

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“Análisis Electromagnético de un Generador Síncrono
de Imanes Permanentes Conectado a una Carga
Trifásica Aislada Usando Elementos Finitos en 2D”**

POR

Ing. Jesús González Domínguez

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTORA DE TESIS

Dra. Concepción Hernández Flores

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Marco Antonio Arjona López

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (12)-TMCIE-2015

Torreón, Coahuila, México
Diciembre 2015

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Instituto Tecnológico de La Laguna

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Torreón, Coah., **02/Diciembre/2015**
Dependencia: DEPI/CPCIE
Oficio: DEPI/CPCIE/223/2015
Asunto: Autorización de impresión
de tesis.

C. Jesús González Domínguez
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Análisis electromagnético de un generador síncrono de imanes permanentes conectado a una carga trifásica aislada usando elementos finitos en 2D"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (12)-TMCIE-2015**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

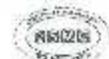
DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
de la Laguna
División de Estudios de Posgrado
e Investigación

ILMM/R/ESR



Bvd. Revolución y Cza. Cuauhtémoc s/n Col. Centro C.P. 27000
Torreón, Coah. Tel. 7051313. e-mail: wmaster@italaguna.edu.mx
www.italaguna.edu.mx



PROCESO
FACILITADO POR EL
ESTADO

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Instituto Tecnológico de La Laguna

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Torreón, Coah., 30/Noviembre/2015

DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Análisis electromagnético de un generador síncrono de imanes permanentes conectado a una carga trifásica aislada usando elementos finitos en 2D"

Desarrollado por el **C. Jesús González Domínguez**, con número de control **M1313064** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN


Dra. Concepción Hernández Flores
Asesor/Director de Tesis


Dr. Marco A. Arjona López
Coasesor de Tesis


M.C. Carlos A. Morales Bazán
Comité Tutorial


M.C. Ricardo Vargas Salas
Comité Tutorial



"Pienso que ningún revuelo, que pueda hacer temblar el corazón humano, pueda parecerse al que siente el inventor al ver que algo concebido por él mismo en su mente se está transformando en un éxito... Sentimientos así hacen que el hombre se olvide de comer, de dormir, de sus amigos, de sus amores, de todo." Nikola Tesla.

Agradecimientos

A Dios por brindarme salud y permitirme alcanzar ésta meta en mi vida.

A mis padres por haber inculcado en mí un espíritu de superación y responsabilidad, en especial a mi madre Sara Elia por su gran apoyo y amor incondicional.

A mis hermanos Emilio y Ángel por su gran apoyo y ejemplo de humildad y fortaleza.

A mis asesores el Dr. Arjona y la Dra. Concepción, por su valiosísima ayuda y confianza brindada durante estos años, sin lo cual este trabajo no hubiera sido posible, muchas gracias.

Al comité tutorial M.C. Carlos Alberto Morales Bazán y M.C. Ricardo Vargas Salas, por sus aportaciones y comentarios realizados durante la revisión de este trabajo,

A mis compañeros del posgrado, Juan Manolo, Cristian, Edgar, Manuel, Carlos, Luis Antonio, Daniel, Gerardo, Morones, Luis, De Santiago, José Jasso, David, Lamia, Yusef y demás compañeros así como al personal del área de posgrado del tecnológico.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, al CEMIE-Eólico y al Instituto de Investigaciones Eléctricas por el apoyo económico otorgado durante la realización de mis estudios de maestría, así como al Tecnológico Nacional de México y al Instituto Tecnológico de la Laguna por el apoyo que siempre me proporcionaron durante este tiempo.

Índice general

Resumen.....	ix
Abstract.....	x
Capítulo 1.....	1
Introducción.....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Objetivo.....	3
1.3 Justificación.....	3
Capítulo 2.....	5
Sistemas eólicos de generación.....	5
2.1 Introducción.....	5
2.2 Componentes de una turbina eólica.....	6
2.2.1 Álabes de una turbina eólica.....	7
2.2.2 Tren de engranes.....	8
2.2.3 Generador eléctrico.....	8
2.2.4 Torre.....	10
2.3 Configuración de los sistemas eólicos de velocidad variable.....	10
2.3.1 Sistemas eólicos de velocidad variable con generadores de inducción tipo jaula de ardilla (SCIG).....	10
2.3.2 Sistemas eólicos de velocidad variable con generadores de inducción doblemente alimentados (GIDA).....	11
2.3.3 Sistemas eólicos de velocidad variable con generadores síncronos de imanes permanentes.....	12
Capítulo 3.....	14
Convertidores Electrónicos de Potencia.....	14
3.1 Introducción.....	14
3.2 Convertidores Electrónicos de CA – CD (Rectificadores).....	14
3.2.1 Rectificadores PWM monofásicos.....	14
3.2.2 Esquema de control de los rectificadores PWM monofásicos.....	16
3.2 Rectificadores PWM trifásicos.....	16
3.2.1 Principio de operación.....	16
3.3.2 Esquema de control.....	21

3.4	Convertidores Electrónicos de CD – CA (Inversores)	27
3.4.1	Técnica de modulación SPWM	27
3.4.2	Operación de Inversores monofásicos	29
Capítulo 4.....		31
Teoría de Funciones de Conmutación		31
4.1	Introducción.....	31
4.2	Aplicación de las Funciones de Conmutación.....	32
4.3	Propiedades de las funciones de conmutación	34
4.3.1	Funciones de Conmutación Unipolares	34
4.3.2	Funciones de Conmutación Bipolares	36
4.3.3	Aplicación de las funciones de conmutación en convertidores electrónicos de potencia utilizados en energías renovables	40
Capítulo 5.....		55
El Método de los Elementos Finitos.....		55
5.1	Introducción.....	55
5.2	El Método de los Elementos Finitos	57
5.2.1	Discretización del dominio.....	57
5.2.2	Derivación de las ecuaciones que gobiernan el problema.....	58
5.2.3	Ensamblado de los elementos dentro de la región de interés.....	58
5.2.4	Solución del problema.....	59
5.3	Aplicación del método de elemento finito en dos dimensiones	59
5.4	Método de los Elementos Finitos en Electromagnetismo.....	59
5.4.1	Ecuaciones de campos electromagnéticos	60
5.4.2	Potenciales y sus formulaciones	62
5.4.3	Simple descripción de los campos electromagnéticos.....	64
5.4.4	Procedimiento de análisis usando el método de elemento finito	73
5.4.5	Condiciones frontera.....	74
5.4.6	Acoplamiento de modelos de elementos finitos en 2D con ecuaciones de circuitos ..	76
Capítulo 6.....		84
Modelo en elementos finitos del generador síncrono de imanes permanentes		84
6.1	Introducción.....	84
6.2	Software de elementos finitos Flux 2D	85
6.2.1	Descripción del funcionamiento del software de elementos finitos Flux 2D	87

6.2.2	Modelo en elementos finitos del GSIP en 2D	88
6.3.2	Caso de prueba con conexión a un circuito elevador de voltaje de CD.....	105
Capítulo 7	112
Conclusiones	112
Trabajo Futuro	113

Índice de Figuras

2.1. Principales componentes de una turbina de viento.	6
2.2. Turbina de eje horizontal	7
2.3. Turbina de eje vertical	7
2.4. Tren de engranes de una turbina eólica de alta potencia.	8
2.5. Generador Síncrono de Imanes Permanentes	9
2.6. Generador de Inducción Doblemente Alimentado	9
2.7. Generador de Inducción tipo Jaula de Ardilla	10
2.8. Sistema de Generación Eólico con SCIG.	11
2.9. Sistema de Generación Eólico con DFIG.	12
2.10. Sistema de Generación Eólico con PMSG.	13
3.1. Rectificador PWM monofásico con conexión tipo puente	15
3.2. Esquema de control para el rectificador PWM.	16
3.3. Principio de operación del VSR.	17
3.4. Voltajes de fase PWM.	18
3.5. Los cuatro modos de operación del VSR.	20
3.6. Formas de onda de corriente, a través de los interruptores y el enlace de cd.	21
3.7. Rectificador PWM controlado por corriente.	23
3.8. Diagrama de una fase del VSR.	23
3.9. Implementación del rectificador controlado por voltaje con operación de factor de potencia unitario.	25
3.10. Circuito equivalente	26
3.11. Esquema de control de espacio vectorial	26
3.12. Generación del SPWM.	28
3.13. Técnica de modulación SPWM trifásica.	28
3.14. Inversor de voltaje monofásico.	29
3.15. Operación unipolar del inversor monofásico	29
3.16. Control del inversor trifásico mediante SPWM.	30
4.1. Circuito con conmutador pasivo.	34

4.2. Pulsos que representan los estados del conmutador pasivo.	34
4.3. Diagrama del circuito tipo puente.	36
4.4. Funciones de conmutación del circuito tipo puente.	36
4.5. Configuración del circuito tipo puente	37
4.6. Voltajes de entrada y salida representados después de la multiplicación con las funciones de conmutación.	39
4.7. Espectro de armónicos de la señal de salida.	40
4.8. Circuito rectificador trifásico controlado con carga RL conectada.	41
4.9. Circuito rectificador de onda completa y sus estados de operación	42
4.10. Diagrama de bloques del modelo matemático del rectificador trifásico controlado utilizando funciones de conmutación.	45
4.11. Funciones de conmutación aplicadas a la señal de entrada del circuito rectificador.	45
4.12. Voltajes y corrientes de salida del inversor trifásico.	46
4.13. Circuito elevador de voltaje	47
4.14. Modos de operación del circuito elevador de voltaje y sus respectivas funciones de conmutación.	47
4.15. Formas de onda de las señales de conmutación del circuito elevador y el voltaje de salida.	51
4.16. Diagrama del circuito inversor de voltaje conectado a una carga RL	51
4.17. Bloque de función de transferencia de las funciones de conmutación.	52
4.19. Estrategia de control del VSI.	53
4.20 Señal del voltaje de línea de la fase a del circuito inversor.	54
4.21. Señales de la corriente trifásica en la carga RL balanceada.	54
5.1. Diagrama de métodos de análisis numérico.	56
5.2. Diferentes tipos de elementos.	57
5.3. Ensamblado y numeración de los elementos finitos.	58
5.4. Elementos en dos dimensiones.	59

5.5. Condición Frontera Dirichlet aplicada al borde de la geometría de un generador.	74
5.6. Distintos tipos de frontera de periodicidad.	75
5.7. Bobinados conectados en estrella en un modelo de elementos finitos en 2D.	78
6.1. Aplicaciones y campos de análisis en FLUX.	86
6.2. Diagrama del sistema eólico de generación a analizar.	88
6.3. Geometría del generador síncrono de imanes permanentes equivalente a la cuarta parte y a un polo de la geometría total.	90
6.4. Configuración de la conexión de la geometría completa del generador síncrono de imanes permanentes.	90
6.5. Discretización de la geometría del generador síncrono en elementos finitos de segundo orden.	91
6.6. Curva B – H del material ferromagnético de las laminaciones.	93
6.7. Propiedades magnéticas de los imanes permanentes.	93
6.8. Diagrama del circuito del generador síncrono de imanes permanentes conectado a una carga trifásica balanceada mediante convertidores electrónicos de potencia.	94
6.9. Bloque en Simulink que permite la co-simulación con Flux 2D.	95
6.10. Configuración de los parámetros de entrada y salida para la generación del bloque .F2MS.	96
6.11. Sección de la barra de herramientas de Flux que permite la generación del bloque de co-simulación .F2MS.	96
6.12. Forma final del bloque con extensión .F2MS, luego de ser definidos los parámetros de entrada y salida (I/O) en Flux	97
6.13. Diagrama de conexiones de las señales conmutación que controlan los disparos del inversor y el circuito elevador de voltaje dentro del modelo de Flux.	97
6.14. Creación de las funciones de conmutación dentro del subsistema de la Figura 6.13, que controlan los estados de los conmutadores dentro del circuito en Flux.	98

6.15. Voltajes en conductores del generador.	99
6.16. Corrientes en los conductores del generador.	99
6.17. Voltaje en el capacitor.	100
6.18. Voltajes en la carga trifásica RL a 10 kHz de operación del inversor.	100
6.19. Corrientes en la carga trifásica RL a 10 kHz de operación del inversor.	100
6.20. Señales de voltajes trifásicos generados mediante el spwm en el subsistema de pulsos en el diagrama de Simulink a 10 kHz de operación.	101
6.21. Par electromagnético.	101
6.22. Distribución de la densidad y flujo magnético en el generador a los 0.1 segundos.	102
6.23. Distribución de la densidad de flujo magnético en el generador a los 0.3 segundos.	103
6.24. Distribución de la densidad de flujo magnético en el generador a los 0.47 segundos.	104
6.25. Diagrama del circuito elevador conectado a la salida del puente rectificador.	105
6.26. Voltajes en terminales del generador después de 0.4 s de simulación.	105
6.27. Corrientes en terminales del generador.	106
6.28. Voltaje en el capacitor de 10,000 micro Faradios conectado a la salida del rectificador de puente completo.	106
6.29. Voltaje en el capacitor de 1000 micro Faradios conectado a la salida del circuito elevador de CD.	106
6.30. Voltajes en la carga trifásica RL a 1 kHz de operación del inversor.	107
6.31. Corrientes en la carga trifásica RL a 1 kHz de operación del inversor.	107
6.32. Señales de voltajes trifásicos generados mediante el spwm en el subsistema de pulsos en el diagrama de Simulink	107
6.33. Par Electromagnético.	108
6.34. Distribución de la densidad de flujo magnético en el generador a 0.1 segundos.	109
6.35. Distribución de la densidad de flujo magnético en el generador a 0.3 segundos.	110
6.36. Distribución de la densidad de flujo magnético en el generador a 0.47 segundos.	111

Índice de Tablas

Tabla I. Estados de operación del circuito elevador de voltaje.	48
Tabla II. Propiedades magnéticas de las laminaciones del generador sincrónico.	92
Tabla III. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.1 s.	102
Tabla IV. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.3 s.	103
Tabla V. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.47 s.	104
Tabla VI. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.1 s.	109
Tabla VII. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.3 s.	110
Tabla VIII. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.47 s.	111

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el análisis electromagnético de un generador síncrono de imanes permanentes utilizando el método de elemento finito en 2D; se muestra el análisis en estado transitorio cuando el generador es conectado a una carga trifásica aislada resistiva inductiva mediante convertidores electrónicos de potencia.

