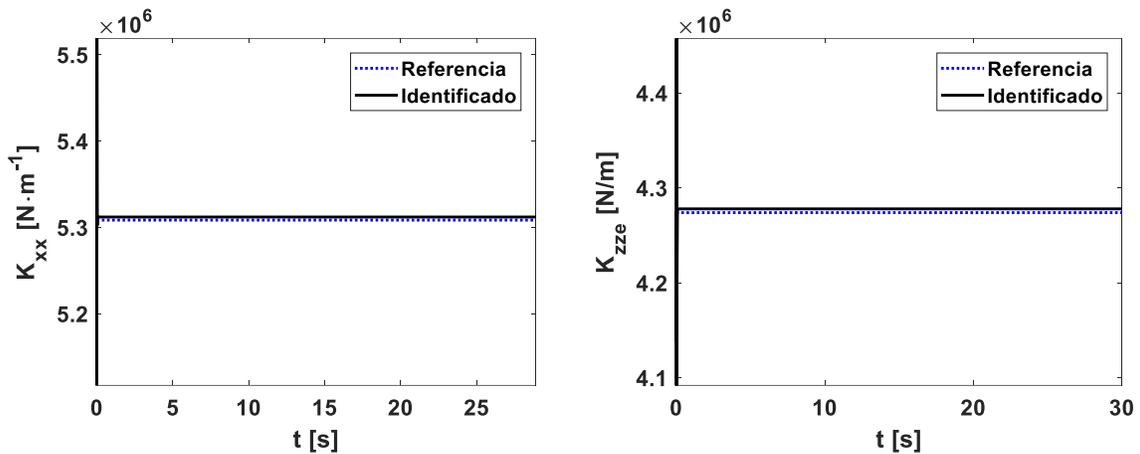


Figura 4.36: Primer modo de vibración, horizontal y vertical.

En la Figura 4.37 se muestran los parámetros identificados utilizando el identificador modal propuesto. Para la identificación se tomó como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor correspondiente a una velocidad de 300 rpm. Se puede observar que el identificador converge a los parámetros de referencia sin que se presenten perturbaciones durante la identificación, de tal forma, que una vez que converge al parámetro de referencia la identificación se mantiene constante a lo largo del tiempo.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

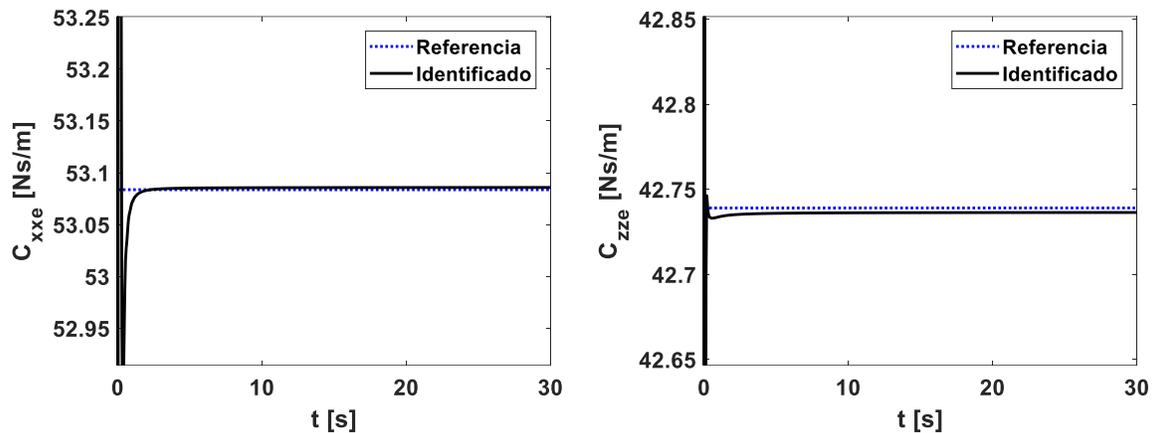


Figura 4.37: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento modales identificados con la respuesta modal numérica a una velocidad de 300 rpm.

En la Figura 4.38 se muestra una comparación entre la respuesta modal numérica (referencia, gráfica azul) y la identificada (gráfica roja). Para obtener la respuesta etiquetada como identificada se tomaron como dato de entrada los parámetros rotodinámicos identificados (Figura 4.38) a la velocidad del rotor de 300 rpm. Nótese en la Figura 4.38 que las respuestas son idénticas, lo que da certeza de los valores de los parámetros rotodinámicos identificados con el identificador propuesto.

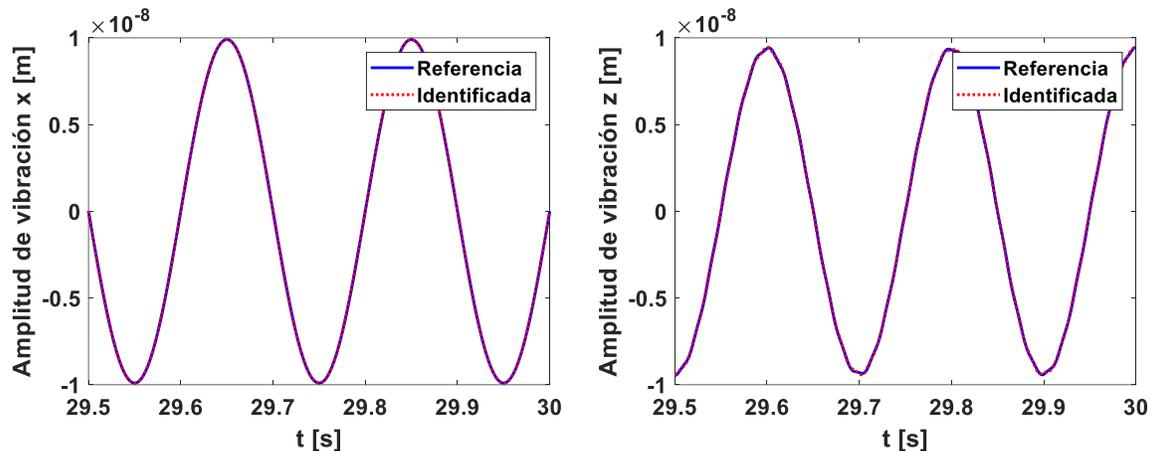


Figura 4.38: Comparación entre la respuesta modal numérica (color azul) y la identificada (color rojo) a una velocidad de 300 rpm.

Para comprobar el correcto funcionamiento del identificador propuesto se realizaron más simulaciones a diferentes velocidades del rotor en un rango de 300 rpm hasta 15,000 rpm con incremento de velocidad de 300 rpm. Cabe la pena destacar que el tiempo final utilizado para las simulaciones fue de 30 segundos, esto para demostrar que el identificador se mantiene estable a través del tiempo. En la se muestran los coeficientes modales identificados

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

utilizando únicamente el primero modo de vibración, así como, sus desviaciones porcentuales  $E\%$ .

Tabla 4.44 se muestran los coeficientes modales identificados utilizando únicamente el primero modo de vibración, así como, sus desviaciones porcentuales  $E\%$ .

Tabla 4.44: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo 1.

<b>Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m) modal de los soportes 30 seg</b>								
<b>rpm</b>	$k_{xx}$	$E\%$	$k_{zz}$	$E\%$	$c_{xx}$	$E\%$	$c_{zz}$	$E\%$
300	$5.31 \times 10^6$	0.07	$4.28 \times 10^6$	0.09	$5.31 \times 10^1$	0.00	$4.27 \times 10^1$	0.01
600	$5.32 \times 10^6$	0.27	$4.29 \times 10^6$	0.37	$5.31 \times 10^1$	0.02	$4.27 \times 10^1$	0.03
900	$5.34 \times 10^6$	0.60	$4.31 \times 10^6$	0.84	$5.31 \times 10^1$	0.04	$4.27 \times 10^1$	0.06
1200	$5.36 \times 10^6$	1.07	$4.34 \times 10^6$	1.50	$5.31 \times 10^1$	0.07	$4.27 \times 10^1$	0.12
1500	$5.40 \times 10^6$	1.66	$4.37 \times 10^6$	2.36	$5.31 \times 10^1$	0.12	$4.27 \times 10^1$	0.20
1800	$5.43 \times 10^6$	2.37	$4.42 \times 10^6$	3.41	$5.32 \times 10^1$	0.19	$4.26 \times 10^1$	0.33
2100	$5.48 \times 10^6$	3.18	$4.47 \times 10^6$	4.68	$5.32 \times 10^1$	0.30	$4.25 \times 10^1$	0.51
2400	$5.52 \times 10^6$	4.07	$4.54 \times 10^6$	6.17	$5.33 \times 10^1$	0.48	$4.24 \times 10^1$	0.82
2700	$5.57 \times 10^6$	4.97	$4.61 \times 10^6$	7.94	$5.35 \times 10^1$	0.81	$4.21 \times 10^1$	1.41
3000	$5.61 \times 10^6$	5.69	$4.71 \times 10^6$	10.18	$5.39 \times 10^1$	1.56	$4.15 \times 10^1$	2.95
3300	$5.61 \times 10^6$	5.62	$4.87 \times 10^6$	14.00	$5.53 \times 10^1$	4.10	$3.82 \times 10^1$	10.50
3600	$5.25 \times 10^6$	1.09	$8.98 \times 10^6$	78.99	$6.99 \times 10^1$	37.20	$-1.16 \times 10^1$	2972
3900	$6.50 \times 10^6$	22.40	$4.60 \times 10^6$	7.55	$6.00 \times 10^1$	13.05	$4.08 \times 10^1$	4.44
4200	$6.24 \times 10^6$	17.60	$4.76 \times 10^6$	11.34	$5.28 \times 10^1$	0.82	$4.29 \times 10^1$	0.51
4500	$6.24 \times 10^6$	17.58	$4.85 \times 10^6$	13.39	$5.22 \times 10^1$	1.74	$4.33 \times 10^1$	1.27
4800	$6.27 \times 10^6$	18.17	$4.91 \times 10^6$	14.88	$5.19 \times 10^1$	2.24	$4.35 \times 10^1$	1.79
5100	$6.31 \times 10^6$	18.82	$4.96 \times 10^6$	16.04	$5.17 \times 10^1$	2.66	$4.37 \times 10^1$	2.24
5400	$6.34 \times 10^6$	19.35	$5.00 \times 10^6$	16.92	$5.15 \times 10^1$	3.08	$4.39 \times 10^1$	2.70
5700	$6.35 \times 10^6$	19.70	$5.02 \times 10^6$	17.56	$5.12 \times 10^1$	3.50	$4.41 \times 10^1$	3.17
6000	$6.36 \times 10^6$	19.85	$5.04 \times 10^6$	17.98	$5.10 \times 10^1$	3.93	$4.43 \times 10^1$	3.66
6300	$6.36 \times 10^6$	19.78	$5.05 \times 10^6$	18.18	$5.08 \times 10^1$	4.36	$4.45 \times 10^1$	4.16
6600	$6.34 \times 10^6$	19.50	$5.05 \times 10^6$	18.20	$5.05 \times 10^1$	4.78	$4.47 \times 10^1$	4.66
6900	$6.32 \times 10^6$	19.04	$5.04 \times 10^6$	18.04	$5.03 \times 10^1$	5.18	$4.49 \times 10^1$	5.17
7200	$6.29 \times 10^6$	18.42	$5.03 \times 10^6$	17.73	$5.01 \times 10^1$	5.56	$4.52 \times 10^1$	5.66
7500	$6.25 \times 10^6$	17.68	$5.01 \times 10^6$	17.30	$4.99 \times 10^1$	5.92	$4.54 \times 10^1$	6.14
7800	$6.20 \times 10^6$	16.84	$4.99 \times 10^6$	16.76	$4.98 \times 10^1$	6.26	$4.56 \times 10^1$	6.60
8100	$6.15 \times 10^6$	15.93	$4.96 \times 10^6$	16.15	$4.90 \times 10^1$	6.56	$4.57 \times 10^1$	7.03
8400	$6.10 \times 10^6$	14.98	$4.94 \times 10^6$	15.47	$4.95 \times 10^1$	6.84	$4.59 \times 10^1$	7.44
8700	$6.05 \times 10^6$	14.02	$4.90 \times 10^6$	14.75	$4.93 \times 10^1$	7.10	$4.61 \times 10^1$	7.82
9000	$6.00 \times 10^6$	13.06	$4.87 \times 10^6$	14.00	$4.92 \times 10^1$	7.33	$4.62 \times 10^1$	8.18
9300	$5.95 \times 10^6$	12.12	$4.84 \times 10^6$	13.23	$4.91 \times 10^1$	7.54	$4.64 \times 10^1$	8.50
9600	$5.90 \times 10^6$	11.21	$4.81 \times 10^6$	12.45	$4.90 \times 10^1$	7.73	$4.65 \times 10^1$	8.80
9900	$5.86 \times 10^6$	10.33	$4.77 \times 10^6$	11.66	$4.89 \times 10^1$	7.90	$4.66 \times 10^1$	9.07
10200	$5.81 \times 10^6$	9.48	$4.74 \times 10^6$	10.88	$4.88 \times 10^1$	8.06	$4.67 \times 10^1$	9.32
10500	$5.77 \times 10^6$	8.67	$4.71 \times 10^6$	10.11	$4.87 \times 10^1$	8.20	$4.68 \times 10^1$	9.54
10800	$5.73 \times 10^6$	7.89	$4.67 \times 10^6$	9.34	$4.87 \times 10^1$	8.33	$4.69 \times 10^1$	9.74
11100	$5.69 \times 10^6$	7.14	$4.64 \times 10^6$	8.58	$4.86 \times 10^1$	8.46	$4.70 \times 10^1$	9.92
11400	$5.65 \times 10^6$	6.42	$4.61 \times 10^6$	7.82	$4.85 \times 10^1$	8.57	$4.70 \times 10^1$	10.09
11700	$5.61 \times 10^6$	5.74	$4.58 \times 10^6$	7.07	$4.85 \times 10^1$	8.68	$4.71 \times 10^1$	10.23
12000	$5.58 \times 10^6$	5.07	$4.54 \times 10^6$	6.33	$4.84 \times 10^1$	8.78	$4.72 \times 10^1$	10.36
12300	$5.54 \times 10^6$	4.43	$4.51 \times 10^6$	5.59	$4.84 \times 10^1$	8.88	$4.72 \times 10^1$	10.47
12600	$5.51 \times 10^6$	3.81	$4.48 \times 10^6$	4.86	$4.83 \times 10^1$	8.98	$4.73 \times 10^1$	10.57
12900	$5.48 \times 10^6$	3.20	$4.45 \times 10^6$	4.13	$4.83 \times 10^1$	9.07	$4.73 \times 10^1$	10.66
13200	$5.45 \times 10^6$	2.61	$4.42 \times 10^6$	3.40	$4.82 \times 10^1$	9.16	$4.73 \times 10^1$	10.73
13500	$5.42 \times 10^6$	2.03	$4.39 \times 10^6$	2.67	$4.82 \times 10^1$	9.24	$4.74 \times 10^1$	10.79
13800	$5.39 \times 10^6$	1.46	$4.36 \times 10^6$	1.94	$4.81 \times 10^1$	9.33	$4.74 \times 10^1$	10.84
14100	$5.36 \times 10^6$	0.90	$4.33 \times 10^6$	1.20	$4.81 \times 10^1$	9.41	$4.74 \times 10^1$	10.88

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

14400	$5.33 \times 10^6$	0.67	$4.29 \times 10^6$	0.90	$4.80 \times 10^1$	9.49	$4.74 \times 10^1$	10.92
14700	$5.30 \times 10^6$	0.72	$4.26 \times 10^6$	0.98	$4.80 \times 10^1$	9.58	$4.74 \times 10^1$	10.94
15000	$5.27 \times 10^6$	0.95	$4.23 \times 10^6$	1.28	$4.80 \times 10^1$	9.66	$4.74 \times 10^1$	10.96

A continuación, en la Figura 4.39 se compara el diagrama de bode de la respuesta del rotor obtenido de la simulación numérica contra el diagrama de bode de la respuesta del rotor obtenido al tomar como dato de entrada los coeficientes rotodinámicos identificados para cada velocidad del rotor reportados en la Tabla 4.44. Cabe hacer notar, que la respuesta del rotor identificada (gráfica roja) es la respuesta modal del sistema rotodinámico (primer modo de vibración), mientras que la respuesta del rotor (gráfica azul) corresponde a la obtenida del modelo de múltiples grados de libertad (solución obtenida por el Método Directo, Ec. (3.68). Para obtener la respuesta identificada (gráfica roja) se utilizó el primer modo de vibración para todo el intervalo de velocidades de 300 rpm -15000 rpm. Como se observa en la Figura 4.39 hay una diferencia en la respuesta a partir del segundo modo de vibración, esto se debe a que la respuesta obtenida por el método directo incluye todos los modos de vibración y en la identificación se utilizó únicamente el primer modo de vibración del sistema.

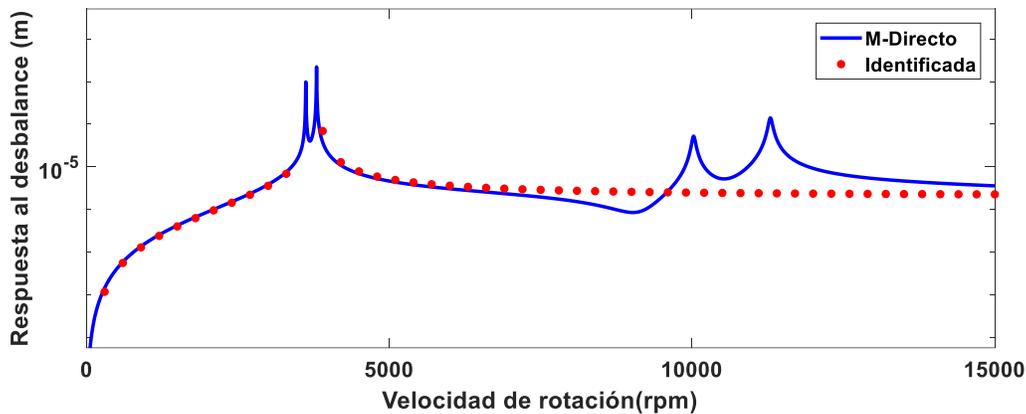


Figura 4.39: Respuesta al desbalance numérica (método directo) vs identificada en el nodo 6 (velocidad constante, forma discreta), modo 1.

### 4.4.2.1 Comparación de la respuesta del rotor considerando modos de vibración desacoplados

En la Figura 4.40 se compara la respuesta de vibración identificada (gráfica roja, Figura 4.39) contra la respuesta de vibración modal del rotor al desacoplar (ver sección 3.3.2, Capítulo 3) el modelo matemático de múltiples grados de libertad, donde solo se considera el efecto del primer modo de vibración. Se puede notar la similitud entre ambas respuestas.

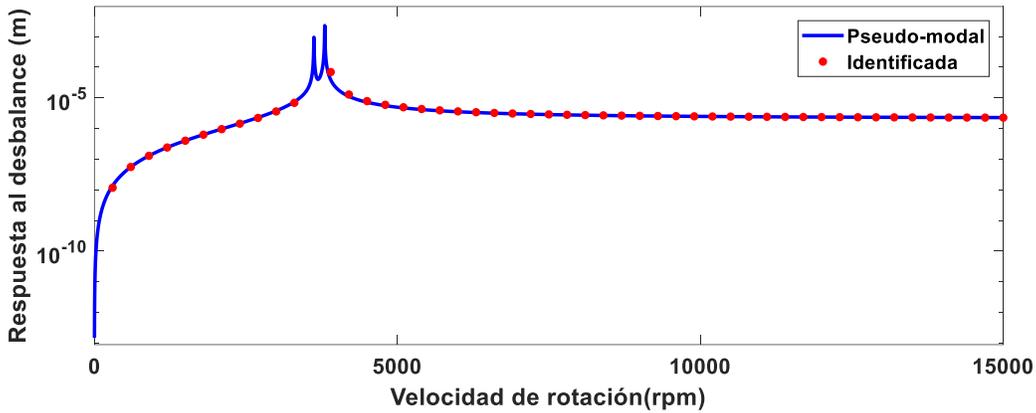


Figura 4.40: Respuesta al desbalance numérica Pseudo-modal (modo 1) y respuesta identificada nodo 6, corrida de 30 s, modo 1.

#### 4.4.3 Identificación modal utilizando el segundo modo de vibración y la respuesta modal

En la Tabla 4.45 se muestran los coeficientes modales identificados, así como su desviación porcentual utilizando únicamente el segundo modo de vibración (ver Figura 4.41) en un rango de velocidades de 300 rpm a 15,000 rpm.

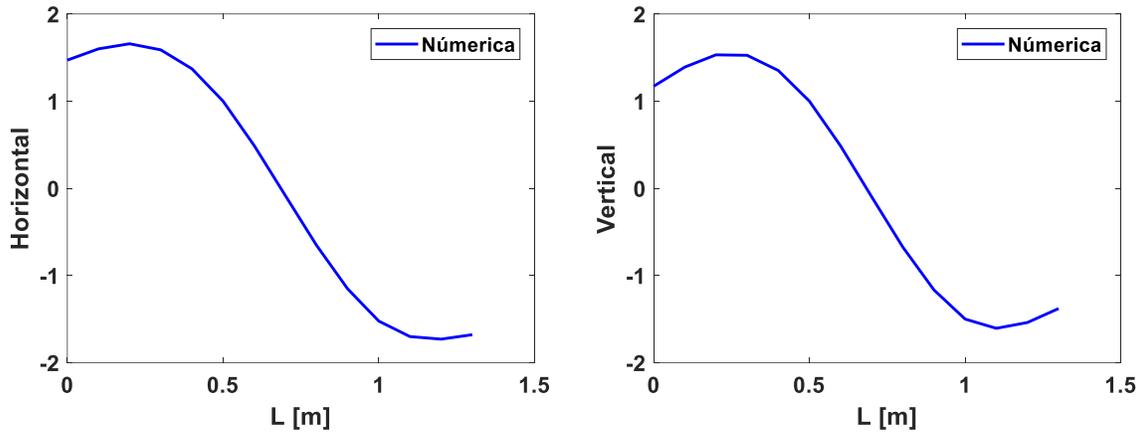


Figura 4.41: Primer modo de vibración, horizontal y vertical.

Tabla 4.45: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo 2.

Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m) modal de los soportes 30 seg								
rpm	$k_{xx}$	E%	$k_{zz}$	E%	$c_{xx}$	E%	$c_{zz}$	E%
300	$2.49 \times 10^8$	0.01	$2.29 \times 10^8$	0.01	$2.49 \times 10^3$	0.00	$2.29 \times 10^3$	0.00
600	$2.49 \times 10^8$	0.04	$2.29 \times 10^8$	0.05	$2.49 \times 10^3$	0.00	$2.29 \times 10^3$	0.01
900	$2.49 \times 10^8$	0.09	$2.29 \times 10^8$	0.11	$2.49 \times 10^3$	0.01	$2.29 \times 10^3$	0.01
1200	$2.50 \times 10^8$	0.15	$2.30 \times 10^8$	0.20	$2.49 \times 10^3$	0.01	$2.29 \times 10^3$	0.02
1500	$2.50 \times 10^8$	0.24	$2.30 \times 10^8$	0.32	$2.49 \times 10^3$	0.02	$2.29 \times 10^3$	0.03
1800	$2.50 \times 10^8$	0.35	$2.30 \times 10^8$	0.46	$2.49 \times 10^3$	0.03	$2.29 \times 10^3$	0.05
2100	$2.50 \times 10^8$	0.47	$2.31 \times 10^8$	0.63	$2.49 \times 10^3$	0.05	$2.29 \times 10^3$	0.07
2400	$2.51 \times 10^8$	0.61	$2.31 \times 10^8$	0.82	$2.49 \times 10^3$	0.06	$2.29 \times 10^3$	0.09

**Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio  
Soportado en Chumaceras Presurizadas**

2700	$2.51 \times 10^8$	0.77	$2.31 \times 10^8$	1.05	$2.49 \times 10^3$	0.08	$2.29 \times 10^3$	0.12
3000	$2.52 \times 10^8$	0.95	$2.32 \times 10^8$	1.30	$2.49 \times 10^3$	0.11	$2.29 \times 10^3$	0.15
3300	$2.52 \times 10^8$	1.15	$2.33 \times 10^8$	1.57	$2.49 \times 10^3$	0.13	$2.29 \times 10^3$	0.19
3600	$2.53 \times 10^8$	1.36	$2.33 \times 10^8$	1.88	$2.50 \times 10^3$	0.17	$2.29 \times 10^3$	0.24
3900	$2.53 \times 10^8$	1.59	$2.34 \times 10^8$	2.22	$2.50 \times 10^3$	0.20	$2.28 \times 10^3$	0.30
4200	$2.54 \times 10^8$	1.83	$2.35 \times 10^8$	2.59	$2.50 \times 10^3$	0.25	$2.28 \times 10^3$	0.37
4500	$2.54 \times 10^8$	2.09	$2.36 \times 10^8$	2.99	$2.50 \times 10^3$	0.30	$2.28 \times 10^3$	0.45
4800	$2.55 \times 10^8$	2.36	$2.37 \times 10^8$	3.43	$2.50 \times 10^3$	0.36	$2.28 \times 10^3$	0.55
5100	$2.56 \times 10^8$	2.64	$2.38 \times 10^8$	3.90	$2.50 \times 10^3$	0.44	$2.28 \times 10^3$	0.67
5400	$2.56 \times 10^8$	2.93	$2.39 \times 10^8$	4.42	$2.50 \times 10^3$	0.53	$2.27 \times 10^3$	0.83
5700	$2.57 \times 10^8$	3.23	$2.40 \times 10^8$	4.98	$2.51 \times 10^3$	0.64	$2.27 \times 10^3$	1.02
6000	$2.58 \times 10^8$	3.53	$2.42 \times 10^8$	5.59	$2.51 \times 10^3$	0.77	$2.26 \times 10^3$	1.26
6300	$2.59 \times 10^8$	3.83	$2.43 \times 10^8$	6.25	$2.51 \times 10^3$	0.94	$2.25 \times 10^3$	1.57
6600	$2.59 \times 10^8$	4.13	$2.45 \times 10^8$	6.98	$2.52 \times 10^3$	1.15	$2.25 \times 10^3$	1.98
6900	$2.60 \times 10^8$	4.42	$2.47 \times 10^8$	7.80	$2.53 \times 10^3$	1.41	$2.23 \times 10^3$	2.53
7200	$2.61 \times 10^8$	4.69	$2.49 \times 10^8$	8.71	$2.53 \times 10^3$	1.75	$2.22 \times 10^3$	3.29
7500	$2.61 \times 10^8$	4.93	$2.51 \times 10^8$	9.76	$2.55 \times 10^3$	2.19	$2.19 \times 10^3$	4.39
7800	$2.62 \times 10^8$	5.13	$2.54 \times 10^8$	10.98	$2.56 \times 10^3$	2.79	$2.15 \times 10^3$	6.03
8100	$2.62 \times 10^8$	5.26	$2.58 \times 10^8$	12.46	$2.58 \times 10^3$	3.61	$2.09 \times 10^3$	8.64
8400	$2.62 \times 10^8$	5.28	$2.62 \times 10^8$	14.36	$2.61 \times 10^3$	4.80	$1.99 \times 10^3$	13.14
8700	$2.62 \times 10^8$	5.13	$2.68 \times 10^8$	16.97	$2.66 \times 10^3$	6.57	$1.79 \times 10^3$	21.83
9000	$2.61 \times 10^8$	4.74	$2.77 \times 10^8$	21.07	$2.73 \times 10^3$	9.39	$1.33 \times 10^3$	41.93
9300	$2.59 \times 10^8$	3.90	$2.96 \times 10^8$	29.13	$2.85 \times 10^3$	14.24	$-1.50 \times 10^2$	106.56
9600	$2.55 \times 10^8$	2.27	$3.58 \times 10^8$	56.32	$3.08 \times 10^3$	23.59	$-1.11 \times 10^4$	586.57
9900	$2.46 \times 10^8$	1.06	$-3.51 \times 10^7$	115.34	$3.62 \times 10^3$	45.19	$-1.11 \times 10^5$	4930.39
10200	$2.27 \times 10^8$	8.99	$1.88 \times 10^8$	18.00	$5.34 \times 10^3$	114.48	$-2.97 \times 10^3$	229.47
10500	$1.51 \times 10^8$	39.30	$2.19 \times 10^8$	4.56	$1.81 \times 10^4$	627.21	$6.21 \times 10^2$	72.90
10800	$6.58 \times 10^8$	164.27	$2.32 \times 10^8$	1.11	$1.35 \times 10^5$	5317.99	$1.47 \times 10^3$	35.86
11100	$3.77 \times 10^8$	51.36	$2.39 \times 10^8$	4.49	$8.61 \times 10^3$	245.44	$1.80 \times 10^3$	21.49
11400	$3.42 \times 10^8$	37.27	$2.45 \times 10^8$	6.90	$4.43 \times 10^3$	77.65	$1.96 \times 10^3$	14.43
11700	$3.30 \times 10^8$	32.38	$2.49 \times 10^8$	8.81	$3.44 \times 10^3$	38.05	$2.05 \times 10^3$	10.42
12000	$3.24 \times 10^8$	30.23	$2.53 \times 10^8$	10.45	$3.06 \times 10^3$	22.72	$2.11 \times 10^3$	7.92
12300	$3.22 \times 10^8$	29.27	$2.56 \times 10^8$	11.91	$2.87 \times 10^3$	15.18	$2.15 \times 10^3$	6.25
12600	$3.21 \times 10^8$	28.95	$2.59 \times 10^8$	13.27	$2.76 \times 10^3$	10.91	$2.17 \times 10^3$	5.08
12900	$3.21 \times 10^8$	29.00	$2.62 \times 10^8$	14.55	$2.70 \times 10^3$	8.25	$2.19 \times 10^3$	4.23
13200	$3.22 \times 10^8$	29.30	$2.65 \times 10^8$	15.79	$2.65 \times 10^3$	6.47	$2.21 \times 10^3$	3.58
13500	$3.23 \times 10^8$	29.78	$2.68 \times 10^8$	17.00	$2.62 \times 10^3$	5.23	$2.22 \times 10^3$	3.08
13800	$3.25 \times 10^8$	30.39	$2.71 \times 10^8$	18.19	$2.60 \times 10^3$	4.31	$2.23 \times 10^3$	2.69
14100	$3.27 \times 10^8$	31.10	$2.73 \times 10^8$	19.37	$2.58 \times 10^3$	3.63	$2.24 \times 10^3$	2.37
14400	$3.29 \times 10^8$	31.89	$2.76 \times 10^8$	20.55	$2.57 \times 10^3$	3.09	$2.24 \times 10^3$	2.11
14700	$3.31 \times 10^8$	32.75	$2.79 \times 10^8$	21.73	$2.56 \times 10^3$	2.67	$2.25 \times 10^3$	1.90
15000	$3.33 \times 10^8$	33.68	$2.82 \times 10^8$	22.91	$2.55 \times 10^3$	2.33	$2.25 \times 10^3$	1.72

En la Figura 4.42 se compara la respuesta del rotor obtenido de la simulación numérica contra el diagrama de bode de la respuesta del rotor obtenido al tomar como dato de entrada los coeficientes rotodinámicos identificados para cada velocidad del rotor reportados en la Tabla 4.45.

Cabe hacer notar, que la respuesta del rotor identificada (gráfica roja) es la respuesta modal del sistema rotodinámico (segundo modo de vibración), mientras que la respuesta del rotor (gráfica azul) corresponde a la obtenida del modelo de múltiples grados de libertad (solución

obtenida por el Método Directo, Ec. (3.68). Para obtener la respuesta identificada (gráfica roja) se utilizó el segundo modo de vibración para todo el intervalo de velocidades de 300 rpm -15000 rpm. Como se observa en la Figura 4.42 las respuestas de vibración son similares únicamente en el intervalo de velocidades correspondientes al segundo modo de vibración, esto se debe a que la respuesta obtenida por el método directo incluye todos los modos de vibración y en la identificación se utilizó únicamente el segundo modo de vibración del sistema.

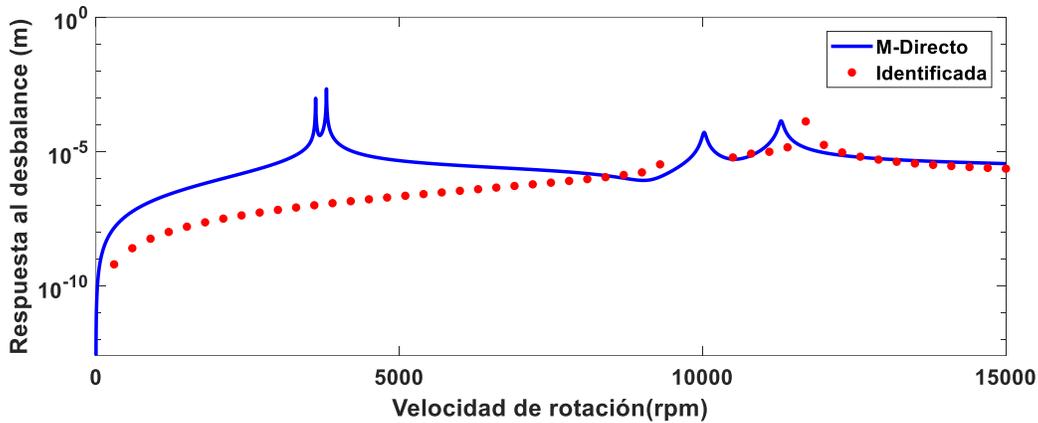


Figura 4.42: Respuesta al desbalance numérica contra identificada nodo 6, corrida de 30 s, modo 2.

#### 4.4.3.1 Comparación con los modos desacoplados

En la Figura 4.43 se compara la respuesta de vibración identificada (gráfica roja, Figura 4.42) contra la respuesta de vibración modal del rotor al desacoplar (ver sección 3.3.2, Capítulo 3) el modelo matemático de múltiples grados de libertad, Ec. 3.53, sección 3.25, Capítulo 3, donde solo se considera el efecto del segundo modo de vibración. Se puede notar la similitud entre ambas respuestas.

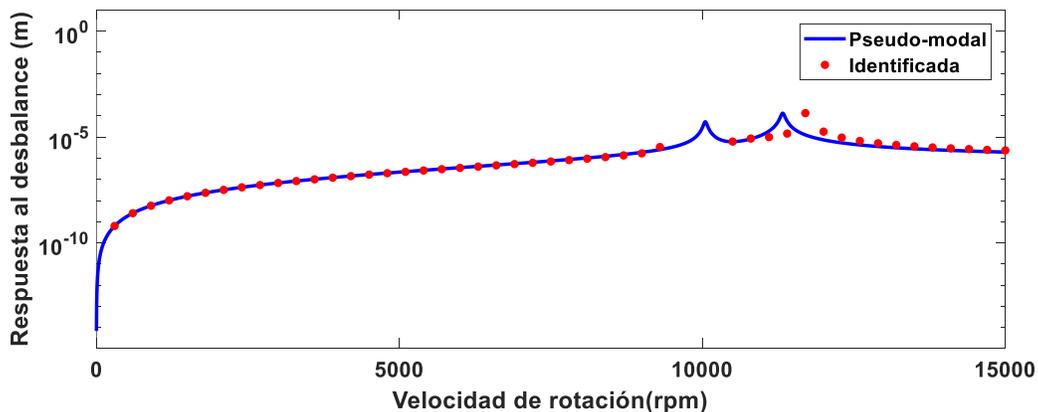


Figura 4.43: Respuesta al desbalance numérica Pseudo-modal (modo 2) e identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 2.

#### 4.4.4 Comparación sumando las respuestas identificadas con los modos separados contra el método directo.

En la Figura 4.44 se compara la respuesta de vibración identificada resultante (diagrama de bode, gráfica roja) con el diagrama de bode de la respuesta del rotor obtenido de la simulación numérica (gráfica azul). Donde la respuesta de vibración identificada resultante se obtiene al sumar las amplitudes de la respuesta de vibración en todo el intervalo de velocidades de 300 rpm -15000 rpm correspondientes al primer modo (Figura 4.40, gráfica roja) y segundo modo de vibración (Figura 4.43, gráfica roja) del rotor. Nótese la similitud de las respuestas de vibración, por tanto, se puede concluir que el identificador algebraico propuesto identifica de manera correcta los parámetros rotodinámicos modales del sistema, cabe hacer notar, que al tomar como datos de entrada los parámetros rotodinámicos identificados en el modelo que emula el comportamiento dinámico del rotor, se logra reproducir la dinámica del sistema rotatorio.

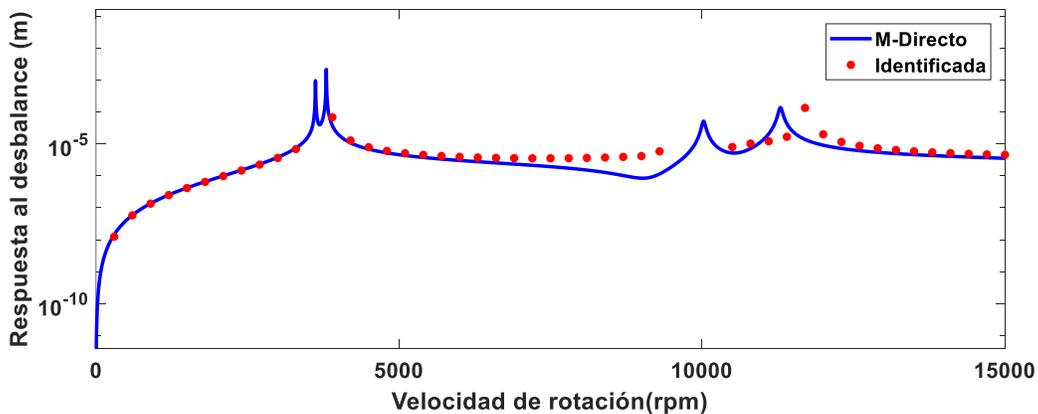


Figura 4.44: Respuesta al desbalance numérica Pseudo-modal (modo 1 y modo 2) e identificado nodo 6, corrida de 30 s.

#### 4.4.5 Identificación con la respuesta de múltiples grados de libertad

En esta sección, se muestran los resultados obtenidos por simulación numérica para la identificación de los parámetros modales rotodinámicos en el intervalo de velocidades de 300 rpm a 15,000 rpm del rotor, para el caso donde se utiliza como dato de entrada para la identificación, la respuesta de vibración obtenida de la solución del modelo matemático de múltiples grados de libertad, Ec. (3.53), sección 3.2.5, Capítulo 3, modelo que emula el comportamiento dinámico de un sistema rotodinámico real. Lo anterior, se debe a que en la parte experimental la respuesta de vibración del rotor experimental se considera como dato de entrada para la identificación modal de los parámetros rotodinámicos.

#### 4.4.6 Identificación modal utilizando el primer modo de vibración y la respuesta de vibración obtenida del modelo rotodinámico de múltiples grados de libertad.

En la Figura 4.45 se muestra la identificación de los parámetros modales rotodinámicos correspondientes al primer modo de vibración del rotor, para una velocidad del rotor de 1,800 rpm. Nótese que el identificador modal converge de manera instantánea y una vez identificado el parámetro modal, el identificador permanece constante en el tiempo. Para el proceso de identificación se utilizó como dato de entrada el primer modo de vibración (ver Figura 4.36) y la respuesta de vibración obtenida del modelo rotodinámico de múltiples grados de libertad, Ec. (3.53), sección 3.2.5, Capítulo 3.

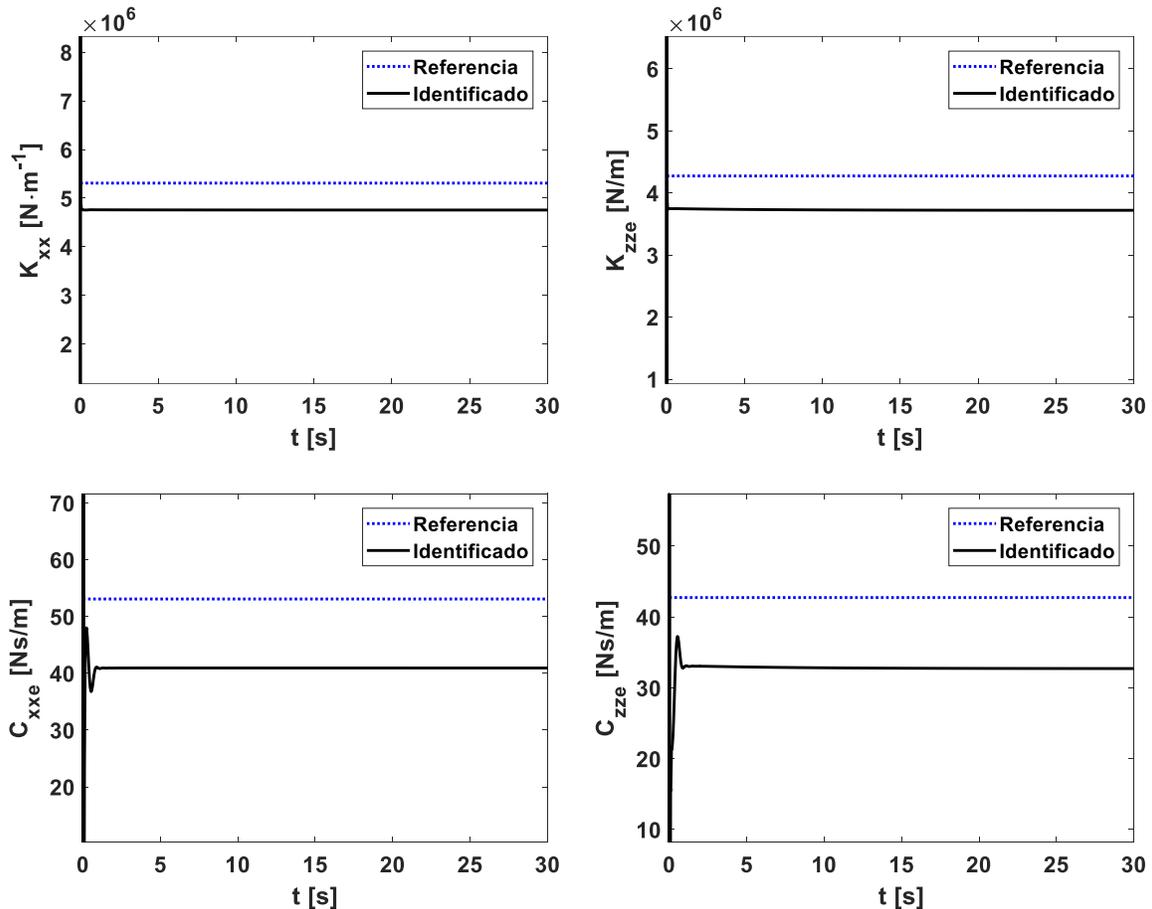


Figura 4.45: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento modales identificados a una velocidad de 1800 rpm, modo 1.

En la Figura 4.46 se muestra una comparación entre la respuesta de vibración obtenida de forma numérica tomando como datos de entrada los parámetros rotodinámicos de referencia (gráfica en color azul) y la respuesta de vibración identificada obtenida al tomar como datos de entrada los parámetros modales rotodinámicos identificados (gráfica en color rojo), se puede notar que ambas respuestas son prácticamente idénticas.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

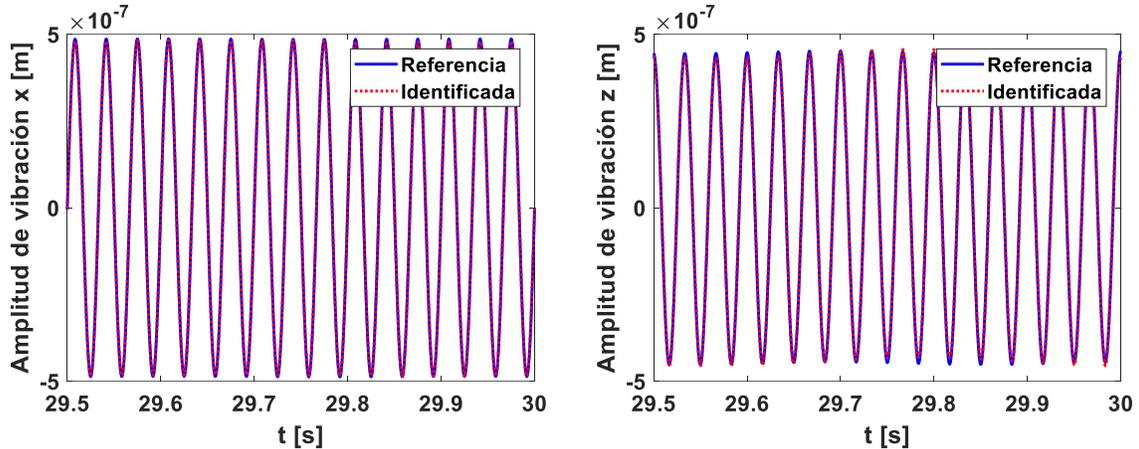


Figura 4.46: Comparación entre la respuesta numérica (color azul) y la identificada (color rojo) a una velocidad de 1800 rpm, modo 1.

En la Tabla 4.46 se muestran los parámetros modales de rigidez y amortiguamiento identificados a diferentes velocidades (300 rpm-15,000 rpm), también se observan las desviaciones porcentuales entre los parámetros de referencia y los parámetros modales identificados.

Tabla 4.46: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo 1.

<b>Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m) modal de los soportes 30 seg</b>								
rpm	$k_{xx}$	E%	$k_{zz}$	E%	$c_{xx}$	E%	$c_{zz}$	E%
300	$4.19 \times 10^6$	21	$3.16 \times 10^6$	26	37.8	29	30.4	29
600	$4.24 \times 10^6$	20	$3.22 \times 10^6$	25	38.1	28	30.6	28
900	$4.33 \times 10^6$	19	$3.30 \times 10^6$	23	38.5	28	30.9	28
1200	$4.44 \times 10^6$	16	$3.41 \times 10^6$	20	39.1	26	31.4	27
1500	$4.59 \times 10^6$	14	$3.56 \times 10^6$	17	39.9	25	32	25
1800	$4.76 \times 10^6$	10	$3.73 \times 10^6$	13	40.9	23	32.8	23
2100	$4.94 \times 10^6$	7	$3.91 \times 10^6$	8	42.3	20	33.8	21
2400	$5.13 \times 10^6$	3	$4.12 \times 10^6$	4	43.9	17	35.1	18
2700	$5.32 \times 10^6$	0	$4.33 \times 10^6$	1	46	13	36.5	15
3000	$5.48 \times 10^6$	3	$4.54 \times 10^6$	6	48.7	8	37.9	11
3300	$5.56 \times 10^6$	5	$4.80 \times 10^6$	12	52.6	1	37.5	12
3600	$5.23 \times 10^6$	1	$9.14 \times 10^5$	79	68.7	35	-1010	2606
3900	$6.46 \times 10^6$	22	$4.58 \times 10^6$	7	66.8	26	43.6	2
4200	$6.10 \times 10^6$	15	$4.68 \times 10^6$	10	63.7	20	49.1	15
4500	$5.89 \times 10^6$	11	$4.65 \times 10^6$	9	68	28	53	24
4800	$5.62 \times 10^6$	6	$4.52 \times 10^6$	6	73.3	38	56.9	33
5100	$5.24 \times 10^6$	3	$4.31 \times 10^6$	1	79.2	49	61	43
5400	$4.77 \times 10^6$	10	$4.02 \times 10^6$	6	85.7	61	65.3	53
5700	$4.20 \times 10^6$	21	$3.66 \times 10^6$	14	92.7	75	69.9	63
6000	$3.57 \times 10^6$	33	$3.24 \times 10^6$	24	100	89	74.6	75
6300	$2.89 \times 10^6$	45	$2.77 \times 10^6$	35	109	105	79.7	86
6600	$2.22 \times 10^6$	58	$2.28 \times 10^6$	47	118	122	84.9	99
6900	$1.59 \times 10^6$	70	$1.77 \times 10^6$	59	129	142	90.5	112
7200	$1.06 \times 10^6$	80	$1.28 \times 10^6$	70	141	165	96.2	125
7500	$6.78 \times 10^5$	87	$8.30 \times 10^5$	81	156	194	102	139
7800	$5.26 \times 10^5$	90	$4.53 \times 10^5$	89	175	230	108	153

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

8100	$7.07 \times 10^5$	87	$1.79 \times 10^5$	96	202	280	114	167
8400	$1.41 \times 10^6$	73	$4.21 \times 10^4$	99	240	352	119	179
8700	$3.03 \times 10^6$	43	$7.54 \times 10^4$	98	302	469	120	181
9000	$6.52 \times 10^6$	23	$2.97 \times 10^5$	93	412	676	109	155
9300	$1.45 \times 10^7$	174	$6.48 \times 10^5$	85	640	1105	52.7	23
9600	$3.59 \times 10^7$	577	$8.64 \times 10^5$	80	1220	2193	-247	678
9900	$1.02 \times 10^8$	1821	$1.63 \times 10^7$	282	3080	5698	-4060	9594
10200	$6.12 \times 10^7$	1054	$5.83 \times 10^7$	1265	2120	3899	-1140	2774
10500	$1.27 \times 10^7$	140	$5.61 \times 10^7$	1213	968	1723	379	787
10800	$4.25 \times 10^6$	20	$8.35 \times 10^7$	1853	1070	1920	909	2028
11100	$6.45 \times 10^7$	1115	$1.40 \times 10^8$	3184	2850	5267	1540	3514
11400	$1.08 \times 10^8$	1932	$1.49 \times 10^8$	3387	2120	3888	1540	3502
11700	$4.29 \times 10^7$	708	$8.58 \times 10^7$	1907	581	994	829	1840
12000	$2.53 \times 10^7$	377	$5.35 \times 10^7$	1151	286	439	491	1048
12300	$1.77 \times 10^7$	234	$3.62 \times 10^7$	746	183	245	322	652
12600	$1.36 \times 10^7$	156	$2.61 \times 10^7$	510	135	154	229	436
12900	$1.11 \times 10^7$	108	$1.97 \times 10^7$	361	108	104	175	309
13200	$9.37 \times 10^6$	77	$1.55 \times 10^7$	263	92.1	74	140	229
13500	$8.18 \times 10^6$	54	$1.26 \times 10^7$	194	81.5	55	118	176
13800	$7.29 \times 10^6$	37	$1.04 \times 10^7$	144	74.1	43	102	139
14100	$6.61 \times 10^6$	25	$8.82 \times 10^6$	106	68.9	35	90.9	113
14400	$6.08 \times 10^6$	17	$7.60 \times 10^6$	78	65.1	29	82.5	93
14700	$5.65 \times 10^6$	12	$6.64 \times 10^6$	57	62.3	25	76	78
15000	$5.29 \times 10^6$	9	$5.88 \times 10^6$	41	60.4	23	70.9	66

En la Figura 4.47 se muestra una comparación entre la respuesta de vibración obtenida del modelo matemático correspondiente al sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad (gráfica color azul, Método Directo) y la respuesta de vibración identificada (gráfica color rojo) obtenida al utilizar como datos de entrada la primera forma y los parámetros modales identificados reportados en la Tabla 4.46. Se puede observar que al utilizar únicamente los datos del primer modo de vibración (primera forma modal) se logra reproducir el comportamiento dinámico del rotor hasta el segundo modo de vibración del sistema rotodinámico.

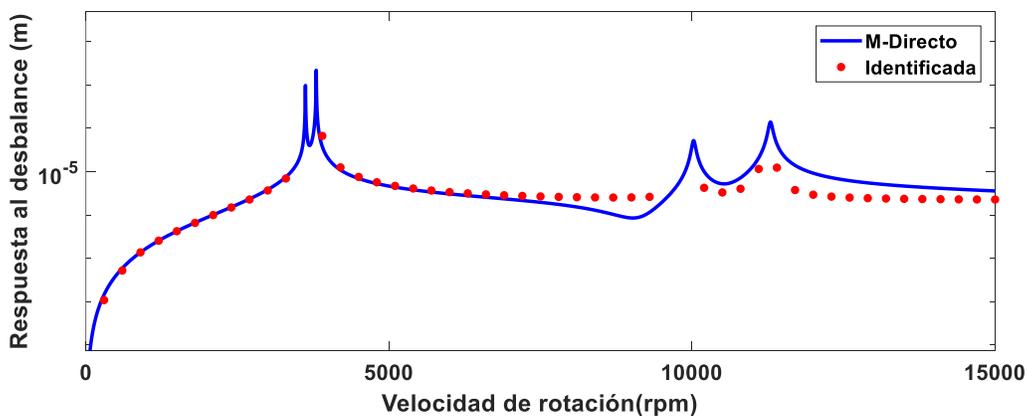


Figura 4.47: Respuesta al desbalance numérica método directo vs identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 1.

Por otra parte, en la figura 4.48 se muestra la respuesta de vibración (diagrama de bode) del sistema rotodinámico (modelo de múltiples grados de libertad, Ec. (3.53), sección 3.2.5, Capítulo 3, gráfica en color azul) para un intervalo de velocidades de 0-30,000 rpm. Nótese que al utilizar como dato de entrada la primera forma modal, los parámetros modales identificados reproducen el comportamiento dinámico del rotor únicamente hasta el segundo modo de vibración (gráfica en color rojo). En velocidades del rotor por arriba del segundo modo de vibración, los parámetros modales identificados ya no logran reproducir el comportamiento dinámico del sistema, lo que significa que los parámetros modales identificados no son correctos.

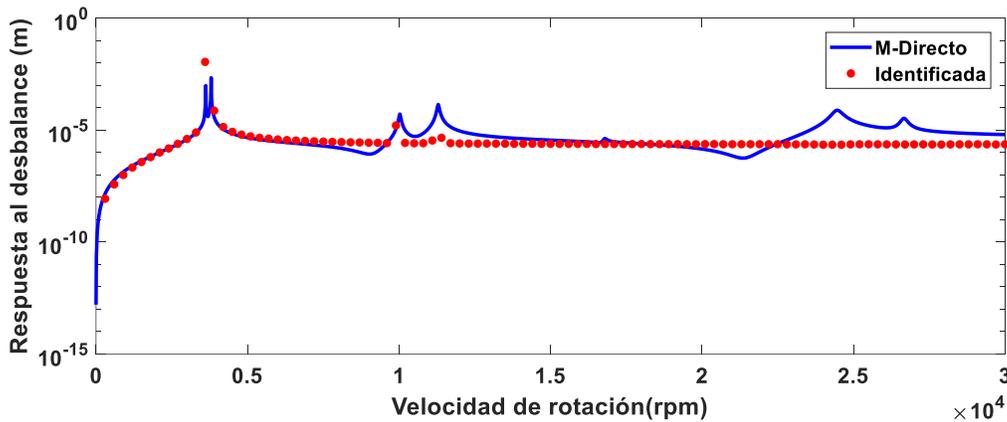


Figura 4.48: Respuesta al desbalance numérica método directo vs identificado nodo 6, corrida de 2.1 s, modo1.

#### 4.4.6.1 Comparación con los modos desacoplados

En la Figura 4.52 se compara la respuesta de vibración identificada (gráfica en color rojo) obtenida utilizando los parámetros modales identificados reportados en la Tabla 4.46 y la primera forma modal de la Figura 4.36 con la respuesta de vibración modal correspondiente al primer modo de vibración (gráfica en color azul) (primer modo de vibración desacoplado del modelo rotodinámico de múltiples grados de libertad), es decir se desacoplan los modos de vibración para realizar una comparación adecuada entre ambas respuestas de vibración. En la figura 4.49 se puede observar que ambas respuestas de vibración presentan similitud en el primer modo de vibración del rotor, sin embargo, la respuesta de vibración identificada reproduce el comportamiento dinámico del rotor en el segundo modo de vibración, modo de vibración que no se presenta en la respuesta de vibración del rotor obtenida con el modelo matemático de modos desacoplados.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

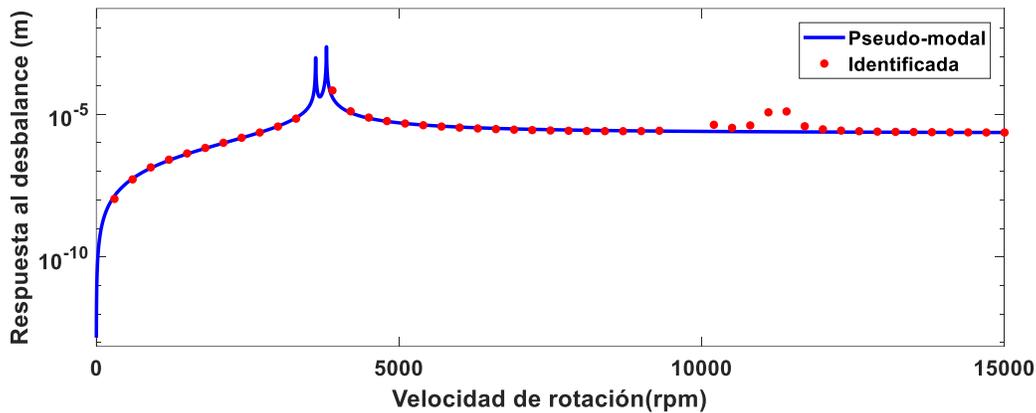


Figura 4.49: Respuesta al desbalance numérica método Pseudo-modal vs identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo1.

### 4.4.7 Identificación modal utilizando el segundo modo de vibración y la respuesta de múltiples grados de libertad.

En esta sección se muestran los resultados del identificador modal, utilizando el segundo modo de vibración (ver Figura 4.41) y la respuesta obtenida del modelo rotodinámico de múltiples grados de libertad. En la Tabla 4.47 se muestran los parámetros modales rotodinámicos identificados, así como, las desviaciones porcentuales a diferentes velocidades de operación del rotor.

Tabla 4.47: Rigidez y amortiguamiento modal identificados, modo2.

<b>Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m) modal de los soportes 30 seg</b>								
rpm	$k_{xx}$	E%	$k_{zz}$	E%	$c_{xx}$	E%	$c_{zz}$	E%
300	$-1.55 \times 10^8$	162	$-2.17 \times 10^8$	195	37.8	98	30.4	99
600	$-1.55 \times 10^8$	162	$-2.16 \times 10^8$	194	38.1	98	30.6	99
900	$-1.53 \times 10^8$	162	$-2.15 \times 10^8$	194	38.5	98	30.9	99
1200	$-1.52 \times 10^8$	161	$-2.14 \times 10^8$	193	39.1	98	31.5	99
1500	$-1.49 \times 10^8$	160	$-2.12 \times 10^8$	192	39.9	98	32.3	99
1800	$-1.47 \times 10^8$	159	$-2.09 \times 10^8$	191	41	98	33.4	99
2100	$-1.43 \times 10^8$	158	$-2.06 \times 10^8$	190	42.5	98	35	98
2400	$-1.40 \times 10^8$	156	$-2.03 \times 10^8$	188	44.4	98	37.1	98
2700	$-1.35 \times 10^8$	154	$-1.99 \times 10^8$	187	47.1	98	39.9	98
3000	$-1.31 \times 10^8$	153	$-1.95 \times 10^8$	185	50.7	98	43.3	98
3300	$-1.26 \times 10^8$	151	$-1.90 \times 10^8$	183	56.4	98	46.2	98
3600	$-1.21 \times 10^8$	149	$-1.89 \times 10^8$	183	83.6	97	-964	142
3900	$-1.14 \times 10^8$	146	$-1.82 \times 10^8$	179	74.1	97	54.3	98
4200	$-1.10 \times 10^8$	144	$-1.77 \times 10^8$	177	74.7	97	64.3	97
4500	$-1.05 \times 10^8$	142	$-1.73 \times 10^8$	176	83.5	97	72.6	97
4800	$-1.01 \times 10^8$	141	$-1.70 \times 10^8$	174	93.9	96	80.9	96
5100	$-9.79 \times 10^7$	139	$-1.67 \times 10^8$	173	105	96	89.6	96
5400	$-9.58 \times 10^7$	138	$-1.65 \times 10^8$	172	118	95	98.5	96
5700	$-9.48 \times 10^7$	138	$-1.64 \times 10^8$	172	131	95	108	95
6000	$-9.50 \times 10^7$	138	$-1.63 \times 10^8$	171	144	94	117	95
6300	$-9.63 \times 10^7$	139	$-1.64 \times 10^8$	171	158	94	126	94
6600	$-9.86 \times 10^7$	140	$-1.64 \times 10^8$	172	173	93	136	94
6900	$-1.02 \times 10^8$	141	$-1.66 \times 10^8$	172	189	92	146	94
7200	$-1.06 \times 10^8$	142	$-1.68 \times 10^8$	173	205	92	155	93

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

7500	$-1.10 \times 10^8$	144	$-1.70 \times 10^8$	174	224	91	165	93
7800	$-1.14 \times 10^8$	146	$-1.73 \times 10^8$	175	247	90	174	92
8100	$-1.18 \times 10^8$	147	$-1.76 \times 10^8$	177	276	89	182	92
8400	$-1.21 \times 10^8$	148	$-1.78 \times 10^8$	178	317	87	189	92
8700	$-1.22 \times 10^8$	149	$-1.81 \times 10^8$	179	380	85	192	92
9000	$-1.19 \times 10^8$	148	$-1.83 \times 10^8$	180	490	80	183	92
9300	$-1.06 \times 10^8$	142	$-1.84 \times 10^8$	180	715	71	127	94
9600	$-5.82 \times 10^7$	123	$-1.83 \times 10^8$	180	1280	52	-173	108
9900	$1.20 \times 10^8$	52	$-1.32 \times 10^8$	158	3100	39	-4000	275
10200	$5.29 \times 10^7$	79	$-6.99 \times 10^7$	131	2160	33	-1090	148
10500	$-8.32 \times 10^7$	133	$-7.48 \times 10^7$	133	1030	59	435	81
10800	$-1.21 \times 10^8$	149	$-5.67 \times 10^6$	102	1150	58	953	58
11100	$1.88 \times 10^7$	92	$1.46 \times 10^8$	36	2900	60	1560	32
11400	$1.74 \times 10^8$	37	$1.93 \times 10^8$	17	2140	23	1550	32
11700	$5.86 \times 10^5$	100	$4.32 \times 10^7$	81	635	74	865	62
12000	$-5.01 \times 10^7$	120	$-3.81 \times 10^7$	117	348	86	541	76
12300	$-7.33 \times 10^7$	129	$-8.37 \times 10^7$	137	249	90	379	83
12600	$-8.66 \times 10^7$	135	$-1.12 \times 10^8$	149	202	92	291	87
12900	$-9.51 \times 10^7$	138	$-1.30 \times 10^8$	157	177	93	239	90
13200	$-1.01 \times 10^8$	141	$-1.42 \times 10^8$	162	161	94	207	91
13500	$-1.05 \times 10^8$	142	$-1.51 \times 10^8$	166	150	94	185	92
13800	$-1.09 \times 10^8$	144	$-1.58 \times 10^8$	169	143	94	170	93
14100	$-1.11 \times 10^8$	145	$-1.63 \times 10^8$	171	138	94	159	93
14400	$-1.14 \times 10^8$	146	$-1.68 \times 10^8$	173	134	95	151	93
14700	$-1.15 \times 10^8$	146	$-1.71 \times 10^8$	175	131	95	144	94
15000	$-1.17 \times 10^8$	147	$-1.74 \times 10^8$	176	129	95	139	94

En la Figura 4.50 se compara la respuesta de vibración identificada (gráfica en color rojo) obtenida utilizando los parámetros modales identificados reportados en la Tabla 4.47 y la segunda forma modal del rotor con la respuesta de vibración modal correspondiente a los dos primeros modos de vibración (gráfica en color azul) (primer y segundo modos de vibración desacoplados del modelo rotodinámico de múltiples grados de libertad). De la figura 4.50 se puede observar que ambas respuestas de vibración presentan similitud en todo el intervalo de velocidades del rotor, es decir, presentan un comportamiento dinámico similar para los dos primeros modos de vibración.

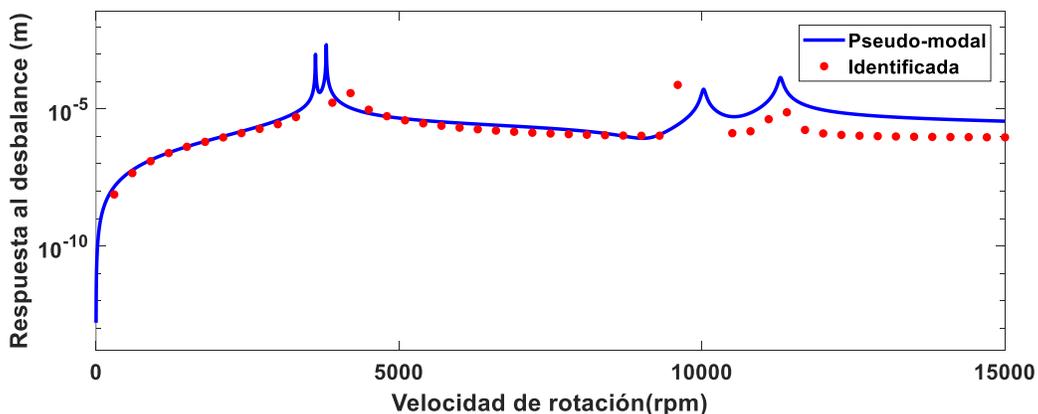


Figura 4.50: Respuesta al desbalance numérica método directo vs identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 2. Por otra parte, en la Figura 4.51 se compara la respuesta de vibración identificada (gráfica en color rojo) obtenida utilizando los parámetros modales identificados reportados en la Tabla 4.47 y la segunda forma modal del rotor con la respuesta de vibración modal correspondiente únicamente al segundo modo de vibración (gráfica en color azul) (segundo modo de vibración desacoplado del modelo rotodinámico de múltiples grados de libertad).

En la figura 4.51 se puede observar que ambas respuestas de vibración presentan similitud en el segundo modo de vibración del rotor, sin embargo, la respuesta de vibración identificada reproduce el comportamiento dinámico del rotor en el primer modo de vibración, modo de vibración que no se presenta en la respuesta de vibración del rotor obtenida con el modelo matemático de modos desacoplados.

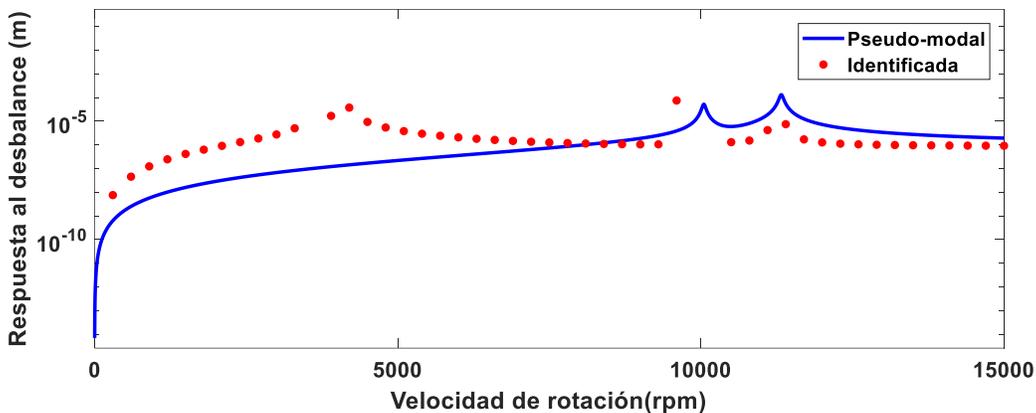


Figura 4.51: Respuesta al desbalance numérica método Pseudo-modal vs identificado nodo 6, corrida de 30 s, modo 2.

#### 4.4.8 Comparación sumando las respuestas de vibración identificadas (primer y segundo modo de vibración) con los modos separados contra el método directo.

En la Figura 4.52 se compara la respuesta de vibración identificada resultante (diagrama de bode, gráfica roja) con el diagrama de bode de la respuesta del rotor obtenido de la simulación numérica (gráfica azul). Donde la respuesta de vibración identificada resultante se obtiene al sumar las amplitudes de la respuesta de vibración en todo el intervalo de velocidades de 300 rpm -15000 rpm correspondientes al primer modo y segundo modo de vibración del rotor. Cabe hacer notar que, para la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, se utilizó como dato de entrada la respuesta de vibración modal del modelo de múltiples grados de libertad (desacoplando los dos primeros modos de vibración).

Por otra parte, en la Figura 4.53 se compara la respuesta de vibración identificada resultante (diagrama de bode, gráfica roja) con el diagrama de bode de la respuesta del rotor obtenido de la simulación numérica (gráfica azul). Donde la respuesta de vibración identificada resultante se obtiene al sumar las amplitudes de la respuesta de vibración en todo el intervalo de velocidades de 300 rpm -15000 rpm correspondientes al primer modo y segundo modo de

vibración del rotor. Cabe hacer notar que, para la identificación de los parámetros modales rotodinámicos para este caso, se utilizó como dato de entrada la respuesta de vibración obtenida del modelo de múltiples grados de libertad (sin desacoplar modos de vibración).

Nótese en las Figuras 4.52 y 4.53 la similitud de las respuestas de vibración, por tanto, se puede concluir que el identificador algebraico propuesto identifica de manera correcta los parámetros rotodinámicos modales del sistema ya sea utilizando la respuesta de vibración del rotor de forma modal o la respuesta de vibración del rotor obtenida de forma directa. Cabe hacer notar, que al tomar como datos de entrada los parámetros rotodinámicos identificados en el modelo que emula el comportamiento dinámico del rotor, se logra reproducir la dinámica del sistema rotatorio para ambos casos.

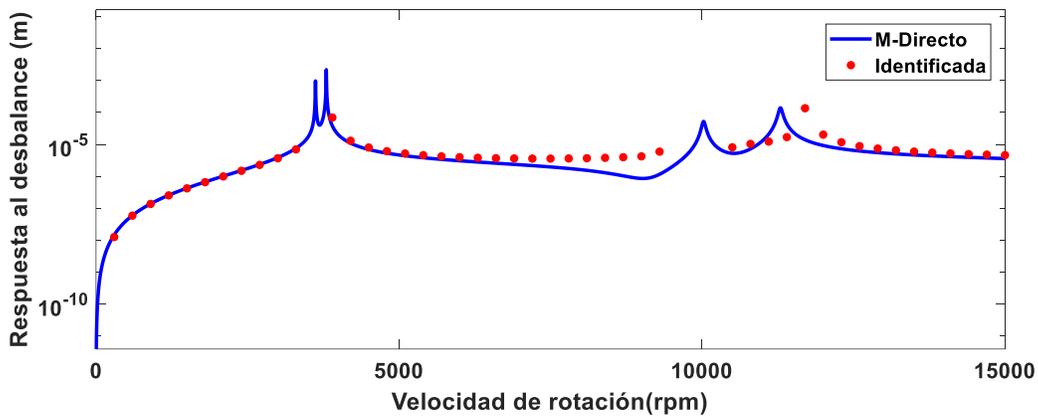


Figura 4.52: Respuesta al desbalance numérica método directo vs suma de las respuestas identificadas con los modos por separado, nodo 6, corrida de 30 s, identificación con la **respuesta modal**.

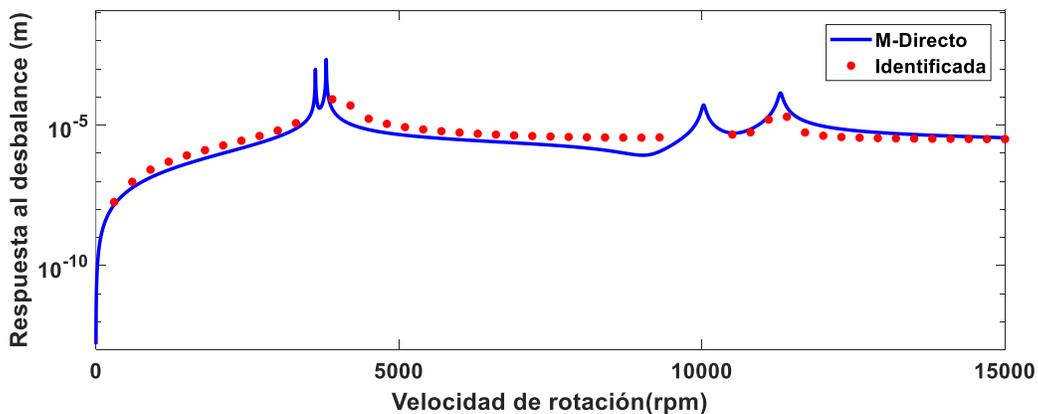


Figura 4.53: Respuesta al desbalance numérica método directo vs suma de las respuestas identificadas con los modos por separado, nodo 6, corrida de 30 s, identificación con la **respuesta de MGDL**.

#### 4.4.9 Conclusión de la sección

De las simulaciones realizadas en esta sección se puede notar que el identificador de parámetros modales rotodinámicos propuesto es estable y robusto e identifica los parámetros de rigidez y amortiguamiento modales atribuibles a los soportes de manera confiable-con

desviaciones porcentuales de error aceptables, de igual manera con los parámetros identificados se logra reproducir la dinámica del sistema con mucha precisión. Este identificador tiene la gran ventaja de no utilizar las pendientes nodales lo cual beneficia la identificación algebraica. Adicionalmente, tiene la ventaja de que, aunque es un identificador de parámetros modales, se puede alimentar con la respuesta de vibración adquirida directamente del sistema rotodinámico real.

#### **4.5 Conclusión del capítulo**

En este capítulo se evaluaron los diferentes identificadores desarrollados, los cuales fueron los siguientes:

- Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete con un modelo de múltiples grados de libertad a velocidad constante
- Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos utilizando un modelo simplificado de dos grados de libertad a velocidad constante
- Estimación de parámetros con algoritmos genéticos
- Identificación algebraica de la rigidez y amortiguamiento modal de los soportes a velocidad constante
- Obteniendo los mejores resultados con la identificación algebraica de la rigidez y amortiguamiento modal de los soportes a velocidad constante, este identificador mostro ser el más robusto y el mejor de todos, ya que se logró reproducir la respuesta del sistema a diferentes velocidades de manera muy cercana a la real y se obtuvieron desviaciones porcentuales de error aceptables en un rango de velocidades muy amplio. Cabe la pena mencionar que se puede realizar cualquier configuración del sistema rotodinámico, que no se necesitan medir las pendientes nodales y lo más importante obteniendo la forma modal del sistema basta con medir los desplazamientos (respuesta de vibración) en un solo nodo del rotor para realizar de forma confiable la identificación de los parámetros modales del sistema rotodinámico.

# CAPÍTULO 5

## PRUEBAS EXPERIMENTALES

En este capítulo se realizan las pruebas experimentales necesarias para validar el funcionamiento del identificador algebraico de los parámetros de los soportes de un cojinete presurizado. Se evalúan de manera experimental los identificadores desarrollados en el capítulo anterior.

### **5.1 Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete con un modelo de múltiples grados de libertad a velocidad constante de manera experimental**

En esta sección se verifica de manera experimental el funcionamiento del identificador algebraico desarrollado. Se utilizan diferentes configuraciones, con cojinetes convencionales y cojinetes presurizados. La identificación se realiza a velocidad constante en diferentes velocidades del rotor, asimismo, la identificación de los parámetros rotodinámicos se realiza considerando presión constante para el caso de cojinetes presurizados.

#### **5.1.1 Identificación algebraica de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en un sistema rotodinámico soportado con doble cojinete convencional**

En este apartado se prueba el identificador algebraico de manera experimental utilizando un sistema rotor-cojinete, el cual consta de una flecha con una longitud efectiva de 40 cm discretizada en 40 elementos de 1 cm cada uno, dando un total de 41 nodos. El rotor tiene un disco en el centro (nodo 21), soportado en sus extremos por dos pares de cojinetes idénticos (nodo 1 y 41). Para la estimación de los parámetros de los cojinetes se realiza una configuración simétrica con el fin de que en ambos soportes se generen los mismos desplazamientos y coeficientes rotodinámicos. Por esta razón los parámetros que se estimen en el soporte 1 (nodo 1) también se consideraran como los coeficientes estimados del soporte 2 (nodo 41).

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

En la Figura 5.1 se observa la configuración del banco de pruebas experimental y en la Figura 5.2 se observa el esquema y discretización de este.

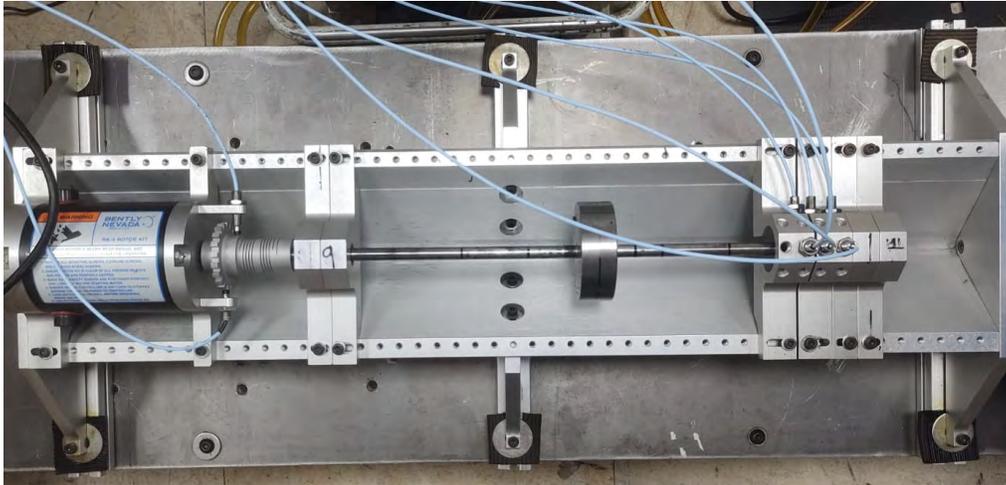


Figura 5.1: Banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.

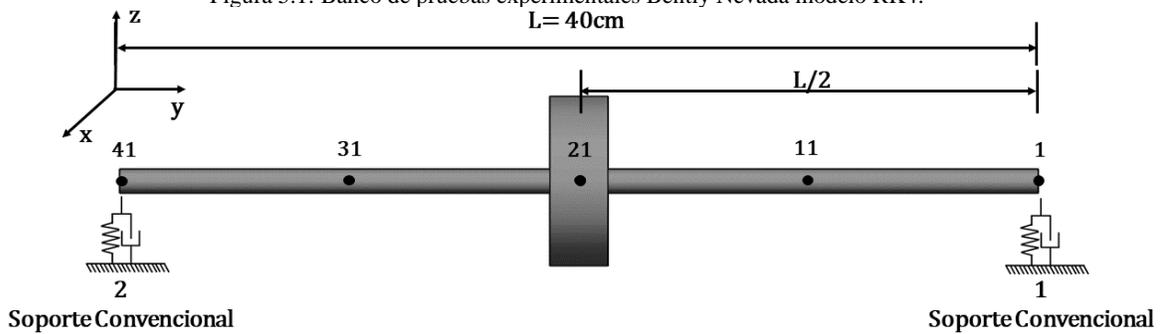


Figura 5.2: Esquema y discretización del banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.

Las propiedades mecánicas, geométricas del eje y del disco inercial, así como la masa de desbalance presente en el sistema rotodinámico se muestran en las Tablas 5.1-5.3.

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Radio externo ( $r_e$ ) = 0.005 m
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L_{total} = 0.40 \text{ m}$
$\nu = 0.30$	$L_{elemento} = 0.01 \text{ m}$

Tabla 5.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.

Geometría	
Disco	$D_1$ (m)
$e_D$	0.025
$r_{iD}$	0.005
$r_{eD}$	0.0375

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Tabla 5.3: Masa de desbalance presentes en el sistema.

Desbalance (kg · m)	Posición angular (grados)
$m_1 d_1 = 3 \times 10^{-5}$ nodo 21	$\alpha_1 = 270$

Para la caracterización del sistema rotodinámico se utilizaron sensores de desplazamiento marca Bently Nevada con una sensibilidad de  $8 \text{ mV}/\mu\text{m}$ . Los sensores de desplazamiento se colocaron en el nodo 3 para medir la respuesta de vibración en la dirección horizontal y vertical del rotor.

Con la finalidad de tener una respuesta de vibración controlada se balancea el sistema rotodinámico y una vez que se tiene un nivel aceptable de amplitudes de vibración se le adiciona al sistema una masa de desbalance controlada de  $3 \times 10^{-5} \text{ (kg} \cdot \text{m)}$  a  $270^\circ$ . El objetivo es obtener la respuesta de vibración del sistema considerando una rampa de excitación de tipo lineal. Para las pruebas experimentales se consideró una aceleración angular de  $12.14 \text{ rad/s}^2$ . En la figura 5.3 se muestra la respuesta de vibración (diagrama de bode) y la rampa de excitación de tipo lineal del rotor.

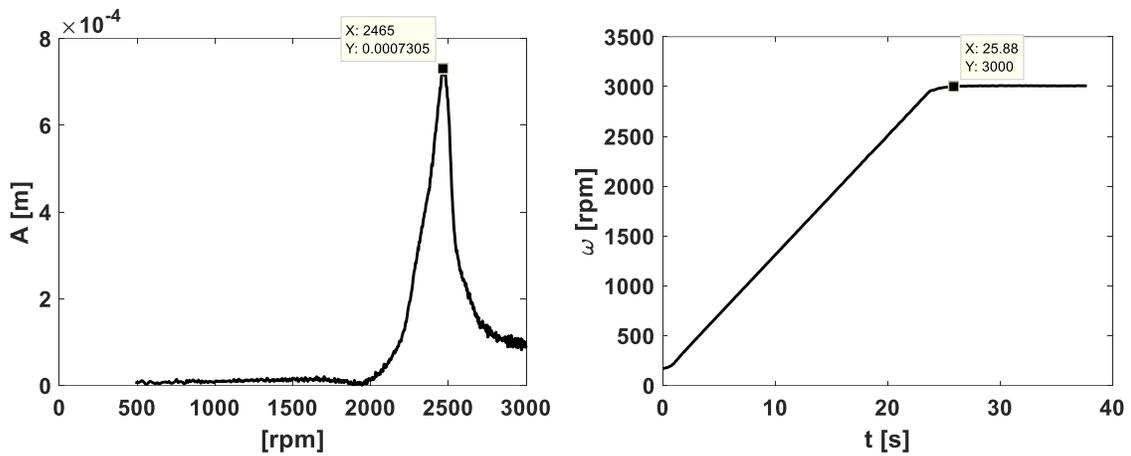


Figura 5.3: Respuesta al desbalance.

### 5.1.1.1 Estimación con algoritmos genéticos

Con esta respuesta experimental y las características del sistema rotodinámico, se procede a encontrar los parámetros de rigidez y amortiguamiento del sistema, es decir, los coeficientes rotodinámicos. Para la identificación de los parámetros rotodinámicos se utilizó algoritmos genéticos considerando los parámetros de la Tabla 5.4. En la Tabla 5.5 se observa el intervalo de búsqueda. Cabe resaltar que no hay coeficientes cruzados, solo se consideran los coeficientes directos.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Tabla 5.4: Parámetros del algoritmo genético.

Genes por individuo	2
Tamaño de la población	100
Elitismo	2
Probabilidad de cruce	0.90
Probabilidad de mutación	0.90
Algoritmo de selección	Torneo determinístico + aleatorio
Algoritmo de cruce	Cruce en dos puntos
Algoritmo de mutación	Reemplazo aleatorio

Tabla 5.5: Intervalo de búsqueda.

Coeficientes	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)
$k_{xx} = k_{zz}$	$[25 \times 10^3, 1 \times 10^6]$
$c_{xx} = c_{zz}$	$[0, 10 \times 10^3]$

Configurando el algoritmo genético con los parámetros anteriores se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 5.6, los cuales son utilizados para generar la respuesta estimada y compararla con la respuesta experimental del sistema rotodinámico.

Tabla 5.6: Valores identificados.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	$t$ (h, min, seg)
0-3000	$2 \times 10^5$	$2 \times 10^5$	25	25	0:11:46

Una vez caracterizado el sistema rotodinámico y después de su comparación con la respuesta de vibración obtenida de un modelo de elemento finito considerando los parámetros rotodinámicos identificados (ver Figura 5.4), se puede notar que el modelo numérico desarrollado replica el comportamiento dinámico del sistema rotatorio experimental con desviaciones porcentuales de error aceptables. Partiendo de esto se procede a realizar la estimación de los coeficientes rotodinámicos aplicando únicamente el método de identificación algebraica.