El generador síncrono de imanes permanentes fue modelado en el software de elementos finitos Flux 2D y el control de los elementos pasivos de los convertidores electrónicos en el software de MATLAB/Simulink. Se optó por esta combinación para solucionar el largo tiempo de cálculo que toman las simulaciones al ser acoplado el software de elementos finitos con el software de control de los elementos pasivos de los convertidores electrónicos, que son utilizados para suministrar energía eléctrica a una frecuencia y amplitud deseadas.

De esta manera, para dar el control a los elementos pasivos, como son los interruptores semiconductores, se utilizó la teoría de funciones de conmutación, la cual presenta una gran ventaja al compararla con los modelos preestablecidos de las librerías de Simulink. Los modelos creados en Simulink se presentan en forma de fuentes no lineales, controladas por medio de funciones que contienen términos exponenciales, lo que da como resultado tiempos de ejecución lentos, generación de grandes cantidades de datos y problemas de convergencia. Por su parte, los modelos derivados de las funciones de conmutación contienen simples bloques funcionales que no dependen de funciones exponenciales como los modelos preestablecidos.

Se analizan casos de prueba en donde se considera al generador conectado a un puente rectificador trifásico, que a su vez es conectado a un inversor trifásico para alimentar la carga con una tensión y frecuencias deseadas; en uno de los casos el circuito rectificador es conectado a un circuito elevador de tensión para aumentar el nivel de voltaje del enlace de CD.

El software Flux 2D permite visualizar la distribución de los campos magnéticos en el generador, producidos por los imanes permanentes y los conductores del estator durante la conexión con la carga trifásica y los elementos de electrónica de potencia.

Palabras clave.- Generador Síncrono de Imanes Permanentes, Funciones de Conmutación, Elementos Finitos, Convertidores Electrónicos de Potencia.

Abstract

In this thesis the electromagnetic analysis of a permanent magnet synchronous generator using the finite element method in 2D is presented; the electromagnetic analysis in transient state is shown when the generator is connected to an isolated three-phase inductive/resistive load, through electronic power converters.

The permanent magnet synchronous generator was modeled in the Flux 2D finite element software, and the control of the passive elements of the electronic power converters was created in the software of MATLAB/Simulink. This combination was selected in order to reduce the long computing time required by the simulations when the finite element software is coupled with the software for the control of the passive elements of the power electronic converters, which are used to supply electric power at a desired frequency and amplitude.

In this way, to give the control to the passive elements, such as semi-conductor switches, the theory of switching functions was used, which presents a great advantage when it is compared with pre-established models of Simulink libraries. Models created in Simulink are presented in the form of no lineal sources, controlled by means of functions that have exponential terms, which gives slow execution times, generation of big data quantities and convergence problems. On the other hand, models derived from switching functions have simple functional blocks that do not depend from exponential functions such as pre-established models.

Test cases are analyzed where the generator connected to a three-phase rectifier bridge is considered, which it turn is connected to a three-phase inverter to supply the load with desired output voltage and frequency; in one of the cases the rectifier circuit is connected to a voltage boost converter to increase the voltage level of CD link.

Flux 2D software allows to see magnetic fields distribution within the generator, produced by permanent magnets and stator conductors during the connection with three-phase load and power electronic elements.

Key words.- Permanent Magnet Synchronous Generator, Switching Functions, Finite Element, Power Electronic Converters.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

En la actualidad el incremento de nuevas tecnologías en el campo de las energías renovables ha adquirido un lugar importante en el área de la investigación y desarrollo de dispositivos que permitan una eficiente conversión de energías, como por ejemplo la conversión de la energía del viento en energía eléctrica.

Como fuente de energía renovable, la energía eólica es hoy en día una de las alternativas más viables para la generación de energía eléctrica, sin contaminar el ambiente con la emisión de gases o la desviación de ríos de una región geográfica determinada afectando a otras.

Los dispositivos que permiten una eficiente conversión de energía en su mayoría incluyen a las máquinas eléctricas rotativas, las cuales son empleadas en sistemas de generación eléctrica como son los aerogeneradores, los cuales aprovechan el potencial eólico para convertirlo en energía eléctrica, la cual será suministrada a la red eléctrica a una frecuencia eléctrica deseada o a una carga aislada mediante la electrónica de potencia necesaria. Existen diferentes tipos de generadores eléctricos empleados para la conversión de la energía eólica en electricidad, los más comunes son los de inducción tipo jaula de ardilla, los generadores de inducción doblemente alimentados y los generadores síncronos de imanes permanentes.

En sistemas de generación eólica de baja y mediana potencia los más utilizados son los Generadores Síncronos de Imanes Permanentes (GSIP), debido a las ventajas que estos ofrecen sobre otros tipos de generadores eléctricos usados en estos sistemas. Algunas de estas ventajas radican en que no existen devanados presentes en el rotor, por lo cual se reducen las pérdidas eléctricas, implicando una alta eficiencia y al mismo tiempo no requieren de un costoso sistema de enfriamiento. El GSIP puede lograr una mayor densidad de flujo en el entrehierro [1] – [5].

Los GSIP se pueden clasificar por la dirección del flujo magnético en su estructura, la cual puede ser de forma axial o radial. El flujo en dirección radial es lo más convencional en este tipo de máquinas, en donde el flujo magnético es perpendicular al eje de rotación. Otra clasificación de este tipo de generadores consiste en la forma de cómo se encuentran posicionados los imanes, si estos se encuentran insertados en el rotor o montados en su superficie [6]. Con el desarrollo de materiales de alto

rendimiento compuestos por imanes permanentes, los GSIP son un tema de interés en la investigación.

El método de elemento finito es el más preciso en cuanto a la resolución de problemas de cálculo de campos electromagnéticos y el más usado actualmente. La mayoría de los dispositivos, tales como máquinas rotativas, tienen límites muy complicados. Además, estos dispositivos utilizan materiales que pueden ser anisotrópicos y no lineales. Fuentes como la densidad de corriente usualmente se distribuyen por superficies de los contornos de las máquinas eléctricas.

La ventaja de métodos numéricos como el método de elementos finitos es que puede ser usado en formas arbitrarias, con condiciones frontera arbitrarias y complicadas fuentes de distribución en las máquinas. Durante el diseño y construcción de un dispositivo electromagnético como el GSIP se deben construir y probar muchos prototipos para verificar su buen funcionamiento, lo que puede resultar un proceso costoso y laborioso, lo cual en una empresa competitiva no sería rentable; para resolver este tipo de problemas se hace uso de herramientas de simulación numérica [7].

En el trabajo desarrollado en esta tesis se optó por el uso de un paquete comercial de elementos finitos en electromagnetismo llamado Flux, de la compañía Cedrat [8]. Se utilizó Flux para modelar el generador síncrono de imanes permanentes, así como el paquete computacional de Matlab Simulink [9] para el desarrollo del control de los elementos pasivos internos conectados a la geometría del generador, como son los convertidores electrónicos de potencia y el circuito equivalente de la máquina, creando con ello un ambiente de pruebas para la conexión del generador con una carga aislada, así como el control y regulación del flujo de potencia.

Gracias al acoplamiento de estas dos herramientas de simulación es posible llevar a cabo numerosos escenarios para probar el modelo de elementos finitos del GSIP, permitiendo observar su comportamiento ante distintas situaciones comunes de operación. Como se mencionó anteriormente, esto es de gran ayuda al momento de diseñar un dispositivo electromagnético, debido a la gran precisión de las simulaciones y resultados obtenidos; se pueden ahorrar numerosas construcciones de bancos de pruebas y prototipos del GSIP.

En esta tesis se presenta el análisis electromagnético de un generador síncrono de imanes permanentes conectado a una carga aislada mediante los convertidores electrónicos de potencia necesarios; se muestran dos casos de estudio. En el primer caso, el generador es conectado a un rectificador de puente completo y mediante un enlace de CD a un inversor trifásico para abastecer a una carga RL, balanceada a una determinada amplitud y frecuencia. En el segundo caso, se conecta nuevamente el modelo del generador, esta vez un circuito elevador de voltaje es conectado entre el rectificador y el inversor para elevar el nivel en el enlace de CD; también la frecuencia de conmutación es cambiada en este segundo caso, mostrando una diferencia en las formas de las señales de la carga conectada en estrella a la salida del inversor.

1.2 Objetivo

El objetivo de esta tesis es presentar el análisis electromagnético de un generador síncrono de imanes permanentes conectado a una carga trifásica aislada, usando el método de elementos finitos en dos dimensiones, así como la aplicación de funciones de conmutación a los circuitos electrónicos de potencia conectados a la máquina.

El modelo analizado es un generador síncrono de imanes permanentes de 24 ranuras y 4 polos salientes, el cual se conecta a una carga aislada utilizando convertidores electrónicos de potencia como rectificadores e inversores. Se simularon varios ambientes de prueba, utilizando herramientas de software de elementos finitos para la modelización del generador y paquetes que permitieron el control de parámetros de los convertidores electrónicos de potencia conectados al circuito equivalente de la máquina. Los resultados obtenidos se presentan en las interfaces de ambos paquetes computacionales; se incluyen gráficas que permiten ver la distribución de los campos magnéticos en la máquina ante diferentes tipos de condiciones de operación comunes.

1.3 Justificación

Utilizar las herramientas de la ingeniería de simulación, como lo son los paquetes de software de elemento finito, para la creación de ambientes de prueba de dispositivos electromagnéticos como GSIP utilizados en los sistemas eólicos, evita la construcción y prueba de muchos prototipos y de los bancos de pruebas requeridos para el mismo fin. Debido a las ventajas que presentan los GSIP sobre los otros tipos de generadores empleados en turbinas eólicas, es justificable un análisis por medio del método de elementos finitos, en el cual se considera la geometría completa del generador para observar su comportamiento.

1.4 Contenido de la tesis

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera:

Capítulo 1.- Se presenta una introducción al trabajo realizado y algunos aspectos generales, así como el objetivo y justificación del proyecto de investigación.

Capítulo 2.- Se presenta una breve descripción de los principales componentes de un sistema eólico de generación, así como sus principales ventajas y usos en la industria eléctrica.

Capítulo 3.- En este capítulo se detalla el funcionamiento de los convertidores electrónicos de potencia que integran a un sistema eólico de generación, así como sus diferentes topologías y metodologías de control.

Capítulo 4.- Se presenta la teoría de la metodología de funciones de conmutación, las cuales se implementarán en el ambiente de co – simulación de los casos de estudio de esta tesis, así como la descripción de sus principales ventajas sobre modelos preestablecidos de convertidores electrónicos de potencia en las librerías del software utilizado.

Capítulo 5.- Se presentan los aspectos generales del método de elementos finitos y los métodos de formulación matemática para las ecuaciones diferenciales parciales que describen los fenómenos electromagnéticos; se muestra un ejemplo de acoplamiento de ecuaciones de circuitos con ecuaciones de modelos de elemento finito en dos dimensiones.

Capítulo 6.- Se presentan las características del modelo de elementos finitos del generador síncrono de imanes permanentes en 2D, así como los casos de prueba en los cuales se lleva a cabo la co-simulación entre Flux y Simulink, para la conexión del modelo del generador a convertidores electrónicos de potencia que se conectan a una carga trifásica balanceada aislada.

Capítulo 7.- Se presentan las conclusiones así como los trabajos futuros de esta tesis.

Capítulo 2

Sistemas eólicos de generación

2.1 Introducción

Un sistema eólico de generación es el encargado de transformar la energía cinética del viento en energía mecánica haciendo uso de las palas del rotor; esta energía posteriormente es transformada en energía eléctrica por un generador. El sistema está compuesto por diversos componentes que participan directamente en el proceso de conversión de la energía y por otros componentes que asisten al sistema para lograr esta tarea de una forma controlada y rentable.

En un esfuerzo para reducir los costos, incrementar su rentabilidad y probar la eficiencia de los sistemas eólicos de conversión de la energía, han sido desarrolladas una gran variedad de configuraciones y técnicas de control. Los sistemas de conversión eólicos se pueden clasificar en dos grandes grupos:

(1) Los de velocidad fija, que emplean generadores de inducción tipo jaula de ardilla conectados directamente a la red eléctrica y que en condiciones de operación normales no requieren de convertidores electrónicos de potencia.

(2) Los de velocidad variable, que pueden ser divididos en los que el generador tiene un acoplamiento directo con las turbinas y los que requieren de un caja multiplicadora o tren de engranes para el acoplamiento del generador con el eje de las turbinas. Los generadores empleados en estos sistemas principalmente son el generador de inducción doblemente alimentado, el generador síncrono de imanes permanentes y el generador de inducción tipo jaula de ardilla utilizando convertidores electrónicos de potencia [10].

En los sistemas de acoplamiento directo, los GSIP son los más empleados; la velocidad de los generadores síncronos se diseña para unir al generador con las turbinas sin necesidad de una caja multiplicadora, por lo cual se requiere un sistema completo de convertidores electrónicos de potencia. El acoplamiento indirecto requiere de una caja multiplicadora o tren de engranes, para acoplar la baja velocidad de las turbinas con la del generador; el generador eléctrico más empleado en este tipo de acoplamiento es el generador de inducción doblemente alimentado, el cual también requiere de un sistema completo de convertidores electrónicos de potencia para ser conectado a la red eléctrica.