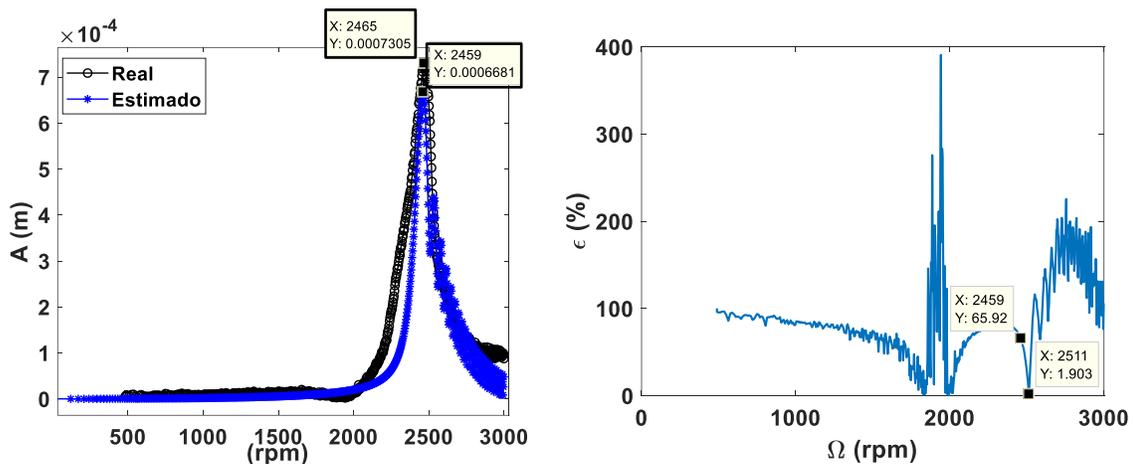
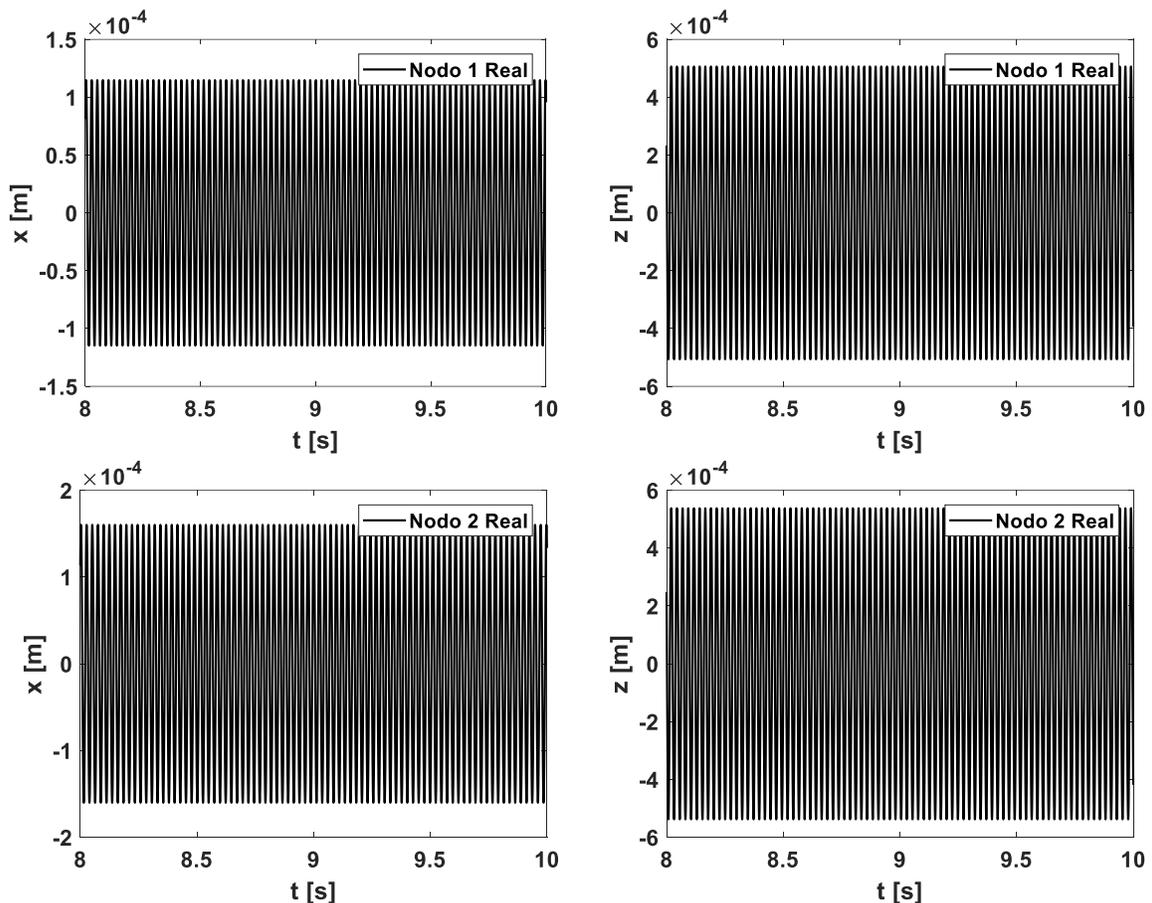


Figura 5.4: Respuesta al desbalance y función de rendimiento.

### 5.1.1.2 Simulación experimental con el identificador algebraico de múltiples grados de libertad

En este apartado se analiza el comportamiento del identificador algebraico de manera experimental. Para el análisis, se utilizó la misma configuración del sistema rotor-cojinete descrito en la sección 5.1.1. Asimismo, se consideró una velocidad del rotor de 2,640 rpm y una frecuencia de muestreo de 10,000 muestras/s.

El sistema está equipado con seis sensores de desplazamiento marca Bently Nevada con una sensibilidad de  $8 \text{ mV}/\mu\text{m}$ , se utilizaron dos sensores por cada nodo para medir la respuesta de vibración en las direcciones horizontal y vertical del rotor (ver Figura 5.5). Con la información recabada con los seis sensores (nodos 1, 2 y 3) y con la ayuda de las ecuaciones de diferencias finitas presentadas anteriormente sección 4.1.7, Capítulo 4 se calculan las pendientes nodales del nodo donde se encuentra el soporte y el nodo adyacente (ver Figura 5.6). En esta estimación se utiliza únicamente el identificador algebraico.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

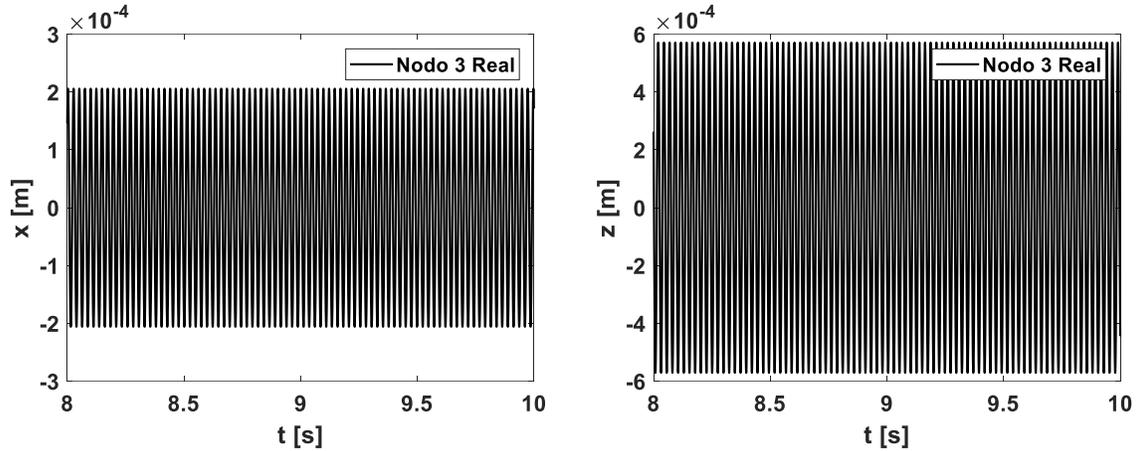


Figura 5.5: Desplazamientos nodales a una velocidad de 2,460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

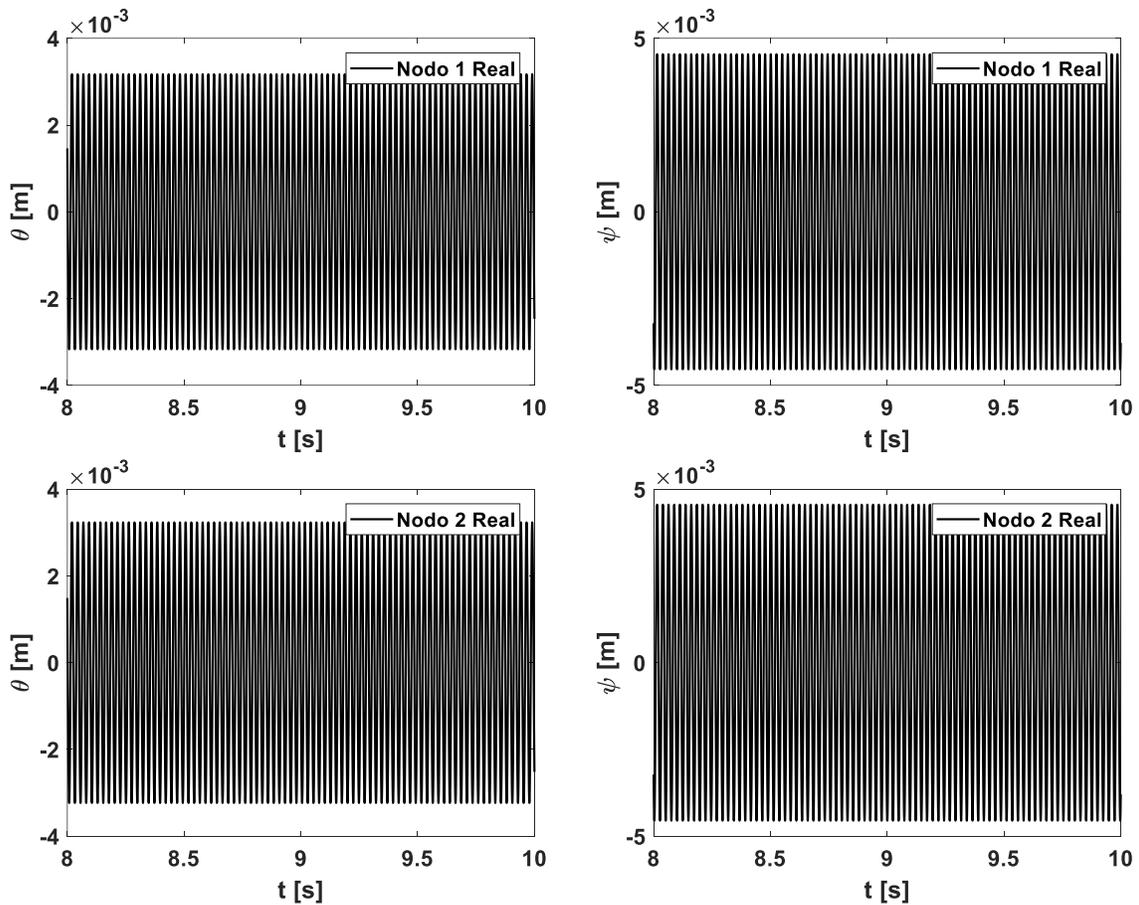


Figura 5.6: Pendientes nodales aproximadas a una velocidad de 2,460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s.

Tomando como dato de entrada la respuesta de vibración del rotor (Figura 5.5) y las pendientes nodales (Figura 5.6), en la Figura 5.7 se muestran los parámetros rotodinámicos identificados.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

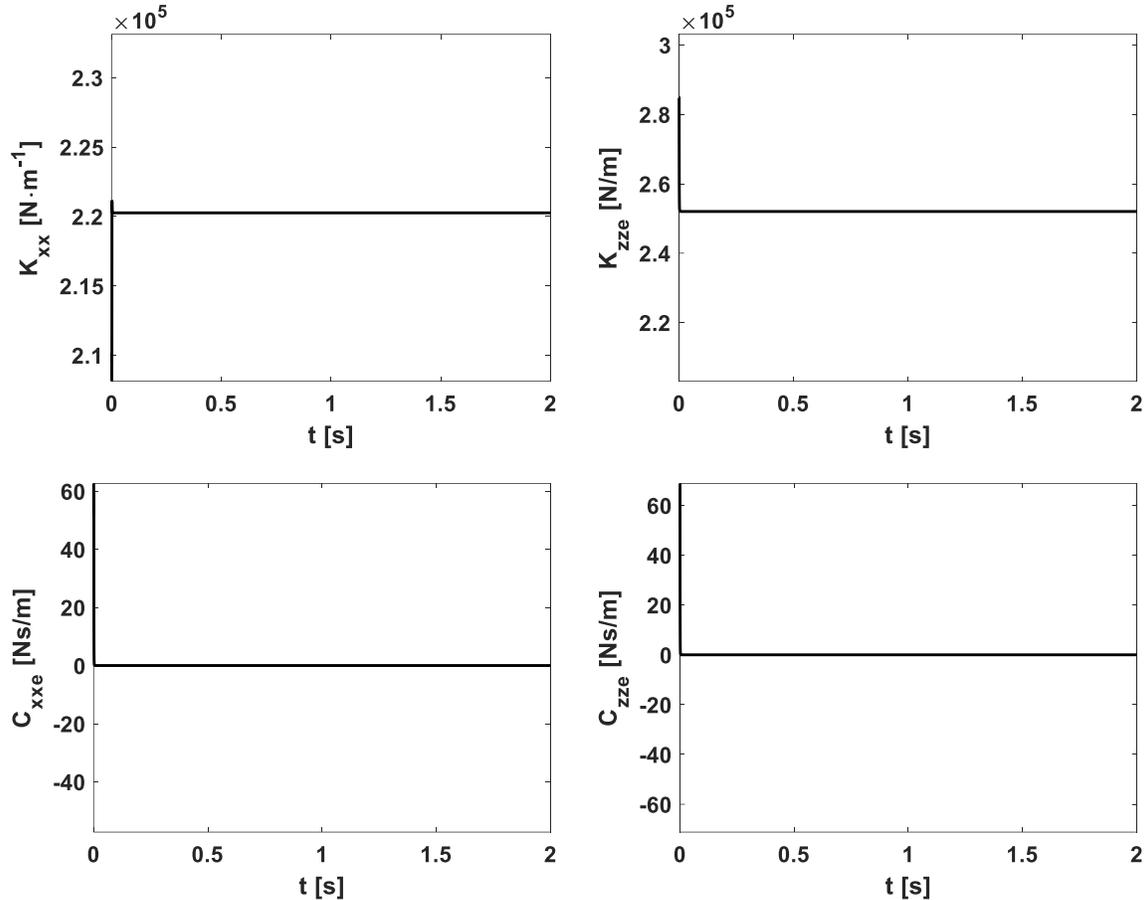


Figura 5.7: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 2,460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

En la Tabla 5.7 se muestran los coeficientes rotodinámicos identificados en diferentes velocidades del rotor, utilizando pendientes aproximadas y el filtro invariante descrito en la sección 4.1.6, Capítulo 4. De la tabla 5.7 se puede notar la similitud de los valores de los parámetros rotodinámicos estimados en diferentes velocidades, donde el parámetro del amortiguamiento es prácticamente cero.

Tabla 5.7: Parámetros identificados utilizando 10,000 muestras/s, a diferentes velocidades de rotación, soporte 1.

rpm	Parámetros estimados			
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
600	$2.20478 \times 10^5$	$2.52212 \times 10^5$	$1.38770 \times 10^{-2}$	$2.25282 \times 10^{-3}$
1200	$2.20441 \times 10^5$	$2.52176 \times 10^5$	$1.92330 \times 10^{-2}$	$5.84769 \times 10^{-3}$
1800	$2.20378 \times 10^5$	$2.52115 \times 10^5$	$3.31800 \times 10^{-2}$	$1.06035 \times 10^{-2}$
2400	$2.20270 \times 10^5$	$2.52024 \times 10^5$	$9.55628 \times 10^{-5}$	$8.28263 \times 10^{-5}$
2460	$2.20258 \times 10^5$	$2.52013 \times 10^5$	$1.63527 \times 10^{-2}$	$5.33271 \times 10^{-3}$

En la Figura 5.8 se muestra la comparación de la respuesta de vibración real (experimental) en los nodos 1, 2 y 3 con la respuesta de vibración estimada obtenida de la simulación del

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

sistema rotor-cojinete considerando como dato de entrada los parámetros rotodinámicos identificados. De esta comparación se puede apreciar la diferencia notoria en las amplitudes entre ambas respuestas. En la figura 5.8 se puede observar que existe una gran diferencia en las amplitudes de la respuesta de vibración estimada con respecto a la experimental, lo que demuestra que los coeficientes rotodinámicos identificados no son correctos.

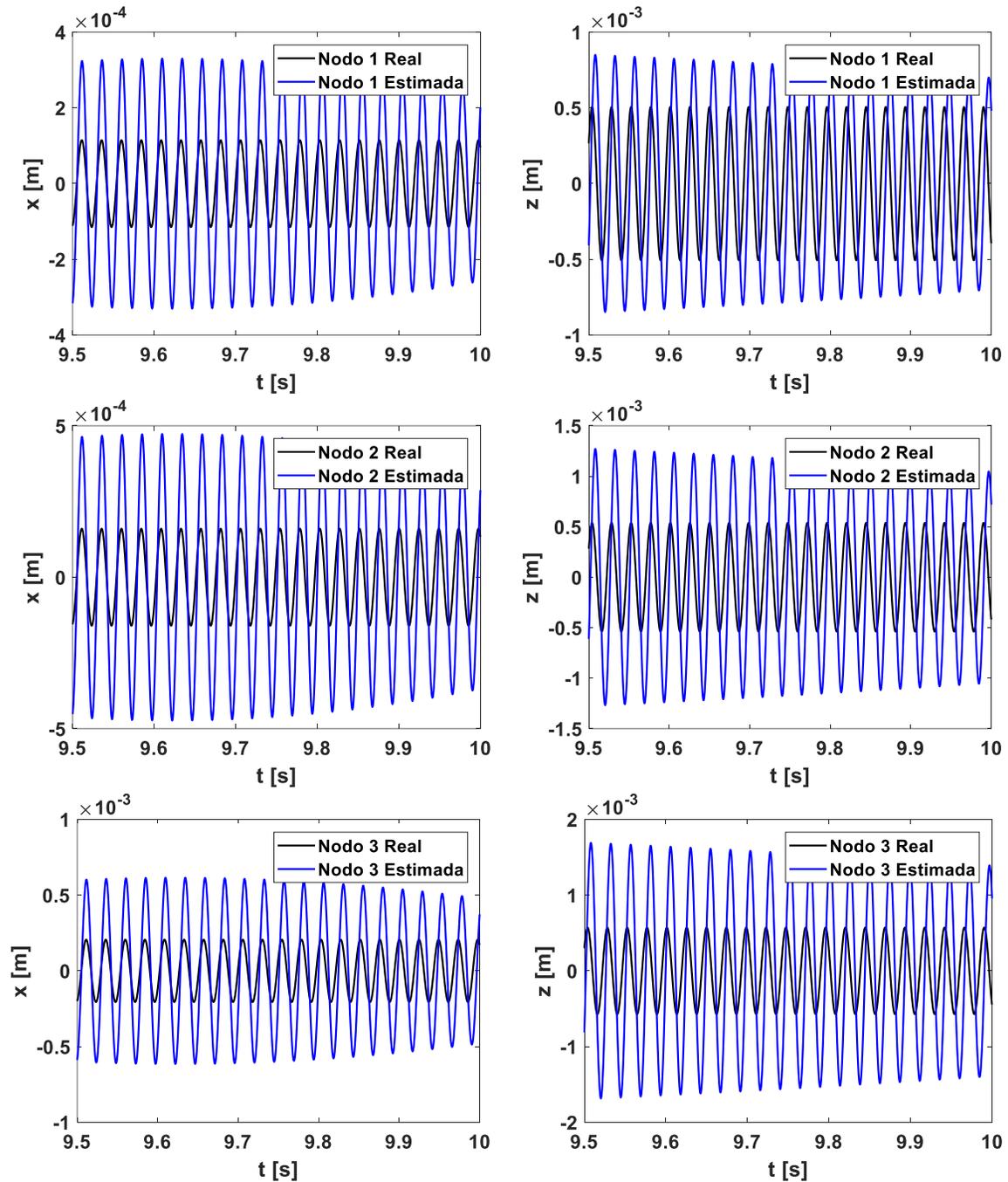


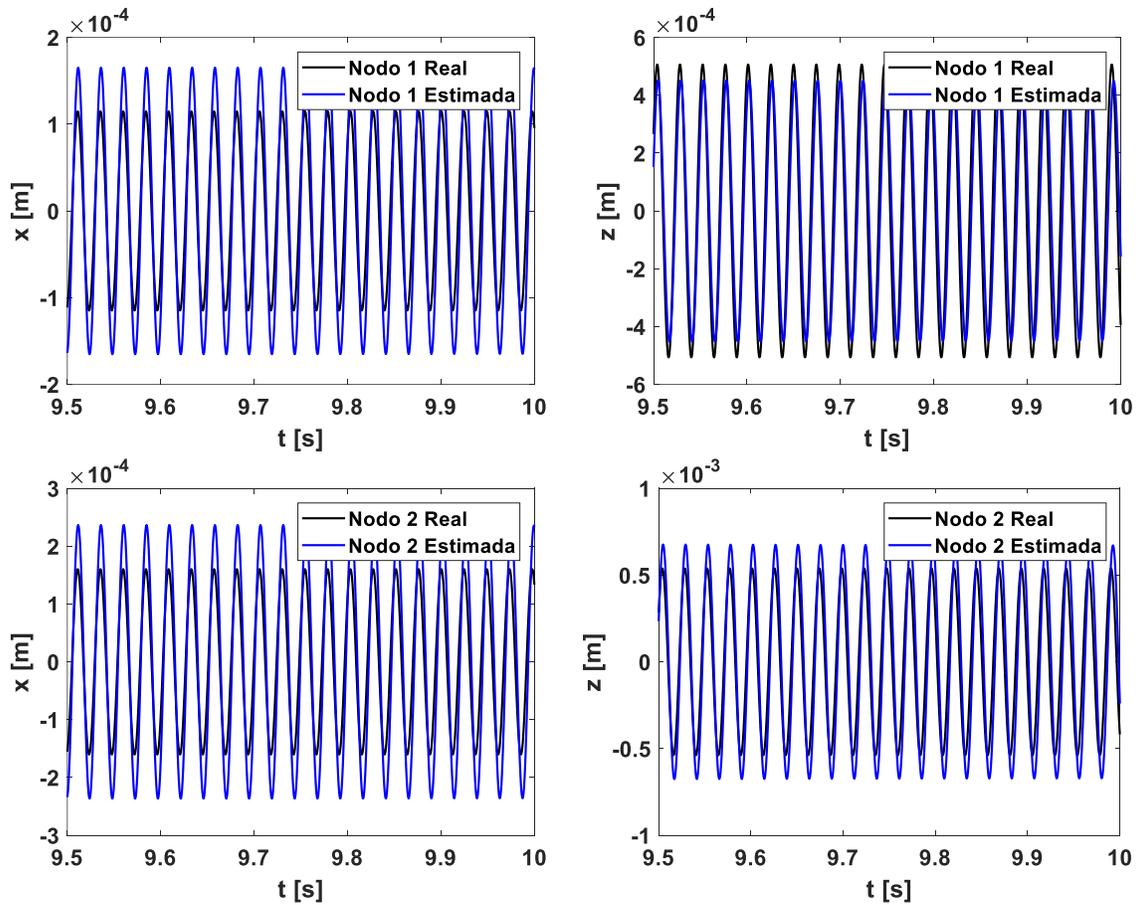
Figura 5.8: Comparación de los desplazamientos nodales a una velocidad de 2,460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

### 5.1.1.3 Comparación con el amortiguamiento obtenido con el algoritmo genético

En esta sección se evalúa y analiza la respuesta de vibración del rotor obtenida con los parámetros de rigidez identificados con la técnica de identificación algebraica y los parámetros de amortiguamiento identificados con el algoritmo genético. En la Figura 5.9 se muestra la comparación de la respuesta de vibración real (experimental) en los nodos 1, 2 y 3 con la respuesta de vibración estimada obtenida de la simulación del sistema rotor-cojinete considerando como dato de entrada los parámetros rotodinámicos identificados. En la Tabla 5.8 se presenta la desviación porcentual entre la respuesta de vibración experimental y la respuesta de vibración estimada para cada uno de los nodos analizados. Se puede observar que la respuesta de vibración estimada presenta una similitud tanto en amplitud y fase con la respuesta de vibración experimental logrando errores porcentuales aceptables.

Tabla 5.8: Desviación porcentual entre las respuestas real y estimada.

$\omega$ rpm	Desviación porcentual					
	$X_1$	$Z_1$	$X_2$	$Z_2$	$X_3$	$Z_3$
2460	43.9%	-10.41%	47.69%	25.35%	49.47%	57.34%



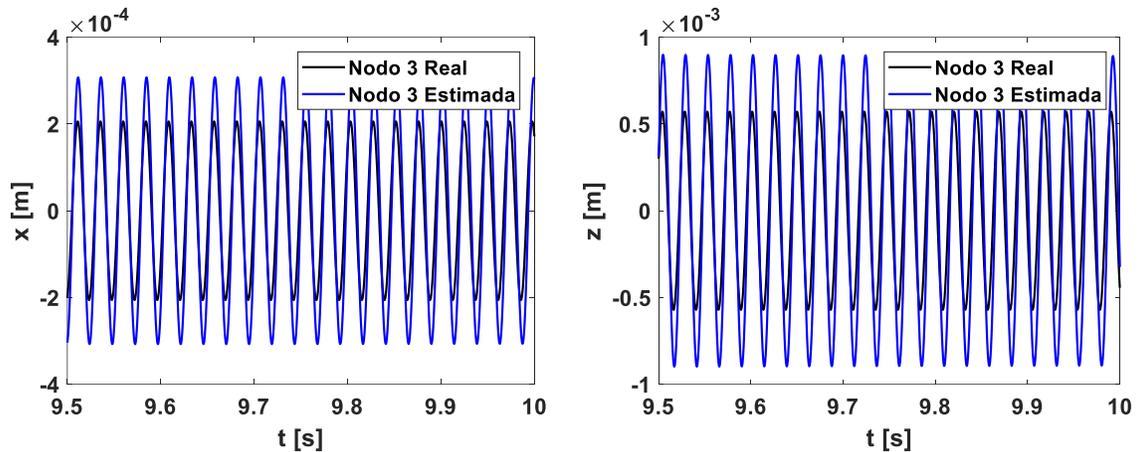


Figura 5.9: Comparación entre los desplazamientos nodales reales y estimados a una velocidad de 2460 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

### 5.1.2 Identificación algebraica de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en un sistema rotodinámico soportado en dos cojinetes presurizados

En esta sección se utiliza un sistema rotor-cojinetes experimental (ver Figura 5.10) con las mismas dimensiones y discretización de la sección anterior con la diferencia que se utilizan dos discos inerciales (nodo 16 y 26). Este sistema está soportado en un par de cojinetes presurizados idénticos en sus extremos (nodo 1 y 41), ambos con una relación  $L/D = 1$ . Para el análisis se consideró una presión en las chumaceras de 10 psi.

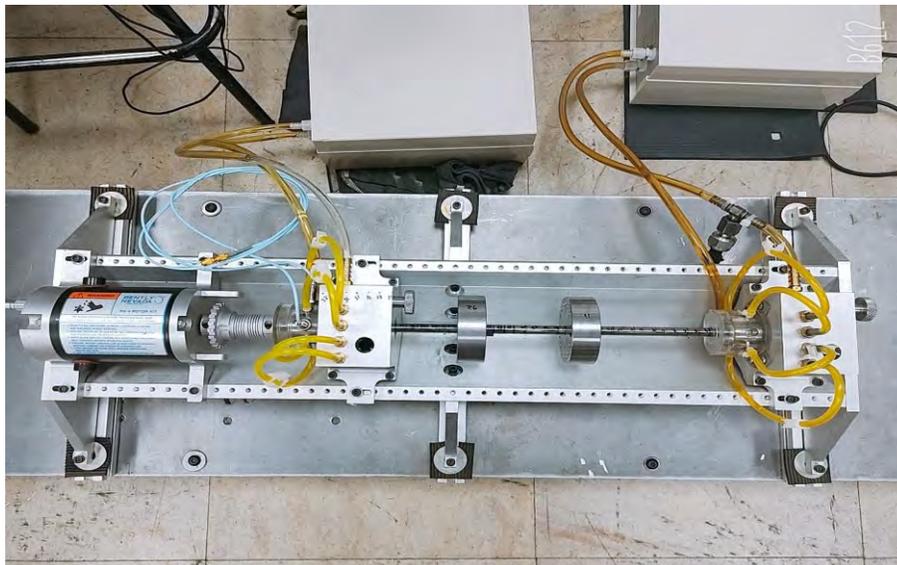


Figura 5.10: Banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

En la Figura 5.11 se muestra el esquema y discretización del banco de pruebas experimental.

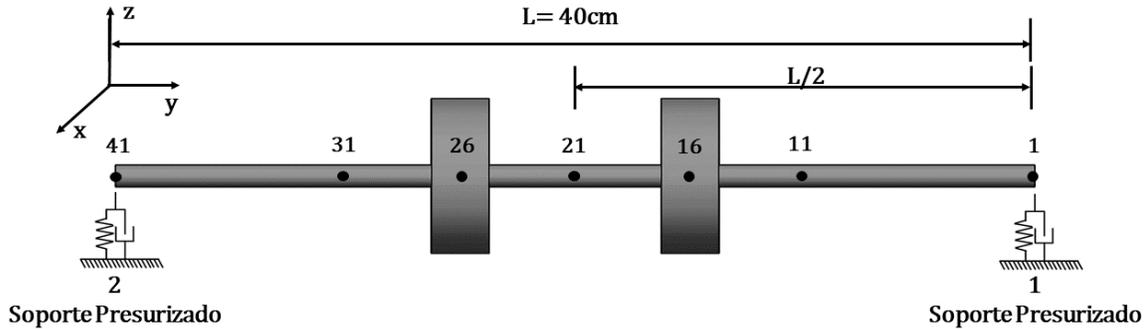


Figura 5.11: Esquema y discretización del banco de pruebas experimentales Bently Nevada modelo RK4.

El sistema está equipado con seis sensores de desplazamiento marca Bently Nevada con una sensibilidad de  $8 \text{ mV}/\mu\text{m}$ . Se utilizaron dos sensores por cada nodo para medir la respuesta de vibración en las direcciones horizontal y vertical del rotor. Con la información recabada con los seis sensores (nodos 1, 2 y 3) y con la ayuda de las ecuaciones de diferencias finitas presentadas anteriormente sección 4.1.7, Capítulo 4 se calculan las pendientes nodales del nodo donde se encuentra el soporte presurizado y el nodo adyacente (nodos 1 y 2). Para la identificación de los parámetros rotodinámicos se utiliza únicamente el identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete con un modelo de múltiples grados de libertad a velocidad constante sección 4.1.1, Capítulo 4.

Las propiedades mecánicas, geométricas del eje y del disco, así como los parámetros del desbalance se muestran en las Tablas 5.9 – 5.11.

Tabla 5.9: Propiedades mecánicas y geométricas del eje.

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Radio externo ( $r_e$ ) = 0.005 m
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L_{total} = 0.40 \text{ m}$
$\nu = 0.30$	$L_{elemento} = 0.01 \text{ m}$

Tabla 5.10: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos.

Disco	Geometría	
	$D_1$ (m)	$D_2$ (m)
$e_D$	0.025	0.025
$r_{iD}$	0.005	0.005
$r_{eD}$	0.0375	0.0375

Tabla 5.11: Masa de desbalance presentes en el sistema.

Disco	Desbalance (kg. m)	Posición angular (grados)
1	$m_u d_1 = 2.22 \times 10^{-4}$ nodo 16	$\alpha_1 = 0$
2	$m_u d_2 = 2.22 \times 10^{-4}$ nodo 21	$\alpha_2 = 0$

### Forma modal

En la Figura 5.12 se observa la primera forma modal del eje horizontal y vertical del sistema rotodinámico.

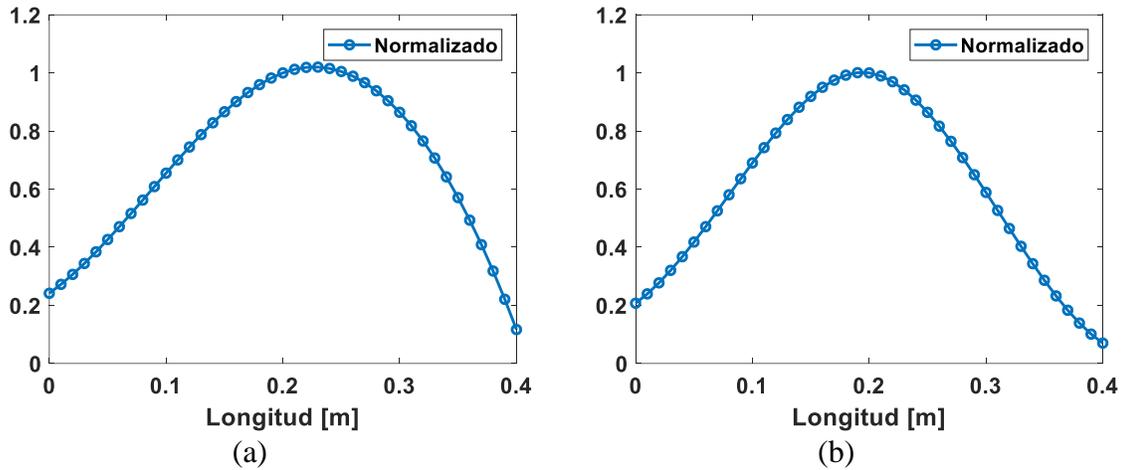
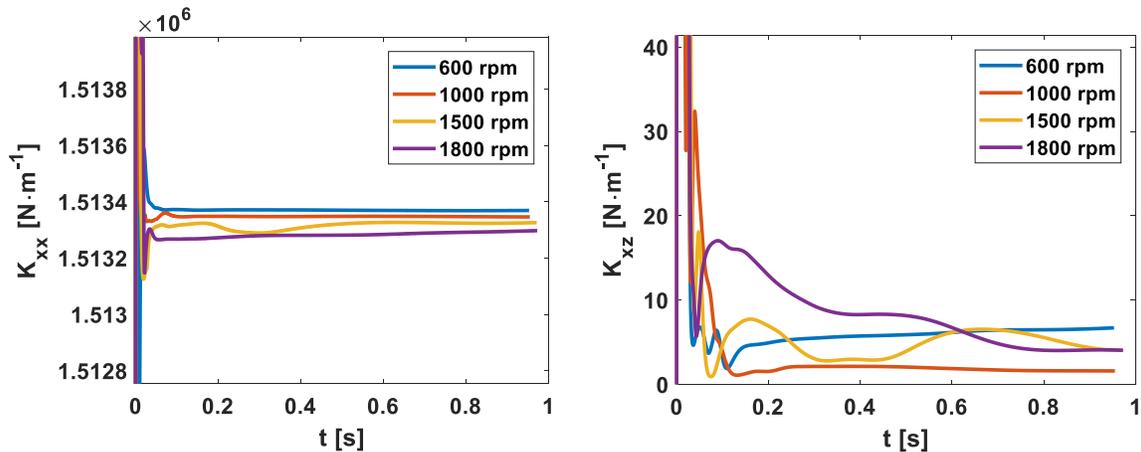


Figura 5.12: Forma modal a) horizontal y b) vertical.

Con la forma modal y la respuesta de vibración adquirida en el nodo central (nodo 21) se estiman las respuestas de vibración en los nodos 1, 2 y 3, posteriormente se introducen al identificador algebraico y se procede a estimar los coeficientes rotodinámicos a diferentes velocidades. En las Figuras 5.13 y 5.14 se muestran los parámetros rotodinámicos identificados para cada velocidad del rotor.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

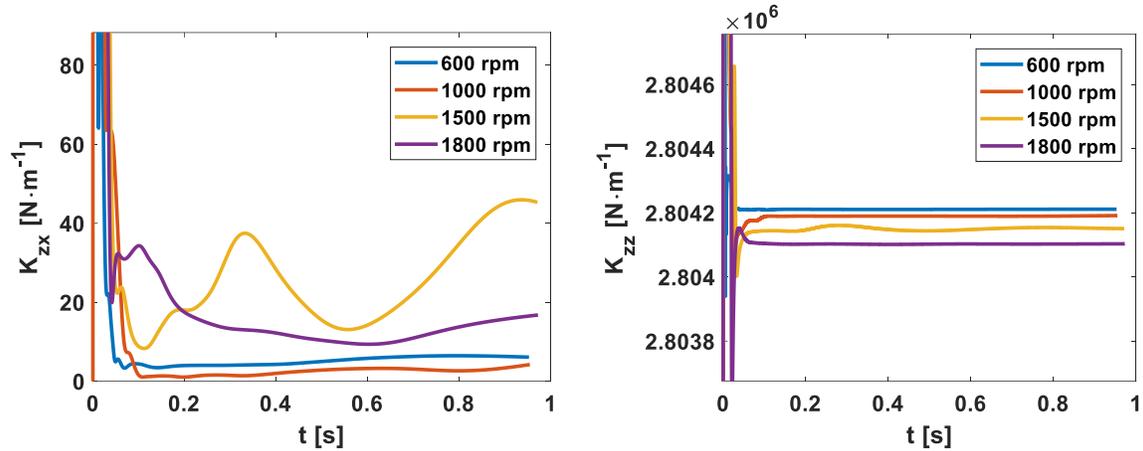


Figura 5.13: Coeficientes rotodinámicos de rigidez identificados utilizando filtro invariante a una velocidad de 1,800 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

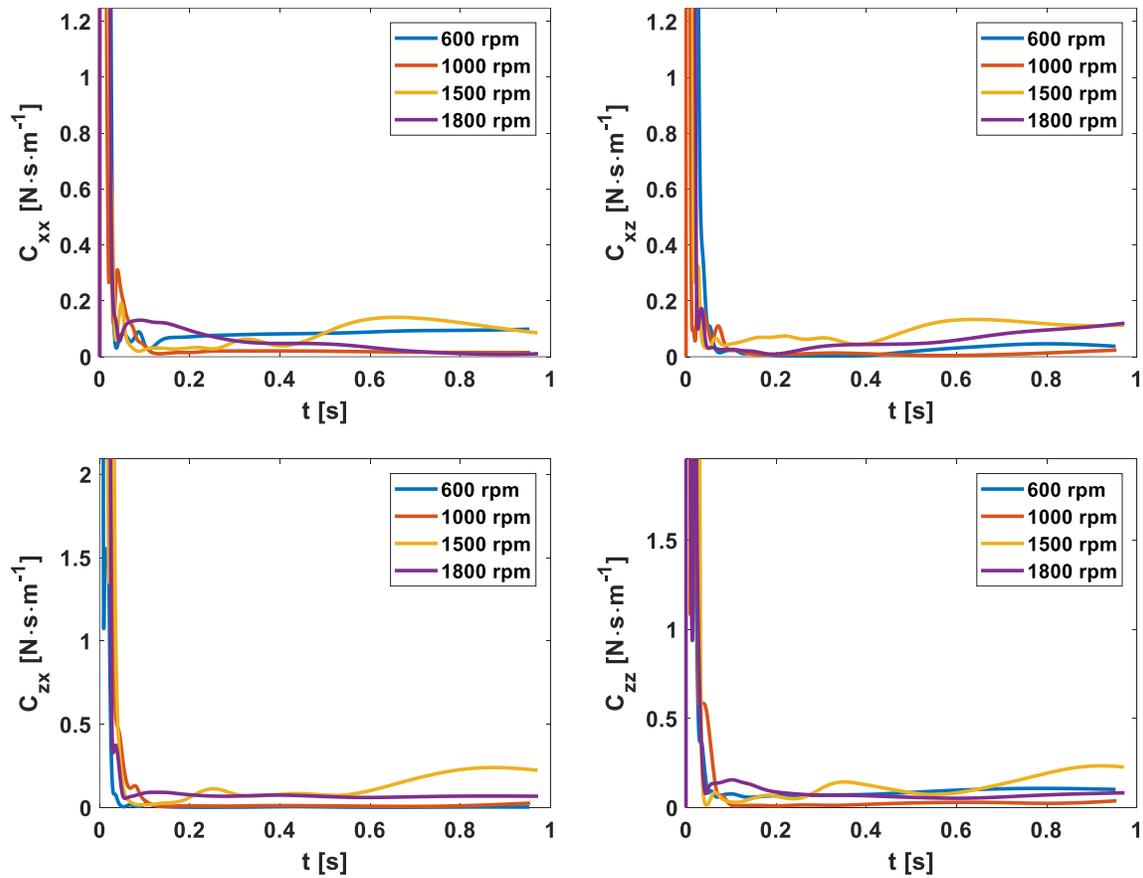


Figura 5.14: Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento identificados utilizando filtro invariante a diferentes velocidades, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

Los parámetros rotodinámicos identificados se muestran en la Tabla 5.12, se puede notar que los coeficientes rotodinámicos identificados a diferentes velocidades son cercanos entre sí, y

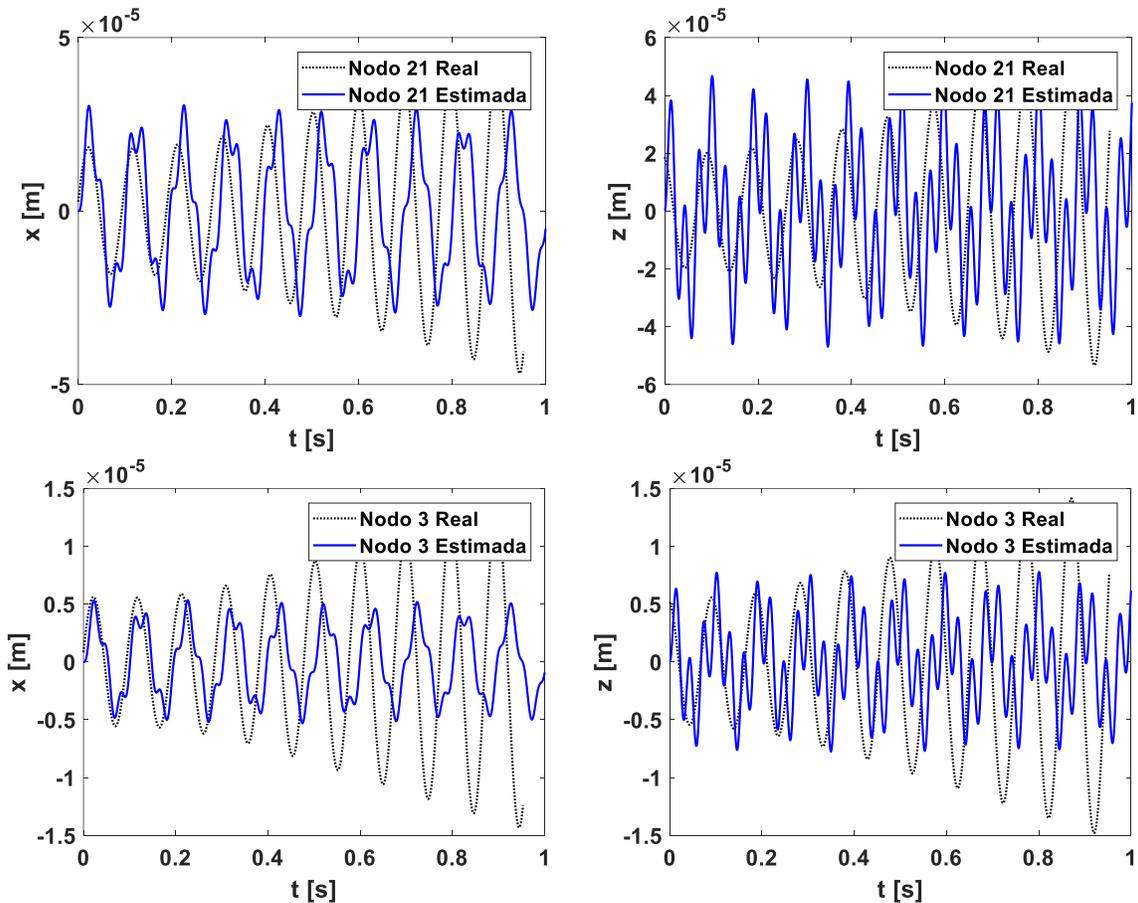
## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

en algunos casos tienen exactamente el mismo valor. Por otra parte, los coeficientes de amortiguamiento son muy cercanos a cero.

Tabla 5.12: Valores identificados.

rpm	Parámetros identificados							
	$k_{xx}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$	$c_{zz}$
600	$1.51 \times 10^6$	6.63	5.82	$2.80 \times 10^6$	$9.73 \times 10^{-2}$	$5.58 \times 10^{-2}$	$1.12 \times 10^{-2}$	$9.92 \times 10^{-2}$
1000	$1.51 \times 10^6$	3.21	6.07	$2.80 \times 10^6$	$3.09 \times 10^{-2}$	$1.83 \times 10^{-2}$	$6.15 \times 10^{-2}$	$5.65 \times 10^{-2}$
1500	$1.51 \times 10^6$	6.34	36.8	$2.80 \times 10^6$	$9.03 \times 10^{-2}$	$9.36 \times 10^{-2}$	$1.62 \times 10^{-2}$	$1.47 \times 10^{-1}$
1800	$1.51 \times 10^6$	10.3	22.1	$2.80 \times 10^6$	$6.24 \times 10^{-2}$	$6.24 \times 10^{-2}$	$1.05 \times 10^{-1}$	$9.78 \times 10^{-2}$

En las Figuras 5.15 – 5.18 se muestra la comparación de la respuesta de vibración experimental (real) con la respuesta de vibración estimada en los diferentes nodos, donde la respuesta de vibración estimada se obtiene de simular el sistema rotor-cojines presurizados con los coeficientes rotodinámicos identificados en las diferentes velocidades del rotor. Nótese en las Figuras 5.15 - 5.18 que no existe similitud alguna entre la respuesta de vibración experimental y la respuesta de vibración estimada, esto ocurre para todos los casos.



# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

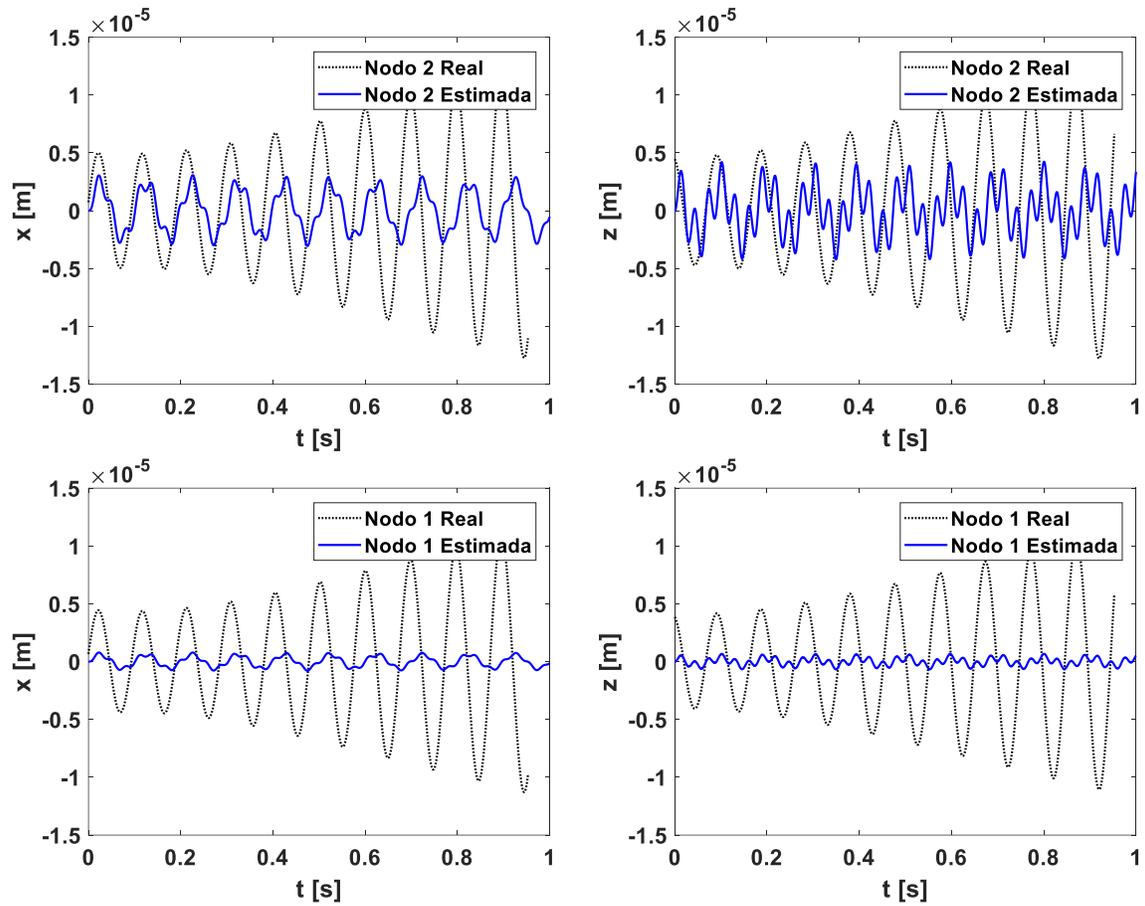
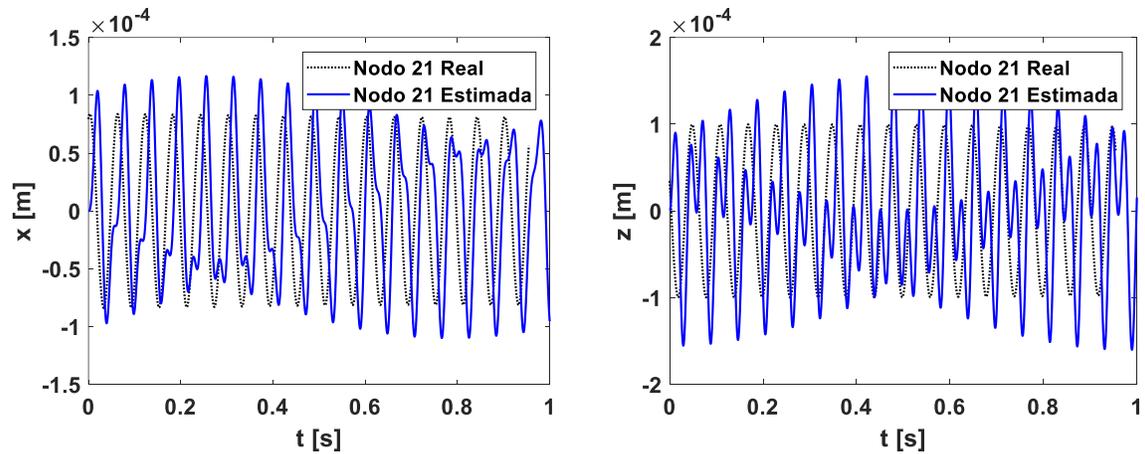


Figura 5.15: Comparación de los desplazamientos nodales a una velocidad de 600 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.



# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

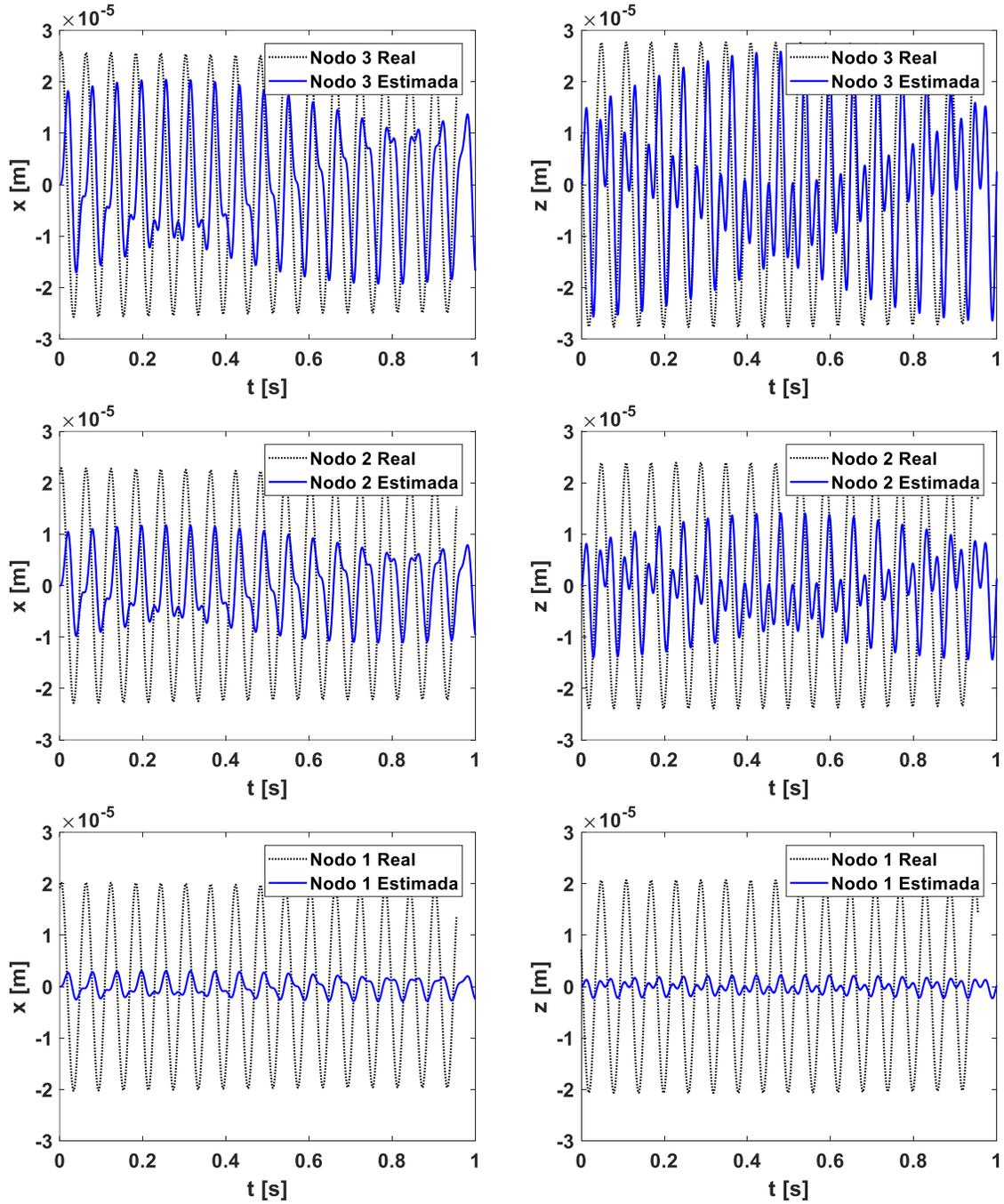
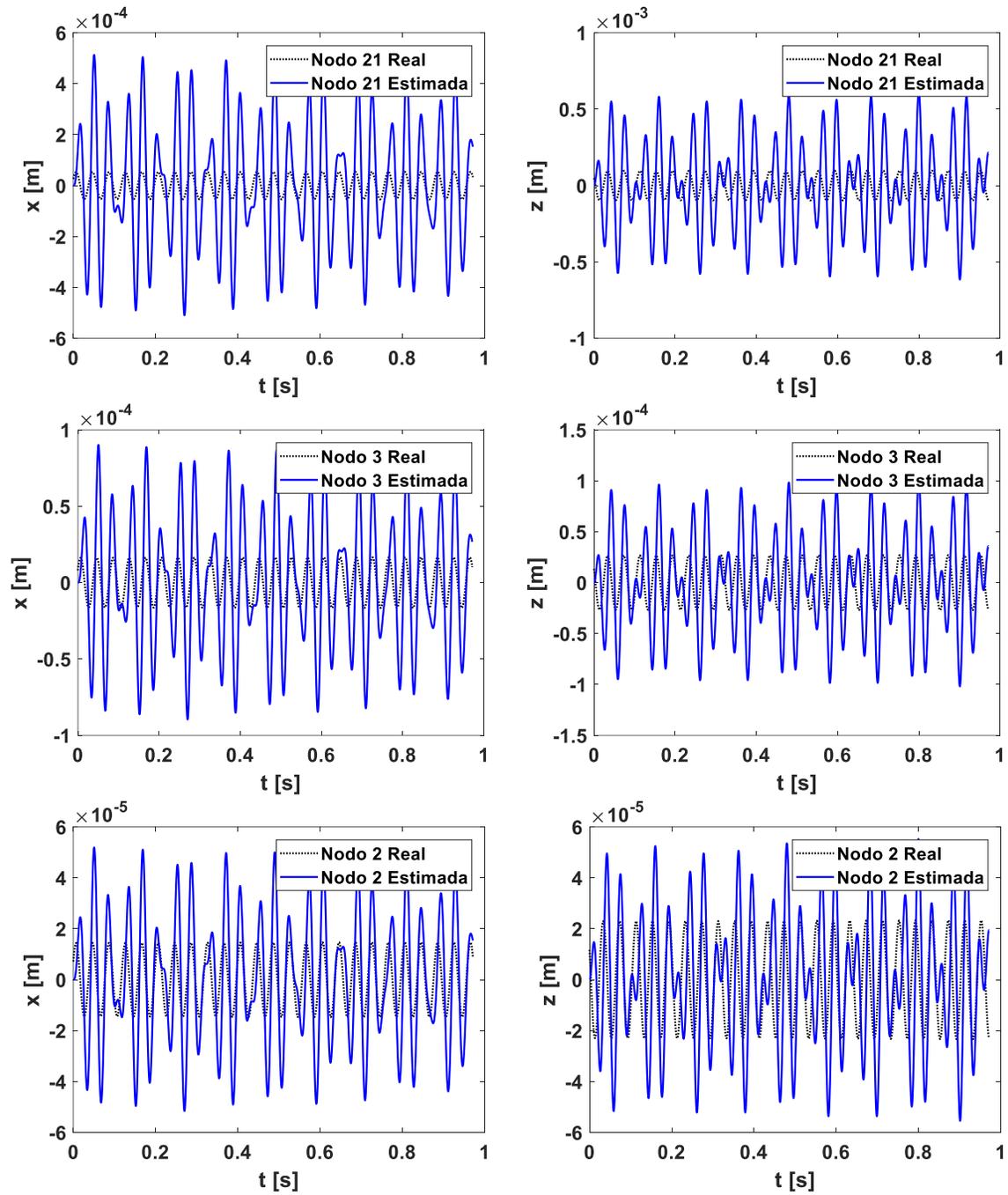


Figura 5.16: Desplazamientos nodales a una velocidad de 1,000 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas



# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

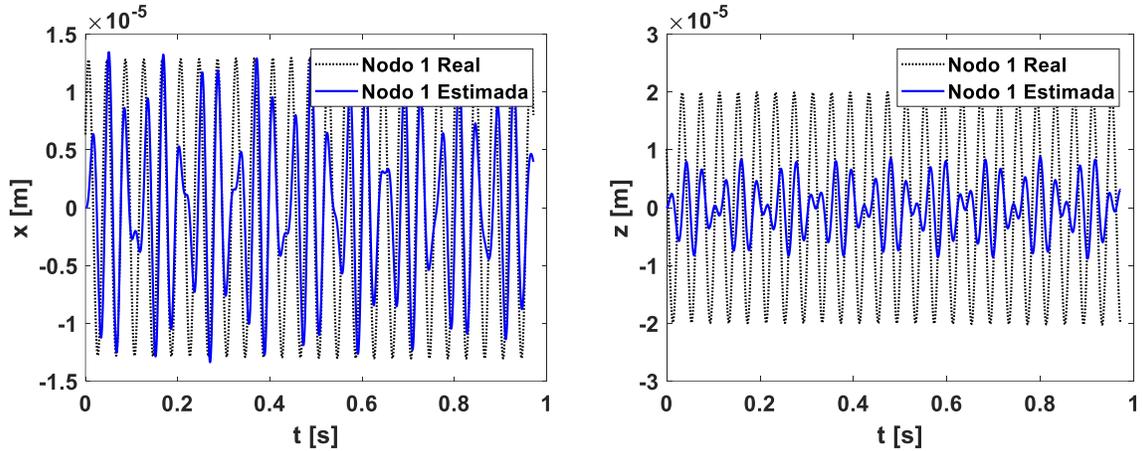
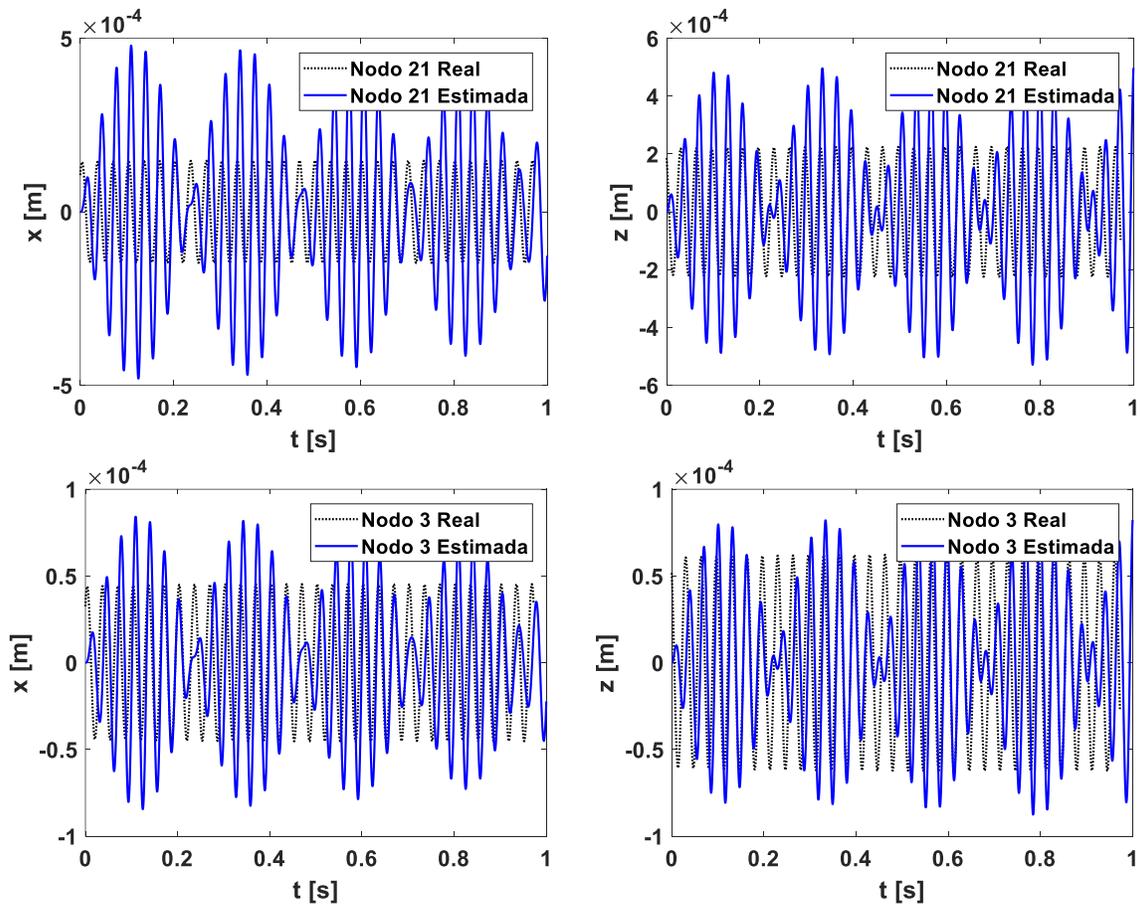


Figura 5.17: Desplazamientos nodales a una velocidad de 1,500 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.



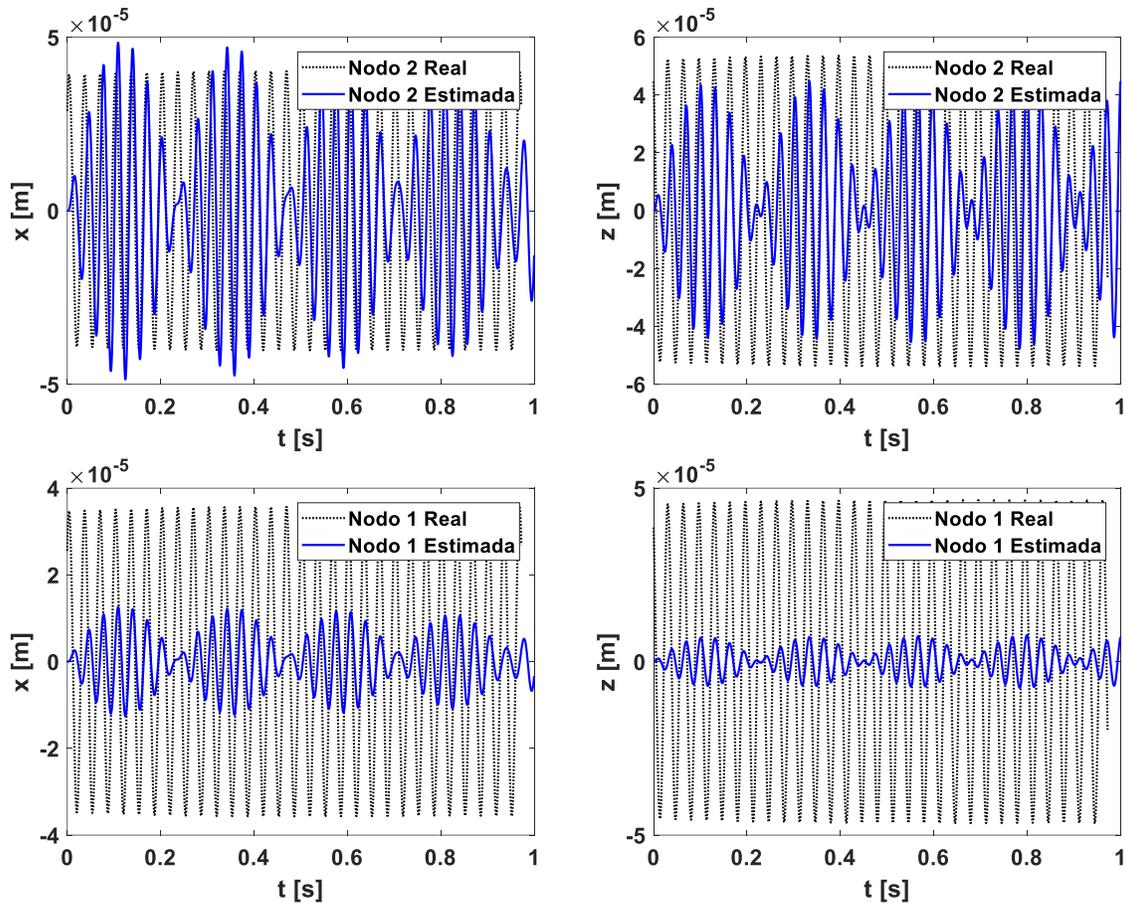


Figura 5.18: Desplazamientos nodales a una velocidad de 1,800 rpm, utilizando 10,000 muestras/s, soporte 1.

### 5.1.3 Conclusión de la sección

Con esta prueba experimental del identificador algebraico, se verificó lo observado en las simulaciones numéricas, los coeficientes cruzados son más difíciles de determinar y tienen más perturbaciones y oscilaciones que los directos. Con el análisis del comportamiento del identificador, se demuestra que los coeficientes directos de rigidez se estabilizan de forma inmediata y una vez identificado el parámetro directo de rigidez, la identificación se mantiene en un valor constante, en contraste, en el caso de los parámetros cruzados de rigidez presentan oscilaciones e identifican valores muy pequeños, muy cercanos a cero. Por otra parte, los cuatro coeficientes de amortiguamiento estimados rondan valores por debajo de la unidad contrario a lo que se esperaba.

## 5.2 Identificación algebraica de los coeficientes rotodinámicos utilizando un modelo simplificado de dos grados de libertad a velocidad constante

Con el objetivo de tener un valor de referencia de los parámetros de la chumacera presurizada se procede a verificar el comportamiento de forma experimental del identificador de dos grados de libertad. A continuación, se realizan pruebas para obtener los coeficientes rotodinámicos en una chumacera presurizada.

### 5.2.1 Configuración experimental

La configuración mostrada en la Figura 5.19 consiste en un rotor de 40 cm de largo, con un disco inercial en el centro y soportado en tres puntos. En los extremos cuenta con doble soporte convencional, mientras que el nodo 11 se instaló un soporte presurizado de la marca Bently Nevada con una relación  $L/D=1$ .

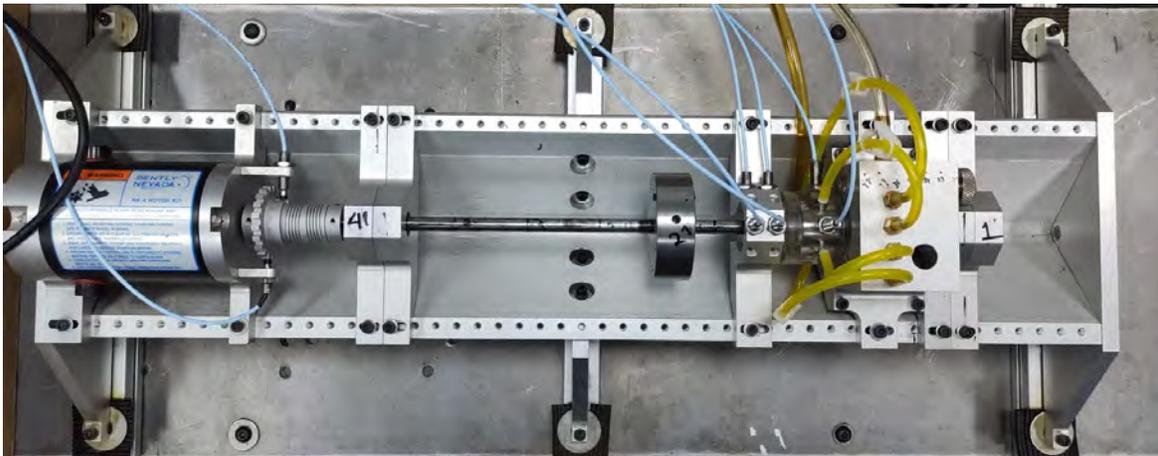


Figura 5.19: Banco de pruebas experimentales con chumacera presurizada Bently Nevada modelo RK4.

En la figura 5.20 se observa la discretización del banco de pruebas y en la Figura 5.21 se muestra la chumacera presurizada utilizada.

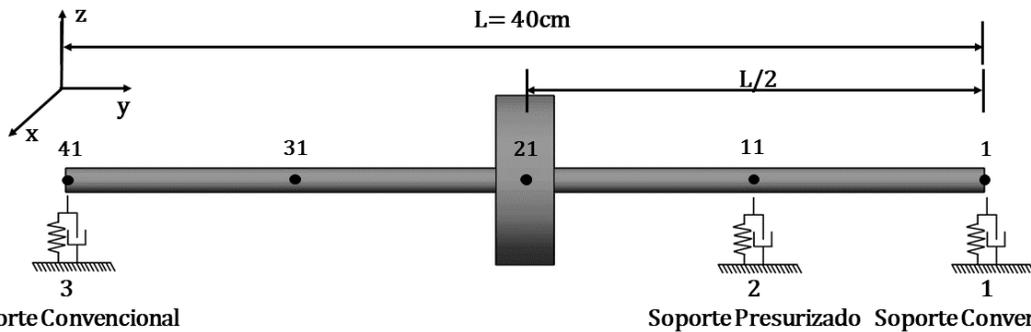


Figura 5.20: Discretización del Banco de pruebas experimentales con chumacera presurizada Bently Nevada modelo RK4.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

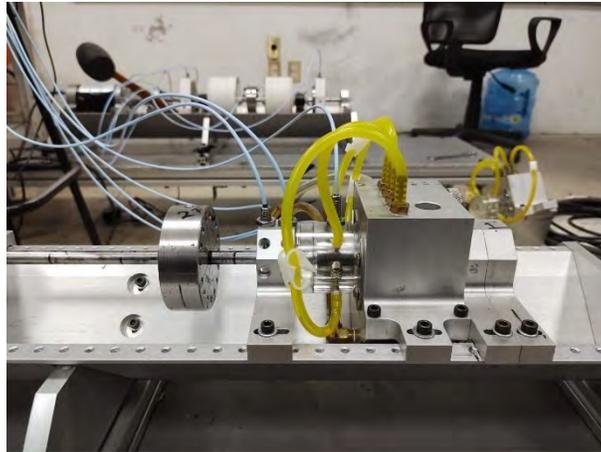


Figura 5.21: Chumacera presurizada Bently Nevada modelo RK4.

Para estimar los parámetros dinámicos del soporte presurizado son necesarios los desplazamientos del nodo en donde se encuentra el soporte presurizado de acuerdo con lo explicado en el Capítulo anterior. El desbalance del sistema rotodinámico se encuentra en la Tabla 5.13.

Tabla 5.13: Masa de desbalance presentes en el sistema.

Desbalance (kg. m)	Posición angular (grados)
$m_u d_1 = 3.6 \times 10^{-5}$ nodo 11	$\alpha_1 = 270$

### 5.2.2 Parámetros identificados a diferentes velocidades

En la Tabla 5.14 se presentan los coeficientes rotodinámicos directos estimados mediante la técnica de identificación algebraica, asimismo, también se muestra los mismos coeficientes rotodinámicos identificados mediante la técnica de algoritmos genéticos, esto con el objetivo de comparar y validar los resultados obtenidos con el identificador algebraico propuesto. La identificación se realizó considerando diferentes velocidades de operación del rotor y una presión en la chumacera de 10 psi.

Tabla 5.14: Coeficientes rotodinámicos directos identificados.

rpm	$k_{xx}$		$k_{zz}$		$c_{xx}$		$c_{zz}$	
	AI	GA	AI	GA	AI	GA	AI	GA
600	$1.86 \times 10^5$	$1.98 \times 10^5$	$4.52 \times 10^5$	$1.84 \times 10^5$	$1.24 \times 10^3$	$1.48 \times 10^2$	$1.51 \times 10^4$	$1.45 \times 10^4$
1200	$1.80 \times 10^5$	$2.18 \times 10^5$	$8.27 \times 10^5$	$9.69 \times 10^5$	$1.13 \times 10^3$	$3.45 \times 10^1$	$3.74 \times 10^3$	$2.55 \times 10^2$
2400	$5.14 \times 10^5$	$5.19 \times 10^5$	$6.92 \times 10^5$	$6.03 \times 10^5$	$9.32 \times 10^1$	$5.20 \times 10^2$	$9.29 \times 10^2$	$3.15 \times 10^2$
3000	$8.87 \times 10^5$	$1.38 \times 10^6$	$9.07 \times 10^5$	$1.58 \times 10^6$	$1.02 \times 10^3$	$6.00 \times 10^2$	$1.53 \times 10^3$	$1.25 \times 10^1$
4200	$2.99 \times 10^5$	$9.78 \times 10^5$	$3.67 \times 10^5$	$7.93 \times 10^5$	$8.45 \times 10^2$	$6.76 \times 10^2$	$1.10 \times 10^3$	$8.90 \times 10^2$
4800	$3.58 \times 10^5$	$1.43 \times 10^4$	$5.02 \times 10^5$	$1.01 \times 10^4$	$1.08 \times 10^3$	$9.30 \times 10^2$	$8.40 \times 10^2$	$9.07 \times 10^2$
5040	$5.37 \times 10^5$	$2.08 \times 10^5$	$6.85 \times 10^5$	$6.35 \times 10^5$	$6.93 \times 10^2$	$7.76 \times 10^2$	$8.03 \times 10^2$	$9.44 \times 10^2$
6000	$1.65 \times 10^6$	$1.46 \times 10^6$	$2.14 \times 10^6$	$1.94 \times 10^6$	$6.05 \times 10^2$	$9.30 \times 10^3$	$4.58 \times 10^2$	$9.84 \times 10^3$

Rigidez (N/m)-Amortiguamiento (Ns/m)

AI: Identificación algebraica

GA: Algoritmo genético

En la Figura 5.22 se muestran los parámetros rotodinámicos identificados para una velocidad del rotor de 2,400 rpm, nótese, que el identificador converge casi inmediatamente a un valor determinado, manteniéndose la identificación en un valor constante.

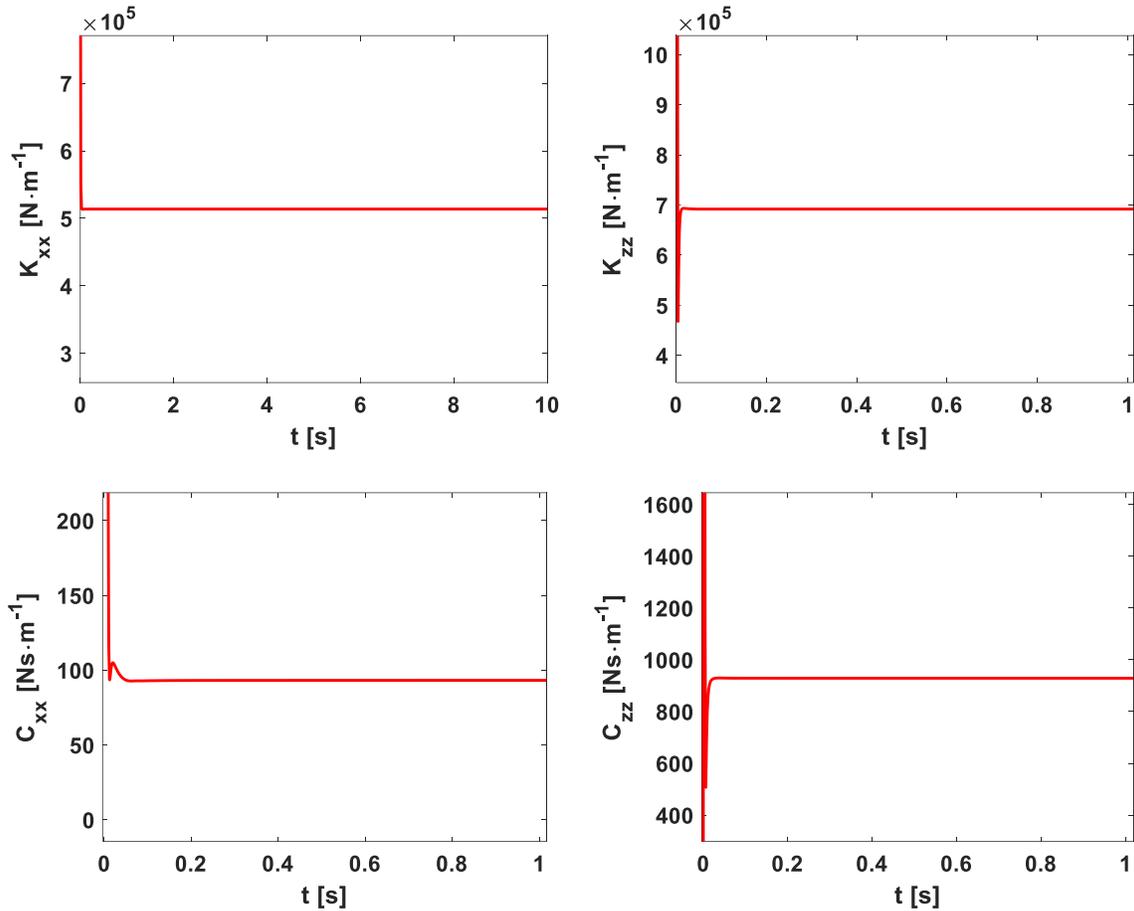


Figura 5.22: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 2,400 rpm.

En la Figura 5.23 se muestra la comparación de la respuesta de vibración experimental con la respuesta de vibración identificada, donde la respuesta de vibración identificada se obtiene de simular el sistema rotor-cojinetes con los coeficientes identificados reportados en la Tabla 5.14 para una velocidad del rotor de 2,400 rpm.

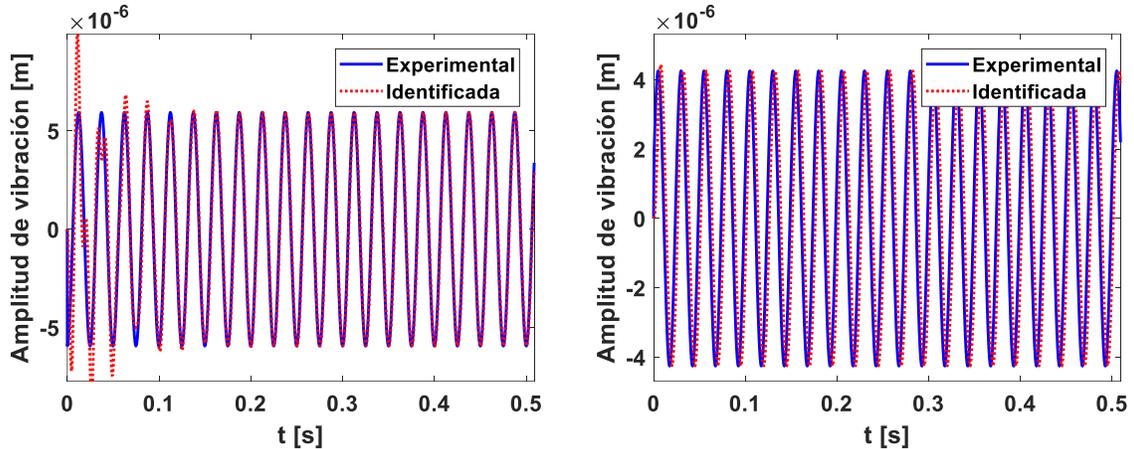


Figura 5.23: Comparación entre la respuesta experimental y la identificada a una velocidad de 2,400 rpm.

En la Figura 5.24 se compara la respuesta de vibración estimada (diagrama de bode, gráfica en color rojo) en las diferentes velocidades del rotor, con la respuesta de vibración (diagrama de bode, gráfica en color verde) obtenida usando los parámetros rotodinámicos identificados con el algoritmo genético, tomando como referencia la respuesta de vibración experimental (gráfica en color azul). Se puede observar, que el comportamiento de la respuesta de vibración estimada (IA) y la respuesta de vibración obtenida con algoritmos genéticos (GA) tienen la misma tendencia y reproducen el comportamiento dinámico del rotor experimental. Presentando ambos métodos dificultad en la identificación de los parámetros rotodinámicos en la zona de resonancia.

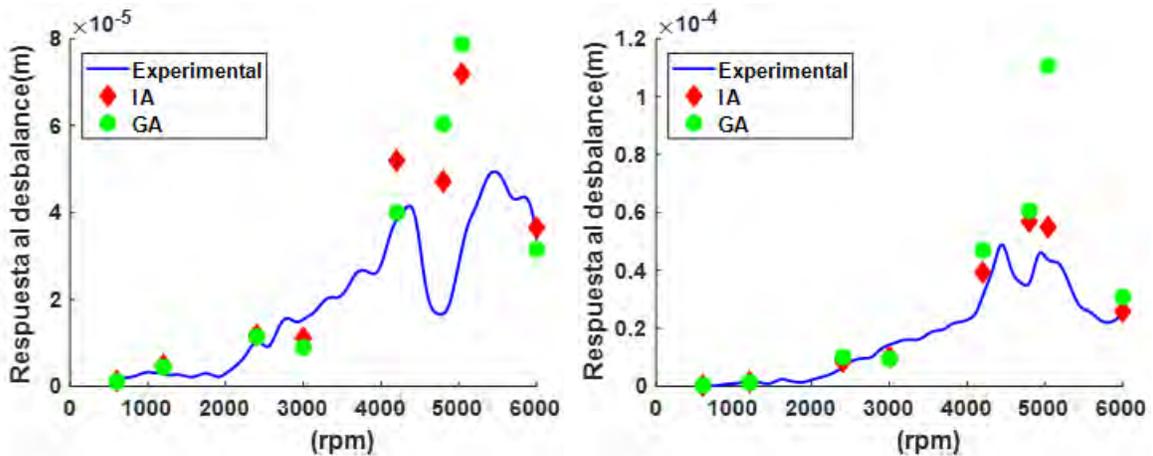


Figura 5.24: Respuesta al desbalance experimental vs identificado nodo 11.

### 5.2.3 Conclusión de la sección

Los resultados obtenidos son los esperados de acuerdo con las simulaciones numéricas, el identificador es estable, converge rápidamente y se mantiene en el tiempo. El identificador



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

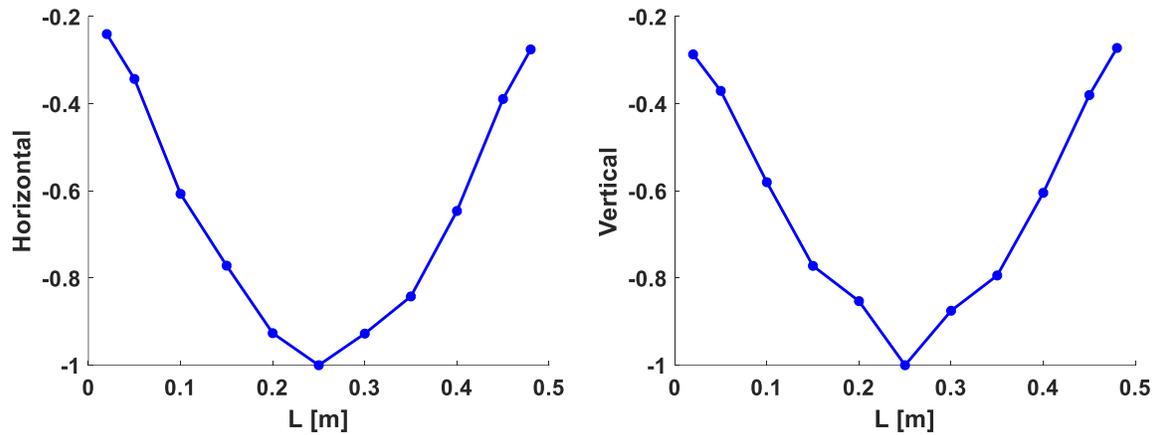


Figura 5.26: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.

En la Figura 5.27 se muestra los resultados de la identificación algebraica, para una velocidad del rotor de 1,800 rpm, se puede notar que el identificador converge a un valor determinado en un tiempo menor a 1 s, una vez identificado el parámetro, el identificador se mantiene estable en un valor constante.

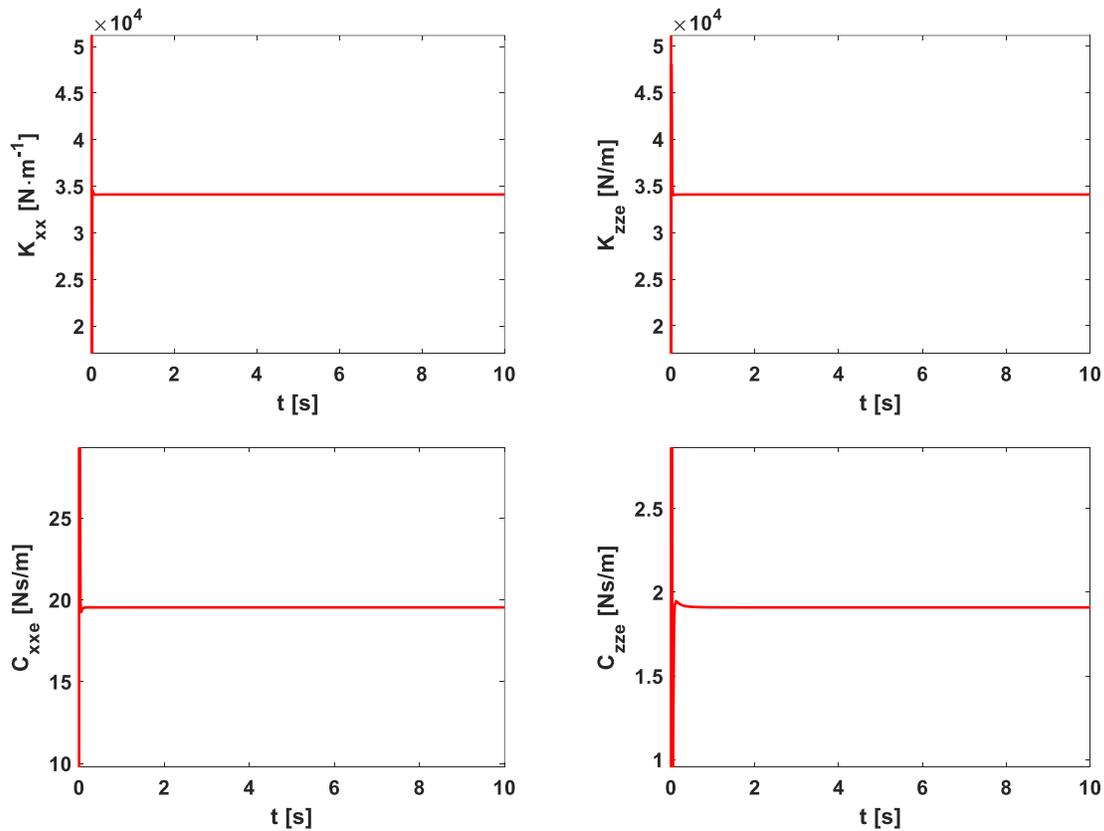


Figura 5.27: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 1,800 rpm.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

En la Figura 5.28 se presenta la comparación de la respuesta de vibración obtenida con los parámetros modales identificados con la respuesta de vibración experimental. Se puede notar que ambas respuestas de vibración son prácticamente iguales.