2.2 Componentes de una turbina eólica

Para lograr la conversión de la energía cinética a eléctrica una turbina eólica se compone de muchas partes, existen variantes de acuerdo a su configuración que como se explicará más adelante, dependen principalmente de la potencia eléctrica a la que está diseñada la turbina.

La energía cinética del viento primero es convertida a energía mecánica por medio de los álabes montados en el rotor de la turbina. Posteriormente la energía mecánica es transmitida a través de un tren de engranes (si es necesario) el cual consta de ejes, cojinetes y una caja de engranes multiplicadora. La energía mecánica resultante será enviada hacia el generador, el cual convierte energía mecánica en eléctrica. Esta conversión usualmente es acompañada por un sistema de convertidores electrónicos de potencia, los cuales suministran la energía del generador hacia la red eléctrica. La mayoría de estos componentes están encerrados dentro de la góndola ubicada en la parte superior de la torre de la turbina eólica. Existen otras partes que no se ven involucradas en la conversión de la energía, pero que son importantes para asegurar una operación del sistema apropiada, eficiente y rentable. Por ejemplo, los sistemas de control como control de potencia por variación de ángulo de ataque, control de orientación, frenos mecánicos, sensores de velocidad y dirección del viento, cables de distribución de energía, disipadores de calor, sistema aparta rayos y componentes estructurales como la torre y la estructura de la góndola. En los sistemas de acoplamiento directo (sin tren de engranes) se debe tener una góndola más pequeña. Sin embargo, el amplio diámetro de las turbinas de baja velocidad requerirá de una estructura de la góndola más alta. Este fenómeno es más evidente en generadores síncronos doblemente alimentados, que en los generadores síncronos de imanes permanentes. En la Figura 2.1. Se muestran los principales componentes de una turbina eólica.

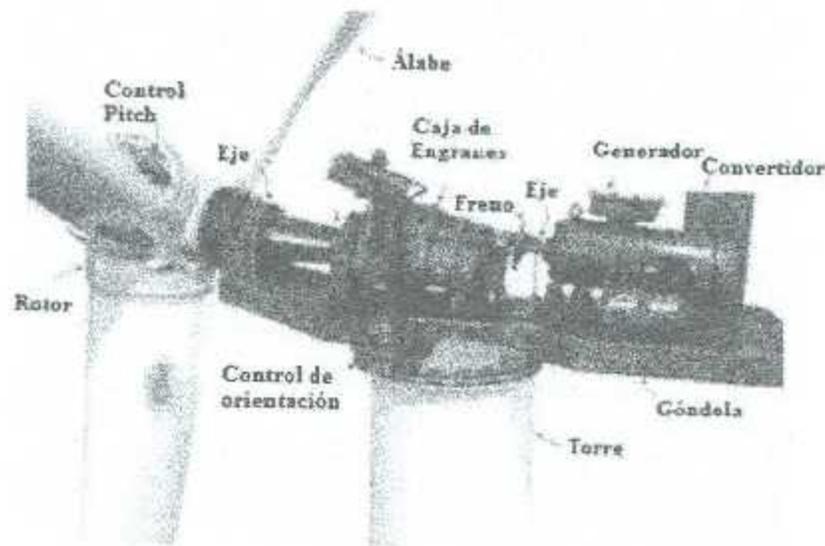


Figura 2.1. Principales componentes de una turbina de viento.

2.2.1 Álabes de una turbina eólica

Los álabes son los componentes más visibles de una turbina eólica, son los responsables de llevar a cabo el proceso de la conversión de la energía cinética del viento en mecánica rotatoria. Los álabes han ido evolucionando en su configuración aerodinámica y en los materiales que los conforman, la mayoría son hechos de aluminio y fibra de carbono, lo que ayuda a disminuir su peso y costo de fabricación.

Actualmente existen en el mercado diversas configuraciones de álabes para altas, medianas y bajas potencias. Las turbinas de gran capacidad que cuentan con uno o dos álabes presentan algunas desventajas debido a que su centro de gravedad no es estable, lo que provoca vibraciones y esfuerzos mecánicos en los álabes y en la estructura de la turbina reduciendo su vida útil, es por ello que se ha llegado a adoptar un estándar de diseño que consta de la configuración de tres aspas para turbinas de alta potencia. Mientras que para las turbinas de baja y algunas de mediana potencia, su configuración consta de 3 ó más álabes, alcanzando con esto mayor velocidad de rotación en el eje de la turbina, lo cual, como se explicará más adelante, está relacionado con el tipo de generador empleado.

Las turbinas eólicas también pueden ser clasificadas por la disposición de su eje de rotación, siendo las más comunes las de eje horizontal (Figura 2.2), las cuales tienen la ventaja de que los álabes están situados a una altura elevada, en donde la velocidad del viento es mayor y las turbulencias menores, en comparación a las que están a nivel del suelo.

También se encuentran las turbinas de eje vertical (Figura 2.3), las cuales tienen la ventaja de no emplear mecanismos de orientación; en este tipo de turbinas el generador y la caja multiplicadora o de engranes se encuentran a nivel del suelo, facilitando su mantenimiento y montaje. Sin embargo, tienen la desventaja de que el par aerodinámico varía altamente con la posición de los álabes, aún si hay viento constante; esto causará fatiga en los álabes y el sistema de generación, causando problemas en la calidad de la energía suministrada.

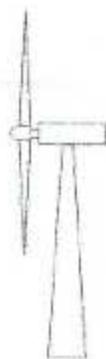


Figura 2.2. Turbina de eje horizontal.

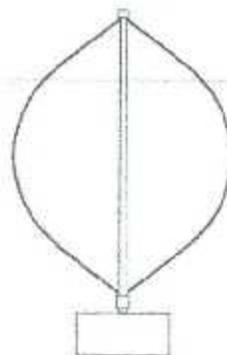


Figura 2.3. Turbina de eje vertical.

2.2.2 Tren de engranes

Debido a que algunos generadores eléctricos operan a una alta velocidad (entre 1200 y 1800 rpm) y el rotor de una turbina eólica de alta potencia gira desde 6 – 20 rpm, es necesario un tren de engranes o caja multiplicadora para acoplar ambos ejes (el del rotor de la turbina y el del rotor del generador). Los trenes de engranes normalmente cuentan con múltiples etapas de engranes para alcanzar las velocidades necesarias de acoplamiento entre la turbina y el generador (Figura 2.4); la eficiencia de los trenes de engranes varía entre el 96% y 98%. Sin embargo, representan uno de los componentes más caros de todo el sistema, debido a su instalación y mantenimiento ya que los cambios bruscos en la velocidad y fuerza del viento producen un desgaste considerable en los engranajes reduciendo su tiempo de vida. Por lo anterior, en los sistemas eólicos que no utilizan un tren de engranes, regularmente aquellos que utilizan un generador eléctrico de baja velocidad que se empata con la velocidad de giro del eje de la turbina, se tienen un ahorro considerable en gastos de mantenimiento y reparación.

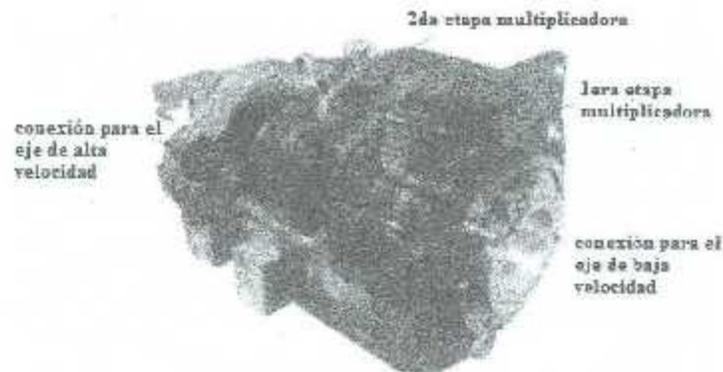


Figura 2.4. Tren de engranes de una turbina eólica de alta potencia.

2.2.3 Generador eléctrico

Los generadores eléctricos son los dispositivos encargados de la conversión de la energía mecánica en eléctrica, en los sistemas eólicos de generación de baja y mediana potencia son empleados en su mayoría los generadores síncronos de imanes permanentes (PMSG por sus siglas en inglés); debido al rango de velocidad que estos tienen no es necesario un tren de engranes entre el eje de la turbina y el eje del generador. Las ventajas que este tipo de generador ofrece son: la ausencia de devanados en el rotor y escobillas, por lo que se reducen drásticamente las pérdidas de tipo eléctrico, reduciendo los costos de mantenimiento y obteniendo una mejor eficiencia. Este tipo de ventajas hace que los GSIP cada vez sean de mayor interés en la investigación de los materiales que los componen.



Figura 2.5. Generador Sincrono de Imanes Permanentes

Por otro lado se encuentran los generadores de inducción doblemente alimentados (DFIG por sus siglas en inglés) empleados primordialmente en sistemas de generación de alta potencia; éstos tienen la característica de operar a diferentes velocidades, aproximadamente un $\pm 30\%$ de la velocidad sincrónica, por lo que son muy empleados en sistemas de velocidad variable. Su ventaja principal es que pueden tener el control de potencia tanto del lado del estator como del rotor mediante la electrónica de potencia necesaria, sin embargo tienen como desventaja el alto costo de operación y control.

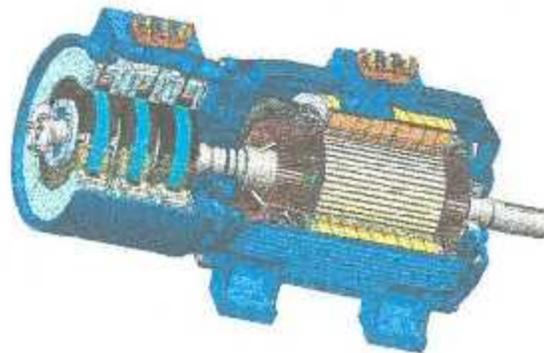


Figura 2.6. Generador de Inducción Doblemente Alimentado

Por último están los generadores de inducción tipo jaula de ardilla (SCIG por sus siglas en inglés), los cuales son comúnmente utilizados en los sistemas de velocidad fija. En este tipo de generadores el estator está directamente conectado a la red eléctrica mediante un convertidor de potencia, su costo de mantenimiento es mucho menor que el del generador de inducción doblemente alimentado y su principal desventaja es que sólo opera a rangos de velocidades arriba de la velocidad nominal de diseño.

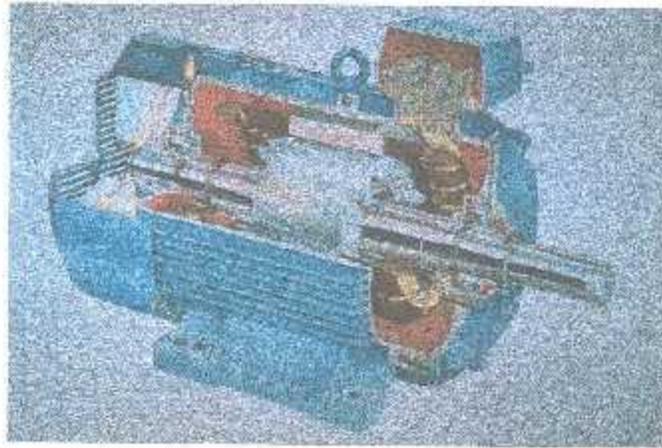


Figura 2.7. Generador de Inducción tipo Jaula de Ardilla

2.2.4 Torre

La torre tiene como función soportar el conjunto de elementos descritos anteriormente, los cuales se encuentran dentro de la góndola o canastilla, y brindar la altura necesaria para alcanzar mejores velocidades de viento; la altura es proporcional al diámetro de los álabes y la potencia de la turbina.

2.3 Configuración de los sistemas eólicos de velocidad variable

Como se mencionó anteriormente, existen diferentes configuraciones o tipos de sistemas de generación eólicos, como son los sistemas de velocidad fija y los de velocidad variable, en esta sección se mencionan solamente los de velocidad variable y sus distintas topologías para los diferentes generadores que éstos emplean para la conversión de la energía mecánica en eléctrica.

2.3.1 Sistemas eólicos de velocidad variable con generadores de inducción tipo jaula de ardilla (SCIG)

En los sistemas eólicos de generación de velocidad variable que emplean generadores de inducción tipo jaula de ardilla son necesarios convertidores electrónicos de potencia de escala completa, es decir, convertidores que utilizan una etapa rectificadora y una etapa inversora para asegurar una máxima extracción de potencia del viento que posteriormente pueda ser suministrada a la red de distribución eléctrica a una amplitud y frecuencia deseadas. El control y configuración de los elementos que componen a los convertidores electrónicos de potencia es detallado en el siguiente capítulo.

En la figura 2.8 se muestra una topología de este tipo de configuración con generador de inducción tipo jaula de ardilla.

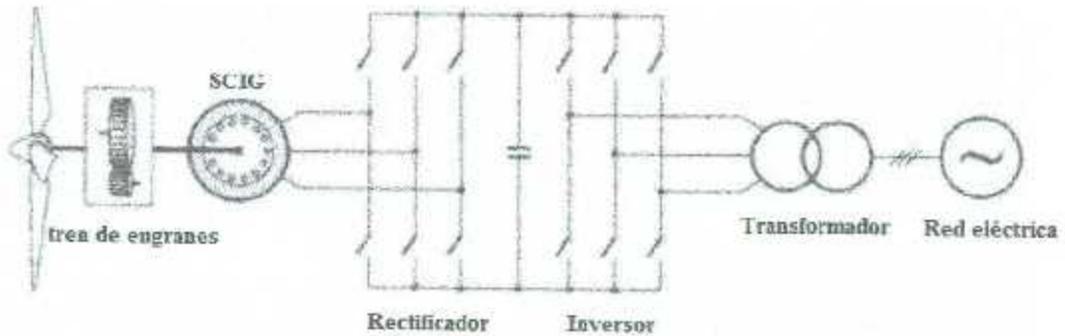


Figura 2.8. Sistema de Generación Eólico con SCIG.