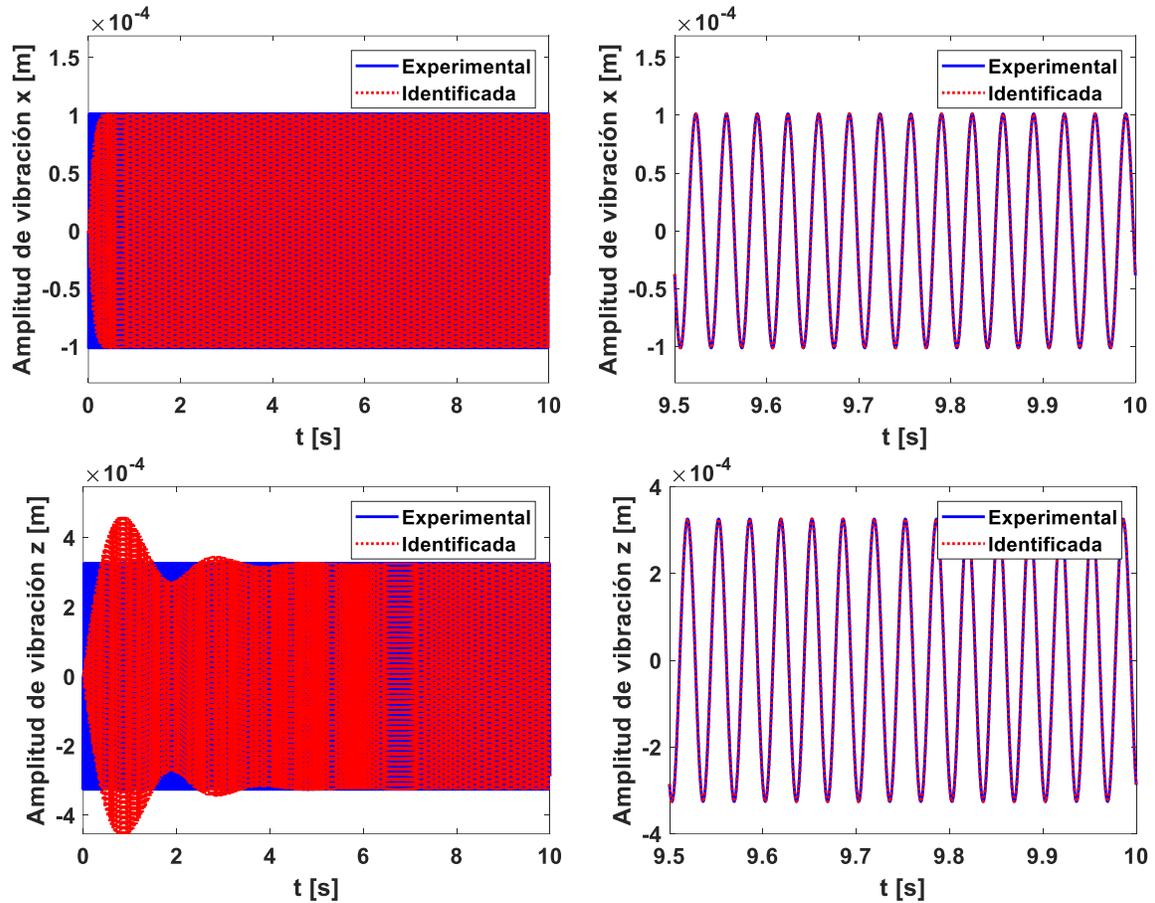


Figura 5.28: Comparación entre la respuesta experimental y la identificada modal a una velocidad de 1,800 rpm.

Los parámetros modales rotodinámicos identificados tanto de rigidez como de amortiguamiento atribuibles a los soportes en diferentes velocidades del rotor se presentan en la Tabla 5.15. Nótese, que los parámetros modales identificados son función de la velocidad de operación del rotor.

Tabla 5.15: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 26, soportes convencionales.

<b>Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)</b>				
rpm	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
1600	$2.13 \times 10^4$	$2.72 \times 10^4$	31.5	47.3
1733	$1.59 \times 10^4$	$2.52 \times 10^4$	42.2	2.41
1800	$3.41 \times 10^4$	$3.41 \times 10^4$	19.6	2.49
1850	$3.85 \times 10^4$	$3.77 \times 10^4$	19.3	7.42
1900	$4.10 \times 10^4$	$4.09 \times 10^4$	15.1	21.4
2050	$4.70 \times 10^4$	$4.42 \times 10^4$	13.4	65.8
3000	$1.00 \times 10^5$	$1.00 \times 10^5$	-107	-106

### 5.3.2 Identificación algebraica modal a un sistema rotodinámico con un soporte convencional y uno presurizado

#### 5.3.2.1 Configuración con un disco en el centro

En esta sección se identifican los parámetros modales rotodinámicos del sistema con un cojinete convencional y una chumacera presurizada (ver Figura 5.29). En la Figura 5.30 se observa la discretización del sistema rotodinámico. La masa de desbalance utilizada es de  $1.47 \times 10^{-5}$  (kg·m) a  $0^\circ$ .

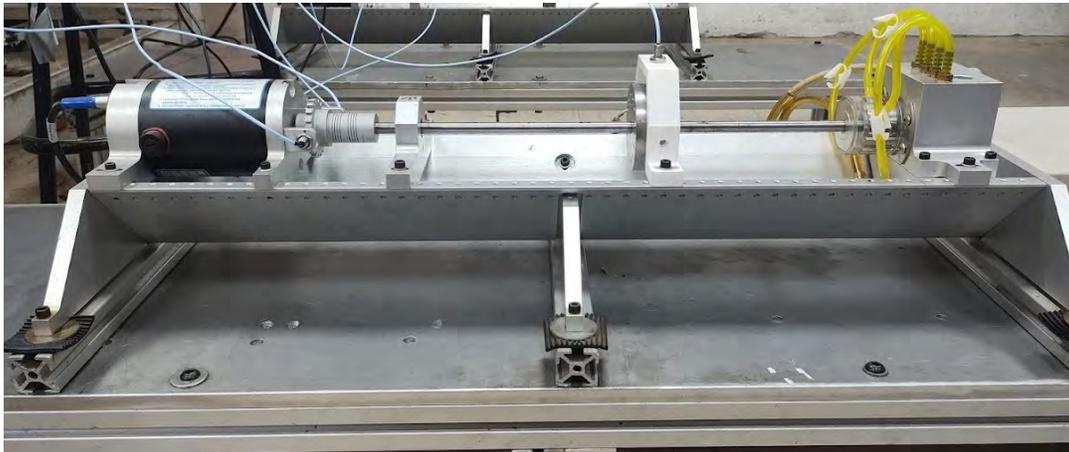


Figura 5.29: Sistema rotodinámico experimental con cojinete convencional y presurizado.

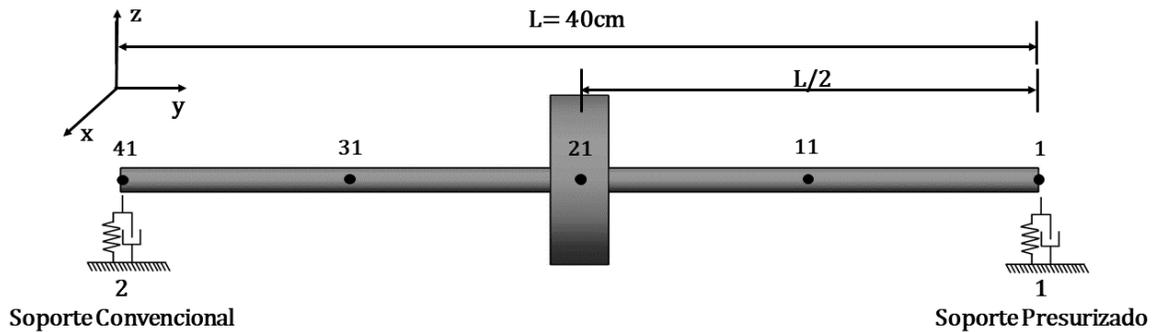


Figura 5.30: Sistema rotodinámico con cojinete convencional y presurizado.

En la Figura 5.31 se aprecia la primera forma modal en ambas direcciones del sistema rotodinámico.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

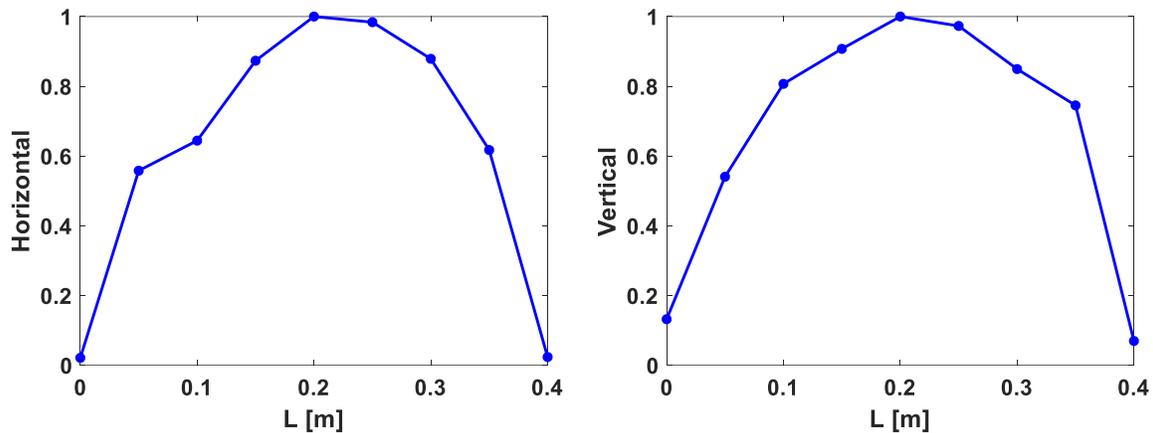


Figura 5.31: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.

### 5.3.2.1.1 Identificación algebraica modal a 10 psi

La identificación algebraica se realiza a una presión de 10 psi utilizando únicamente el primer modo de vibración, la identificación se realiza utilizando la respuesta del nodo 36. Los parámetros identificados en diferentes velocidades del rotor y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.33 se presentan en la Tabla 5.16.

Tabla 5.16: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, un disco, 10 psi.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	-346075	-394699	58.75067	69.87746	0.67
900	-315298	-374319	216.0983	148.6934	15.56
1200	-318829	-360712	150.4786	171.384	0.90
1500	-261967	-319977	268.8097	196.8771	16.88
1800	-259298	-287492	178.1304	186.4903	0.78
2100	-196215	-242265	218.5837	165.3736	22.62
2400	-134470	-176399	14.52941	32.2978	2.02
2700	-127431	-129609	219.7422	302.9186	21.36
3000	-1265.4	-50312.7	312.517	153.2273	8.96
3300	-20143.8	-15966.6	618.2439	356.5928	7.04
3600	37380.85	9745.691	624.8035	608.9262	15.15
3900	330130.7	158998.4	1127.309	844.2242	12.51
4200	83302.37	22783.59	1207.531	1170.127	5.00
4500	431762.8	508294.4	1840.397	1439.223	16.79
4800	-12973.3	-237546	1743.009	1495.952	18.74

Con las respuestas identificadas en las diferentes velocidades del rotor, se compara el diagrama de bode obtenido en forma discreta (gráfica en color rojo) con el diagrama de bode obtenido de forma experimental (respuesta de vibración en el nodo 36 y a una presión de 10 psi para el caso del soporte presurizado). En las Figuras 5.32 se muestra la comparación de ambas respuestas de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje

z). En la Figura 5.33 se muestra el diagrama de bode resultante identificado con el diagrama de bode resultante obtenido de forma experimental. Nótese la similitud entre ambas respuestas de vibración en las diferentes velocidades del rotor.

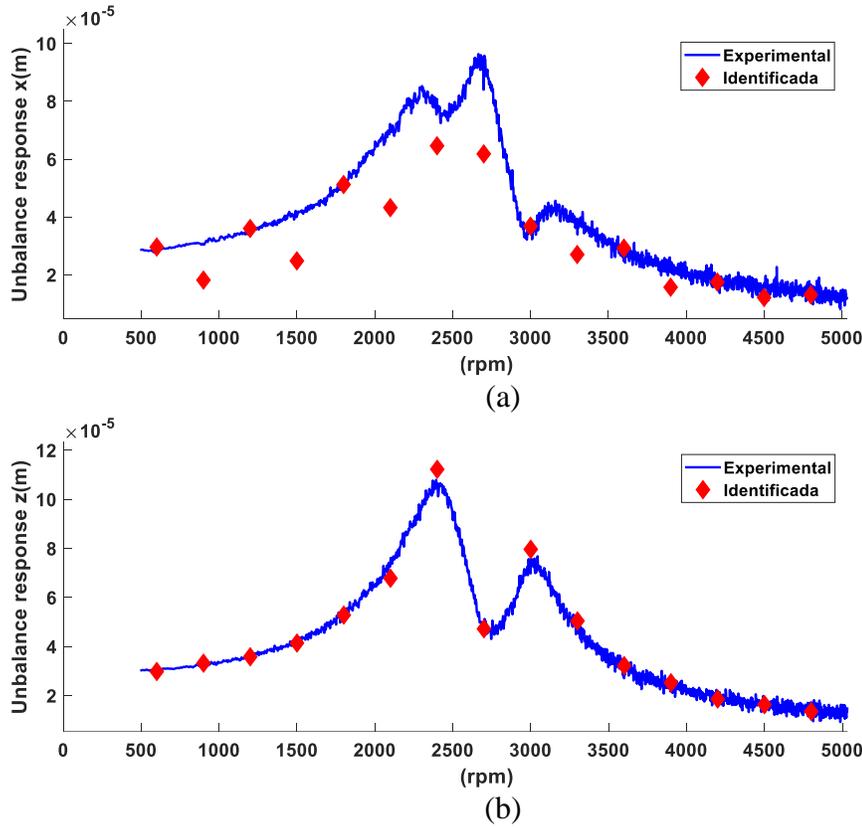
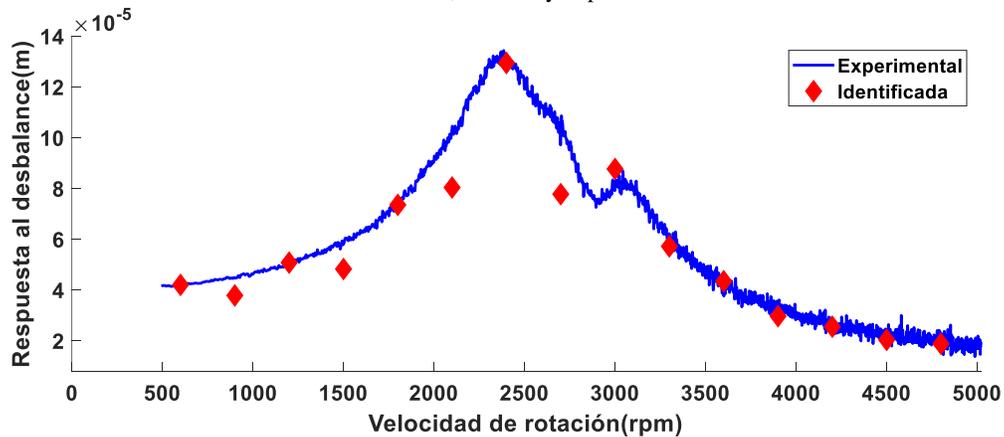


Figura 5.32: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 36 y 10psi.



### 5.3.2.1.2 Identificación algebraica modal a 15 psi

A continuación, se aplica la identificación utilizando la misma configuración anterior únicamente cambiando la presión de trabajo de la chumacera presurizada a 15 psi. La

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Identificación algebraica se realiza en el nodo 36 utilizando únicamente el primer modo de vibración. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.35 se presentan en la Tabla 5.17.

Tabla 5.17: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, un disco, 15 psi.

<b>Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)</b>					
<b>rpm</b>	<b><math>k_{xx}</math></b>	<b><math>k_{zz}</math></b>	<b><math>c_{xx}</math></b>	<b><math>c_{zz}</math></b>	<b>Desviación porcentual (%)</b>
600	$-3.46 \times 10^5$	$-3.95 \times 10^5$	58.37	68.96	1.99
900	$-3.15 \times 10^5$	$-3.74 \times 10^5$	214.20	151.66	18.78
1200	$-3.17 \times 10^5$	$-3.60 \times 10^5$	154.85	172.67	1.21
1500	$-2.62 \times 10^5$	$-3.20 \times 10^5$	269.55	199.56	21.85
1800	$-2.55 \times 10^5$	$-2.85 \times 10^5$	168.84	178.62	0.08
2100	$-2.01 \times 10^5$	$-2.44 \times 10^5$	185.78	141.12	13.85
2400	$-1.42 \times 10^5$	$-1.82 \times 10^5$	13.72	18.92	9.65
2700	$-1.26 \times 10^5$	$-1.35 \times 10^5$	282.38	230.77	25.26
3000	$-2.37 \times 10^4$	$-5.67 \times 10^4$	199.17	192.14	5.45
3300	$-2.17 \times 10^4$	$-1.64 \times 10^4$	599.15	376.43	16.65
3600	$3.31 \times 10^4$	$-1.90 \times 10^4$	680.19	671.93	14.53
3900	$1.51 \times 10^5$	$1.97 \times 10^5$	1351.18	902.38	14.27
4200	$6.43 \times 10^4$	$-3.72 \times 10^4$	1358.98	1175.75	7.02
4500	$5.07 \times 10^5$	$4.98 \times 10^5$	2059.47	1417.88	10.41
4800	$-1.60 \times 10^5$	$-2.04 \times 10^5$	2156.16	1710.90	19.70
5100	$1.31 \times 10^6$	$9.12 \times 10^5$	3290.89	2178.10	18.00
5400	$-1.94 \times 10^5$	$-2.76 \times 10^4$	2982.13	1652.61	20.21
5700	$1.23 \times 10^6$	$1.78 \times 10^6$	3050.63	3519.41	19.97
6000	$-2.02 \times 10^5$	$3.48 \times 10^5$	2198.92	3352.52	9.23
6300	$1.30 \times 10^6$	$2.45 \times 10^6$	2425.57	3835.81	4.63
6600	$-1.04 \times 10^5$	$5.71 \times 10^5$	2135.90	4263.00	28.58
6900	$-1.66 \times 10^5$	$-1.75 \times 10^5$	398.20	692.22	112.41
7200	$-1.53 \times 10^5$	$-1.82 \times 10^5$	463.02	739.09	120.20

En la Figuras 5.34, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.17, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje x) y en la dirección vertical (eje z). Por otra parte, en la Figura 5.35 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

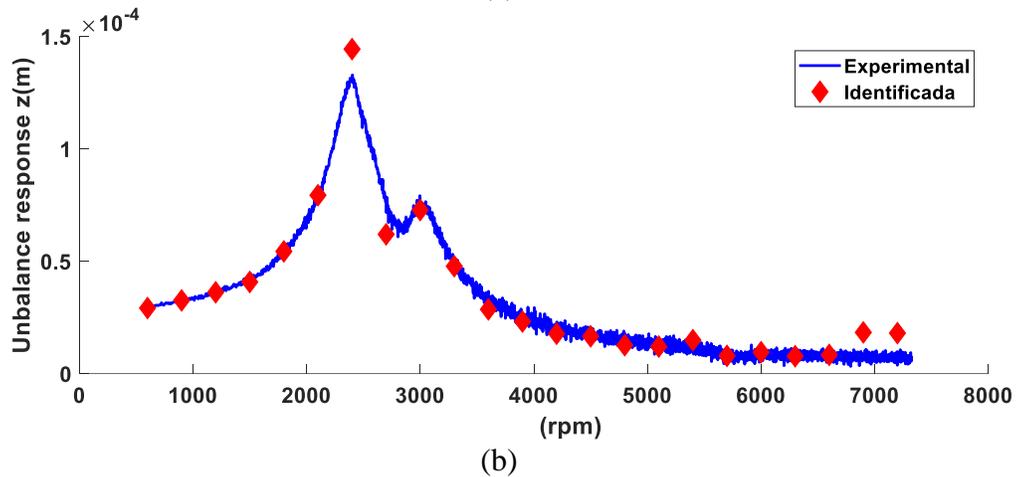
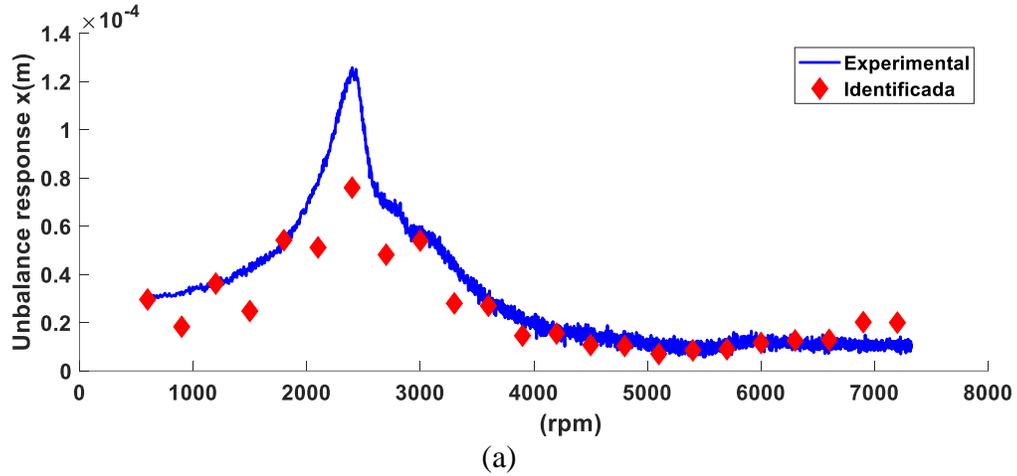


Figura 5.34: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 36 y 15psi.

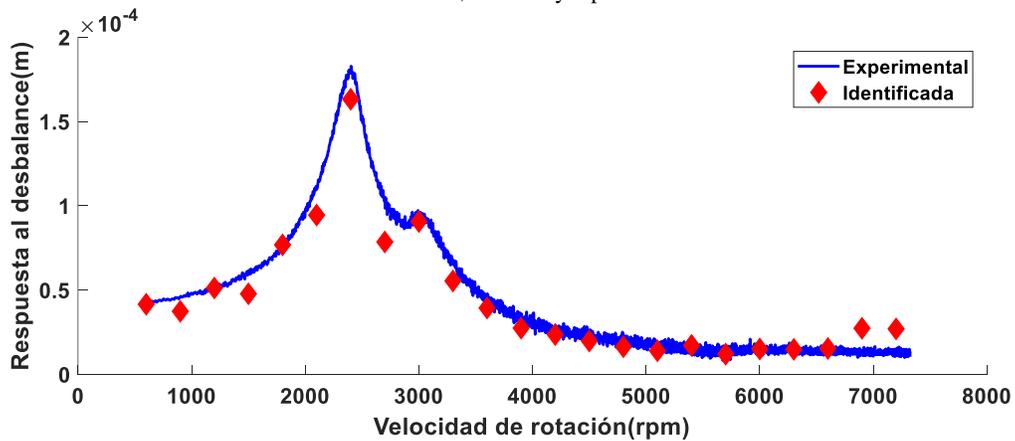


Figura 5.35: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 15psi.

### 5.3.2.1.3 Identificación algebraica modal a 20 psi

Utilizando la configuración anterior y únicamente cambiando la presión del fluido de trabajo a 20 psi, se procede a aplicar la identificación algebraica al sistema rotodinámico. La

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

identificación algebraica se realiza en el nodo 36. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.37 se presentan en la Tabla 5.18.

Tabla 5.18: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, un disco, 20 psi.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-3.46 \times 10^5$	$-3.95 \times 10^5$	59.82	69.86	2.95
900	$-3.16 \times 10^5$	$-3.70 \times 10^5$	206.59	168.39	24.89
1200	$-3.18 \times 10^5$	$-3.61 \times 10^5$	149.86	171.22	0.26
1500	$-2.63 \times 10^5$	$-3.20 \times 10^5$	255.30	195.34	20.15
1800	$-2.61 \times 10^5$	$-2.90 \times 10^5$	166.45	182.46	1.78
2100	$-2.02 \times 10^5$	$-2.44 \times 10^5$	179.90	137.55	14.73
2400	$-1.55 \times 10^5$	$-1.85 \times 10^5$	113.97	25.84	0.52
2700	$-1.26 \times 10^5$	$-1.37 \times 10^5$	308.23	188.82	19.90
3000	$-2.81 \times 10^4$	$-5.59 \times 10^4$	179.77	177.50	3.33
3300	$-2.10 \times 10^4$	$-1.71 \times 10^4$	479.00	321.27	6.99
3600	$3.54 \times 10^4$	$1.89 \times 10^4$	592.30	617.23	7.88
3900	$1.19 \times 10^5$	$1.62 \times 10^5$	1182.54	729.23	1.92
4200	$4.87 \times 10^4$	$-5.30 \times 10^3$	1246.88	1088.37	8.08
4500	$4.96 \times 10^5$	$4.59 \times 10^5$	1933.47	1362.37	5.41
4800	$-1.60 \times 10^5$	$-2.04 \times 10^5$	2156.16	1710.90	24.69
5100	$9.75 \times 10^5$	$8.52 \times 10^5$	2775.50	1847.10	15.06
5400	$-1.94 \times 10^5$	$-2.76 \times 10^4$	2982.13	1652.61	3.34
5700	$1.20 \times 10^6$	$1.86 \times 10^6$	3096.26	3488.46	1.12
6000	$-2.00 \times 10^5$	$3.76 \times 10^4$	2569.75	3993.20	12.46
6300	$1.03 \times 10^6$	$2.68 \times 10^6$	2073.84	3786.56	4.28
6600	$-1.04 \times 10^5$	$5.71 \times 10^5$	2135.90	4263.00	8.42
6900	$1.95 \times 10^6$	$2.95 \times 10^6$	3057.19	4118.84	10.40
7200	$-1.53 \times 10^5$	$-1.82 \times 10^5$	463.02	739.09	89.37

En la Figuras 5.36, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.18, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje x) y en la dirección vertical (eje z). Por otra parte, en la Figura 5.37 se comparan los diagramas de bode resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

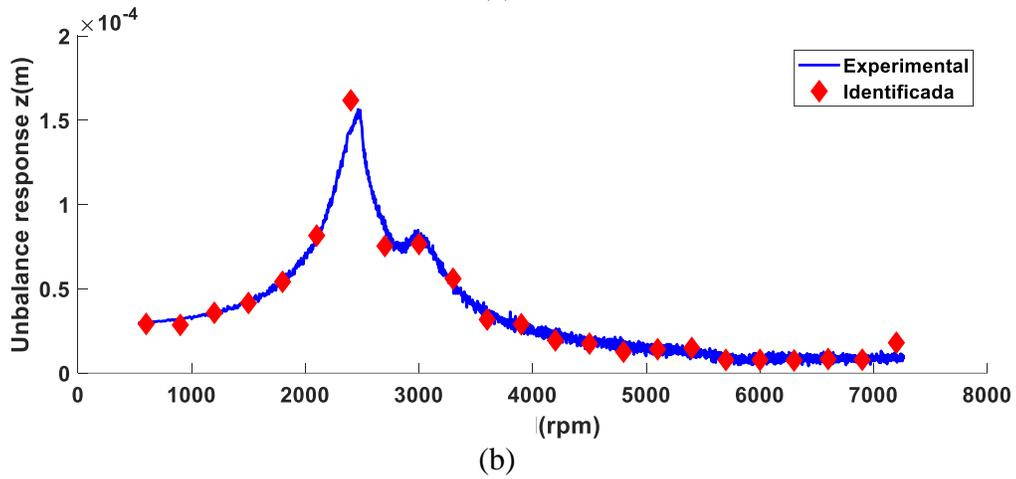
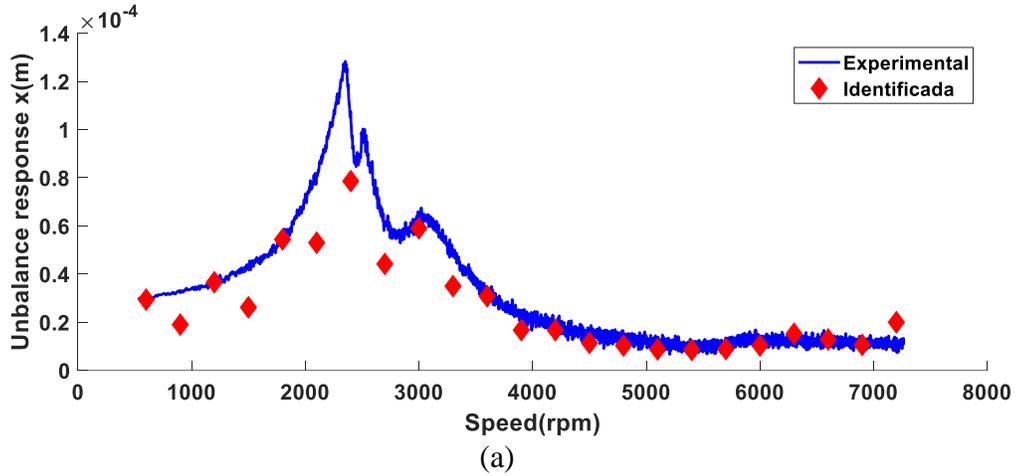


Figura 5.36: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 36 y 20psi.

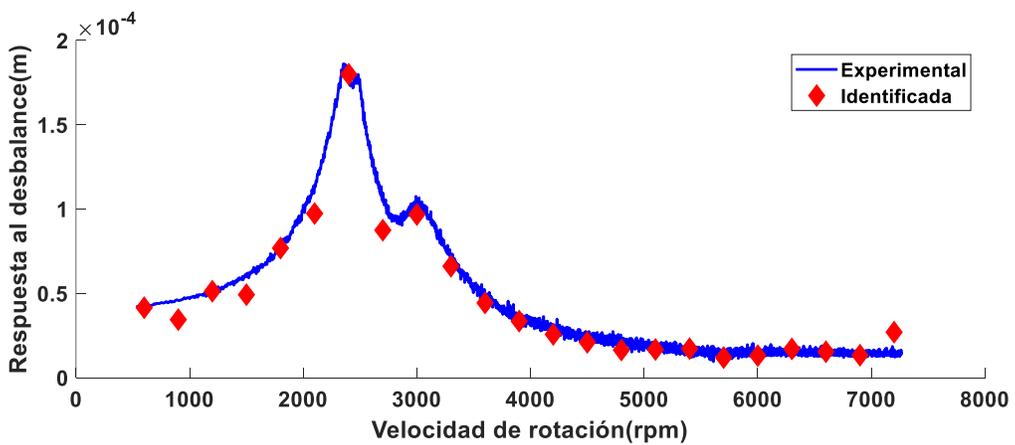


Figura 5.37: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 20psi.

A continuación, En la Figura 5.38 se comparan los diagramas de bode a 10, 15 y 20 psi en el nodo 36. Se pueden apreciar las diferencias de amplitudes de vibración, lo que genera las diferencias entre los parámetros identificados a las diferentes presiones.

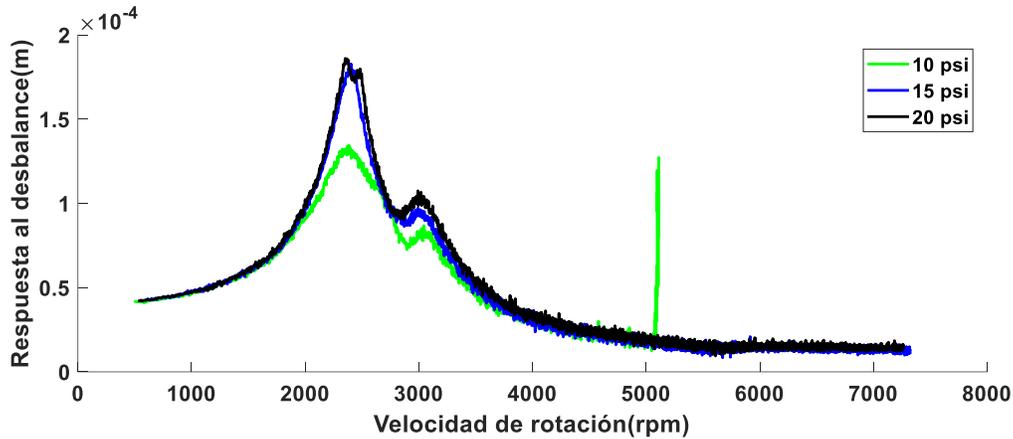


Figura 5.38: Diagramas de bode experimentales a diferentes presiones.

### 5.3.2.2 Identificación algebraica modal a un sistema rotodinámico con un soporte convencional y uno presurizado con tres discos.

En esta sección se identificaron los parámetros modales del sistema con un cojinete convencional y una chumacera presurizada. Se puede observar la discretización utilizada en la Figura 5.39. La diferencia con la sección anterior es que esta nueva configuración cuenta con tres discos inerciales ubicados en los nodos 11, 21 y 31. Una masa de desbalance  $2.34 \times 10^{-5}(\text{kg} \cdot \text{m})$  a  $0^\circ$  en los nodos 11, 21 y 31.

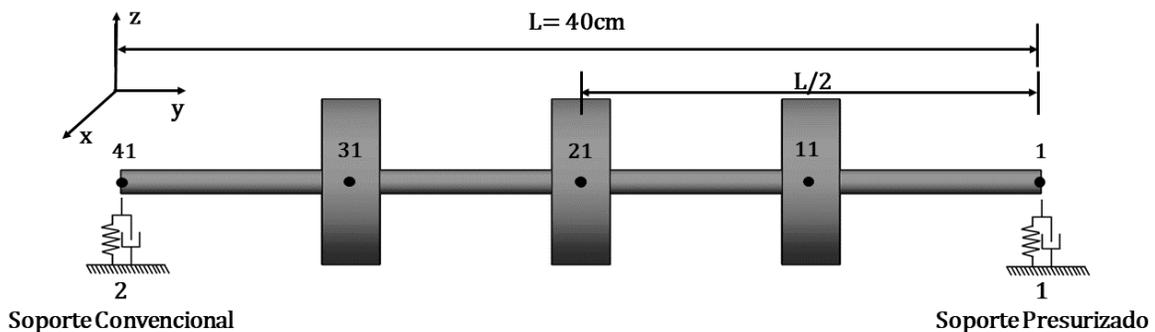


Figura 5.39: Sistema rotodinámico con cojinete convencional y presurizado, tres discos.

En la Figura 5.40 se encuentra el primero modo de vibración en ambas direcciones del sistema rotodinámico.

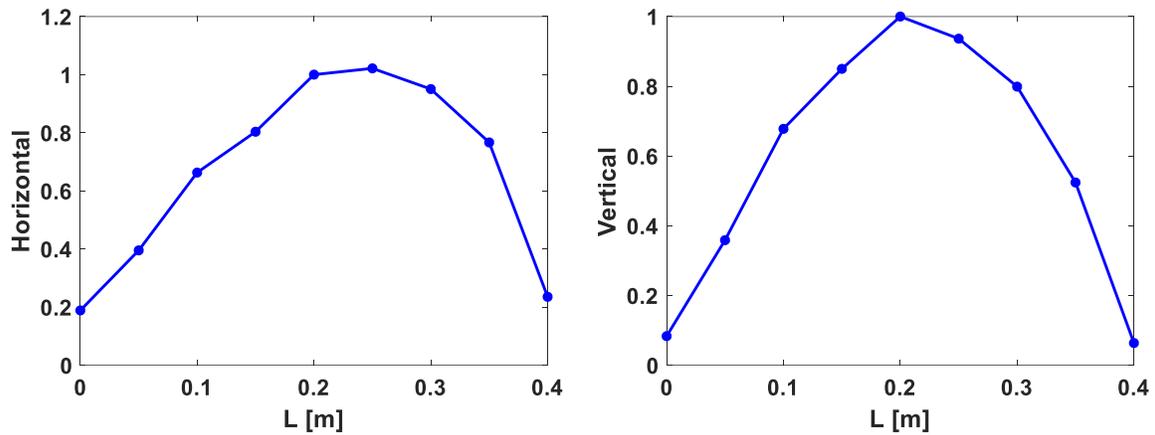
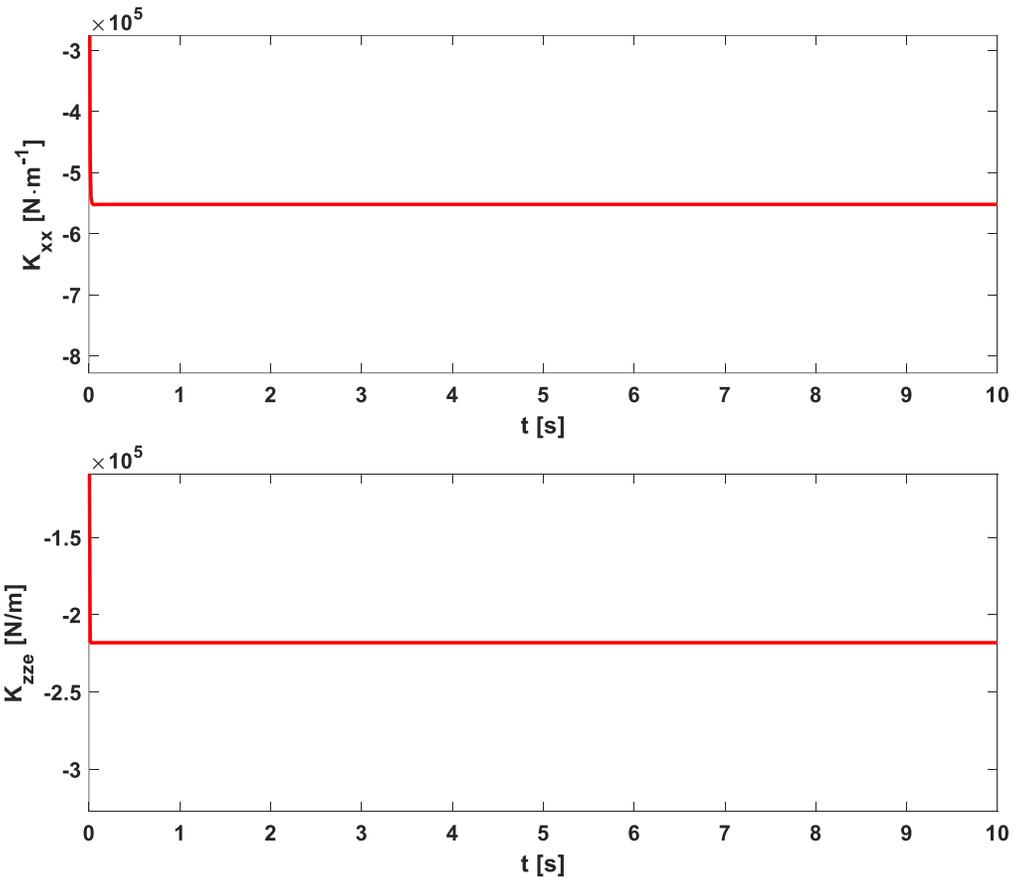


Figura 5.40: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.

### 5.3.2.2.1 Identificación algebraica modal a 10 psi

Los resultados de la identificación algebraica se muestran en la Figura 5.41. Se utilizó únicamente el primer modo de vibración para identificar los parámetros de los soportes a diferentes velocidades de operación. La identificación algebraica se realiza en el nodo 11.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

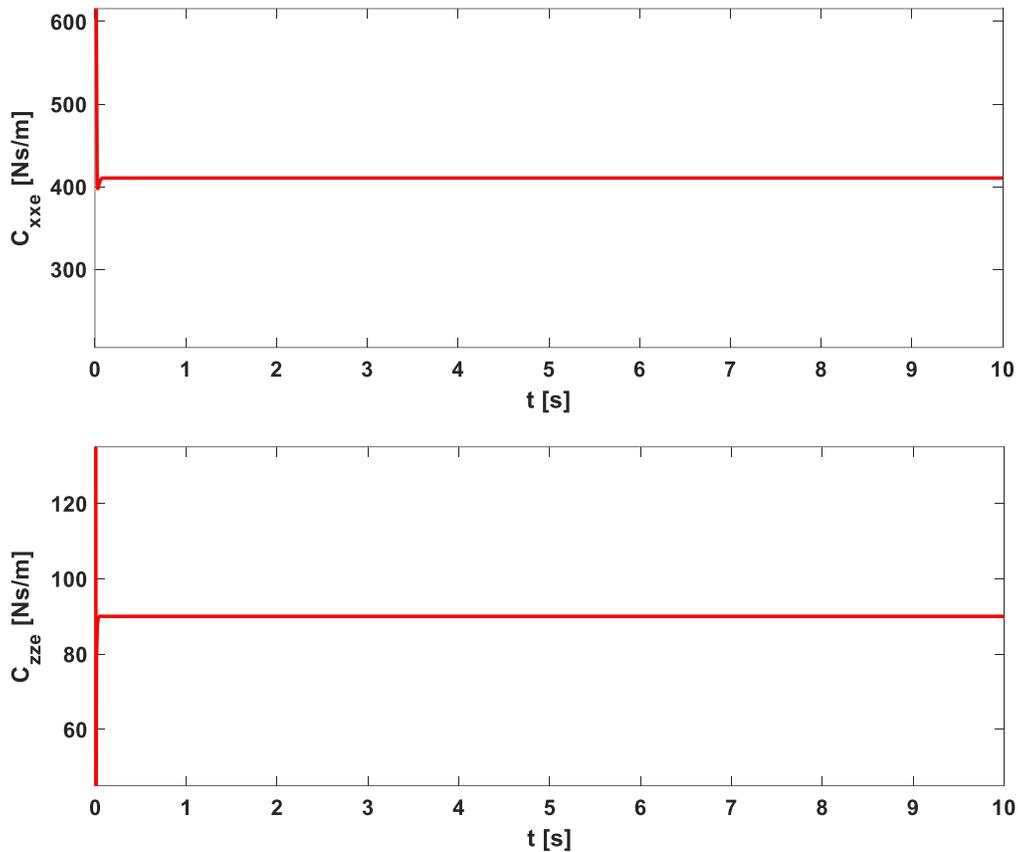
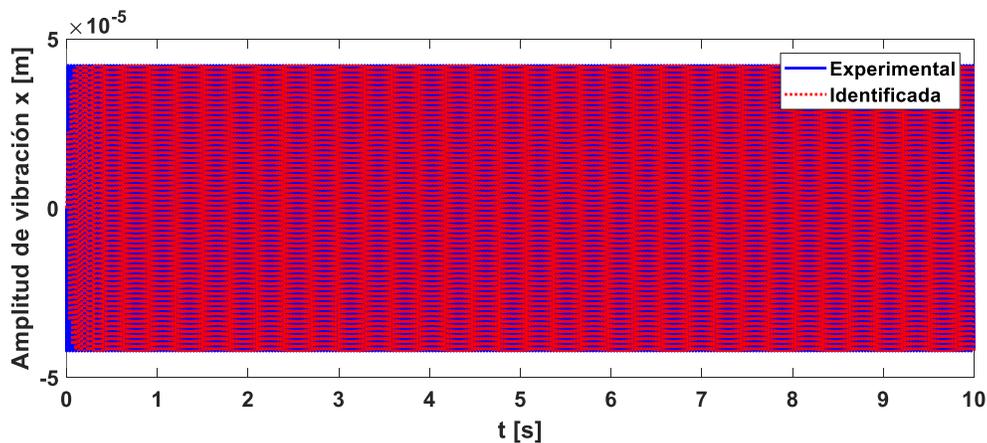


Figura 5.41: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 1800 rpm.

En la Figura 5.42 se muestra la comparación entre la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos identificados con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental en una velocidad de 1,800 rpm. Se puede notar que son prácticamente iguales tanto en amplitud como fase.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

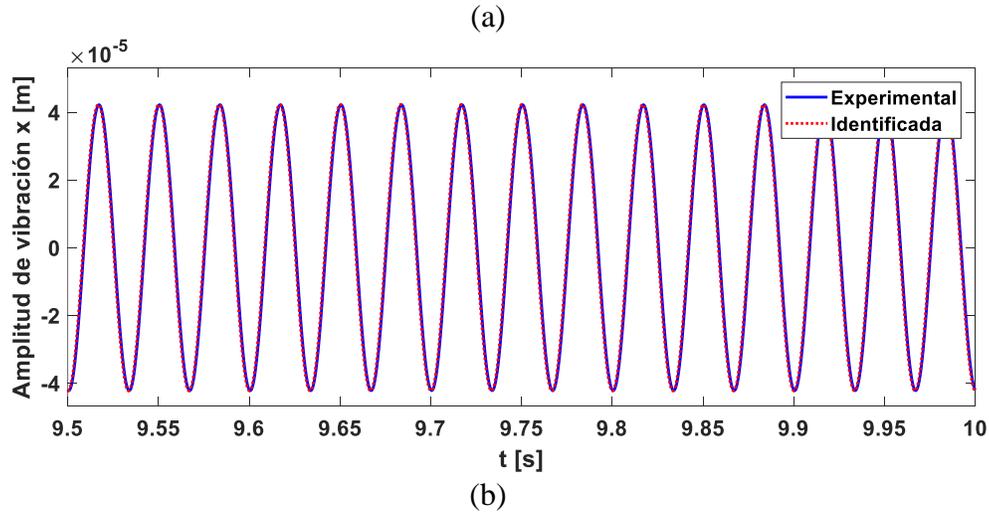


Figura 5.42: Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos identificados a una velocidad de 1800 rpm, (a) en un tiempo de 0 a 10 s y (b) un acercamiento en un tiempo de 9.5-10 s.

En la Tabla 5.19 se presentan los parámetros modales rotodinámicos identificados en diferentes velocidades de operación del rotor y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.44.

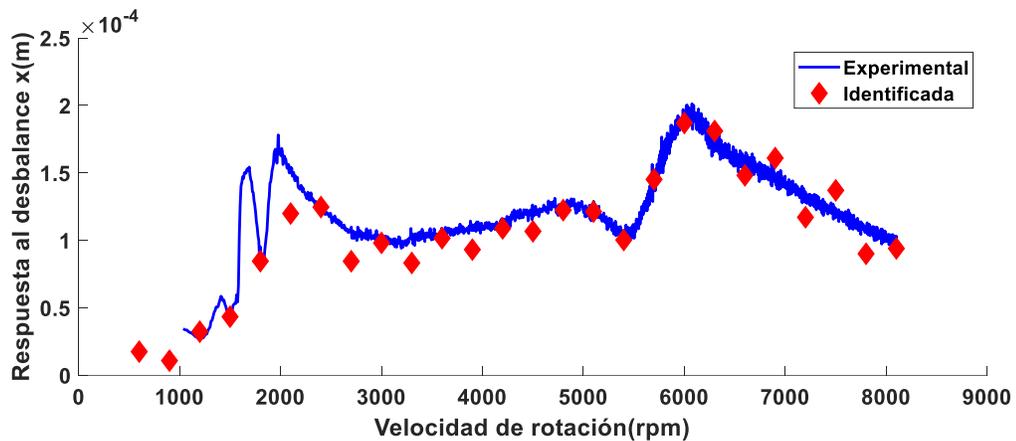
Tabla 5.19: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 11, soporte presurizado.

<b>Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)</b>					
<b>rpm</b>	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	<b>Desviación porcentual (%)</b>
600	$-7.17 \times 10^5$	$-3.41 \times 10^5$	$5.90 \times 10^2$	$2.66 \times 10^2$	-
900	$-5.98 \times 10^5$	$-4.06 \times 10^4$	$1.39 \times 10^3$	$3.69 \times 10^3$	-
1200	$-6.12 \times 10^5$	$-1.74 \times 10^5$	$6.77 \times 10^2$	$6.99 \times 10^1$	17.04
1500	$-5.91 \times 10^5$	$-2.43 \times 10^5$	$6.64 \times 10^2$	$3.76 \times 10^2$	23.24
1800	$-5.52 \times 10^5$	$-2.18 \times 10^5$	$4.10 \times 10^2$	$9.00 \times 10^1$	3.77
2100	$-4.78 \times 10^5$	$-1.55 \times 10^5$	$3.36 \times 10^2$	$2.46 \times 10^2$	16.00
2400	$-4.93 \times 10^5$	$-1.76 \times 10^5$	$1.89 \times 10^2$	$1.92 \times 10^2$	2.54
2700	$-3.30 \times 10^5$	$-1.40 \times 10^4$	$6.15 \times 10^2$	$4.63 \times 10^2$	14.66
3000	$-3.96 \times 10^5$	$-7.09 \times 10^4$	$3.23 \times 10^2$	$3.36 \times 10^2$	3.29
3300	$-1.40 \times 10^5$	$1.58 \times 10^5$	$7.63 \times 10^2$	$5.77 \times 10^2$	12.45
3600	$-2.25 \times 10^5$	$7.23 \times 10^4$	$4.47 \times 10^2$	$4.84 \times 10^2$	3.43
3900	$9.09 \times 10^4$	$3.55 \times 10^5$	$8.06 \times 10^2$	$5.85 \times 10^2$	3.40
4200	$-4.56 \times 10^3$	$3.17 \times 10^5$	$5.44 \times 10^2$	$5.70 \times 10^2$	3.06
4500	$3.60 \times 10^5$	$5.79 \times 10^5$	$8.18 \times 10^2$	$4.95 \times 10^2$	4.28
4800	$2.25 \times 10^5$	$5.90 \times 10^5$	$5.09 \times 10^2$	$4.89 \times 10^2$	2.17
5100	$6.65 \times 10^5$	$8.39 \times 10^5$	$8.07 \times 10^2$	$3.34 \times 10^2$	18.70
5400	$4.48 \times 10^5$	$8.43 \times 10^5$	$8.26 \times 10^2$	$2.75 \times 10^2$	0.22
5700	$1.03 \times 10^6$	$1.14 \times 10^6$	$7.53 \times 10^2$	$3.23 \times 10^2$	5.85
6000	$9.27 \times 10^5$	$9.98 \times 10^5$	$4.73 \times 10^2$	$1.37 \times 10^2$	4.71
6300	$1.40 \times 10^6$	$1.48 \times 10^6$	$6.68 \times 10^2$	$4.92 \times 10^2$	7.68
6600	$1.09 \times 10^6$	$1.15 \times 10^6$	$4.81 \times 10^2$	$1.99 \times 10^2$	5.85
6900	$1.81 \times 10^6$	$1.85 \times 10^6$	$8.24 \times 10^2$	$6.81 \times 10^2$	11.30
7200	$1.32 \times 10^6$	$1.32 \times 10^6$	$7.34 \times 10^2$	$5.13 \times 10^2$	12.10
7500	$2.26 \times 10^6$	$2.25 \times 10^6$	$1.05 \times 10^2$	$7.84 \times 10^2$	22.32
7800	$1.52 \times 10^6$	$1.53 \times 10^6$	$1.17 \times 10^2$	$7.30 \times 10^2$	16.89
8100	$2.68 \times 10^6$	$2.65 \times 10^6$	$1.66 \times 10^2$	$1.06 \times 10^2$	6.71

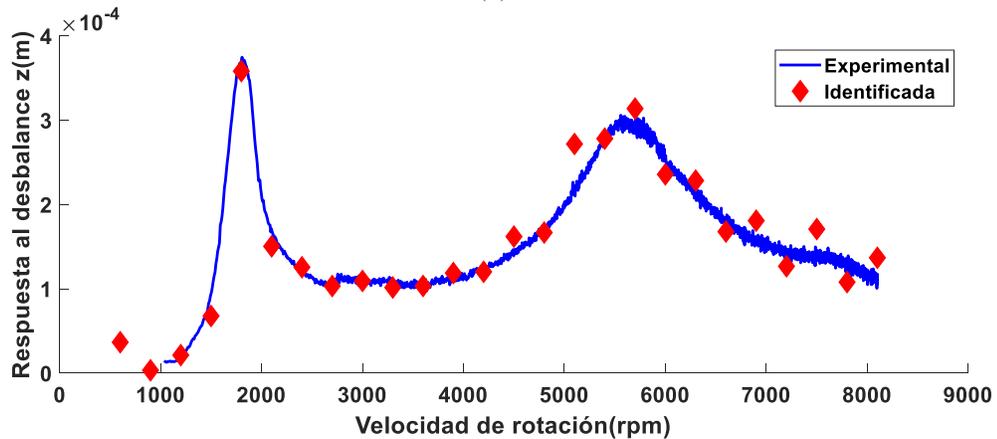
## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

En la Figuras 5.43, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.19, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje x) y en la dirección vertical (eje z). Por otra parte, en la Figura 5.44 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.



(a)



(b)

Figura 5.43: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi.

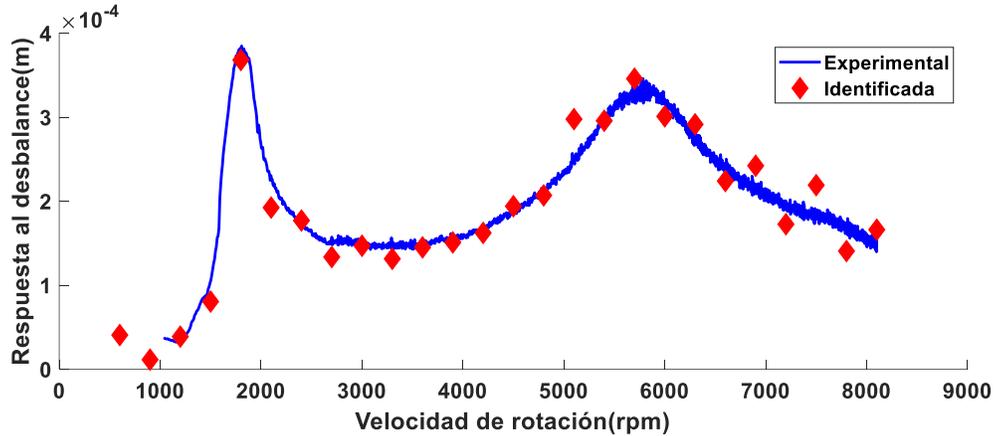


Figura 5.44: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi.

De manera similar como se realizó en la simulación numérica sección 4.47, Capítulo 4, se realiza la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, tomando como dato de entrada el segundo modo de vibración del rotor (ver Figura 5.45) en un rango de velocidades de 3,900 rpm a 6,000 rpm. Para el análisis, se consideró la misma configuración del rotor experimental reportado en la sección 5.3.2.2.1, Capítulo 5.

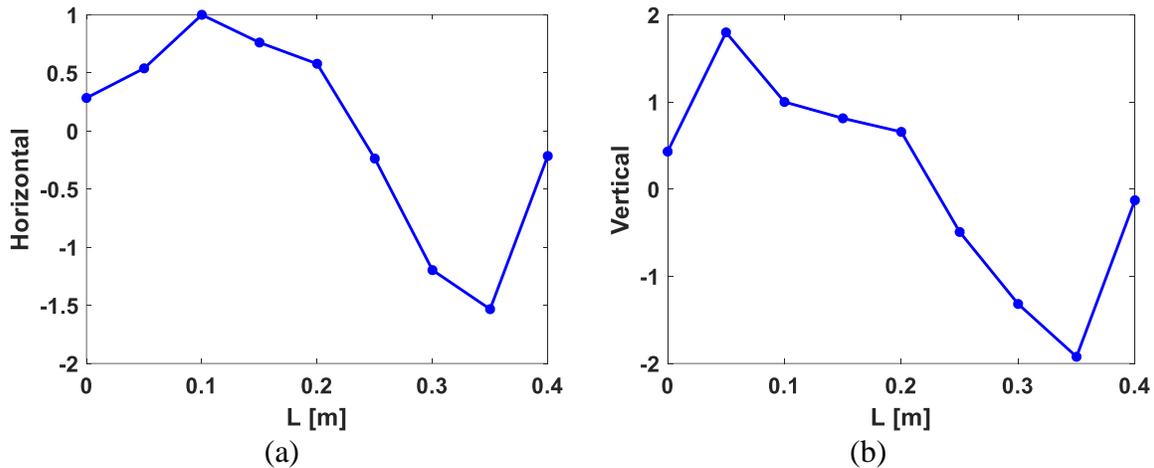


Figura 5.45: Segundo modo de vibración, (a) horizontal y (b) vertical.

En la Tabla 5.20 se presentan los parámetros modales identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.47 utilizando únicamente la segunda forma modal (Figura 5.45).

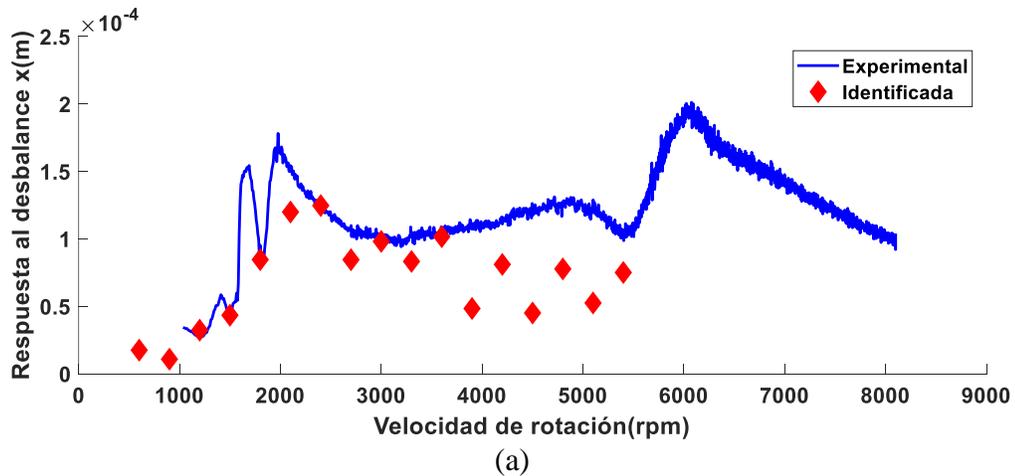
## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Tabla 5.20: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 11, soporte presurizado.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
3900	$-5.84 \times 10^6$	$-2.46 \times 10^7$	$7.41 \times 10^1$	$5.51 \times 10^1$	50.29
4200	$-5.80 \times 10^6$	$-2.46 \times 10^7$	$5.65 \times 10^1$	$5.45 \times 10^1$	23.91
4500	$-5.69 \times 10^6$	$-2.45 \times 10^7$	$7.38 \times 10^1$	$4.86 \times 10^1$	57.14
4800	$-5.64 \times 10^6$	$-2.44 \times 10^7$	$5.42 \times 10^1$	$4.70 \times 10^1$	38.63
5100	$-5.52 \times 10^6$	$-2.42 \times 10^7$	$7.19 \times 10^1$	$3.85 \times 10^1$	64.88
5400	$-5.48 \times 10^6$	$-2.42 \times 10^7$	$8.78 \times 10^1$	$3.70 \times 10^1$	54.55

En la Figuras 5.46, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.19 para un rango de velocidades de 600 rpm a 3,600 rpm y los parámetros modales reportados en la Tabla 5.20 para un rango de velocidades de 3,900 rpm a 6,000 rpm, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.47 se comparan los diagramas de bode resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que para este caso el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada no presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto se debe principalmente a la dificultad de obtener la forma modal adecuada correspondiente al segundo modo de vibración de manera experimental.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, no es posible reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.



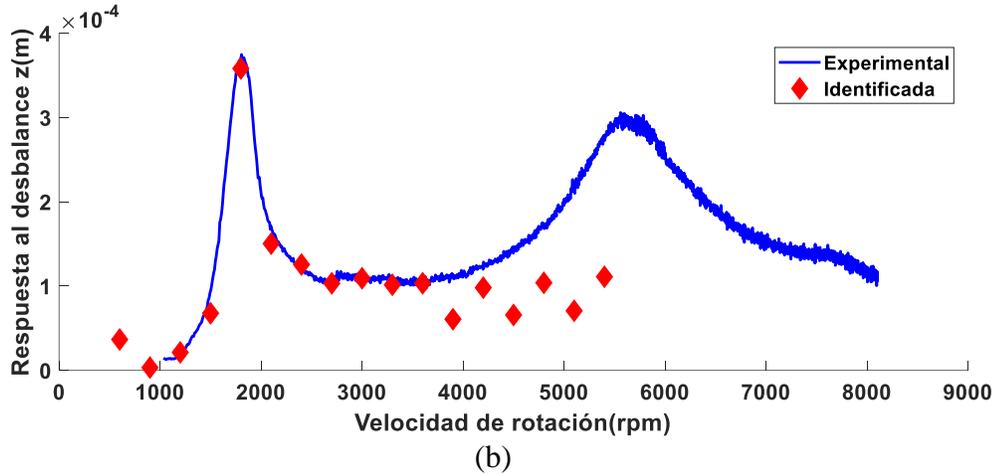


Figura 5.46: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificados con la segunda forma modal, nodo 11 y 10psi.

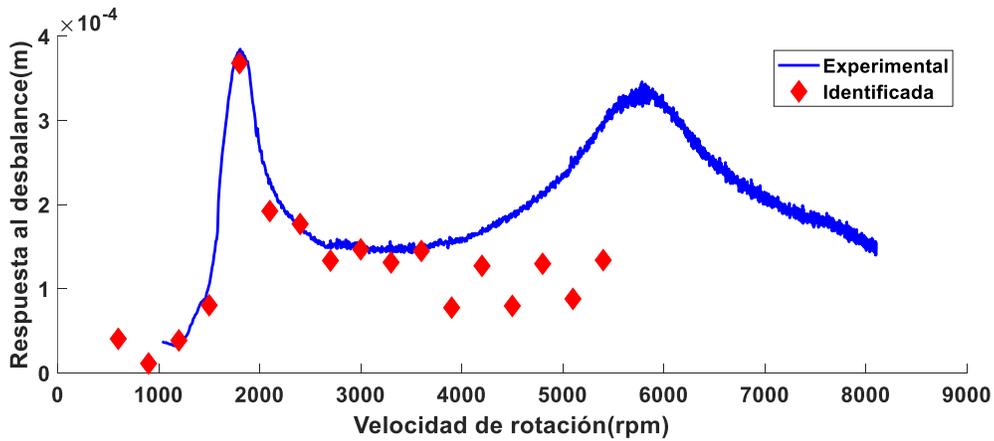


Figura 5.47: Diagrama de bode resultante identificado con la segunda forma modal, nodo 11 y 10 psi.

### 5.3.2.2.2 Identificación algebraica modal a 7 psi

La identificación algebraica se realiza en el nodo 36 a una presión de 7 psi utilizando únicamente el primer modo de vibración. Para el análisis se considera la misma configuración del rotor de la sección anterior. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.49 en diferentes velocidades de operación del rotor se presentan en la Tabla 5.21.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

Tabla 5.21: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, 7 psi.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-5.27 \times 10^5$	$-6.06 \times 10^5$	214.7	343.4	-
900	$-4.70 \times 10^5$	$-5.31 \times 10^5$	856.1	604.5	7.24
1200	$-4.62 \times 10^5$	$-4.94 \times 10^5$	925.2	743.8	1.04
1500	$-2.18 \times 10^5$	$-4.07 \times 10^5$	1944.6	662.5	15.88
1800	$-7.83 \times 10^4$	$-3.64 \times 10^5$	1501.9	273.2	0.53
2100	$-9.51 \times 10^4$	$-2.25 \times 10^5$	2032.2	1126.0	20.15
2400	$-3.35 \times 10^5$	$-5.77 \times 10^5$	620.5	48.9	84.78
2700	$3.03 \times 10^5$	$1.91 \times 10^5$	2604.1	2985.7	7.43
3000	$-1.77 \times 10^5$	$-2.56 \times 10^5$	1520.0	1540.7	85.52
3300	$6.44 \times 10^5$	$1.00 \times 10^6$	2914.2	5175.1	36.05
3600	$-1.03 \times 10^4$	$1.62 \times 10^5$	285.6	3011.1	30.23
3900	$1.12 \times 10^6$	$2.51 \times 10^6$	3384.2	8468.0	29.26
4200	$3.14 \times 10^5$	$-1.52 \times 10^5$	511.8	3151.5	26.55
4500	$1.75 \times 10^6$	$2.99 \times 10^5$	4178.9	4098.8	30.35
4800	$2.17 \times 10^5$	$-3.50 \times 10^5$	853.9	950.5	115.09
5100	$1.43 \times 10^6$	$-3.80 \times 10^5$	3244.7	314.9	23.71
5400	$-5.47 \times 10^4$	$1.85 \times 10^6$	1057.2	2623.9	44.61
5700	$2.82 \times 10^6$	$1.93 \times 10^6$	4654.2	1297.7	32.30
6000	$1.13 \times 10^6$	$1.63 \times 10^6$	6087.9	958.4	3.97
6300	$1.05 \times 10^6$	$2.48 \times 10^6$	1934.2	1125.5	4.33
6600	$5.68 \times 10^5$	$1.67 \times 10^6$	1172.9	232.2	5.50
6900	$1.32 \times 10^6$	$3.15 \times 10^6$	1370.9	1734.4	4.34
7200	$4.07 \times 10^5$	$1.64 \times 10^6$	670.0	146.3	11.07
7500	$1.75 \times 10^6$	$3.86 \times 10^6$	1419.4	2044.7	-
7800	$3.44 \times 10^5$	$1.82 \times 10^6$	355.4	236.8	-
8100	$2.13 \times 10^6$	$4.61 \times 10^6$	1530.5	2287.5	-

En la Figuras 5.48, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.21, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje x) y en la dirección vertical (eje z). Por otra parte, en la Figura 5.49 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

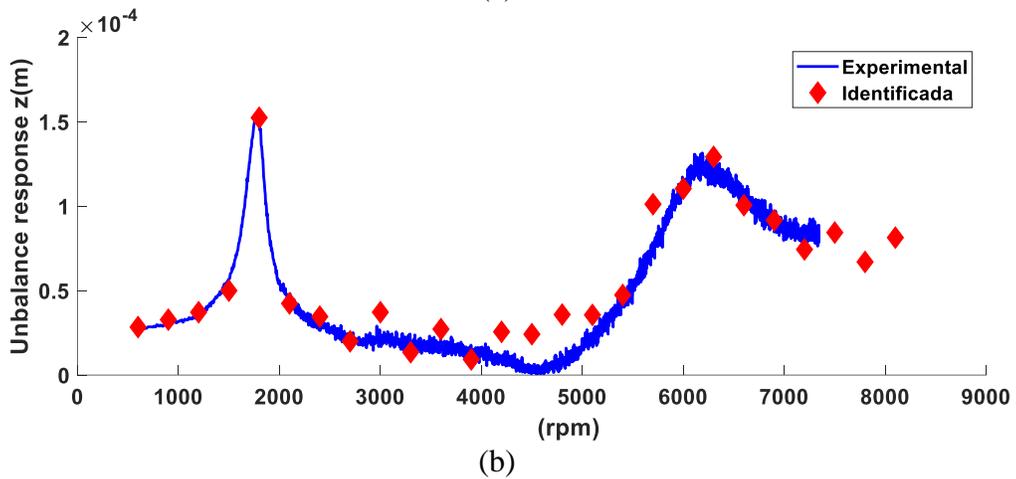
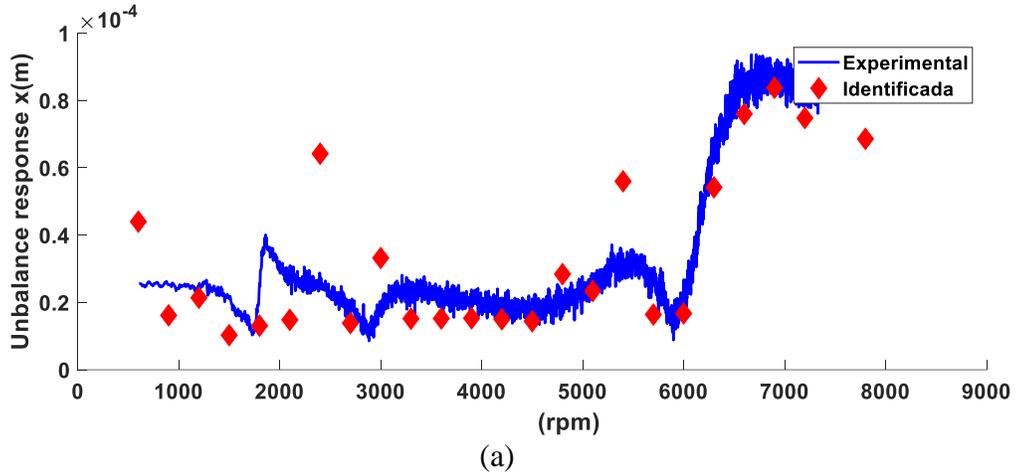
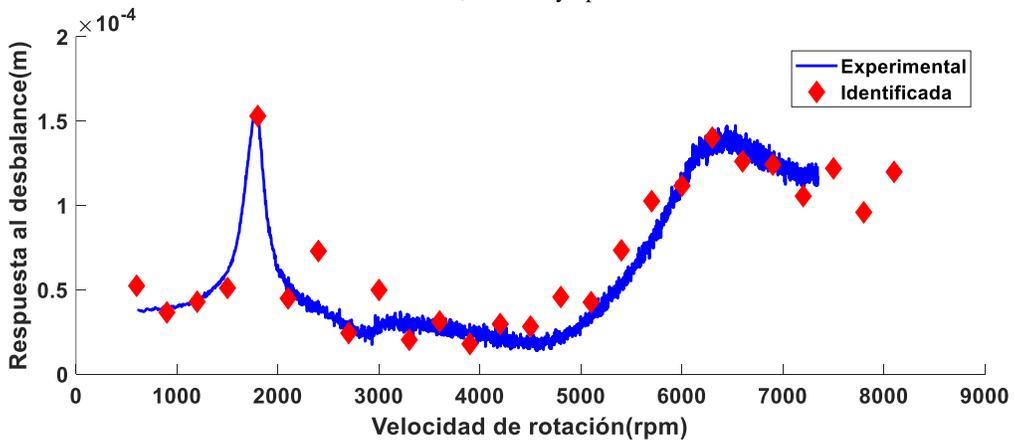


Figura 5.48: Diagramas de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 7psi.



### 5.3.2.3 Identificación algebraica modal a un sistema rotodinámico con un soporte convencional y uno presurizado con cinco discos.

En esta prueba se realiza la identificación de los parámetros modales del sistema con un cojinete convencional y una chumacera presurizada. Las características del sistema rotodinámico son: longitud de la fecha 40 cm, discretización a 1 cm, 40 elementos, 41 nodos, cinco discos inerciales ubicados en los nodos 11, 16, 21, 26 y 31 (ver Figuras 5.50 y 5.51); una masa de desbalance  $6 \times 10^{-6}$  (kg · m) a  $0^\circ$  en los nodos 11, 16, 21, 26 y 31; sistema de referencia  $0^\circ$  la vertical y  $270^\circ$  horizontal.

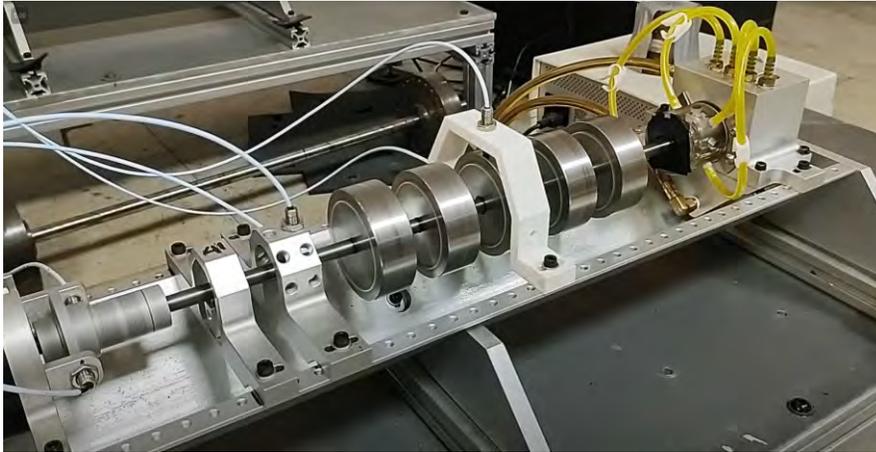


Figura 5.50: Sistema rotodinámico experimental con cojinete convencional y presurizado y cinco discos.

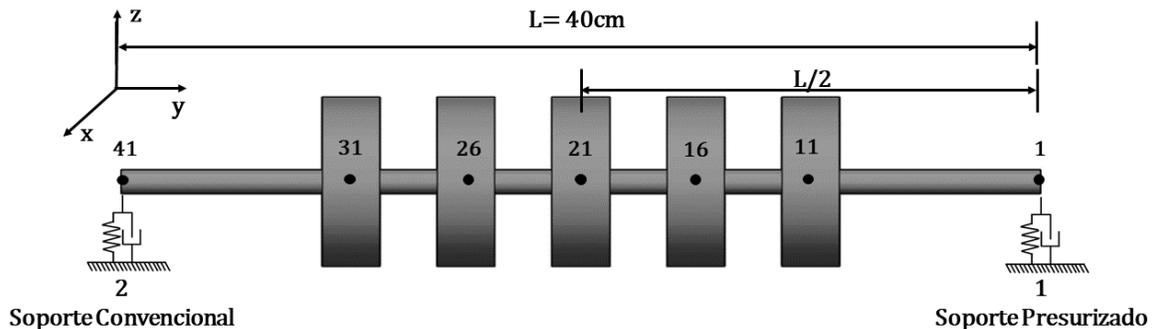


Figura 5.51: Sistema rotodinámico con cojinete convencional y presurizado y cinco discos.

Se caracterizó el sistema para obtener las formas modales de las Figuras 5.52 y 5.53 que se utilizaron para la identificación algebraica.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

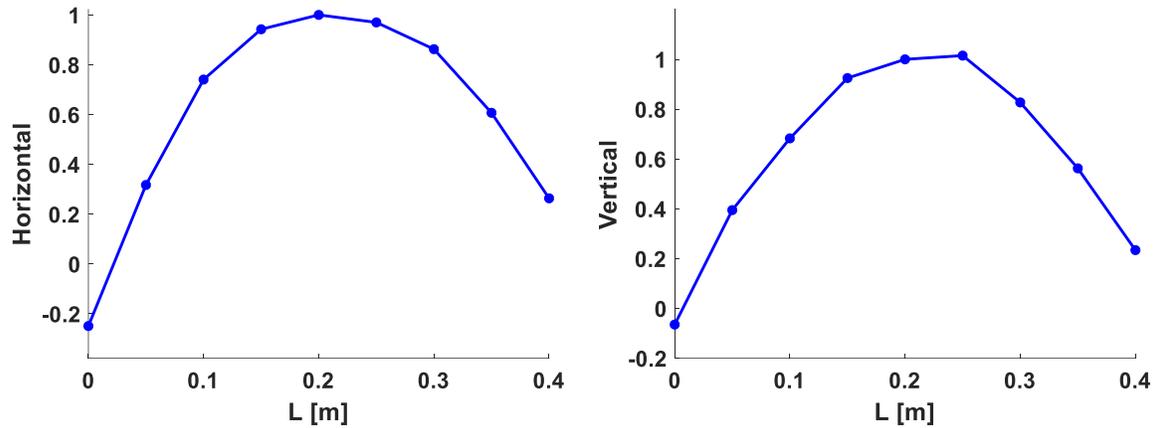


Figura 5.52: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.

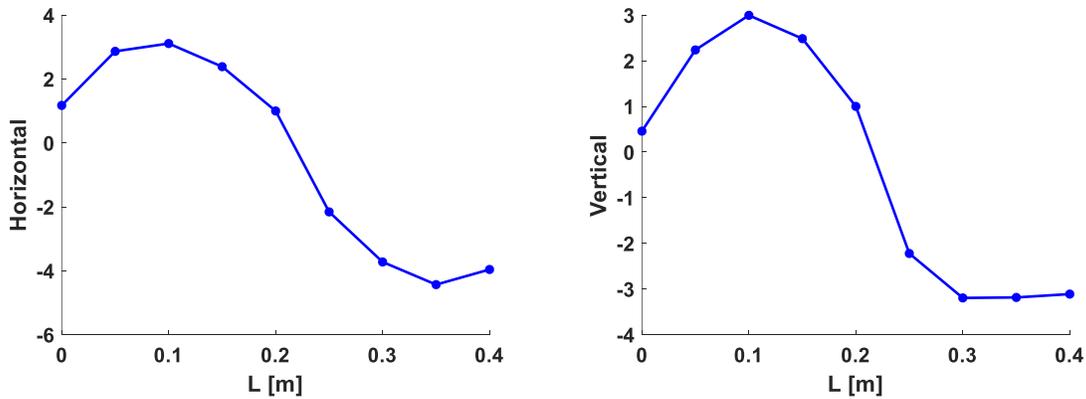


Figura 5.53: Formas modales, a) horizontal y b) vertical.

### 5.3.2.3.1 Identificación algebraica modal a 10 psi

A continuación, se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 10 psi, con la nueva configuración del rotor (cinco discos inerciales) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.52) se realizó la identificación, tomando como datos de entrada, la respuesta de vibración obtenida en el nodo 21. Los parámetros modales rotodinámicos identificados se presentan en la Tabla 5.22.

Tabla 5.22: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 21, soporte presurizado, modo 1.

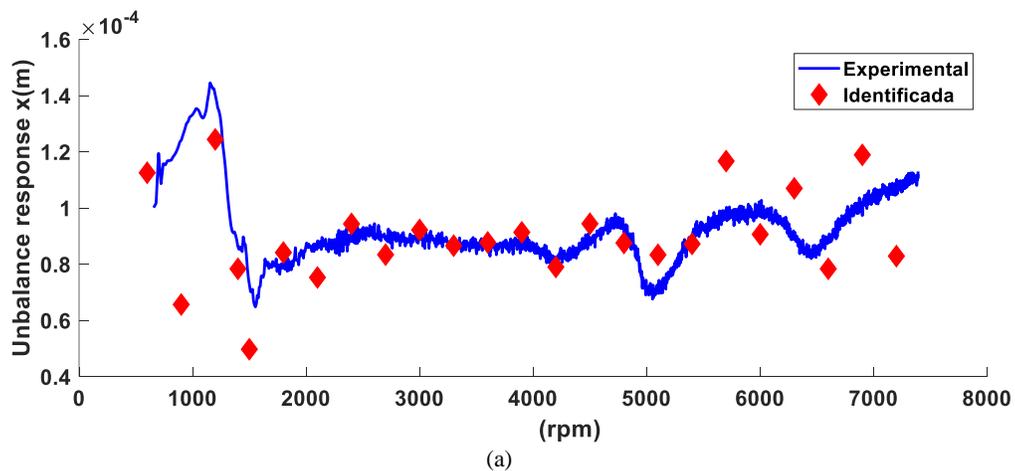
rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)			
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
600	$-1.16 \times 10^5$	$-1.13 \times 10^5$	28.9	23.4
900	$-9.29 \times 10^4$	$-9.29 \times 10^4$	59.8	31.1
1200	$-6.54 \times 10^4$	$-6.90 \times 10^4$	7.06	21.6
1400	$-6.35 \times 10^4$	$-4.89 \times 10^4$	16.5	12.4
1500	$-2.76 \times 10^4$	$-3.48 \times 10^4$	134	22.5
1800	$-2.20 \times 10^4$	$-1.49 \times 10^4$	53	40.3
2100	$5.09 \times 10^4$	$5.21 \times 10^4$	156	137
2400	$6.26 \times 10^4$	$6.19 \times 10^4$	4.08	5.34
2700	$1.68 \times 10^5$	$1.68 \times 10^5$	181	196

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

3000	$1.70 \times 10^5$	$1.65 \times 10^5$	18	8.66
3300	$3.12 \times 10^5$	$3.10 \times 10^5$	214	215
3600	$2.97 \times 10^5$	$2.91 \times 10^5$	10.1	12.4
3900	$4.83 \times 10^5$	$4.82 \times 10^5$	240	255
4200	$4.39 \times 10^5$	$4.30 \times 10^5$	44.9	62.4
4500	$6.82 \times 10^5$	$6.83 \times 10^5$	269	321
4800	$6.32 \times 10^5$	$6.24 \times 10^5$	52.3	225
5100	$9.11 \times 10^5$	$9.05 \times 10^5$	343	164
5400	$8.51 \times 10^5$	$9.10 \times 10^5$	181	114
5700	$1.17 \times 10^6$	$1.16 \times 10^6$	273	175
6000	$1.09 \times 10^6$	$1.13 \times 10^6$	202	136
6300	$1.46 \times 10^6$	$1.44 \times 10^6$	330	202
6600	$1.36 \times 10^6$	$1.36 \times 10^6$	349	157
6900	$1.78 \times 10^6$	$1.76 \times 10^6$	326	243
7200	$1.71 \times 10^6$	$1.64 \times 10^6$	408	292

En la Figuras 5.54, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.22, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.55 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.



## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

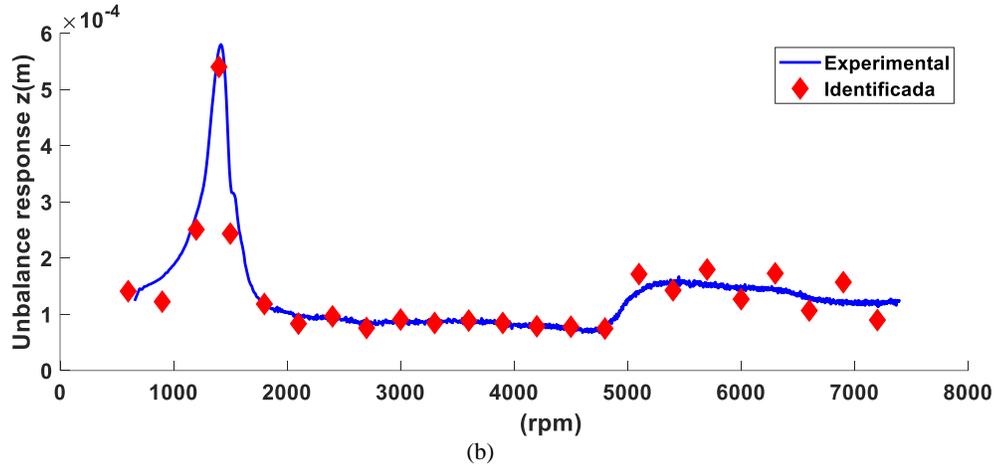


Figura 5.54: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.

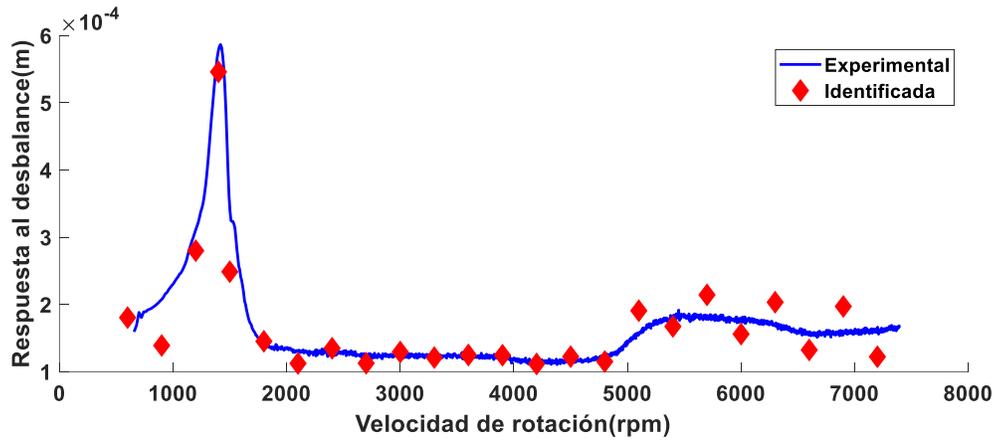


Figura 5.55: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.

A continuación, se realiza la identificación de los parámetros modales rotodinámicos utilizando el segundo modo de vibración (Figura 5.53). Los parámetros modales rotodinámicos identificados se presentan en la Tabla 5.23.

Tabla 5.23: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del centro nodo 21, soporte presurizado, modo 2.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)			
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$
600	$-1.84 \times 10^7$	$-2.06 \times 10^7$	5.92	6.31
900	$-1.83 \times 10^7$	$-2.04 \times 10^7$	7.71	10.8
1200	$-1.81 \times 10^7$	$-2.02 \times 10^7$	2.58	7.28
1500	$-1.77 \times 10^7$	$-1.99 \times 10^7$	24.2	24.6
1800	$-1.74 \times 10^7$	$-1.96 \times 10^7$	18.7	35.7
2100	$-1.69 \times 10^7$	$-1.92 \times 10^7$	38.1	32.7
2400	$-1.65 \times 10^7$	$-1.88 \times 10^7$	1.08	58.3
2700	$-1.58 \times 10^7$	$-1.83 \times 10^7$	68.4	46.8

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

3000	$-1.53 \times 10^7$	$-1.78 \times 10^7$	8.17	90.9
3300	$-1.45 \times 10^7$	$-1.71 \times 10^7$	107	51.3
3600	$-1.38 \times 10^7$	$-1.65 \times 10^7$	3.55	132
3900	$-1.29 \times 10^7$	$-1.57 \times 10^7$	154	61
4200	$-1.21 \times 10^7$	$-1.50 \times 10^7$	34.6	185
4500	$-1.10 \times 10^7$	$-1.40 \times 10^7$	202	85.9
4800	$-1.02 \times 10^7$	$-1.33 \times 10^7$	51.2	219
5100	$-8.91 \times 10^6$	$-1.22 \times 10^7$	247	170
5400	$-7.91 \times 10^6$	$-1.13 \times 10^7$	179	276
5700	$-6.51 \times 10^6$	$-1.01 \times 10^7$	297	158
6000	$-5.40 \times 10^6$	$-9.09 \times 10^6$	230	345
6300	$-3.85 \times 10^6$	$-7.73 \times 10^6$	366	164
6600	$-2.63 \times 10^6$	$-6.66 \times 10^6$	382	428
6900	$-9.18 \times 10^5$	$-5.17 \times 10^6$	289	294
7200	$4.15 \times 10^5$	$-3.98 \times 10^6$	516	444

En la Figuras 5.56, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada resultante obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.23, con la respuesta de vibración resultante obtenida de forma experimental del rotor. Se puede observar, que para este caso el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada no presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto se debe principalmente a la dificultad de obtener la forma modal adecuada correspondiente al segundo modo de vibración de manera experimental.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, no es posible reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

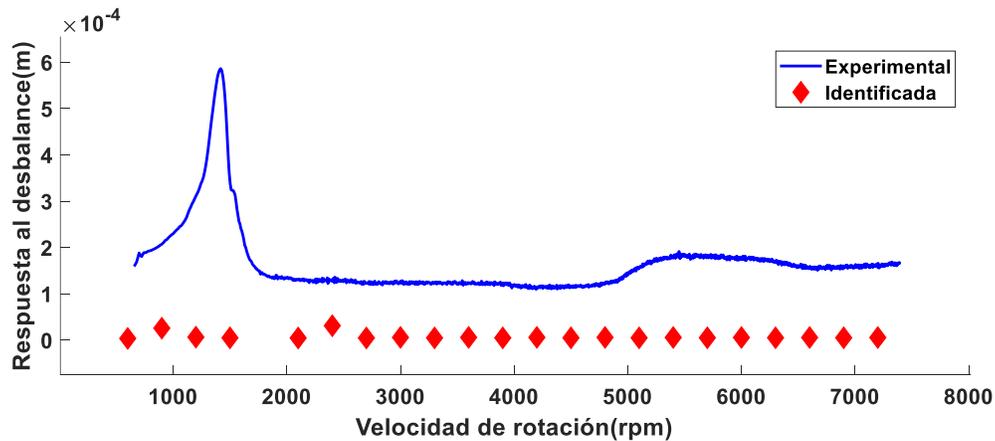


Figura 5.56: Diagrama de bode resultante identificado con la segunda forma modal, nodo 21 y 10 psi.