2.3.2 Sistemas eólicos de velocidad variable con generadores de inducción doblemente alimentados (GIDA)

Actualmente los sistemas eólicos de velocidad variable con generadores de inducción doblemente alimentados son los más adoptados a nivel industrial, especialmente los sistemas de alta potencia y tipo offshore. El generador de inducción doblemente alimentado es básicamente un generador de inducción con el rotor devanado cuyo circuito puede ser controlado por dispositivos externos para lograr una operación a velocidad variable. En esta configuración el estator del generador se encuentra directamente conectado a la red eléctrica, permitiendo solamente flujo unidireccional de potencia de la red al estator. Sin embargo, el rotor se encuentra conectado a la red a través de dos convertidores electrónicos de potencia, el del lado del rotor (RSC) y el del lado de la red (GSC), logrando con ello un flujo bidireccional de potencia desde el rotor hacia la red y viceversa.

En la Figura 2.9 se muestra una topología que usa el generador de inducción doblemente alimentado conectado a la red mediante convertidores electrónicos de potencia.

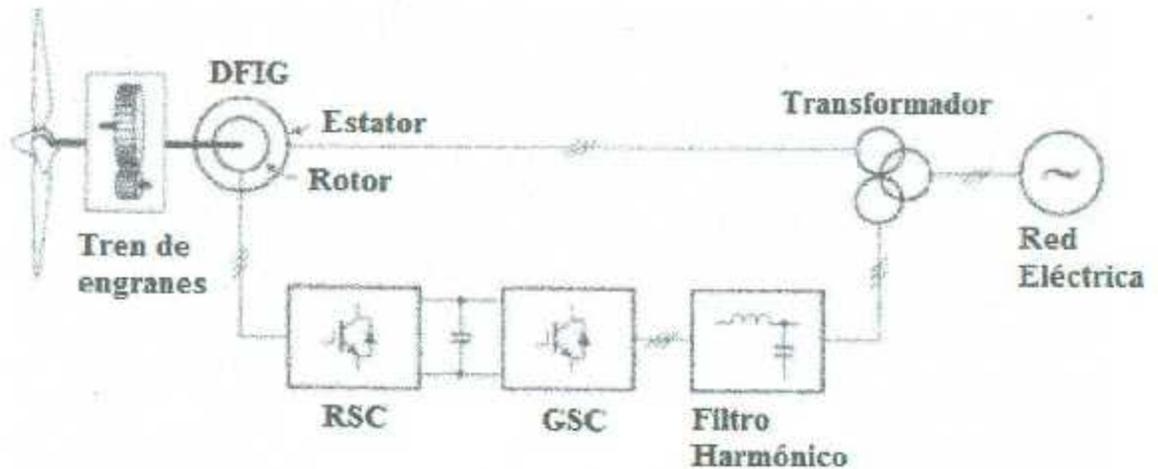


Figura 2.9. Sistema de Generación Eólico con DFIG.

2.3.3 Sistemas eólicos de velocidad variable con generadores síncronos de imanes permanentes

En los sistemas eólicos de generación variable se emplean una gran diversidad de GSIP y van desde la forma en que los imanes están montados en el rotor (polos salientes o lisos) hasta a la forma en la que el flujo magnético se encuentra distribuido en la máquina (radial o axial). Éstos han sido bastante adoptados en aplicaciones industriales, especialmente en sistemas de mediana y baja potencia, con rangos de potencia desde los pocos kilowatts hasta unos cuantos megawatts. La ventaja de este tipo de generadores es que pueden ser construidos con un gran número de polos y operar a una velocidad que puede acoplar directamente el eje de la turbina con el eje del generador sin la necesidad de un tren de engranes o caja multiplicadora, reduciendo costos de instalación y mantenimiento. Los sistemas de generación eólicos con GSIP son controlados mediante convertidores electrónicos de potencia de escala completa, con ello estos sistemas se pueden acoplar a diversos códigos de red que rigen la operación de la red eléctrica a la cual se desea interconectar el sistema.

En la Figura 2.10 se muestra un sistema de velocidad variable con GSIP, en donde se aprecian los principales componentes, como el tren de engranes, que es opcional y que es despreciable en la mayoría de los sistemas con este tipo de máquinas, como ya se mencionó con anterioridad; se muestran los convertidores electrónicos de potencia que suministran la potencia eléctrica a la red eléctrica a través de un transformador elevador.

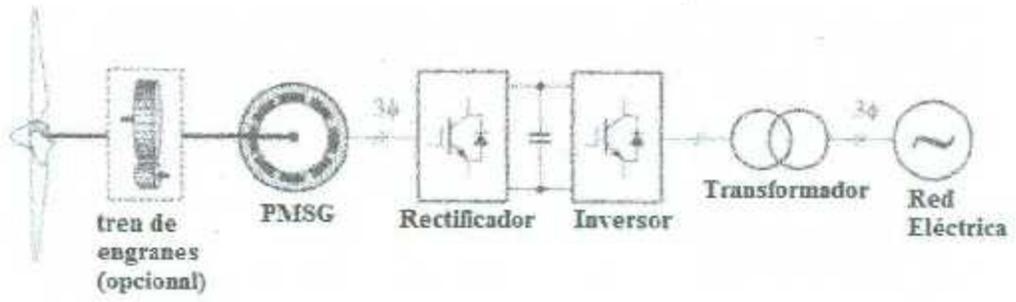


Figura 2.10. Sistema de Generación Eólico con PMSG.

Capítulo 3

Convertidores Electrónicos de Potencia

3.1 Introducción

Los convertidores electrónicos de potencia son empleados en los sistemas cíclicos de generación para garantizar un suministro de energía a la red eléctrica de una manera eficiente y continua.

3.2 Convertidores Electrónicos de CA – CD (Rectificadores)

La conversión de la energía eléctrica de corriente alterna a corriente directa es usada en una amplia diversidad de aplicaciones, siendo la energía eólica una de las principales. Los convertidores simples utilizan diodos para la transformación de energía eléctrica de corriente alterna a corriente directa, mientras que para tener un control del flujo de la energía en los convertidores son empleados los tiristores como los IGBTs, GTOs e IGCTs, la desventaja que presentan estos elementos es la generación de armónicos, los cuales tienen un efecto negativo en la operación de un sistema eléctrico. Esto ha llevado a una motivación en el desarrollo de métodos activos para el mejoramiento de la calidad de la energía suministrada a la red eléctrica y en consecuencia el factor de potencia [11] [12].

3.2.1 Rectificadores PWM monofásicos

La Figura 3.1(a) muestra el circuito del rectificador PWM monofásico controlado con conexión tipo puente; utiliza cuatro interruptores con diodos en antiparalelo para producir un voltaje CD de salida V_o controlado. Para una apropiada operación de este rectificador el voltaje de salida debe ser mayor que el voltaje de entrada para cualquier tiempo de operación ($V_o > \hat{V}_s$).

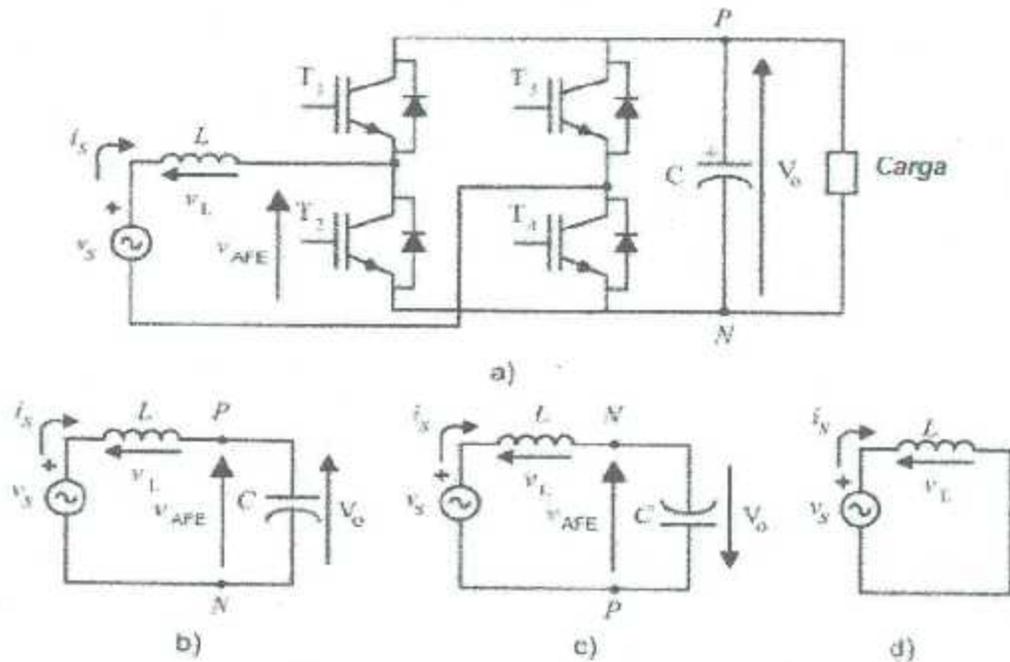


Fig.3.1. Rectificador PWM monofásico con conexión tipo puente. (a) Circuito equivalente con: (b) T_1 y T_4 encendidos, (c) T_2 y T_3 encendidos. (d) T_1 y T_3 o T_2 y T_4 encendidos.

Las posibles combinaciones son las siguientes.

- 1) Con los interruptores T_1 y T_4 encendidos y T_2 y T_3 apagados, por lo cual, $v_{AFE} = V_o$ Fig. 3.1 (b).
- 2) Con los interruptores T_1 y T_4 apagados y T_2 y T_3 encendidos, por lo cual, $v_{AFE} = -V_o$ Fig. 3.1 (c).
- 3) Con los interruptores T_1 y T_3 encendidos y T_2 y T_4 apagados, por lo cual, $v_{AFE} = 0$ Fig. 3.1 (d).

El voltaje en la inductancia se puede calcular por:

$$v_L = L \frac{di_s}{dt} = v_s(t) - kV_o \quad (3.1)$$

Donde $k = 1, -1$ o 0 .

Si $k = 1$, entonces el voltaje en el inductor será negativo, y la corriente de entrada i_s tenderá a disminuir.

Si $k = -1$ entonces el voltaje en el inductor será positivo, y la corriente de entrada i_s tenderá a aumentar.

Por último si $k = 0$ la corriente de entrada aumentará o disminuirá su valor dependiendo de v_s . Esto permite un control completo de la corriente de entrada.

3.2.2 Esquema de control de los rectificadores PWM monofásicos

El esquema de control clásico se muestra en la Figura 3.2. El control incluye un controlador de voltaje, típicamente un control proporcional integral (PI), el cual controla la potencia requerida para mantener el voltaje del enlace de CD constante.

El controlador de voltaje manipula la amplitud de la corriente de entrada; por esta razón, el voltaje a la salida del controlador es multiplicado por una señal senoidal con la misma fase y frecuencia v_s , para obtener la corriente de entrada de referencia i_{sref} . El controlador de corriente rápido controla la corriente de entrada, y se logra un alto factor de potencia de entrada.

Este controlador puede ser un controlador de histéresis o un controlador lineal con un modulador PWM.

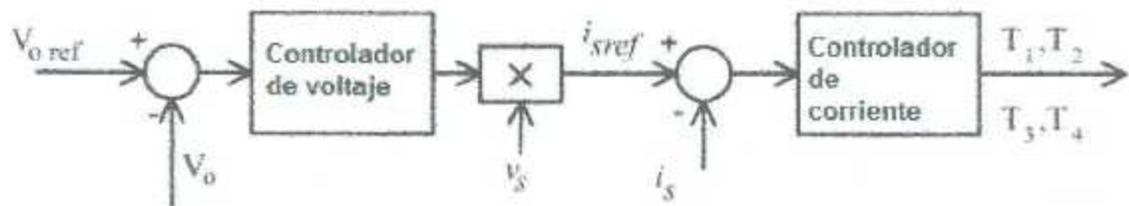


Figura 3.2. Esquema de control para el rectificador PWM.

3.2 Rectificadores PWM trifásicos

3.2.1 Principio de operación

Los rectificadores de voltaje (VSR) requieren de un bus especial de cd capaz de mantener un voltaje V_o sin la necesidad de recurrir de una fuente externa. Esto se cumple con un capacitor de cd C y un control de lazo retroalimentado.

El principio básico de operación del VSR consiste en mantener el voltaje en la carga del enlace de cd a un valor de referencia deseado usando un control de lazo cerrado, como se muestra en la Figura 3.3. [13]. Este valor de referencia V_{oref} , debe ser lo suficientemente grande para mantener a los diodos del convertidor bloqueados. Una vez se cumpla esta condición, el voltaje del enlace de cd es medido y comparado con

el voltaje de referencia V_{oref} . La señal de error generada de esta comparación es usada para encender y apagar los interruptores del VSR. En ese momento la potencia puede regresar a la fuente de ac.

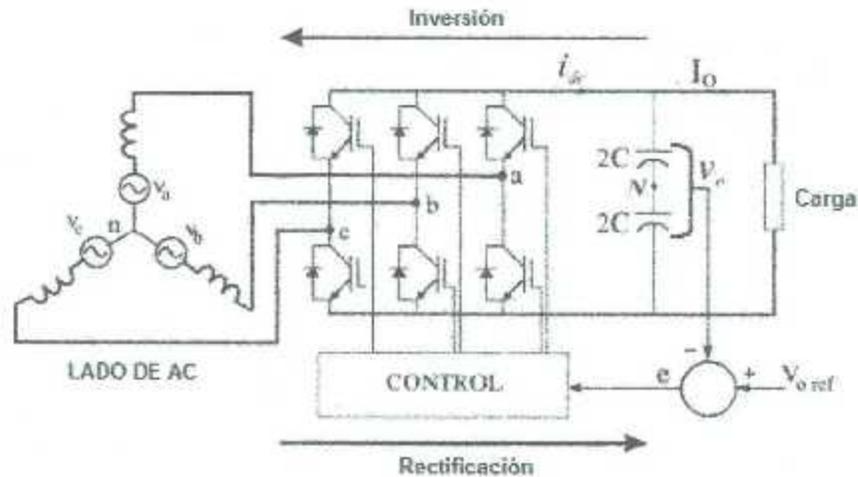


Figura 3.3. Principio de operación del VSR.