### 5.3.2.3.2 Identificación algebraica modal a 7 psi

Se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 7 psi, con la nueva configuración del rotor (cinco discos

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

inerciales) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.52) se realizó la identificación, tomando como datos de entrada, la respuesta de vibración obtenida en el nodo 36. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.58 se presentan en la Tabla 5.24.

Tabla 5.24: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-3.15 \times 10^5$	$-3.58 \times 10^5$	191	173	1.14
900	$-2.69 \times 10^5$	$-2.93 \times 10^5$	338	210	19.31
1200	$-1.86 \times 10^5$	$-2.12 \times 10^5$	66.9	62.7	0.15
1500	$-1.01 \times 10^5$	$-1.10 \times 10^5$	539	117	23.24
1800	$-7.67 \times 10^4$	$-6.39 \times 10^4$	161	146	0.29
2100	$1.46 \times 10^5$	$1.68 \times 10^5$	626	616	19.74
2400	$1.33 \times 10^5$	$1.49 \times 10^5$	143	73.2	9.51
2700	$4.98 \times 10^5$	$5.37 \times 10^5$	750	880	11.06
3000	$4.14 \times 10^5$	$4.70 \times 10^5$	522	139	11.26
3300	$9.30 \times 10^5$	$9.85 \times 10^5$	955	776	12.41
3600	$9.04 \times 10^5$	$9.80 \times 10^5$	645	377	0.86
3900	$1.43 \times 10^6$	$1.52 \times 10^6$	842	576	5.21
4200	$1.64 \times 10^6$	$1.64 \times 10^6$	643	388	2.10
4500	$1.98 \times 10^6$	$2.15 \times 10^6$	784	328	12.12
4800	$3.68 \times 10^6$	$2.44 \times 10^6$	747	283	6.89
5100	$2.61 \times 10^6$	$2.87 \times 10^6$	655	170	14.78
5400	$3.07 \times 10^6$	$3.34 \times 10^6$	175	139	30.79
5700	$3.24 \times 10^6$	$3.70 \times 10^6$	612	260	8.26
6000	$3.96 \times 10^6$	$4.26 \times 10^6$	262	321	24.54
6300	$4.04 \times 10^6$	$4.61 \times 10^6$	763	409	0.18
6600	$4.88 \times 10^6$	$5.32 \times 10^6$	531	536	30.94
6900	$4.91 \times 10^6$	$5.61 \times 10^6$	928	544	1.06
7200	$5.83 \times 10^6$	$6.43 \times 10^6$	852	720	31.17

En la Figuras 5.57, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.24, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.58 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

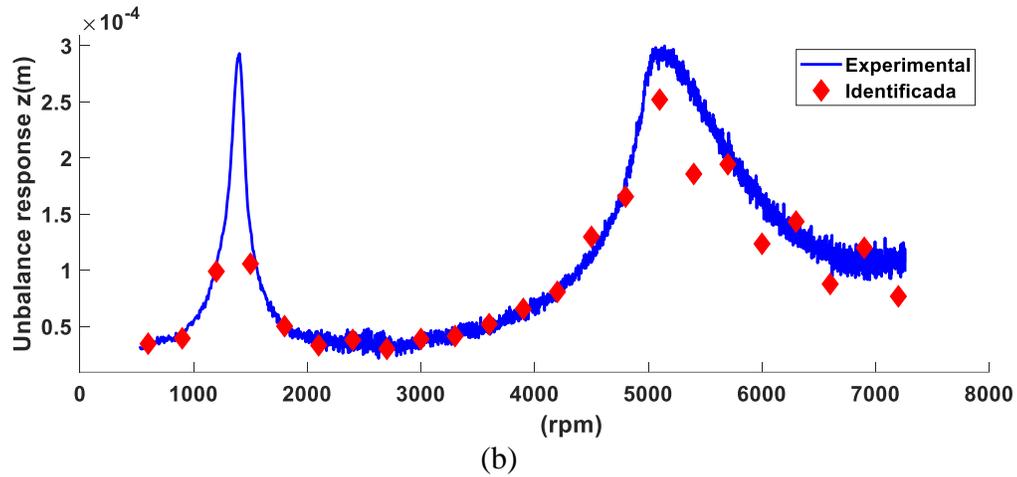
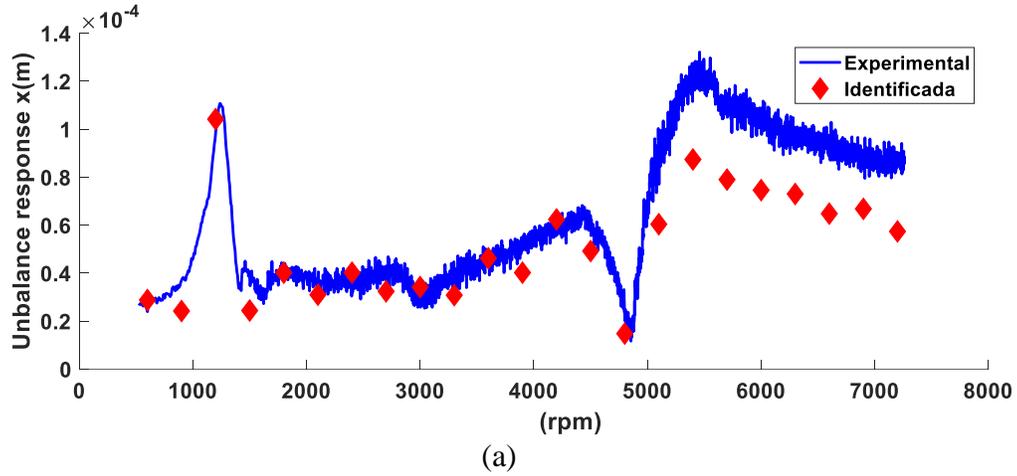


Figura 5.57: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 7psi.

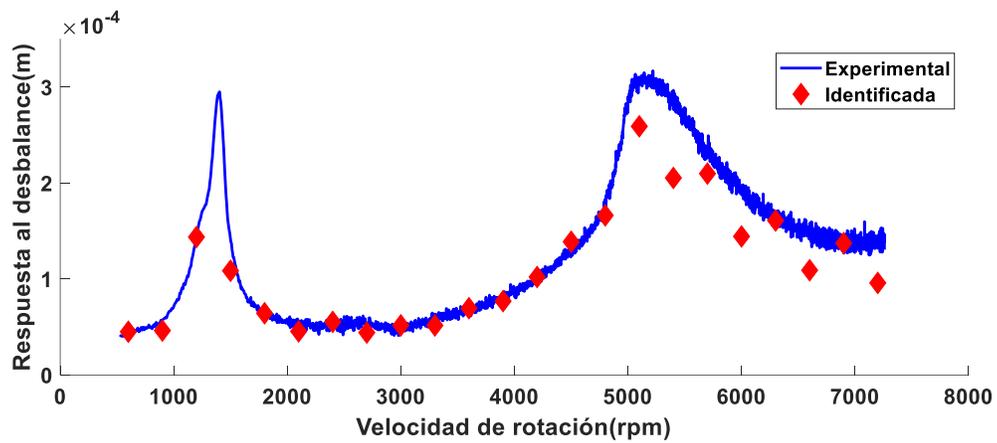


Figura 5.58: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 7psi.

### 5.3.2.3.3 Identificación algebraica modal a 15 psi

Se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 15 psi, con la nueva configuración del rotor (cinco discos inerciales) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.52) se realizó la identificación, tomando como datos de entrada, la respuesta de vibración obtenida en el nodo 36. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.60 se presentan en la Tabla 5.25.

Tabla 5.25: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-3.23 \times 10^5$	$-3.66 \times 10^5$	84.1	133	-
900	$-2.44 \times 10^5$	$-2.94 \times 10^5$	343	220	16.16
1200	$-1.77 \times 10^5$	$-2.14 \times 10^5$	38.5	91.9	6.37
1500	$-9.67 \times 10^4$	$-1.10 \times 10^5$	567	131	11.69
1800	$-5.70 \times 10^4$	$-7.17 \times 10^4$	253	183	2.66
2100	$1.37 \times 10^5$	$1.71 \times 10^5$	660	715	20.38
2400	$1.20 \times 10^5$	$1.25 \times 10^5$	22.6	139	6.18
2700	$5.09 \times 10^5$	$5.41 \times 10^5$	975	980	24.97
3000	$3.63 \times 10^5$	$4.37 \times 10^5$	257	387	0.25
3300	$9.03 \times 10^5$	$9.86 \times 10^5$	906	836	16.84
3600	$8.25 \times 10^5$	$9.87 \times 10^5$	475	603	4.69
3900	$1.40 \times 10^6$	$1.52 \times 10^6$	848	669	0.72
4200	$1.44 \times 10^6$	$1.70 \times 10^6$	615	630	1.47
4500	$1.97 \times 10^6$	$2.15 \times 10^6$	741	433	5.71
4800	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	19.8	13	94.06
5100	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	20.1	11.3	94.93
5400	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	14.2	10	93.93
5700	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	36	15.1	94.83
6000	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	25.4	13.3	94.70
6300	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	29.3	13	91.60
6600	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	75.3	22.9	89.75
6900	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	80.2	21.1	87.93
7200	$-1.77 \times 10^5$	$-2.03 \times 10^5$	84	31.9	90.55

En la Figuras 5.59, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.25, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.60 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede únicamente para el primer modo de vibración. Para el segundo modo de vibración ya no es

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

posible reproducir el comportamiento dinámico, esto se debe a que la respuesta de vibración del rotor en las velocidades del segundo modo de vibración presenta mucho ruido y los parámetros modales rotodinámicos identificados ya no son confiables.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental en el primer modo de vibración.

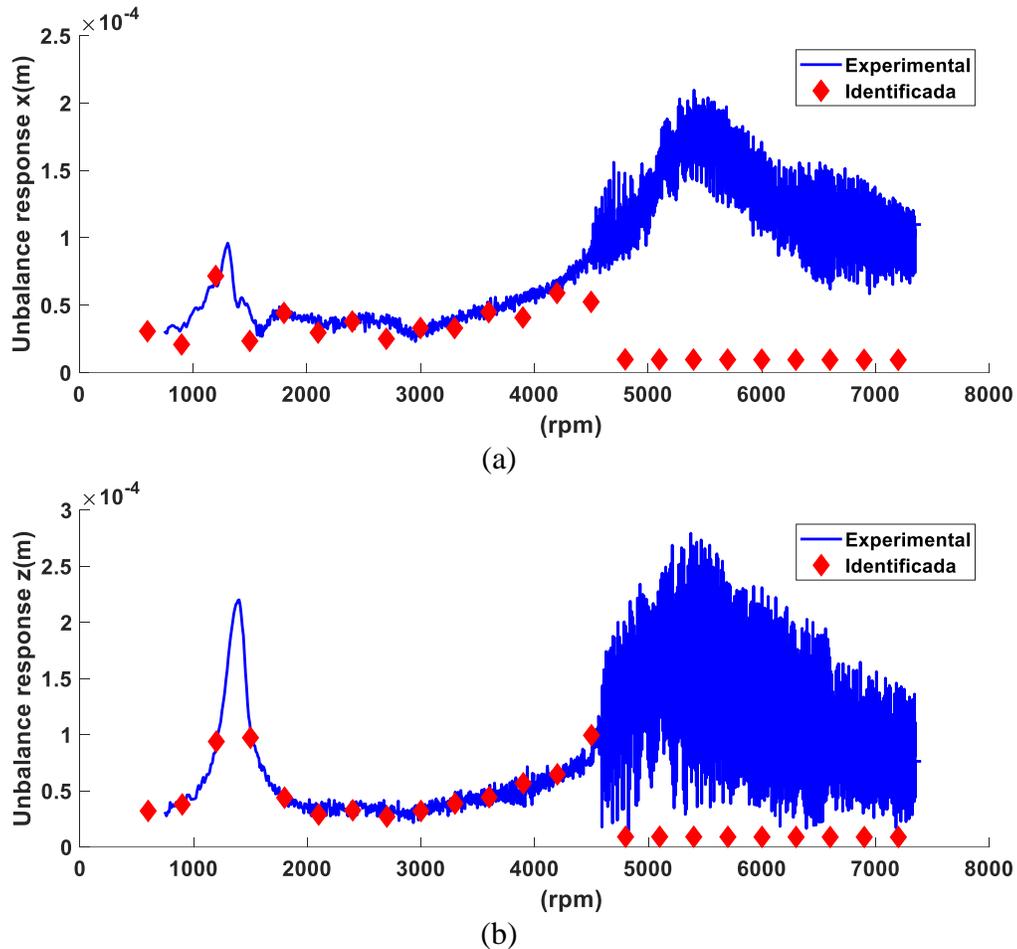


Figura 5.59: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 15 psi.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

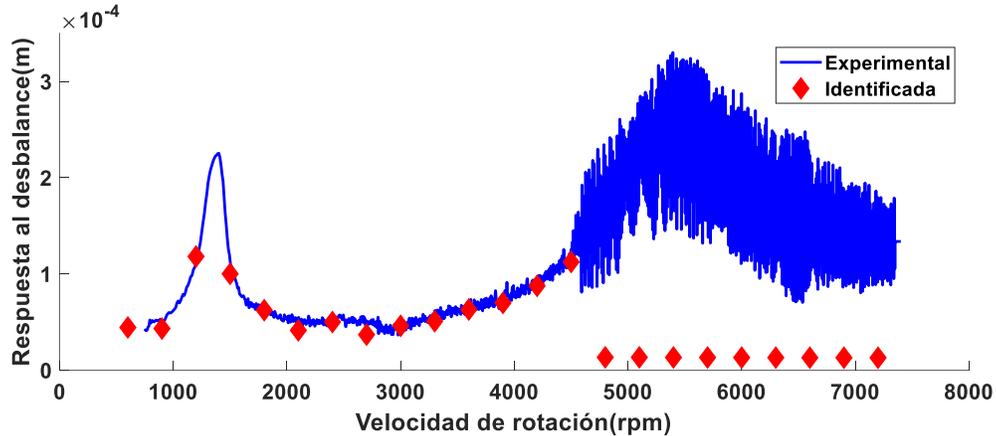


Figura 5.60: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 15 psi.

### 5.3.2.3.4 Identificación algebraica modal a 12 psi

Se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 12 psi, con la nueva configuración del rotor (cinco discos inerciales) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.52), tomando como datos de entrada, la respuesta de vibración obtenida en el nodo 36. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.62 se presentan en la Tabla 5.26.

Tabla 5.26: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 36, soporte presurizado, modo 1, 12 psi.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-3.22 \times 10^5$	$-3.64 \times 10^5$	128.59	145.59	1.67
900	$-2.40 \times 10^5$	$-2.93 \times 10^5$	392.41	222.03	22.02
1200	$-1.76 \times 10^5$	$-2.11 \times 10^5$	49.76	71.80	0.18
1500	$-9.92 \times 10^4$	$-1.10 \times 10^5$	509.78	135.21	19.54
1800	$-7.64 \times 10^4$	$-7.30 \times 10^4$	153.52	80.48	1.92
2100	$1.55 \times 10^5$	$1.70 \times 10^5$	684.92	696.92	20.28
2400	$1.34 \times 10^5$	$1.54 \times 10^5$	226.14	299.16	4.85
2700	$5.22 \times 10^5$	$5.37 \times 10^5$	882.49	898.51	20.72
3000	$3.91 \times 10^5$	$4.88 \times 10^5$	611.15	548.65	2.79
3300	$9.35 \times 10^5$	$9.84 \times 10^5$	985.63	823.86	3.76
3600	$8.59 \times 10^5$	$1.03 \times 10^6$	592.18	672.69	0.70
3900	$1.43 \times 10^6$	$1.52 \times 10^6$	914.48	626.26	5.41
4200	$1.50 \times 10^6$	$1.75 \times 10^6$	688.54	649.09	1.83
4500	$1.99 \times 10^6$	$2.15 \times 10^6$	765.26	414.37	2.58
4800	$2.18 \times 10^6$	$2.57 \times 10^6$	572.93	381.95	12.38
5100	$2.56 \times 10^6$	$2.89 \times 10^6$	425.65	369.94	16.58
5400	$3.03 \times 10^6$	$3.45 \times 10^6$	60.81	164.83	23.34
5700	$3.24 \times 10^6$	$3.71 \times 10^6$	471.88	418.85	18.12
6000	$3.86 \times 10^6$	$4.40 \times 10^6$	279.30	501.58	33.58
6300	$4.02 \times 10^6$	$4.60 \times 10^6$	641.62	572.28	11.21
6600	$4.53 \times 10^6$	$5.18 \times 10^6$	750.92	942.67	33.69
6900	$4.88 \times 10^6$	$5.60 \times 10^6$	831.39	732.85	13.05
7200	$5.44 \times 10^6$	$6.31 \times 10^6$	1068.17	1169.77	39.70

En la Figuras 5.61, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.26, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.62 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

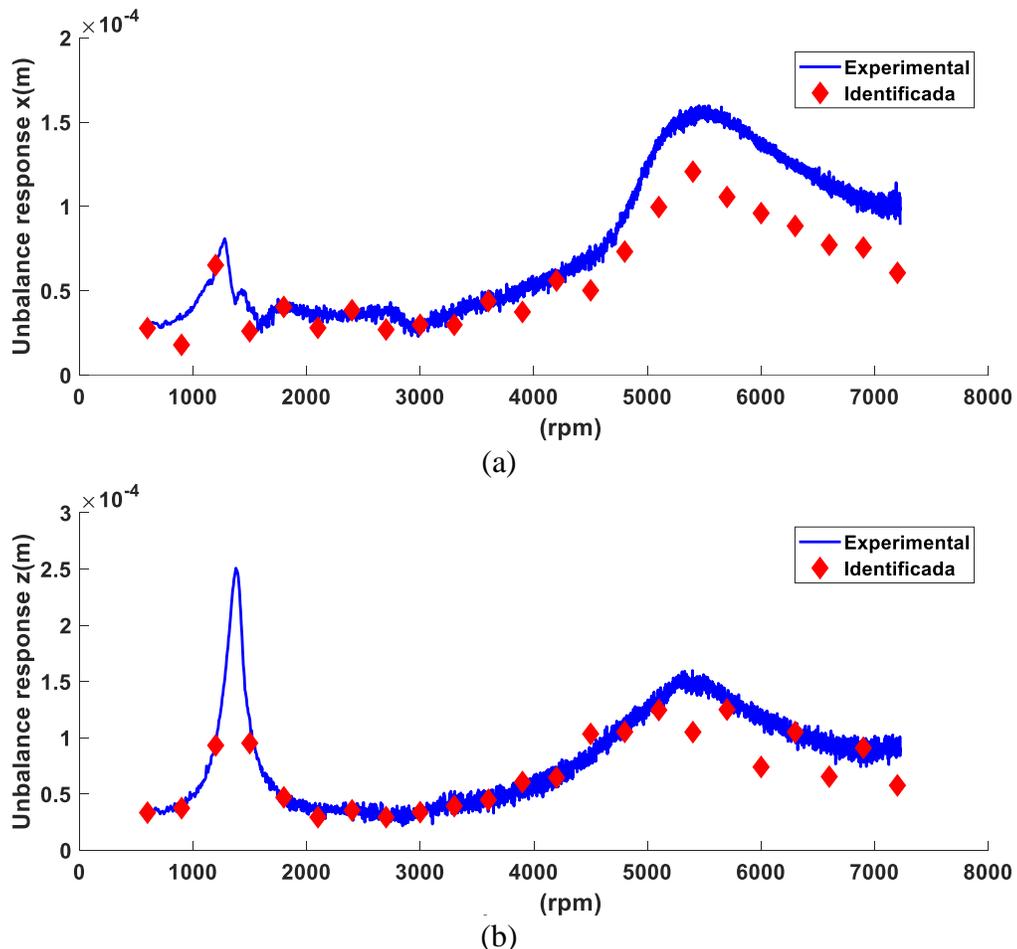


Figura 5.61: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 12 psi.

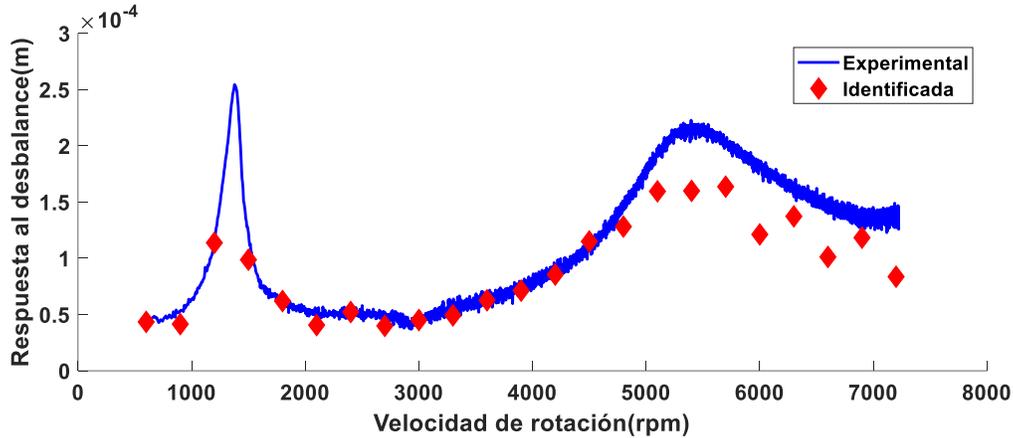


Figura 5.62: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 36 y 12 psi.

En la Figura 5.63, se comparan la respuesta de vibración del rotor (diagramas de bode) para los casos donde se consideró una presión de 7 psi, 10 psi y 12 psi en la chumacera presurizada. Se puede notar que las diferencias más notables se presentan en las zonas de resonancia.

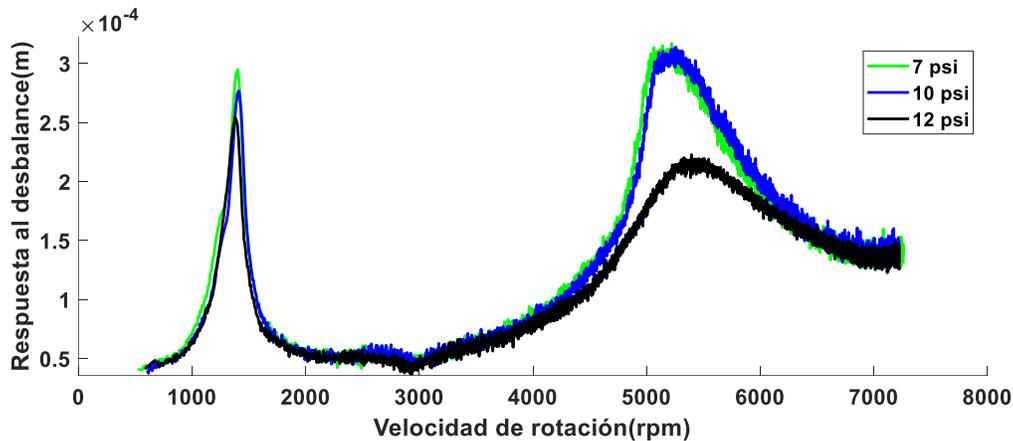


Figura 5.63: Diagramas de bode experimentales a diferentes presiones.

### 5.3.3 Identificación algebraica modal utilizando dos soportes presurizados

En esta sección se presentan los resultados de la identificación algebraica modal a un sistema rotodinámico con dos soportes presurizados en los extremos. Ambos soportes son de la misma marca Bently Nevada y tienen las mismas características (ver Figura 5.64).

#### 5.3.3.1 Configuración tres discos

Configuración 1 (ver Figura 5.65): tres discos (nodos 16, 21 y 26) a una presión de 10 psi. Identificando en el centro (nodo 21), con las todas las masas de desbalance a cero grados, respecto a la vertical,  $3.63 \times 10^{-6}$  (kg · m) en los nodos 16, 21 y 26, respectivamente. Utilizando el primer modo de vibración (ver Figura 5.66).

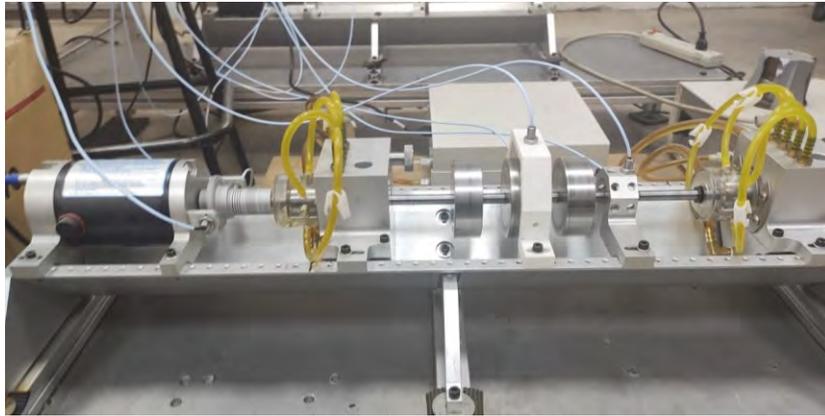


Figura 5.64: Sistema rotodinámico experimental con cojinetes presurizados y tres discos.

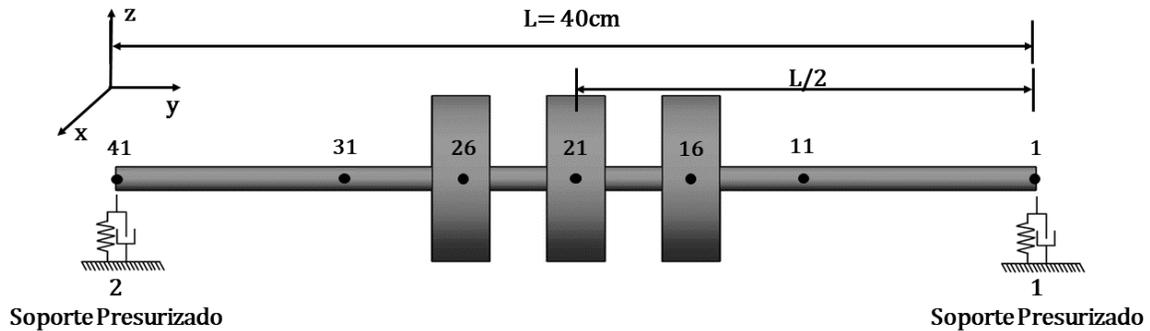


Figura 5.65: Sistema rotodinámico con cojinetes presurizados y tres discos.

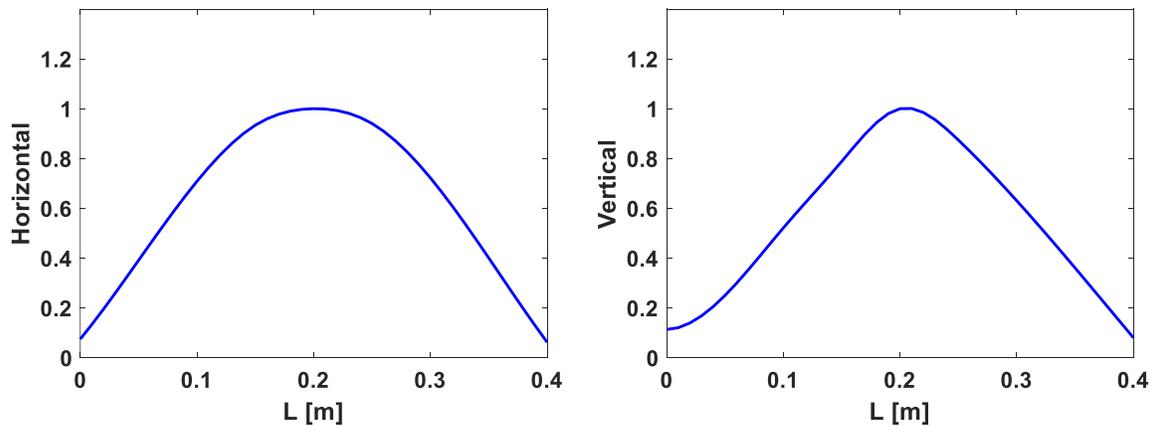


Figura 5.66: Primera forma modal, a) horizontal y b) vertical.

### 5.3.3.1.1 Presión 10 psi

Se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 10 psi, con la nueva configuración del rotor (tres discos inerciales y dos chumaceras presurizadas) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.66) se

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

realizó la identificación, tomando como datos de entrada, la respuesta de vibración obtenida en el nodo 21. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.68 se presentan en la Tabla 5.27.

Tabla 5.27: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 21, soporte presurizado, modo 1, 10psi.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-6.43 \times 10^4$	$-1.67 \times 10^5$	25.3	14.9	2.97
900	$-5.37 \times 10^4$	$-1.57 \times 10^5$	36.8	17.3	28.43
1200	$-3.30 \times 10^4$	$-1.40 \times 10^5$	6.5	11.1	20.35
1500	$-1.53 \times 10^4$	$-1.24 \times 10^5$	23.5	9.7	51.11
1600	$-3.39 \times 10^3$	$-1.14 \times 10^5$	15.0	3.2	21.28
1700	$7.22 \times 10^3$	$-1.05 \times 10^5$	32.0	5.7	66.05
1800	$1.24 \times 10^4$	$-1.00 \times 10^5$	24.0	10.0	9.88
2100	$4.36 \times 10^4$	$-7.51 \times 10^4$	70.8	35.1	34.65
2400	$7.00 \times 10^4$	$-5.11 \times 10^4$	34.2	20.0	8.39
2700	$1.18 \times 10^5$	$-7.77 \times 10^3$	97.1	101.3	32.22
3000	$1.34 \times 10^5$	$1.38 \times 10^4$	6.4	31.9	2.09
3300	$2.12 \times 10^5$	$7.58 \times 10^4$	152.3	113.7	37.46
3600	$2.30 \times 10^5$	$9.05 \times 10^4$	5.2	8.5	4.24
3900	$3.24 \times 10^5$	$1.78 \times 10^5$	205.3	170.9	37.48
4200	$3.32 \times 10^5$	$1.76 \times 10^5$	27.1	14.6	4.01
4500	$4.56 \times 10^5$	$2.97 \times 10^5$	269.3	207.1	35.45
4800	$4.56 \times 10^5$	$2.87 \times 10^5$	46.7	38.7	3.50
5100	$6.07 \times 10^5$	$4.34 \times 10^5$	334.6	265.0	40.60
5400	$5.92 \times 10^5$	$4.09 \times 10^5$	81.9	70.9	3.83
5700	$8.20 \times 10^5$	$5.99 \times 10^5$	256.3	201.6	4.23
6000	$7.27 \times 10^5$	$5.25 \times 10^5$	43.3	83.2	8.51

En la Figuras 5.67, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.27, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.68 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental. Nótese que los parámetros modales rotodinámicos identificados en las velocidades del rotor en la zona de resonancia del primero modo de vibración, no reproduce adecuadamente el comportamiento dinámico del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental, excepto en la zona de resonancia correspondiente al primer modo de vibración.

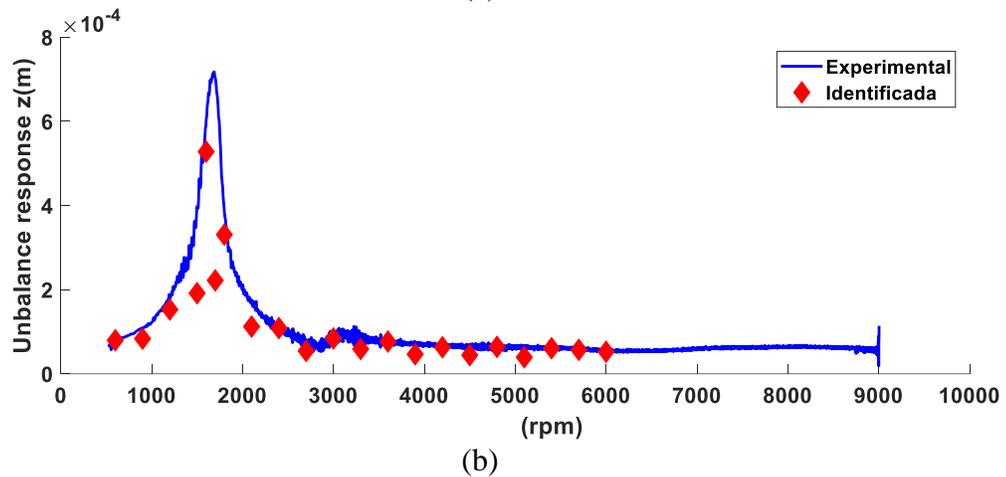
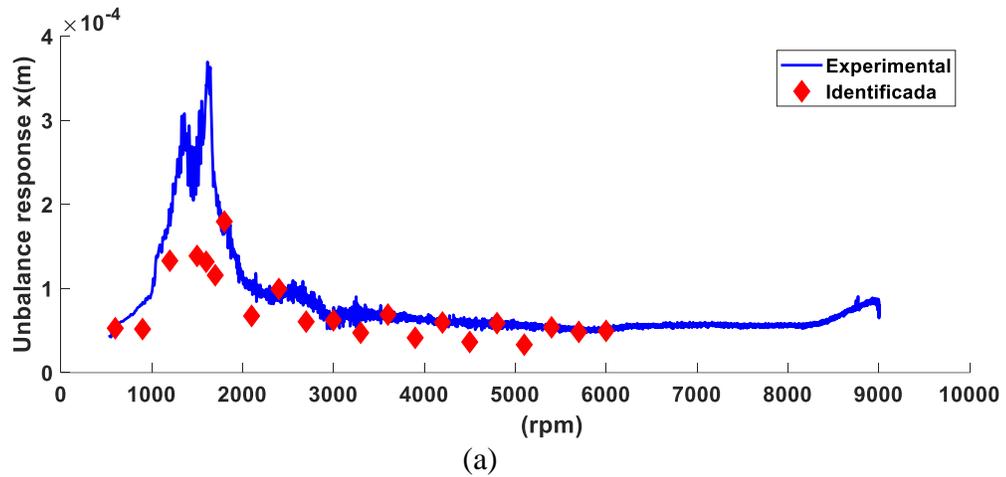


Figura 5.67: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.

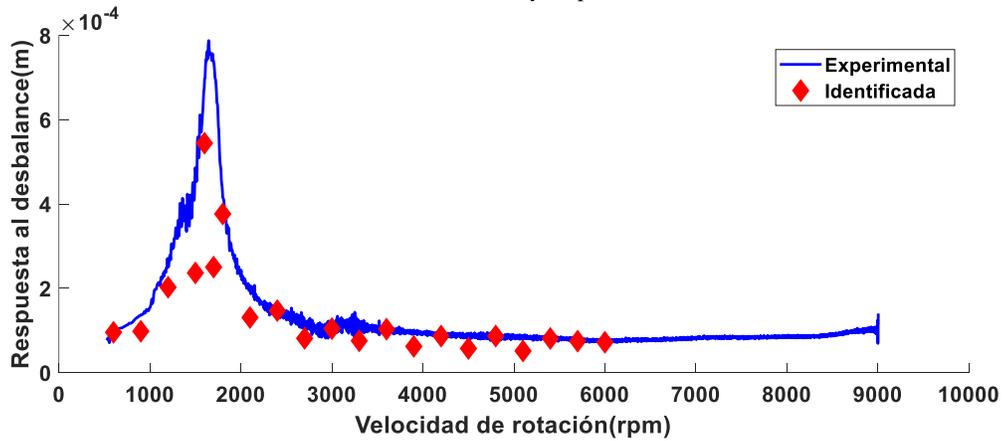


Figura 5.68: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.

### 5.3.3.1.2 Presión 15 psi

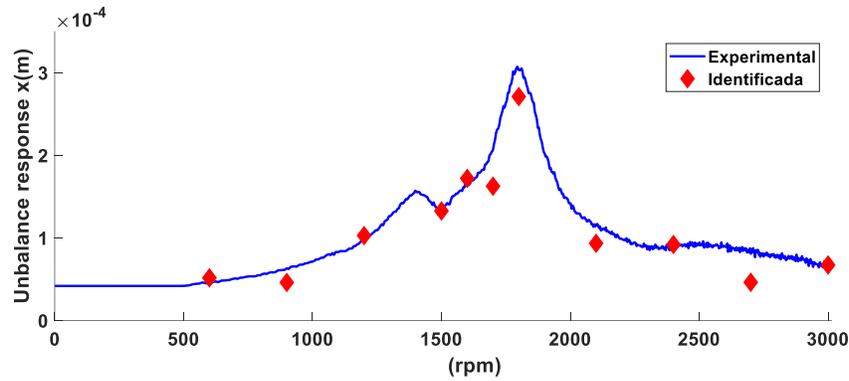
Se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 15 psi, con la nueva configuración del rotor (tres discos inerciales y dos chumaceras presurizadas) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.66) se realizó la identificación, tomando como datos de entrada, la respuesta de vibración obtenida en el nodo 21. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.70 se presentan en la Tabla 5.28.

Tabla 5.28: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 21, soporte presurizado, modo 1, 15psi.

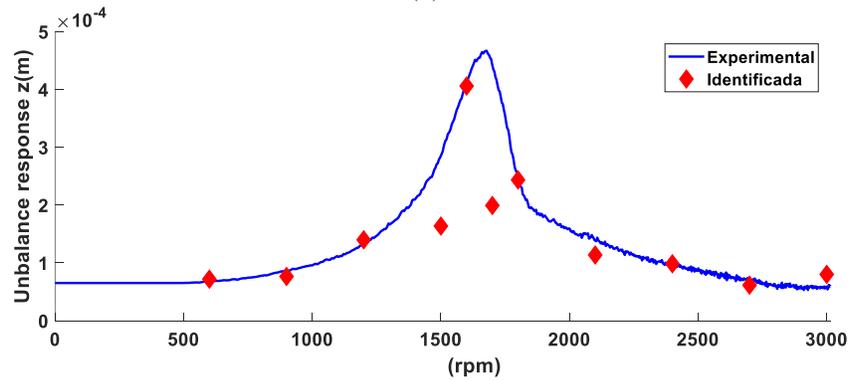
rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-1.20 \times 10^5$	$-1.17 \times 10^5$	25.1	18.2	8.17
900	$-1.08 \times 10^5$	$-1.06 \times 10^5$	40.6	20.3	16.96
1200	$-8.71 \times 10^4$	$-8.47 \times 10^4$	18.5	14.8	5.64
1500	$-6.91 \times 10^4$	$-6.59 \times 10^4$	20.9	12.9	33.22
1600	$-5.53 \times 10^4$	$-5.33 \times 10^4$	9.8	5.2	1.54
1700	$-5.16 \times 10^4$	$-4.83 \times 10^4$	19.1	8.3	47.28
1800	$-3.91 \times 10^4$	$-3.65 \times 10^4$	15.1	15.1	7.13
2100	$-9.74 \times 10^3$	$-6.16 \times 10^3$	48.6	37.4	18.37
2400	$1.63 \times 10^4$	$2.33 \times 10^4$	10.8	21.5	5.06
2700	$6.75 \times 10^4$	$7.48 \times 10^4$	128.7	97.5	27.01
3000	$9.00 \times 10^4$	$1.01 \times 10^5$	20.1	10.2	20.03

En la Figuras 5.69, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.28, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje x) y en la dirección vertical (eje z). Por otra parte, en la Figura 5.70 se comparan los diagramas de bode resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental. Nótese que los parámetros modales rotodinámicos identificados en las velocidades del rotor en la zona de resonancia del primero modo de vibración, no reproduce adecuadamente el comportamiento dinámico del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental, excepto en la zona de resonancia correspondiente al primer modo de vibración.



(a)



(b)

Figura 5.69: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical, identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 15 psi.

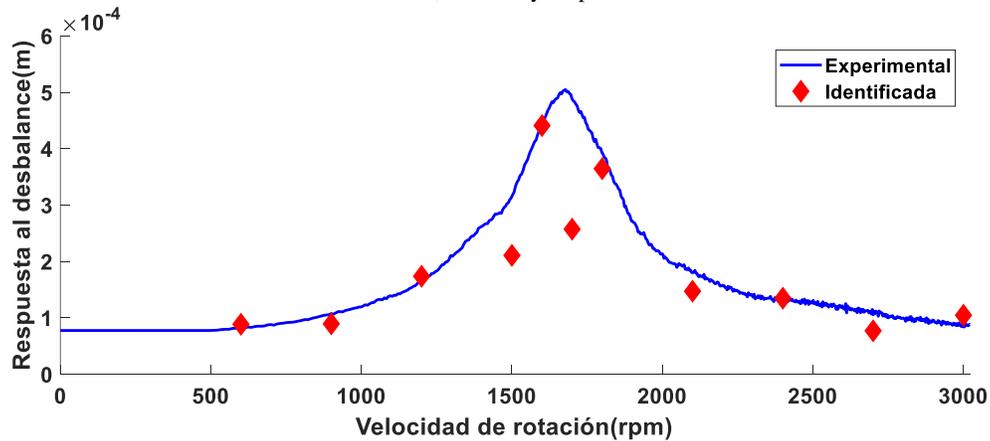


Figura 5.70: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 15 psi.

En la Figura 5.71, se comparan la respuesta de vibración del rotor (diagramas de bode) para los casos donde se consideró una presión de 10 psi y 15 psi en las chumaceras presurizadas. Se puede notar que las diferencias más notables se presentan antes de la zona de resonancia y en la zona de resonancia.

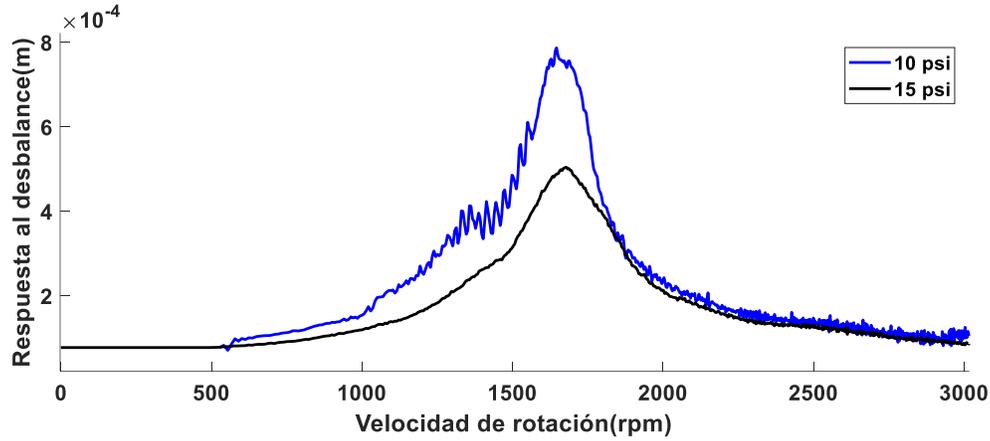


Figura 5.71: Diagramas de bode experimentales a diferentes presiones.