Cuando la corriente de la carga conectada al enlace de cd I_o es positiva (operación de rectificador), el capacitor C está siendo descargado y la señal del error se convierte en positiva. Bajo esta condición, el bloque de control extrae potencia de la fuente para generar las señales apropiadas del PWM para los seis transistores del VSR. En esta forma la corriente fluye del lado de ac al de cd y el voltaje del capacitor es recuperado. Inversamente, cuando I_o se vuelve negativa (operación de inversor), el capacitor C se encuentra sobrecargado, y la señal de error indica al control descargar al capacitor, devolviendo potencia al lado de ac.

Los interruptores moduladores y los estados de encendido y apagado siguen un modelo preestablecido. Particularmente, este modelo puede ser una forma de voltaje senoidal o de corriente. Por ejemplo, para un rectificador controlado por una fuente de voltaje la modulación puede ser como la mostrada en la Figura 3.4.

Existen muchos métodos de modulación, el más popular es el senoidal PWM (SPWM), el cual usa una señal triangular portadora (v_{tri}) para generar el patrón PWM [14].

Para hacer funcionar apropiadamente un rectificador, el patrón PWM debe generar una fundamental $v_{x mod}$ con la misma frecuencia de la fuente v_x .

Cambiando la amplitud de esta fundamental y ajustando la fase respecto a la principal, el rectificador puede ser controlado para operar en cuatro modos: rectificador con factor de potencia en adelante, con factor de potencia en atraso, inversor con factor de potencia en adelante y en atraso. Cambiando el patrón de modulación,

modificando la magnitud de $v_{x\ mod}$ y desplazando los cambios de fase del patrón PWM.

Los rectificadores PWM no pueden operar en el modo de sobremodulación sin generar armónicos de baja frecuencia a la entrada y a la salida.

El control PWM no solo puede administrar la potencia activa, también la reactiva, permitiendo al VSR operar a un determinado factor de potencia.

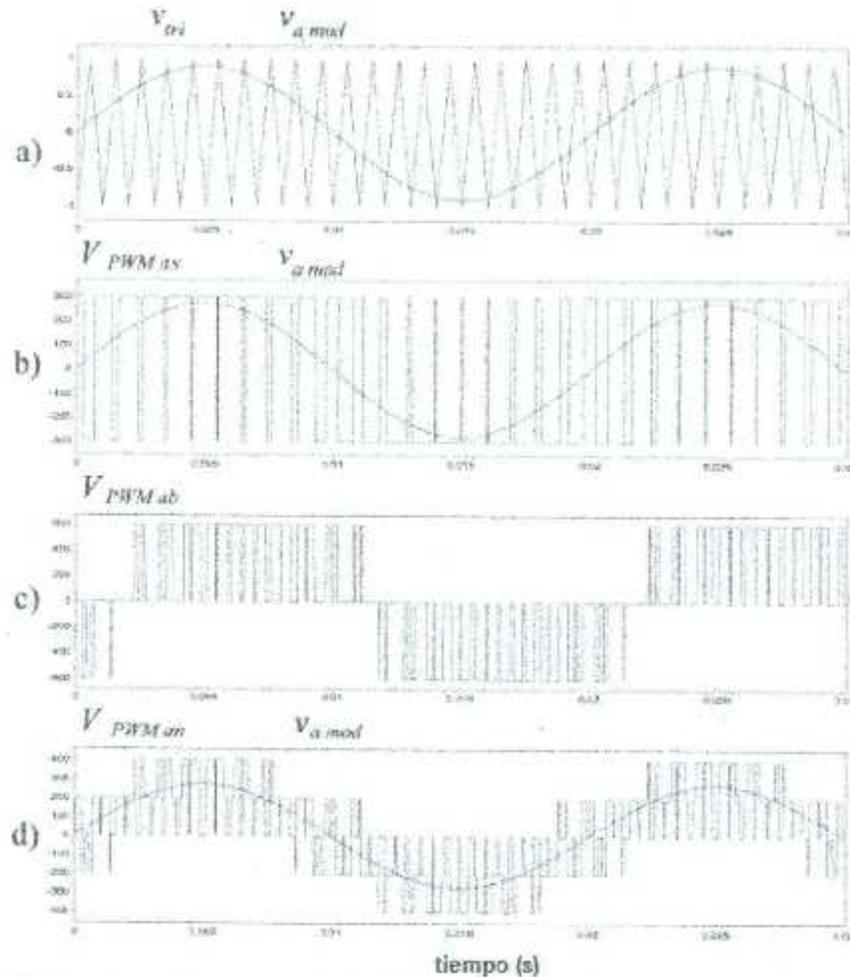


Figura 3.4. Voltajes de fase PWM. (a) Portadora triangular y senoidal de referencia. (b) Modulación de fase PWM. (c) Voltaje fase a fase PWM. (d) Voltaje fase a neutro PWM.

Las formas de onda de las corrientes también pueden ser mantenidas senoidales, reduciendo la contaminación armónica.

La interacción entre $v_{x\ mod}$ y v_x puede observarse a través de un diagrama fasorial; esta interacción permite comprender los cuatro modos de operación de este tipo de rectificador. En la figura 3.5 se muestran las siguientes operaciones: 3.5(a) rectificador con factor de potencia unitario, 3.5(b) inversor con factor de potencia unitario, 3.5(c) capacitor (factor de potencia cero), 3.5(d) inductor (factor de potencia cero).

La corriente I_S es el valor rms de la corriente de la fuente i_s y V_{mod} el valor rms de $v_{x\ mod}$. Esta corriente fluye a través de los semiconductores en la dirección mostrada en la figura 3.6. Durante el semiciclo positivo, el interruptor T_N , conectado al lado negativo del enlace de cd se encuentra encendido y la corriente i_s comienza a fluir a través de T_N (i_{T_N}). La corriente regresa y vuelve a los interruptores cerrando un lazo con otra fase y pasando a través de un diodo conectado a la misma terminal negativa del enlace de cd. La corriente también puede ir a la carga de cd (inversión) y regresar a través de otro interruptor localizado en la terminal positiva del enlace de cd. Cuando el interruptor T_N está apagado, el paso de corriente es interrumpido y la corriente empieza a fluir por el diodo D_p , conectado a la terminal positiva del enlace de cd; esta corriente, llamada i_{D_p} en la Figura 3.6, va directamente al enlace de cd, ayudando en la generación de corriente i_{dc} , la cual carga al capacitor C y permite al rectificador producir potencia de cd. Las inductancias L_s son muy importantes en este proceso, puesto que generan un voltaje inducido, el cual permite la conducción del diodo D_p . Una operación similar ocurre en el semi ciclo negativo, pero con T_P y D_N . Bajo la operación de inversor los caminos de la corriente son diferente porque las corrientes fluyen a través de los interruptores desde el enlace de cd del capacitor. Bajo la operación rectificadora el convertidor trabaja como un convertidor elevador, mientras que en el modo de inversor trabaja como reductor.

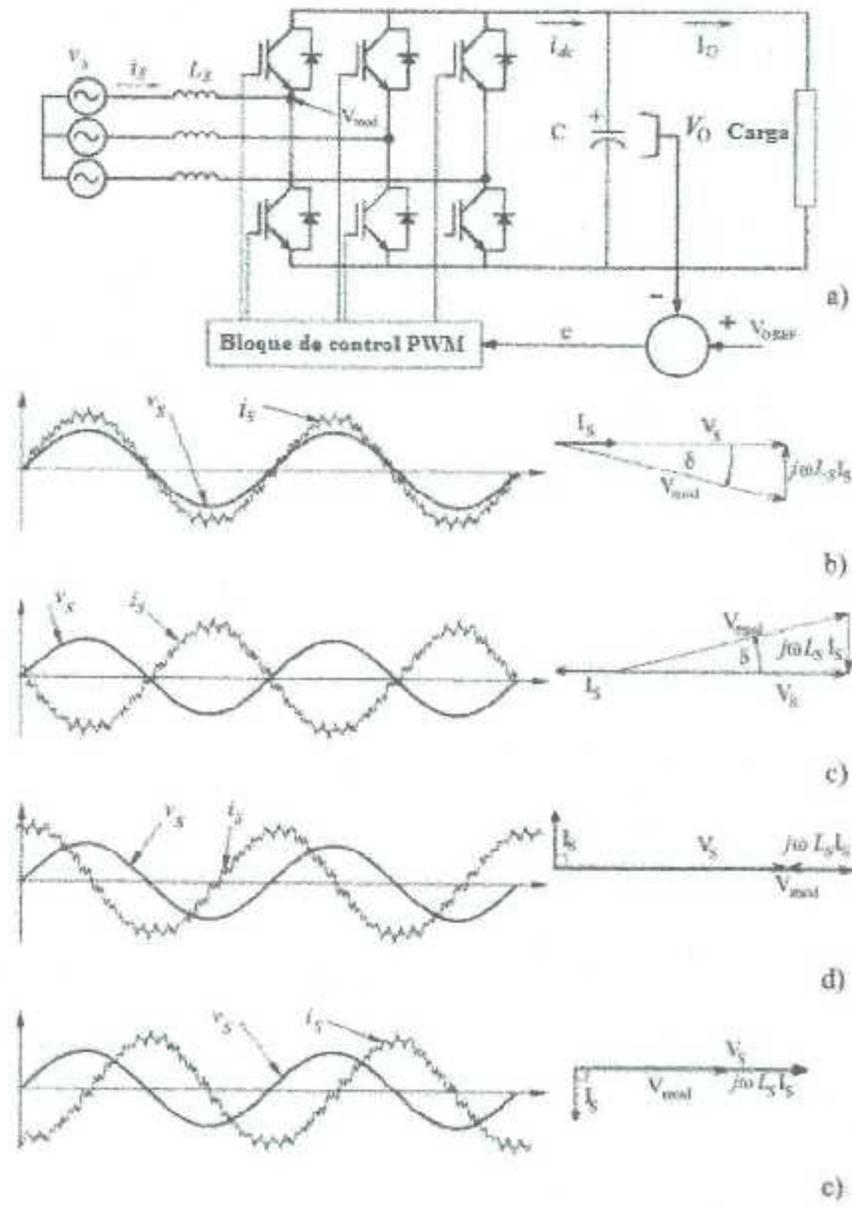


Figura 3.5. Los cuatro modos de operación del VSR.

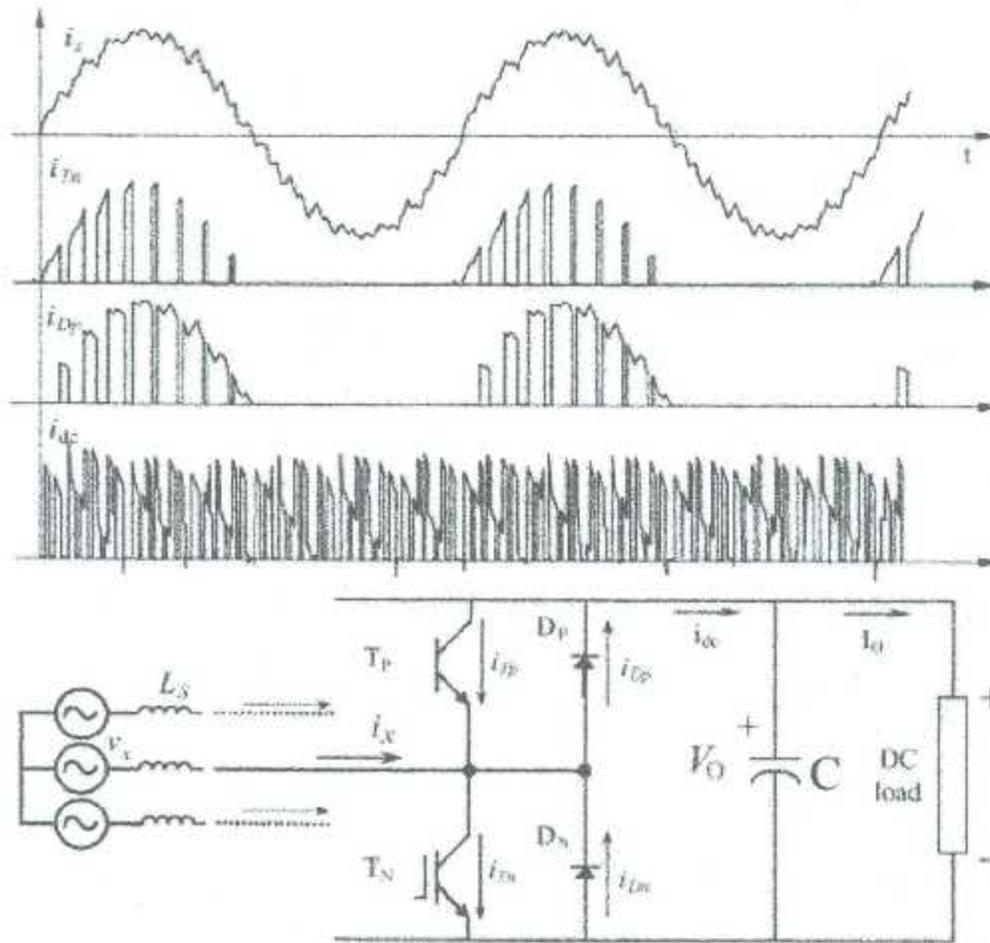


Figura 3.6. Formas de onda de corriente, a través de los interruptores y el enlace de cd.

3.3.2 Esquema de control

a) Control del voltaje del enlace de CD

El control del voltaje del enlace de cd requiere de un control de lazo cerrado. Como se explicó anteriormente, el voltaje de cd V_0 es comparado con un voltaje de referencia V_{0ref} y la señal del error "e" obtenida de esta comparación es usada para generar un modelo de forma de onda; el modelo puede ser una forma de onda senoidal con la misma frecuencia de la fuente. Este modelo es usado para producir el patrón PWM.

(b) Rectificador PWM controlado por corriente

Este método de control es mostrado en el rectificador de la Figura 3.7. El control es logrado al medir las corrientes instantáneas de fase y forzándolas a seguir un modelo de corriente de referencia senoidal, I_{ref} . La amplitud del modelo de corriente de referencia, \hat{I} es evaluada usando la siguiente ecuación:

$$\hat{I} = G_c e = G_c (V_{o\text{ref}} - V_o) \quad (3.2)$$

donde G_c se muestra en la Figura 3.7 y representa un controlador como PI, difuso. La forma de onda senoidal del modelo es obtenida al multiplicar \hat{I} con una función senoidal, con la misma frecuencia de la fundamental y con el ángulo de fase deseado.

Sin embargo, un problema aparece con el rectificador, porque el controlador del lazo cerrado en el voltaje de V_o puede producir inestabilidad; entonces es necesario analizar el problema durante el diseño del rectificador. De acuerdo a los criterios de estabilidad, y asumiendo un controlador PI, se obtienen las siguientes relaciones [15]:

$$I_x \leq \frac{CV_o}{3K_p L_s} \quad (3.3)$$

$$I_x \leq \frac{K_p V_x}{2RK_p + L_s K_i} \cos \varphi \quad (3.4)$$

Estas dos relaciones son utilizadas para el diseño del VSR controlado por corriente, relacionan los valores del capacitor de cd, voltaje V_o , voltaje rms de la fuente V_x , resistencia e inductancia R y L, y el factor de potencia $\cos \varphi$, con los valores rms de la corriente de entrada I_x . Con esas relaciones las ganancias proporcional e integral K_p y K_i pueden ser calculadas para garantizar la estabilidad del rectificador.

Con estos límites de estabilidad establecidos, el rectificador podrá mantener el voltaje de cd del capacitor al voltaje de $V_{o\text{ref}}$ (Controlador PI), para todas las condiciones de carga.

Una vez que han sido resueltos los problemas de estabilidad y se ha generado el modelo de corriente senoidal, será requerido un método de modulación para producir el patrón PWM para los interruptores. Existen muchos métodos en la literatura, pero los tres más usados para los rectificadores por voltaje o por corriente son: muestreo periódico (PS), banda de histéresis (HIB) y portadora triangular (TC).

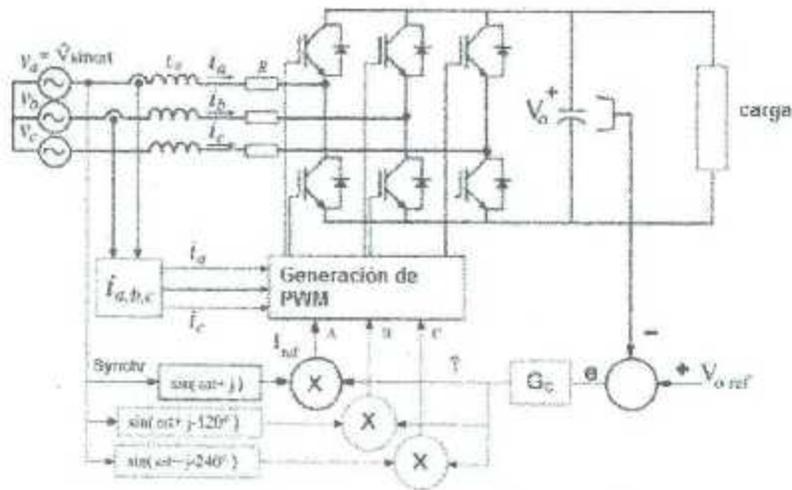


Figura 3.7. Rectificador PWM controlado por corriente.

(c) Rectificador PWM controlado por voltaje

La Figura 3.8 muestra un diagrama monofásico del cual se deriva este tipo de control

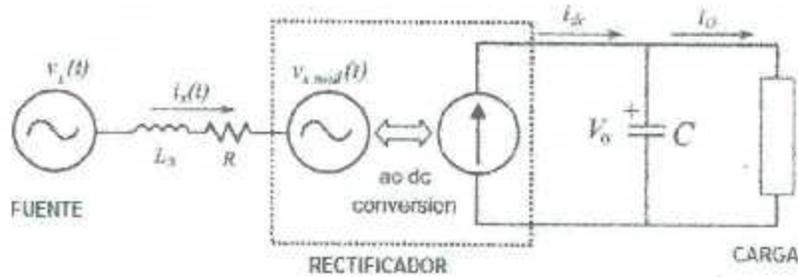


Figura 3.8. Diagrama de una fase del VSR.

Este diagrama representa un circuito equivalente con una señal senoidal pura de alimentación y un enlace de cd. El control es logrado por crear un modelo de voltaje senoidal $v_{x\ mod}$, el cual es modificado en amplitud y ángulo para interactuar con el voltaje principal v_x ; en esta forma las corrientes de entrada son controladas sin medirlas.

El voltaje $v_{x\ mod}$ es generador usando ecuaciones diferenciales que gobiernan el rectificador. De la Figura 3.8, se puede derivar la siguiente ecuación diferencial:

$$v_x(t) = L_x \frac{di_x}{dt} + Ri_x + v_{x\ mod}(t) \quad (3.5)$$

Asumiendo que $v_x(t) = \hat{V} \text{sen}(\omega t + \varphi)$, la solución para $i_x(t)$, para obtener un voltaje $v_{x\text{mod}}$ capaz de hacer trabajar al rectificador a factor de potencia constante, debería ser de la siguiente forma:

$$i_x(t) = \hat{I}(t) \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.5), (3.6), y $v_x(t)$ permiten tener una función de tiempo capaz de modificar $v_{x\text{mod}}$ en amplitud y fase, lo que haría que el rectificador trabajara a factor de potencia unitario.

Combinando estas ecuaciones con $v_x(t)$, queda:

$$\begin{aligned} v_{x\text{mod}} = & \left[X_s \hat{I} \text{sen } \varphi + \left(\hat{V} - R \hat{I} - L_s \frac{d\hat{I}}{dt} \right) \cos \varphi \right] \text{sen } \omega t \\ & - \left[X_s \hat{I} \cos \varphi + \left(R \hat{I} + L_s \frac{d\hat{I}}{dt} \right) \text{sen } \varphi \right] \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.7)$$

La implementación del rectificador controlado por voltaje para una operación con factor de potencia unitario se muestra en la Figura 3.9. Se puede observar que no se necesita sensar las corrientes de entrada. Sin embargo, para asegurar los límites de estabilidad tan bien como los límites del controlador por corriente, se deben implementar algunos controles. Los bloques \hat{R} , $s\hat{L}_s$ y \hat{X}_s deben emular y reproducir exactamente los valores de R , X_s , y L_s del circuito. Sin embargo, estos parámetros no permanecen constantes y esto afecta a la estabilidad del sistema.

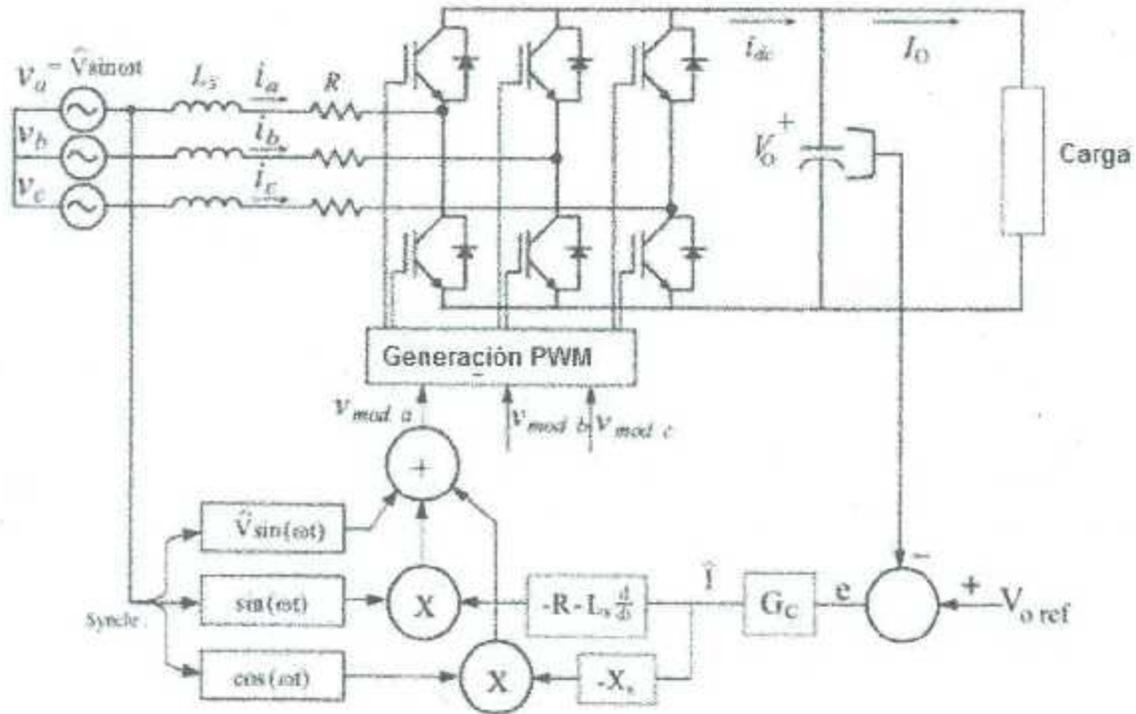


Figura 3.9. Implementación del rectificador controlado por voltaje con operación de factor de potencia unitario.

(d) Control de espacio vectorial:

Otro punto de vista es controlar el VSR trifásico, en vectores espaciales d-q. Las corrientes de entrada i_a , i_b , i_c pueden ser representadas por un vector único complejo $\hat{i}_s = i_d + j i_q$, definido por:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde $\theta = \omega t$.

Esta transformación puede ser aplicada

$$v_{mod} = \begin{bmatrix} v_{mod a} \\ v_{mod b} \\ v_{mod c} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

La componente fundamental de los voltajes del VSR PWM definido y con $\mathbf{v}_s = [v_a \ v_b \ v_c]^T$.

El circuito obtenido con esta transformación y el esquema de control son presentados en las Figuras 3.10 y 3.11.

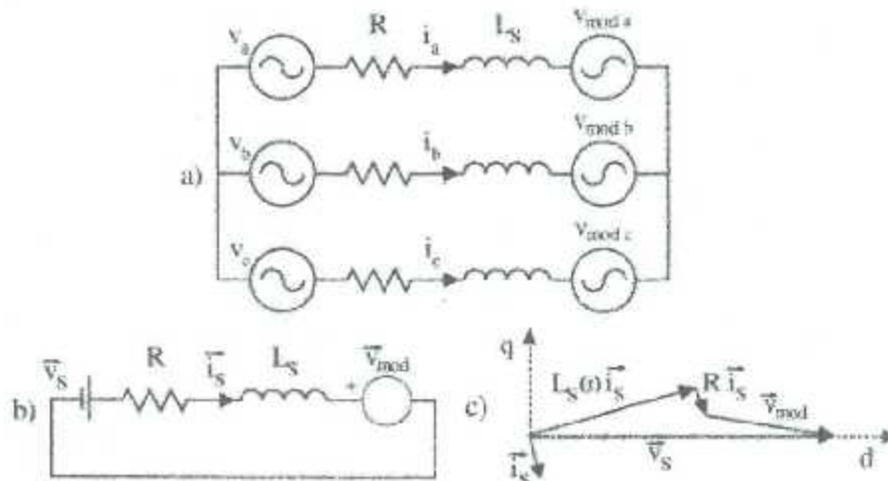


Figura 3.10. Circuito equivalente: (a) antes de la transformación y (b) después de la transformación. (c) cantidades d-q del vector espacial.

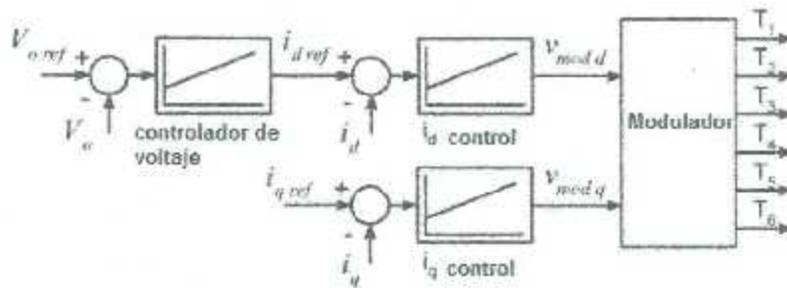


Figura 3.11. Esquema de control de espacio vectorial.

3.4 Convertidores Electrónicos de CD – CA (Inversores)

Los convertidores electrónicos de CD – CA o inversores son ampliamente utilizados en aplicaciones industriales y sistemas eólicos de generación. El objetivo principal de este tipo de convertidores es convertir una señal de voltaje o corriente directa en una de corriente alterna a una determinada amplitud y frecuencia deseadas. Su estructura y control son relativamente sencillos; estos se clasifican de acuerdo al tipo de fuente de CD que éstos convierten en CA y pueden ser inversores de corriente (CSI por sus siglas en inglés) e inversores de voltaje (VSI por sus siglas en inglés). En esta tesis se tratará con el inversor de voltaje.

La amplitud del voltaje de salida de un inversor puede ser fija o variable, al mismo tiempo que la frecuencia, esto se logra mediante técnicas de modulación de ancho de pulso [16]. En los modelos simulados en este trabajo se hace uso de la técnica de modulación de ancho de pulso senoidal (SPWM por sus siglas en inglés), para el control de los disparos del circuito inversor.

3.4.1 Técnica de modulación SPWM

Los circuitos inversores necesitan convertir el voltaje de CD de la salida de un puente rectificador, comúnmente empleado en sistemas de generación conectados a la red eléctrica, a una determinada frecuencia y amplitud; la señal de salida senoidal llamada señal moduladora es comparada con una señal triangular llamada portadora a una frecuencia de conmutación determinada para generar una serie de pulsos, como se muestra en la Figura (3.12). Las componentes armónicas de la señal serán comúnmente múltiplos de la frecuencia de conmutación. La frecuencia de la señal de referencia determina la frecuencia del voltaje de salida y su amplitud pico controla el índice de modulación, lo que determina el valor RMS del voltaje de salida. Debido a esto, la amplitud y frecuencia de salida del voltaje de salida pueden ser fácilmente cambiados controlando la señal moduladora y debido a que la señal portadora cambia de signo positivo a negativo cada medio ciclo el SPWM será bipolar, y si no lo hace será unipolar, como se muestra en la Figura (3.13).

Esta técnica puede ser fácilmente adoptada por circuitos inversores trifásicos, como es el caso de este trabajo.

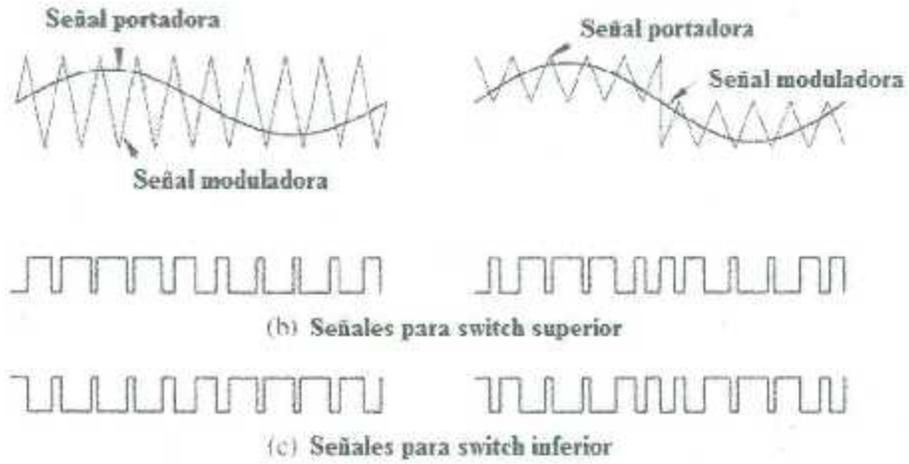


Figura 3.12. Generación del SPWM.

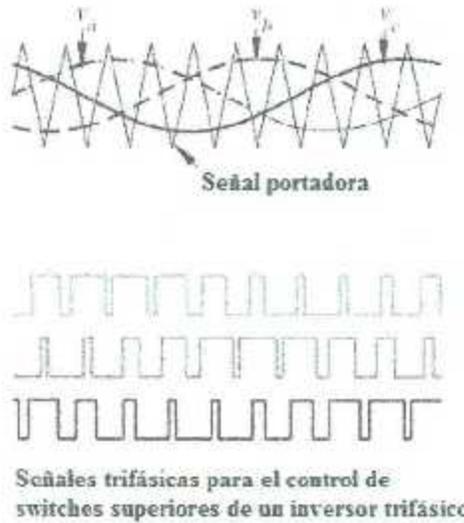


Figura 3.13. Técnica de modulación SPWM trifásica.

3.4.2 Operación de Inversores monofásicos

En la Figura (3.14) se muestra el circuito de un inversor monofásico, el cual puede ser operado para obtener una señal bipolar o unipolar SPWM para el voltaje de salida v_{ab} ; en la Figura (3.15) se muestran las señales de cuando es operado en los dos casos.

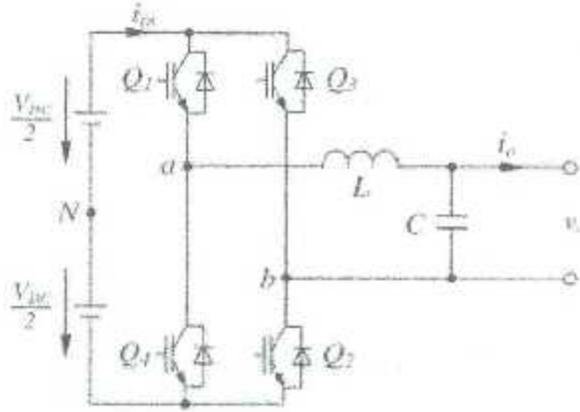


Figura 3.14. Inversor de voltaje monofásico.

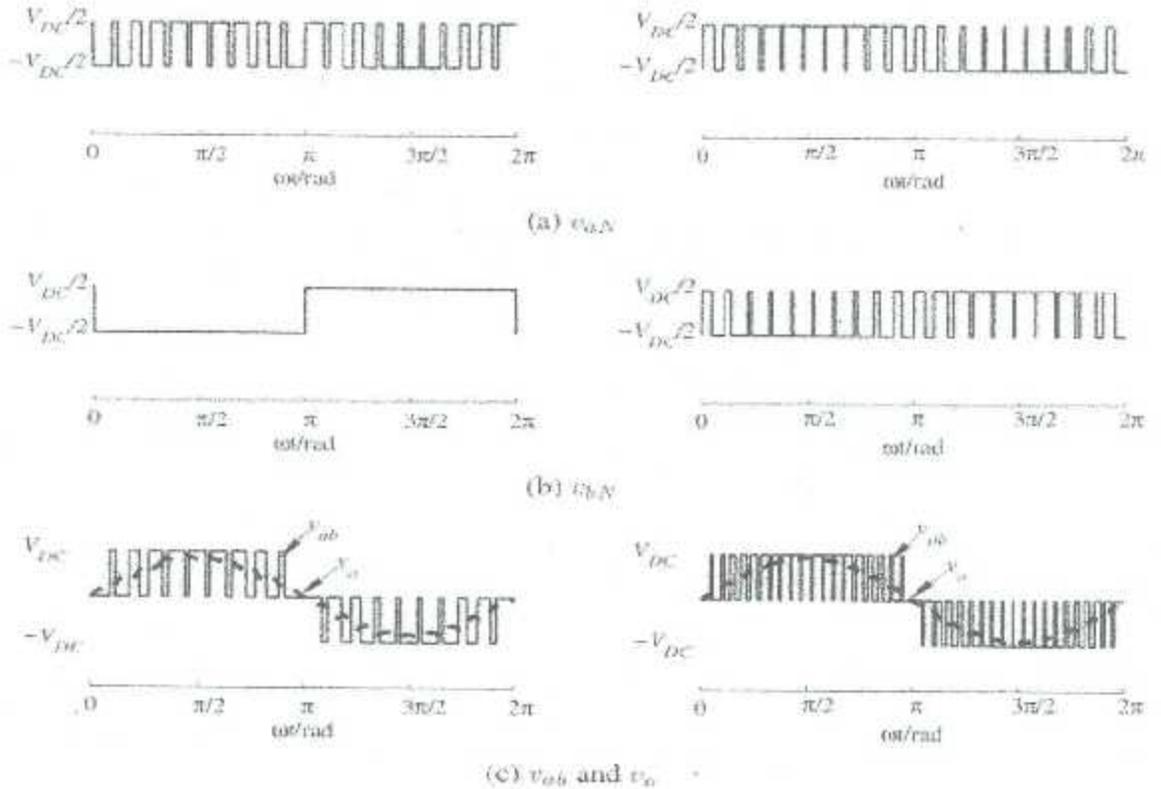
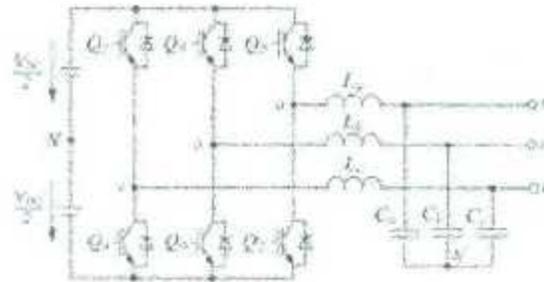


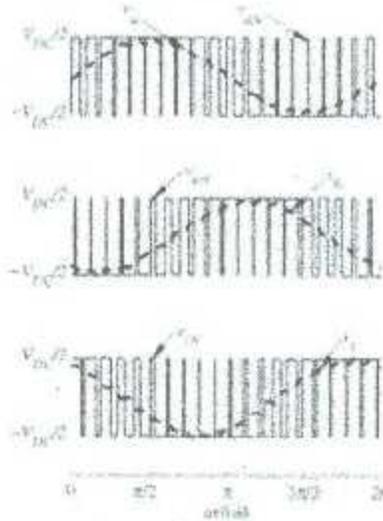
Figura 3.15. Operación unipolar del inversor monofásico (columna izquierda). Operación bipolar del inversor monofásico (columna derecha).

3.4.3 Operación del inversor trifásico de voltaje

Para los inversores trifásicos, tres voltajes senoidales pueden ser comparados con una señal portadora para generar tres conjuntos de señales bipolares de tipo PWM, como las mostradas en la Figura (3.13). Esto se hace para controlar por separado las tres piernas del inversor; sus curvas correspondientes se muestran en la Figura (3.16).



(a) Topología



(b) V_{dc} , V_{u0} , V_{v0} , V_{w0} y los voltajes trifásicos v_u , v_v , v_w

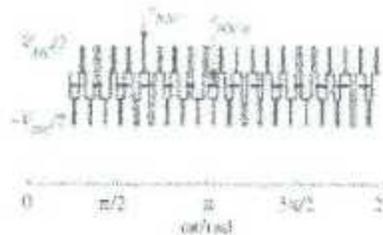


Figura 3.16. Control del inversor trifásico mediante SPWM.

Capítulo 4

Teoría de Funciones de Conmutación

4.1 Introducción

Las funciones de conmutación son una técnica empleada para el análisis y control de circuitos electrónicos de potencia, comúnmente empleados en los convertidores que integran a un sistema eólico de generación, como rectificadores e inversores, necesarios para la interconexión con la red de distribución eléctrica.

Los modelos matemáticos de las funciones de conmutación representan una imagen fidedigna de la operación de los circuitos analizado; en el caso de diodos y tiristores como IGBTs y MOSFETs, en los cuales sus estados de operación son únicamente de encendido y apagado, controlados por señales externas aplicadas a sus compuertas.

Las funciones de conmutación tendrán valores de +1 (para el estado de encendido) y de 0 ó -1 (para el estado de apagado); por lo tanto, las funciones de conmutación deberán ser siempre derivadas de los voltajes y corrientes de entrada y salida obtenidos de las señales controladas, ya que para cada operación, cambiarán el estado y tipo de conexión de los circuitos estas funciones [17].

Este tipo de análisis es aplicable para el estudio de un circuito en estado estacionario, mientras que el análisis en estado transitorio aún es un tema de investigación.

Para obtener los modelos matemáticos de los convertidores electrónicos de potencia se parte de sus modos o estados de operación, de los cuales se derivan un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del circuito en determinado modo de operación; estas ecuaciones se plantean y resuelven cada vez que el circuito cambia de estado. Por lo tanto, en el análisis de circuitos mediante funciones de conmutación, éstas darán una respuesta en estado estacionario del comportamiento del circuito en un determinado estado de operación.

El término función de conmutación se refiere precisamente, a la función que representa a la acción de conmutación de los dispositivos en los convertidores electrónicos de potencia que conmutan a determinada frecuencia [18].

En este capítulo se presentan las aplicaciones de las funciones de conmutación en convertidores electrónicos de potencia convencionales, haciendo un énfasis en los que son empleados en sistemas eólicos de generación, esto servirá como punto de apoyo para comprender el desarrollo de la simulación, del modelo en elementos finitos del GISIP conectado a los convertidores electrónicos de potencia, necesarios

para la conexión con la red eléctrica o cargas aisladas a determinada frecuencia y amplitud.

4.2 Aplicación de las Funciones de Conmutación

Con el reciente interés en el campo de las energías renovables y como la electrónica de potencia juega un papel importante en la conversión de la energía, las funciones de conmutación entran en juego al momento de hacer un análisis y simulación de los convertidores electrónicos de potencia al ser conectados a las fuentes de generación eólica y fotovoltaica. En esta tesis se presenta el enfoque orientado a la energía eólica, debido a que es en ésta en donde son utilizados este tipo de circuitos, conectados a los generadores eléctricos que convierten la energía mecánica en eléctrica, para luego ser suministrada a la red de distribución [19].

Las funciones de conmutación son básicamente señales que representan el estado de encendido y apagado de un interruptor semiconductor, estas señales pueden ser 1 para representar el estado de encendido y -1 ó 0 para el estado de apagado. Estas acciones de conmutación pueden ser representadas por una función matemática $F(t)$, la cual constituye una serie de pulsos que representan los periodos de encendido y apagado. Las funciones de conmutación son una declaración de las instancias de tiempo, tanto de entradas como salidas de un interruptor ó de una configuración de interruptores. La señal de entrada se ve reflejada en la señal de salida; éstas se relacionan similarmente a las funciones de transferencia en los sistemas de control, por lo que se tiene:

$$\text{SEÑAL DE SALIDA } (t) = \text{SEÑAL DE ENTRADA } (t) F(t) \quad (4.1)$$

El procedimiento para la aplicación de la técnica de funciones de conmutación consta esencialmente de dos pasos, modelar matemáticamente y posteriormente utilizar el modelo obtenido en el análisis del circuito; esto se realiza la mayoría de las veces en programas de simulación como Matlab – Simulink (como es el caso de esta tesis).

En el modelado matemático inicialmente son derivados los estados del circuito y en cada estado las señales de voltajes y corrientes son expresadas en puntos clave de operación. Cada estado existe por un específico período de tiempo, por lo cual las expresiones de voltajes y corrientes de una determinada función de conmutación serán válidas sólo para esos determinados periodos de tiempo, es por ello que para cada estado existirá una función de conmutación propia. Sin embargo, más de una función de conmutación debe existir en un mismo circuito y un estado puede ser repetido más de una vez dentro de un período en el circuito no sin antes haber definido la secuencia de los estados de operación. Una vez derivadas las expresiones de voltajes y corrientes, se procederá a construir el modelo matemático en la herramienta computacional de Matlab – Simulink, la cual consta de diversos bloques como

sumadores, moduladores de amplitud, comparadores y operadores booleanos que permiten la construcción de las señales de las funciones de conmutación que darán el control a los elementos de los circuitos a analizar.

El procedimiento para la aplicación de las funciones de conmutación puede ser descrito en los siguientes pasos:

1.- Modelado matemático:

1.1.- Derivación de los estados del circuito y de las expresiones de corrientes y voltajes para cada estado de operación.

1.2.- Identificación de la función de conmutación apropiada para cada estado de operación. Es decir, definir si durante el estado numérico de 1 de la función de conmutación las expresiones serán válidas o no, lo mismo para los estados numéricos de 0 y -1.

1.3.- Establecimiento de la secuencia de estados y por lo tanto del período del circuito; asegurarse de que todas las instancias del circuito sean representadas por una función de conmutación.

1.4.- Derivación de expresiones unificadas empleando las funciones de conmutación y aplicando el teorema de superposición.

1.5.- Construcción de un modelo matemático simple para representar la operación del circuito, basado en expresiones unificadas obtenidas del paso anterior.

2.- Análisis

2.1.- Combinar y expandir las expresiones unificadas derivadas en el paso 1.4 y usar el modelo matemático como guía para derivar las corrientes y voltajes en cada punto del circuito y posteriormente ser analizadas en gráficas o tablas.

4.3 Propiedades de las funciones de conmutación

4.3.1 Funciones de Conmutación Unipolares

Como se ha explicado antes, una función de conmutación dará como resultado una señal al ser multiplicada por un valor de entrada como voltaje o corriente en un circuito. A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo de una función de conmutación aplicada al análisis de un circuito monofásico, en donde una fuente de voltaje $V(t)$ es conectada a un interruptor semiconductor, el voltaje de salida $V_{AB}(t)$ será el mismo de la fuente cuando el interruptor se encuentre cerrado para el período de tiempo t_1-t_2 . Por el contrario, cuando el interruptor se encuentra abierto en t_2-t_3 , el voltaje de salida será igual a cero.

Si al estado de operación de cerrado del interruptor del circuito de la Figura 4.1 se le atribuye el valor lógico de 1 y al estado de operación abierto se le atribuye el valor lógico de 0, entonces la función del tiempo, $F(t)$, se podrá definir como sigue:

$F(t) = 1$; cuando el interruptor se encuentra cerrado; $t_1 < t < t_2$; $V_{AB}(t) = V(t)$

$F(t) = 0$; cuando el interruptor se encuentra abierto; $t_2 < t < t_3$; $V_{AB}(t) = 0$

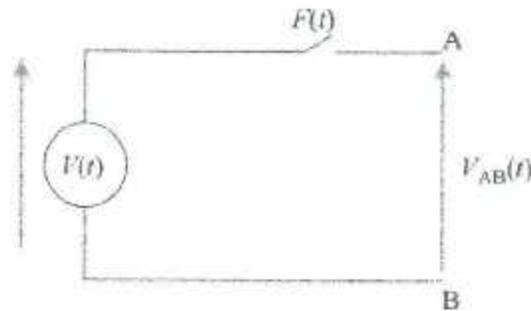


Figura. 4.1. Circuito con conmutador pasivo.

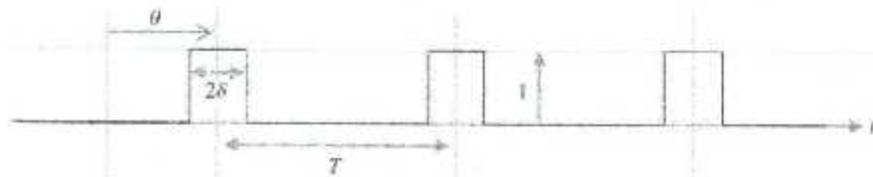


Figura. 4.2. Pulsos que representan los estados del conmutador pasivo.

Posteriormente, el período de la función de conmutación es $t_3 - t_1$, y la frecuencia de conmutación f_s es:

$$f_s = \frac{1}{t_3 - t_1} \quad (4.1)$$

$F(t)$ es una función de pulso como la de la figura anterior y se puede expresar como la suma de senoídes de acuerdo a las series de Fourier, como sigue:

$$F(t) = K_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(n\omega_s t - \theta * n) \quad (4.2)$$

Donde:

n es un número entero

K_0 es el ciclo de trabajo del interruptor

$$K_n = (\sin(n\delta)) / \pi n$$

δ es la mitad del período del interruptor

ω_s = es la frecuencia de conmutación, $2 \pi f_s$

θ es el ángulo de fase de la función de conmutación relativa a la referencia

El término función de conmutación unipolar es debido a que ésta sólo toma valores positivos; consta de una serie de pulsos de magnitud unitaria y un ancho de pulso de 2δ , a una frecuencia de conmutación ω_s , desplazada por un ángulo θ de la referencia. La figura anterior describe los estados de encendido y apagado del interruptor.

4.3.2 Funciones de Conmutación Bipolares

En circuitos con configuración tipo puente como el de la Figura (4.3). El interruptor 1 es operado en conjunto con el interruptor 4 y el interruptor 2 con el interruptor 3. Cada grupo está operando en forma antiparalela. Además, cada grupo está operado por una función de conmutación unipolar:

S1 y S4 son operados por la función $F_{14}(t)$ y S2 y S3 son operados por la función $F_{23}(t)$, las dos funciones de conmutación unipolares son del mismo ancho de pulso, pero desfasadas 180° entre sí, estas se muestran en la Figura 4.4.

En la Figura (4.5) se muestra cómo son derivados los modos de operación del circuito a partir de las relaciones de voltajes de entrada y salida.

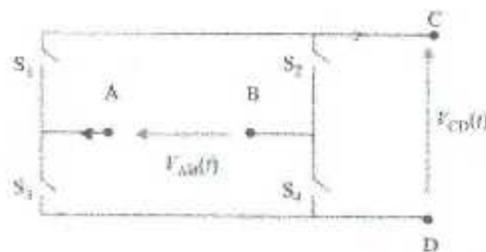


Figura 4.3. Diagrama del circuito tipo puente.

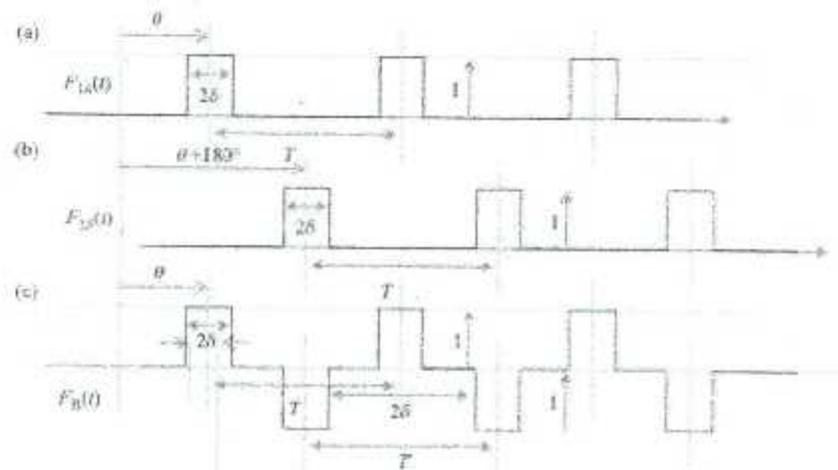


Figura 4.4. Funciones de conmutación del circuito tipo puente.

Los interruptores 1 y 4 están encendidos cuando la función $F_{13}(t)$ se encuentra en el estado lógico de 1; entonces el voltaje de salida está dado por $V_{CD}(t) = F_{14}(t) V_{AB}(t)$. Esto es la contribución del modo de operación 1 al voltaje de salida (Fig. 4.5 (a)).

Los interruptores 2 y 3 están encendidos cuando la función de conmutación $F_{23}(t)$ se encuentra en el estado 1, entonces el voltaje de salida será:

$$V_{CD}(t) = -F_{23}(t) V_{AB}(t) \quad (4.3)$$

La salida será el inverso; esta es la contribución del modo II para el voltaje de salida (Fig. 4.5 (b)).

Para el tercer modo de operación, ninguno de los cuatro interruptores estará conduciendo, Fig. (4.5 (c)); ninguno de los interruptores está encendido y ambas funciones de conmutación están en el estado lógico de 0:

$$F_{23}(t) = F_{14}(t) = 0 \quad (4.4)$$

El voltaje de salida es cero; no hay contribución del modo III para el voltaje de salida.

$$V_{CD}(t) = 0 \quad (4.5)$$

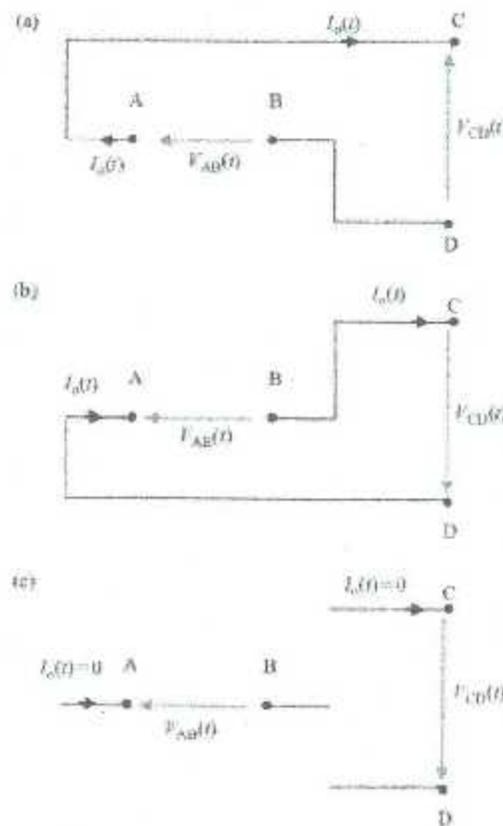


Figura 4.5. Configuración del circuito tipo puente: (a) Modo I, (b) Modo II y (c) Modo III.

Se aplica el teorema de superposición y $V_{CD}(t)$ está dado por la contribución de los dos modos I y II; el tercero no contribuye. Mientras que para la reflexión de $V_{AB}(t)$ en los terminales de CD, $V_{CD}(t)$ estará dado por:

$$V_{CD}(t) = F_1(t) V_{AB}(t) - F_2(t) V_{AB}(t) \quad (4.6)$$

$$V_{CD}(t) = [F_1(t) - F_2(t) V_{AB}(t)] \quad (4.7)$$

Y

$$V_{CD}(t) = F_B(t) V_{AB}(t) \quad (4.8)$$

En donde:

$$F_B(t) = [F_1(t) - F_2(t)] \quad (4.9)$$

$V_{AB}(t)$ es el voltaje de entrada ($V_m(t)$), $V_{CD}(t)$ es el voltaje de salida ($V_o(t)$). Para la configuración tipo puente

$$V_o(t) = F_B(t) V_m(t) \quad (4.10)$$

La expresión anterior (4.10), está de acuerdo con la expresión 4.1, donde la función de conmutación $F_B(t)$ relaciona al voltaje de entrada $V_{AB}(t)$ con el voltaje de salida $V_{CD}(t)$ en un circuito de conmutación. Ambas expresiones representan una modulación de amplitud donde la función de conmutación actúa sobre el voltaje de entrada para dar el valor al voltaje de salida.

La función de conmutación $F_B(t)$ para el circuito tipo puente es simplificada para la expresión:

$$F_B(t) = [F_1(t) - F_2(t)]$$

$$F_B(t) = K_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(n\omega t - \theta * n) - [K_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(n\omega t n - n\pi)] \quad (4.11)$$

Después de la expansión y simplificación, la función se reduce de manera compacta, resultando en:

$$F_B(t) = + 4 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(n\omega t - \theta * n) \left| \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| \quad (4.12)$$

Como aparece en la Figura 4.4, $F_B(t)$ es una señal cuasicuadrada de la misma frecuencia y ancho de pulso que las otras dos funciones de conmutación unipolares.

El voltaje de salida $V_{CLD}(t)$ genera una corriente de salida $I_o(t)$ a través de la impedancia de carga. Esta corriente es reflejada en la entrada.

Durante el modo I: $I_{in}(t) = I_o(t)$; cuando $F_{14}(t) = 1$

Durante el modo II: $I_{in}(t) = -I_o(t)$; cuando $F_{23}(t) = 1$

Por lo tanto:

$$I_{in}(t) = I_o(t) F_{14}(t) - I_o(t) F_{23}(t) \quad (4.13)$$

Esto es simplificado a:

$$I_{in}(t) = F_1(t) I_o(t) - F_2(t) I_o(t) \quad (4.14)$$

$$I_{in}(t) = [F_1(t) - F_2(t)] I_o(t) \quad (4.15)$$

$$I_{in}(t) = F_B(t) I_o(t) \quad (4.16)$$

Sin embargo, la corriente de entrada es una reflexión de la corriente de salida. Los voltajes de entrada y salida con la función de conmutación son mostrados en la Figura 4.6 y el espectro de la señal bipolar es mostrado en la Figura 4.7.