### 5.3.3.2 Configuración cinco discos

Configuración: cinco discos en los nodos 13, 16, 21, 26 y 29 (ver Figura 5.72), se utiliza una presión de trabajo de 10 psi. Identificando en el centro (nodo 21) y en el nodo 11, las masas de desbalance y su orientación se muestran en la Tabla 5.29.

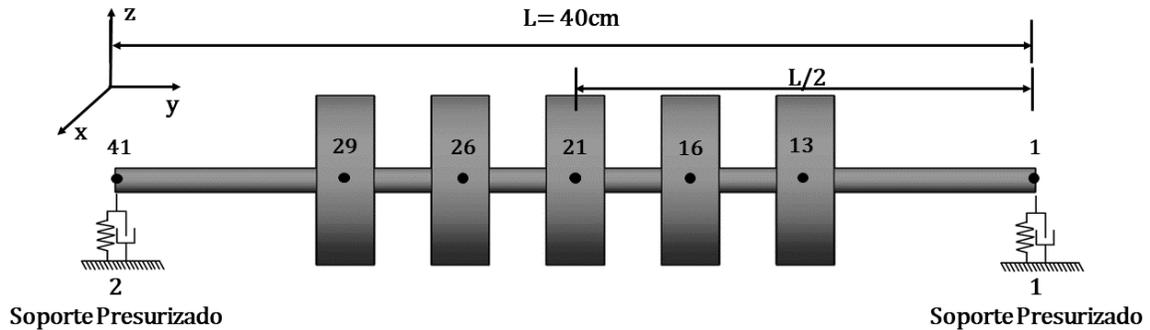


Figura 5.72: Sistema rotodinámico con cojinetes presurizados y cinco discos.

Tabla 5.29: Masas de desbalance presentes en el sistema.

Desbalance (kg · m)	Posición angular (grados)
$m_u d_1 = 3.63 \times 10^{-6}$ nodo 13	$\alpha_1 = 0^\circ$
$m_u d_2 = 3.63 \times 10^{-6}$ nodo 16	$\alpha_2 = 0^\circ$
$m_u d_3 = 7.26 \times 10^{-6}$ nodo 21	$\alpha_3 = 0^\circ$
$m_u d_4 = 3.63 \times 10^{-6}$ nodo 26	$\alpha_4 = 0^\circ$
$m_u d_5 = 3.63 \times 10^{-6}$ nodo 31	$\alpha_5 = 0^\circ$

La forma modal se observa en la Figura 5.73.

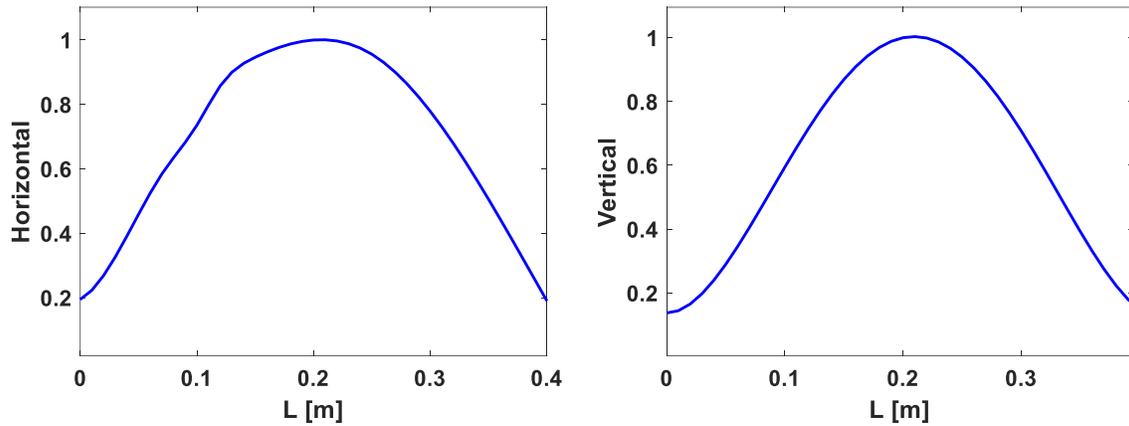


Figura 5.73: Primera forma modal, a) horizontal y b) vertical.

### 5.3.3.2.1 Presión 10 psi

Se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 10 psi, con la nueva configuración del rotor (cinco discos inerciales y dos chumaceras presurizadas) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.73) se realizó la identificación, tomando como datos de entrada, la respuesta de vibración obtenida en el nodo 21. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.75 se presentan en la Tabla 5.30.

Tabla 5.30: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 21, soporte presurizado, modo 1, 10 psi.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-1.51 \times 10^5$	$-1.40 \times 10^5$	13.9	13.3	0.24
720	$-1.44 \times 10^5$	$-1.33 \times 10^5$	16.1	12.5	16.60
840	$-1.35 \times 10^5$	$-1.25 \times 10^5$	20.5	15.4	48.52
960	$-1.30 \times 10^5$	$-1.21 \times 10^5$	13.0	12.3	26.33
1080	$-1.19 \times 10^5$	$-1.11 \times 10^5$	8.2	11.4	13.40
1200	$-1.06 \times 10^5$	$-9.87 \times 10^4$	0.4	8.4	23.02
1320	$-9.20 \times 10^4$	$-8.71 \times 10^4$	17.0	7.6	36.28
1440	$-7.70 \times 10^4$	$-7.32 \times 10^4$	52.6	6.3	22.42
1560	$-6.55 \times 10^4$	$-6.60 \times 10^4$	107.2	12.2	66.04
1680	$-5.17 \times 10^4$	$-5.06 \times 10^4$	49.6	20.8	7.08
1800	$-3.89 \times 10^4$	$-4.00 \times 10^4$	47.2	26.2	0.19
1920	$-1.12 \times 10^4$	$-1.47 \times 10^4$	73.9	40.9	13.77
2040	$9.24 \times 10^3$	$4.75 \times 10^3$	106.0	70.1	12.17
2160	$2.04 \times 10^4$	$1.53 \times 10^4$	113.3	80.5	9.84
2400	$4.20 \times 10^4$	$3.58 \times 10^4$	22.8	13.3	6.87
3000	$1.64 \times 10^5$	$1.19 \times 10^5$	42.4	30.3	12.03
3600	$3.01 \times 10^5$	$2.67 \times 10^5$	41.0	32.0	5.73
4200	$4.72 \times 10^5$	$4.18 \times 10^5$	62.5	58.8	6.89

Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio  
Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

4800	$6.62 \times 10^5$	$5.90 \times 10^5$	92.8	73.4	6.54
5400	$8.71 \times 10^5$	$7.94 \times 10^5$	140.0	77.0	2.04
6000	$1.13 \times 10^6$	$1.03 \times 10^6$	34.1	161.4	5.30
6300	$1.40 \times 10^6$	$1.26 \times 10^6$	226.6	267.0	2.33
6600	$1.46 \times 10^6$	$1.27 \times 10^6$	133.2	211.2	5.01
6900	$1.72 \times 10^6$	$1.54 \times 10^6$	270.8	295.0	3.17
7200	$1.78 \times 10^6$	$1.57 \times 10^6$	153.1	212.1	4.87
7500	$2.04 \times 10^6$	$1.83 \times 10^6$	342.7	380.5	8.92

En la Figuras 5.74, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.29, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.75 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

# Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

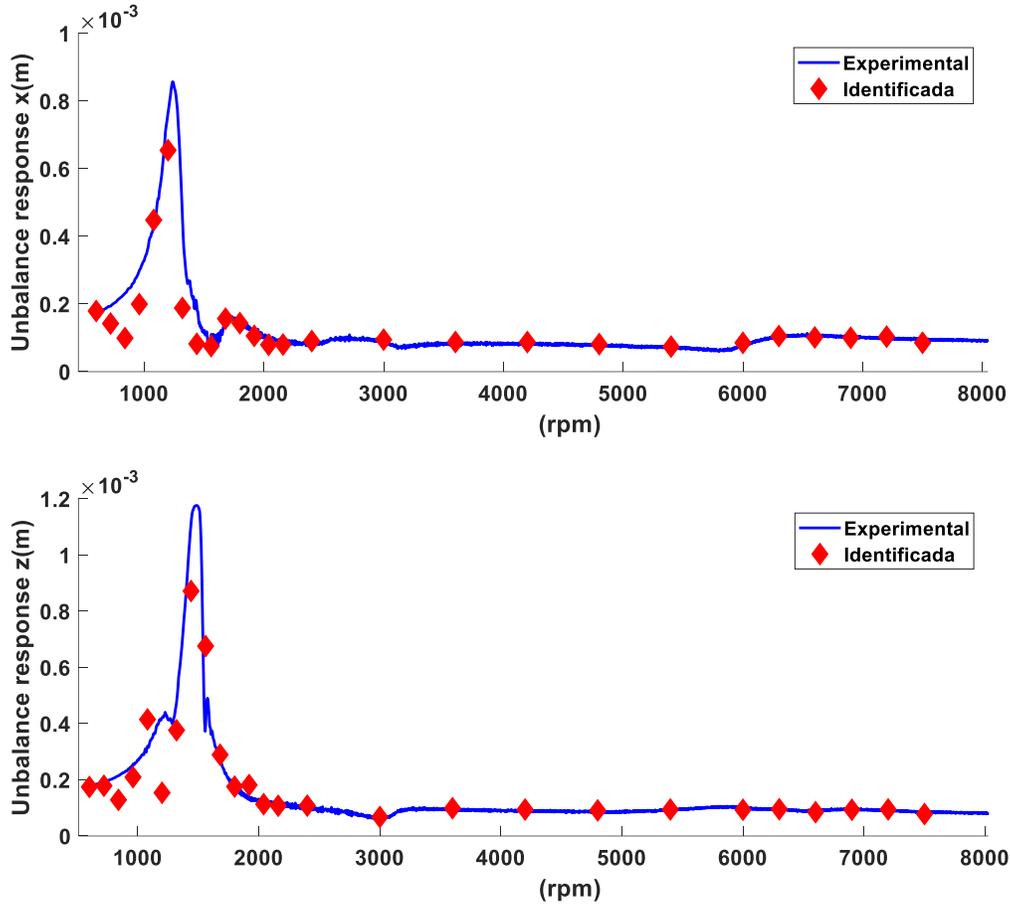


Figura 5.74: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.

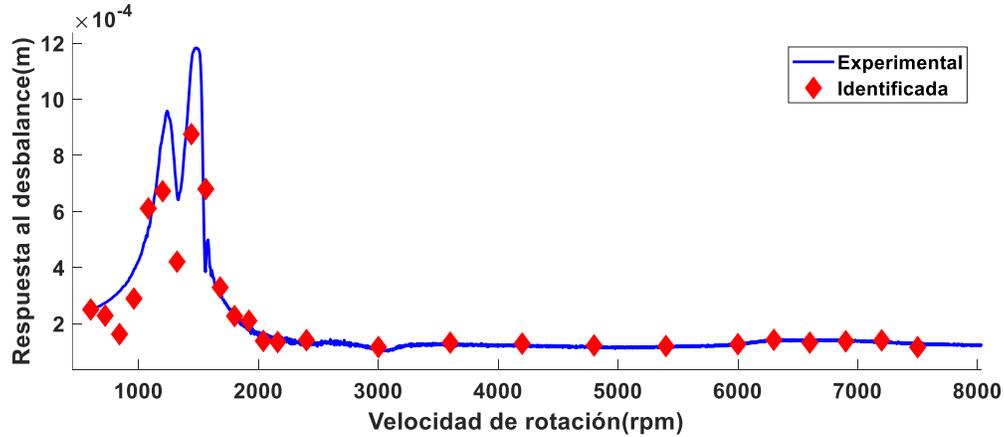


Figura 5.75: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 21 y 10 psi.

Por otra parte, se realizó la identificación de los parámetros modales rotodinámicos, considerando una presión en la chumacera de 10 psi, con la nueva configuración del rotor (cinco discos inerciales y dos chumaceras presurizadas) y utilizando el primer modo de vibración (Figura 5.73) se realizó la identificación, tomando como datos de entrada, la

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

respuesta de vibración obtenida en el nodo 11. Los parámetros modales rotodinámicos identificados y la desviación porcentual entre la respuesta identificada (gráfica en color rojo) y la experimental (gráfica en color azul) de la Figura 5.77 se presentan en la Tabla 5.31.

Tabla 5.31: Coeficientes rotodinámicos directos identificados con el identificador modal, utilizando la respuesta del nodo 11, soporte presurizado, modo 1, 10psi.

rpm	Rigidez (N/m) – Amortiguamiento (Ns/m)				Desviación porcentual (%)
	$k_{xx}$	$k_{zz}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	
600	$-2.79 \times 10^5$	$-3.91 \times 10^5$	51.1	82.1	17.51
720	$-2.64 \times 10^5$	$-3.70 \times 10^5$	61.3	62.6	11.17
840	$-2.47 \times 10^5$	$-3.49 \times 10^5$	49.0	100.5	32.49
960	$-2.39 \times 10^5$	$-3.38 \times 10^5$	34.8	86.2	0.95
1080	$-2.18 \times 10^5$	$-3.08 \times 10^5$	15.7	62.5	12.13
1200	$-1.95 \times 10^5$	$-2.76 \times 10^5$	1.1	20.1	2.88
1320	$-1.70 \times 10^5$	$-2.41 \times 10^5$	37.2	26.8	53.04
1440	$-1.34 \times 10^5$	$-2.06 \times 10^5$	183.5	19.1	74.19
1560	$-1.25 \times 10^5$	$-1.89 \times 10^5$	82.6	46.3	25.94
1680	$-9.55 \times 10^4$	$-1.51 \times 10^5$	57.3	78.2	6.63
1800	$-6.25 \times 10^4$	$-1.23 \times 10^5$	73.0	19.7	0.35
1920	$-2.69 \times 10^4$	$-8.12 \times 10^4$	98.8	116.8	3.81
2040	$1.18 \times 10^4$	$-2.76 \times 10^4$	139.7	292.4	14.51
2160	$3.49 \times 10^4$	$1.91 \times 10^3$	178.1	286.3	24.55
2400	$1.17 \times 10^5$	$8.56 \times 10^4$	139.9	117.9	5.07
3000	$3.27 \times 10^5$	$3.30 \times 10^5$	179.7	414.8	11.75
3600	$6.19 \times 10^5$	$7.09 \times 10^5$	205.0	301.0	4.84
4200	$9.49 \times 10^5$	$1.16 \times 10^6$	195.8	409.5	4.65
4800	$1.32 \times 10^6$	$1.70 \times 10^6$	156.8	515.5	9.68
5400	$1.74 \times 10^6$	$2.23 \times 10^6$	57.7	268.9	1.10
6000	$2.34 \times 10^6$	$3.23 \times 10^6$	84.3	162.1	24.40
6300	$2.70 \times 10^6$	$3.73 \times 10^6$	221.1	276.5	4.18
6600	$2.89 \times 10^6$	$4.19 \times 10^6$	328.3	523.0	12.38
6900	$3.23 \times 10^6$	$4.68 \times 10^6$	522.3	537.8	0.35
7200	$3.34 \times 10^6$	$5.39 \times 10^6$	495.8	752.1	7.02
7500	$3.79 \times 10^6$	$5.72 \times 10^6$	1047.0	939.5	4.69

En la Figuras 5.76, se presenta la comparación de la respuesta de vibración identificada obtenida usando los parámetros modales rotodinámicos reportados en la Tabla 5.31, con la respuesta de vibración obtenida de forma experimental del rotor. Se muestra la respuesta de vibración en la dirección horizontal (eje  $x$ ) y en la dirección vertical (eje  $z$ ). Por otra parte, en la Figura 5.77 se comparan los diagramas de bodes resultante de ambas respuestas de vibración, se puede observar, que el comportamiento del diagrama de bode de la respuesta resultante identificada presenta la misma tendencia en las amplitudes de vibración que el diagrama de bode resultante de la respuesta de vibración experimental, esto sucede para las diferentes velocidades del rotor.

Es importante hacer notar, que, con los parámetros modales rotodinámicos identificados, se logra reproducir el comportamiento dinámico del sistema rotor-cojinetes experimental.

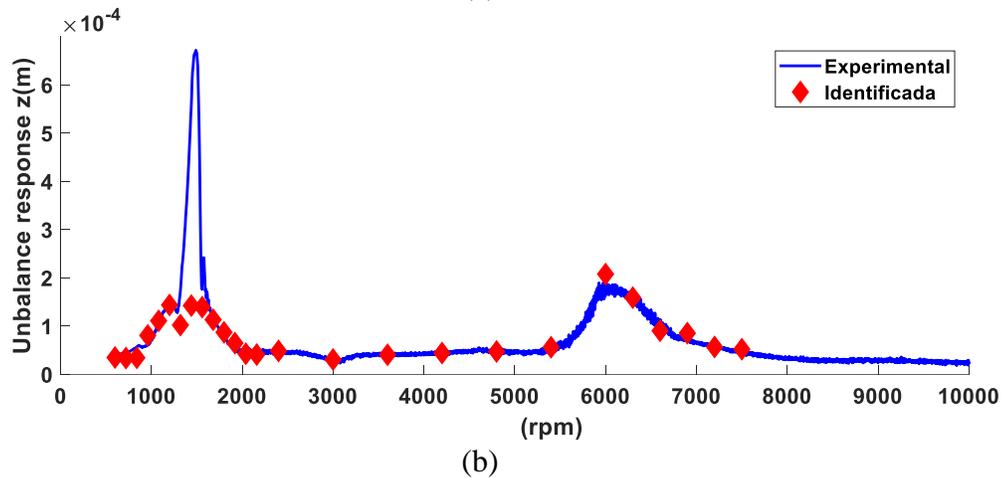
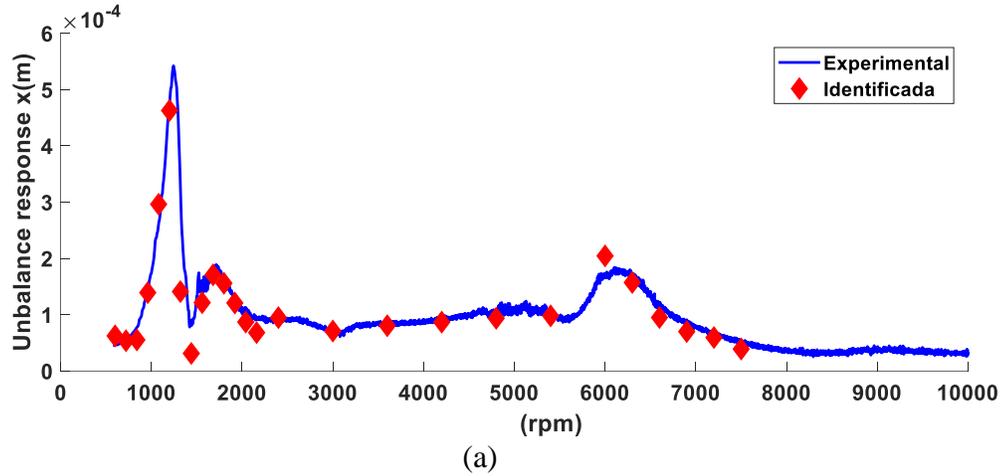


Figura 5.76: Diagrama de bode en ambas direcciones: (a) horizontal y (b) vertical identificado con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi.

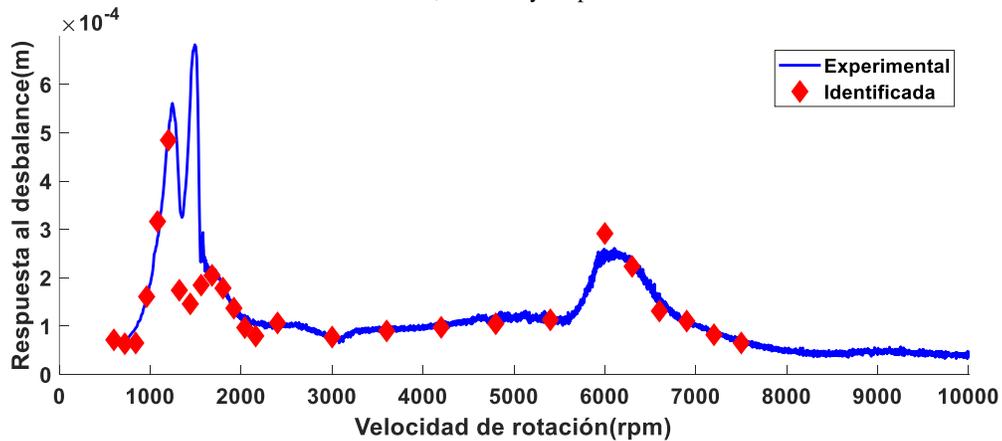


Figura 5.77: Diagrama de bode resultante identificado con la primera forma modal, nodo 11 y 10 psi.

### 5.3.4 Conclusión de la sección

En esta sección se verificó el comportamiento del identificador algebraico modal de forma experimental, para diferentes configuraciones, números de discos, velocidades y presiones.

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

En cada una de estas simulaciones experimentales, el identificador modal propuesto mostró buenos resultados, se logró una identificación estable, se pudo reproducir la respuesta de vibración del sistema rotodinámico para cada velocidad del rotor. Posteriormente, con los parámetros identificados de manera discreta se realizó una comparación entre los diagramas de bode experimentales y los identificados mostrando siempre una similitud entre ambas respuestas. Con esto se corrobora el correcto funcionamiento del identificador algebraico modal propuesto y queda como una excelente opción en la identificación de los parámetros de rigidez y amortiguamiento modales atribuibles a los soportes del sistema.

## CONCLUSIONES GENERALES

En este trabajo se presentó el desarrollo de una metodología para estimar los coeficientes rotodinámicos de un cojinete presurizado. Se utilizó el método de identificación algebraica para el desarrollo del identificador de los coeficientes rotodinámicos. Esta metodología necesita un modelo matemático como base, se eligió el modelo de un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad a velocidad angular constante. La metodología propuesta se validó de forma numérica y experimental.

En las simulaciones numéricas se analizó el comportamiento en función del tiempo del identificador desarrollado a velocidad constante, variando el tiempo de muestreo, utilizando diferentes configuraciones del rotor, diferentes parámetros de los soportes, variando los grados de libertad y eliminando la fuerza de excitación debida al desbalance.

Los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas realizadas demuestran que es factible la implementación del identificador algebraico de los coeficientes rotodinámicos y se destacan las siguientes conclusiones:

- El número de muestras por segundo que se elija es un parámetro muy importante en la identificación algebraica, se recomienda utilizar entre 10,000 – 100,000 muestras/s
- Para identificar los coeficientes de un soporte se necesita únicamente la información de dos nodos, el nodo del soporte y un nodo adyacente
- No se necesita tener conocimiento del desbalance del sistema, esta es una gran ventaja ya que obtener el desbalance del sistema rotodinámico es una tarea compleja

Se realizaron simulaciones numéricas para la identificación de los parámetros rotodinámicos utilizando las pendientes nodales aproximadas, es claro que en la parte experimental no es posible conocer las pendientes nodales, sin embargo, se pueden aproximar utilizando la respuesta de vibración obtenida en los nodos laterales.

Los resultados obtenidos de estas simulaciones numéricas arrojan conclusiones muy importantes entre las cuales destacan las siguientes:

- Un pequeño cambio en las pendientes nodales produce grandes cambios en los parámetros identificados, esto es debido al mal acondicionamiento del sistema de ecuaciones del identificador algebraico.
- Es posible la identificación de los coeficientes rotodinámicos directos con desviaciones porcentuales aceptables utilizando las pendientes nodales aproximadas. Por otra parte, la identificación de los ocho coeficientes rotodinámicos utilizando las pendientes nodales aproximadas es más complejo, ya que las desviaciones

## Identificación Algebraica de Coeficientes Rotodinámicos de un Sistema Rotatorio Soportado en Chumaceras Presurizadas

---

porcentuales se incrementan de manera considerable, afectando en mayor medida a los parámetros de amortiguamiento y a los coeficientes cruzados.

Para solventar estos problemas se exploraron diferentes alternativas, las cuales se presentan a continuación:

- El desarrollo de un identificador simplificado utilizando como base un modelo de dos grados de libertad.
- Combinar la técnica de identificación algebraica con algoritmos genéticos.
- Identificar en función del número de condición, es decir identificar a velocidades en donde el número de condición bajo.
- Por último, se propuso el desarrollo de un identificador algebraico modal para estimar los parámetros de rigidez y amortiguamiento modales atribuibles a los soportes.

Esta última alternativa fue la que obtuvo los mejores resultados. El desarrollo del identificador modal consistió en el desacoplamiento modal de las ecuaciones de movimiento del modelo de un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad (dando como resultado un modelo pseudo-modal), donde el modelo de múltiples grados de libertad prácticamente queda transformado en un sistema de  $2 \times 2$ , el cual incluye todas las dinámicas del sistema original. Cabe resaltar que el número de condición se reduce significativamente.

En la parte experimental se realizaron diferentes pruebas, en las cuales se utilizaron los diferentes identificadores propuestos, así como diferentes configuraciones del sistema rotor-cojinetes. Se utilizaron cojinetes convencionales y presurizados, diferentes números de discos inerciales y se cambiaron las presiones de trabajo del fluido lubricante correspondiente a las chumaceras presurizadas. Los mejores resultados se obtuvieron con el identificador algebraico modal.

El identificador algebraico modal únicamente requiere la información de un solo nodo y la forma modal del sistema rotodinámico para estimar los parámetros de rigidez y amortiguamiento modales atribuibles a los soportes. Esto es una gran ventaja ya que se requieren únicamente los desplazamientos laterales para realizar la identificación. Es suficiente contar con dos sensores para poder obtener estos desplazamientos.

Las pruebas experimentales que se realizaron con el identificador modal se muestran en la siguiente tabla:

Configuración de los soportes	Número de discos	Presión de trabajo (psi)	Modo de vibración
Dos cojinetes convencionales	Un disco en el centro	-	1
Cojinete convencional y presurizado	Un disco en el centro	10,15,20	1
	Tres discos uniformemente distribuidos	7,10	1,2
	Cinco discos uniformemente distribuidos	7,10,12,15	1,2
Dos cojinetes idénticos presurizados	Tres discos uniformemente distribuidos	10,15	1
	Cinco discos uniformemente distribuidos	10	1

Los resultados obtenidos de la parte experimental se validaron con un modelo numérico, se muestra una comparación entre la respuesta experimental y la estimada a una misma velocidad en el Capítulo 5. Se puede notar que hay diferencias, pero aun así las respuestas muestran parecido entre sí. También se realizó una comparación entre los diagramas de Bode experimental y el que se obtiene a partir de los parámetros identificados de forma discreta, de esta comparación se observa que ambos comportamientos son similares.

Con resultados obtenidos en ambas simulaciones numérica y experimental se llega a las conclusiones finales de este trabajo de investigación:

- Es posible identificar los parámetros de rigidez y amortiguamientos modales atribuibles a los soportes sin importar el tipo, convencionales o presurizados, utilizando el identificador algebraico modal desarrollado en este trabajo de investigación.
- Con los parámetros identificados a diferentes velocidades se puede reproducir el comportamiento del sistema. Sin duda alguna esta es una gran ventaja para poder aplicar estrategias de control.
- Se identificó a velocidades correspondientes al segundo modo de vibración utilizando únicamente la primera forma modal. Este comportamiento se mostró en la parte numérica y experimental para las diferentes configuraciones realizadas. Por otra parte, identificar utilizando el segundo modo de vibración no fue posible como quedó demostrado en el Capítulo 5, esto se atribuye a los errores de medición que se presentan al obtener los modos de vibración del sistema rotodinámico, específicamente el segundo modo. También vale la pena mencionar que cuando la respuesta vibratoria presenta inestabilidad dificulta la identificación algebraica.

## Trabajos futuros

- Aplicar la técnica de identificación algebraica modal desarrollada en esta investigación a otros tipos de cojinetes. Con los resultados obtenidos en esta investigación se concluye que el identificador desarrollado estima los parámetros de rigidez y amortiguamiento modales sin importar la naturaleza del cojinete.
- Comparar los parámetros identificados con algún modelo fluidodinámico realizado con CFD utilizando alguna herramienta de diseño asistido por computadora.
- Desarrollar estrategias de control para atenuar las vibraciones mecánicas en sistemas rotodinámicos utilizando los parámetros identificados.
- Implementar de manera experimental la identificación algebraica para los coeficientes rotodinámicos bajo un esquema de velocidad variable.
- Resolver el problema de los errores en la medición de la respuesta, formas modales y aproximación de las pendientes nodales. Esto sin duda mejoraría los parámetros identificados y ayudaría significativamente a las estrategias de control.
- Explorar las alternativas que existen en la literatura para la reducción del número de condición en los problemas inversos, así poder proponer alguna metodología que reduzca el mal acondicionamiento del identificador algebraico.

## REFERENCIAS

- [1] R. G. Budynas and J. K. Nisbett, *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*, 9th ed. México, 2012.
- [2] A. Blanco-Ortega, “Control del desbalance en sistemas rotor-chumaceras utilizando chumacera móvil y presurizada,” Tesis, Instituto Politécnico Nacional, 2004.
- [3] B. Tower, “First report on friction experiments,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, pp. 29–35, 1884, doi: 10.1243/PIME\_PROC\_1883\_034\_028\_02.
- [4] MR. B. TOWER, “Second Report on Friction Experiments,” 1885, doi: 10.1111/ggi.12579.
- [5] B. Tower, “Third report of the research committee on friction. experiments on the friction of a collar bearing,” no. May, 1888.
- [6] B. Tower, “Fourth report of the research committee on friction. experiments on the friction of a pivot bearing,” no. March, p. 12225413, 1891, doi: 10.1246/bcsj.48.1549.
- [7] O. Reynolds, “On the theory of lubrication and its application to mr. beauchamp tower’s experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil,” *Philos Trans. R. Soc Lond*, vol. 177, no. 0, pp. 157–234, 1886, doi: 10.1098/rstl.1886.0005.
- [8] A. Dorinson and K. C. Ludema, “Simple hydrodynamic theory: the reynolds equation in two dimensions,” 1985, pp. 8–26.
- [9] J. A. Gauna, “Análisis y validación por volumen finito de los coeficientes rotodinámicos de rigidez de una chumacera corta con y sin presurización,” Instituto Politecnico Nacional, 2011.
- [10] A. Sommerfeld, “Zur hydrodynamischen theorie der schmiermittelreibung. in: zeitschrift für mathematik und physik,” pp. 97–155, 1904.
- [11] G. B. Dubois and F. W. Ocvirk, “Analytical derivation and experimental evaluation of short-bearing approximation for full journal bearings,” *National advisory committee for aeronautics*, vol. Reporte 11, 1955.
- [12] J. G. Mendoza-Larios, “Identificador algebraico en línea del desbalance para un sistema rotodinámico,” *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, México.*, 2016.

- [13] E. T. Cano, “Estudio numérico de la respuesta vibratoria de ejes fisurados en chumaceras presurizadas,” Instituto Politécnico Nacional, 2006.
- [14] E. E. Cruz, “Diseño y construcción de una chumacera semi-activa con fluidos reológicos,” Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico., 2015.
- [15] J. W. Lund, “Self-Excited, stationary whirl orbits of a journal in a sleeve bearing,” Rensselaer Polytechnic Institute, 1966.
- [16] A. Stodola, “Kritische wellenstorung infolge der nachgiebigkeit de oelpolsters in lager.” pp. 265–266, 1925.
- [17] J. M. Vance, *Rotordynamics of turbomachinery*. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- [18] A. Dimarogonas, *Vibration for Engineers*, Second Edi. 1996.
- [19] R. A. López, “Experimentación y análisis de estabilidad dinámica en sistemas rotor-chumacera con y sin desalineamiento,” Instituto Politécnico Nacional, 2006.
- [20] A. Z. Szeri, *Fluid film lubrication: theory and design*. 1988.
- [21] J. G.-M. Nosov V., I. Ramírez, “Campos de presión de lubricante en chumacera híbrida presurizada con anillo y/o linea unidimensional de presurización,” 2004.
- [22] A. A. García, V. R. Nossov, J. C. Gómez-Mancilla, “El Cálculo de los coeficientes rotodinámicos de chumaceras hidrodinámicas por medio de los gradientes del campo de presión,” no. January, 2005.
- [23] I. R. Vargas, “Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: caso de la chumacera corta,” Instituto Politecnico Nacional, 2007.
- [24] R. Tiwari and V. Chakravarthy, “Simultaneous estimation of the residual unbalance and bearing dynamic parameters from the experimental data in a rotor-bearing system,” *Mech Mach Theory*, vol. 44, no. 4, pp. 792–812, Apr. 2009, doi: 10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2008.04.008.
- [25] R. S. S. Arias and V. I. M. Naranjo, “Determinación de coeficientes de amortiguación y rigidez de un descanso hidrodinámico,” Universidad de Chile, 2013.
- [26] M. Lalanne and G. Ferraris, *Rotordynamics prediction in engineering*, 2nd, ilustrada ed. 1998.
- [27] F. Han, X. Guo, and H. Gao, “Bearing parameter identification of rotor-bearing system based on Kriging surrogate model and evlutionary algorithm,” *J Sound Vib*, vol. 332, no. 11, pp. 2659–2671, 2013, doi: 10.1016/j.jsv.2012.12.025.
- [28] W. Mao, J. Li, Z. Huang, and J. Liu, “Bearing dynamic parameters identification for a sliding bearing-rotor system with uncertainty,” *Inverse Probl Sci Eng*, vol. 26, no. 8, pp. 1094–1108, Aug. 2018, doi: 10.1080/17415977.2017.1377708.

- [29] R. Tiwari and A. Chougale, “Identification of bearing dynamic parameters and unbalance states in a flexible rotor system fully levitated on active magnetic bearings,” *Mechatronics*, vol. 24, no. 3, pp. 274–286, Apr. 2014, doi: 10.1016/J.MECHATRONICS.2014.02.010.
- [30] Y. Xu, J. Zhou, Z. Lin, and C. Jin, “Identification of dynamic parameters of active magnetic bearings in a flexible rotor system considering residual unbalances,” *Mechatronics*, vol. 49, pp. 46–55, Feb. 2018, doi: 10.1016/J.MECHATRONICS.2017.11.004.
- [31] M. Asadi Varnusfaderani, M. Irannejad Parizi, M. Hemmatian, and A. Ohadi, “Experimental parameters identification of a flexible rotor system equipped with smart magneto-rheological bearing,” *Mechatronics*, vol. 87, Nov. 2022, doi: 10.1016/j.mechatronics.2022.102880.
- [32] E. Guenat and J. Schiffmann, “Dynamic force coefficients identification on air-lubricated herringbone grooved journal bearing,” *Mech Syst Signal Process*, vol. 136, p. 106498, Feb. 2020, doi: 10.1016/J.YMSSP.2019.106498.
- [33] C. Chen, J. Jing, J. Cong, and Z. Dai, “Identification of dynamic coefficients in circular journal bearings from unbalance response and complementary equations,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, vol. 233, no. 7, pp. 1016–1028, 2019, doi: 10.1177/1350650118818345.
- [34] A. Wang, W. Yao, K. He, G. Meng, X. Cheng, and J. Yang, “Analytical modelling and numerical experiment for simultaneous identification of unbalance and rolling-bearing coefficients of the continuous single-disc and single-span rotor-bearing system with Rayleigh beam model,” *Mech Syst Signal Process*, vol. 116, pp. 322–346, Feb. 2019, doi: 10.1016/j.ymssp.2018.06.039.
- [35] K. Zhao, J. Hu, H. Shao, and J. Hu, “Federated multi-source domain adversarial adaptation framework for machinery fault diagnosis with data privacy,” *Reliab Eng Syst Saf*, vol. 236, p. 109246, Aug. 2023, doi: 10.1016/J.RESS.2023.109246.
- [36] C. Puerto-Santana, C. Ocampo-Martinez, and J. Diaz-Rozo, “Mechanical rotor unbalance monitoring based on system identification and signal processing approaches,” *J Sound Vib*, vol. 541, p. 117313, Dec. 2022, doi: 10.1016/J.JSV.2022.117313.
- [37] K. Zhao, F. Jia, and H. Shao, “A novel conditional weighting transfer Wasserstein auto-encoder for rolling bearing fault diagnosis with multi-source domains,” *Knowl Based Syst*, vol. 262, p. 110203, Feb. 2023, doi: 10.1016/J.KNOSYS.2022.110203.
- [38] A. Shrivastava and A. R. Mohanty, “Identification of unbalance in a rotor system using a joint input-state estimation technique,” *J Sound Vib*, vol. 442, pp. 414–427, Mar. 2019, doi: 10.1016/J.JSV.2018.11.019.

- [39] Y. Chen, R. Yang, N. Sugita, J. Mao, and T. Shinshi, "Identification of bearing dynamic parameters and unbalanced forces in a flexible rotor system supported by oil-film bearings and active magnetic devices," *Actuators*, vol. 10, no. 9, 2021, doi: 10.3390/act10090216.
- [40] J. Colín Ocampo, E. S. Gutiérrez Wing, F. J. Ramírez Moroyoqui, A. Abúndez Pliego, A. Blanco Ortega, and J. Mayén, "A novel methodology for the angular position identification of the unbalance force on asymmetric rotors by response polar plot analysis," *Mech Syst Signal Process*, vol. 95, pp. 172–186, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.ymssp.2017.03.028.
- [41] J. Yao, L. Liu, F. Yang, F. Scarpa, and J. Gao, "Identification and optimization of unbalance parameters in rotor-bearing systems," *J Sound Vib*, vol. 431, pp. 54–69, Sep. 2018, doi: 10.1016/j.jsv.2018.05.050.
- [42] L. Li, Z. Luo, F. He, K. Sun, and X. Yan, "Experimental and numerical investigations on an unbalance identification method for full-size rotor system based on scaled model," *J Sound Vib*, vol. 527, p. 116868, Jun. 2022, doi: 10.1016/J.JSV.2022.116868.
- [43] S. Y. On, Y. S. Kim, J. Il You, J. W. Lim, and S. S. Kim, "Dynamic characteristics of composite tilting pad journal bearing for turbine/generator applications," *Compos Struct*, vol. 201, pp. 747–759, Oct. 2018, doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2018.06.095.
- [44] M. I. Sadiq, W. A. W. Ghopa, M. Z. Nuawi, M. R. M. Rasani, N. K. Khamis, and M. R. A. Mansor, "Investigation of stiffness and damping coefficients in fluid film bearing with bio-oils and mineral-based oil," *Energy Reports*, 2022.
- [45] H. Sayed and T. A. El-Sayed, "Nonlinear dynamics and bifurcation analysis of journal bearings based on second order stiffness and damping coefficients," *Int J Non Linear Mech*, vol. 142, Jun. 2022, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103972.
- [46] M. Fliess and H. Sira-Ramírez, "An algebraic framework for linear identification," *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 9, no. January, pp. 151–168, Jan. 2003, doi: 10.1051/cocv:2003008.
- [47] H. Sira-Ramírez, C. García-Rodríguez, J. Cortés-Romero, and A. Luviano-Juárez, *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*. 2014. doi: 10.1002/9781118730591.
- [48] J. R. Trapero-Arenas, *Técnicas de identificación algebraicas y espectrales de señales armónicas. Aplicaciones en mecatrónica y economía*. 2008.

- [49] F. Beltran-Carbajal, G. Silva-Navarro, and M. Arias-Montiel, “Active unbalance control of rotor systems using on-line algebraic identification methods,” *Asian J Control*, vol. 15, no. 6, pp. 1627–1637, 2013, doi: 10.1002/asjc.744.
- [50] A. Blanco-Ortega, F. Beltrán-Carbajal, A. Favela-Contreras, and G. Silva-Navarro, “Active disk for automatic balancing of rotor-bearing systems,” *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3023–3028, 2008, doi: 10.1109/ACC.2008.4586956.
- [51] A. Blanco-Ortega, F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, and H. Méndez-Azúa, “Control de vibraciones en maquinaria rotatoria,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 7, no. 4, pp. 36–43, 2010, doi: 10.1016/S1697-7912(10)70058-3.
- [52] F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, H. Sira-Ramierz, and A. Blanco-Ortega, “Active vibration control using on-line algebraic identification and sliding modes,” *Computación y Sistemas*, vol. 13, no. 3, pp. 313–330, 2008.
- [53] F. Beltran-Carbajal, G. Silva-Navarro, H. Sira-Ramierz, and J. Quezada-Andrade, “Active vibration control using on-line algebraic identification of harmonic vibrations,” *American Control Conference*, pp. 4820–4825, 2005.
- [54] M. Arias-Montiel, F. Beltrán-Carbajal, and G. Silva-Navarro, “On-line algebraic identification of eccentricity parameters in active rotor-bearing systems,” *Int J Mech Sci*, vol. 85, pp. 152–159, 2014, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.05.027.
- [55] O. Hernández-Mendoza, “Detección de fracturas en línea de sistemas rotodinámicos,” *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET*, 2017.
- [56] J. G. Mendoza Larios, J. Colín Ocampo, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego, and E. S. Gutiérrez Wing, “Balanceo automático de un sistema rotor-cojinete: identificador algebraico en línea del desbalance para un sistema rotodinámico,” *RIAI - Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 13, no. 3, pp. 281–292, 2016, doi: 10.1016/j.riai.2016.03.004.
- [57] S. Landa, “Identificación Algebraica de coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada,” *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET*, 2017.
- [58] J. G. Mendoza-Larios et al., “An algebraic approach for identification of rotordynamic parameters in bearings with linearized force coefficients,” *Mathematics*, vol. 9, no. 21, p. 2747, Oct. 2021, doi: 10.3390/math9212747.
- [59] L. A. Baltazar-Tadeo et al., “An integrated balancing method for asymmetric rotor-bearing systems: algebraic identification, modal balancing, and active balancing

- disks,” *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, Jul. 2022, doi: 10.1007/s42417-022-00598-6.
- [60] S. J. Landa-Damas et al., “A simplified model for the on-line identification of bearing direct-dynamic parameters based on algebraic identification (AI),” *mathematics*, vol. 11, no. 14, 2023, doi: 10.3390/math11143131.
- [61] R. V. Dukkipati, *Matlab, An introduction with applications*. 2010.
- [62] N. M. Newmark, “A method of computation for structural dynamics,” *Journal of the Engineering Mechanics*, vol. 85, no. 7, pp. 67–94, 1959, doi: 0.1016/j.compgeo.2015.08.008.
- [63] A. Nieves and F. C. Domínguez, *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, Segunda ed. México, 2006.
- [64] H. Sira-Ramirez, *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*. 2014.
- [65] J. R. Trapero-Arenas, M. Mboup, E. Pereira-Gonzalez, and V. Feliu, “On-line frequency and damping estimation in a single-link flexible manipulator based on algebraic identification,” in *2008 Mediterranean Conference on Control and Automation - Conference Proceedings, MED’08*, 2008, pp. 338–343. doi: 10.1109/MED.2008.4602100.
- [66] H. Corro-Hernández, “Respuesta vibratoria de un rotor desbalanceado con eje flexible soportado por chumaceras cortas hidrodinámicas con excitación respuesta vibratoria de un rotor apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas,” pp. 1085–1094, 2013.
- [67] Y. H. Kim, B. S. Yang, and A. C. C. Tan, “Bearing parameter identification of rotor-bearing system using clustering-based hybrid evolutionary algorithm,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, doi: 10.1007/s00158-006-0055-5.



**TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO**

---

***cenidet***<sup>®</sup>  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico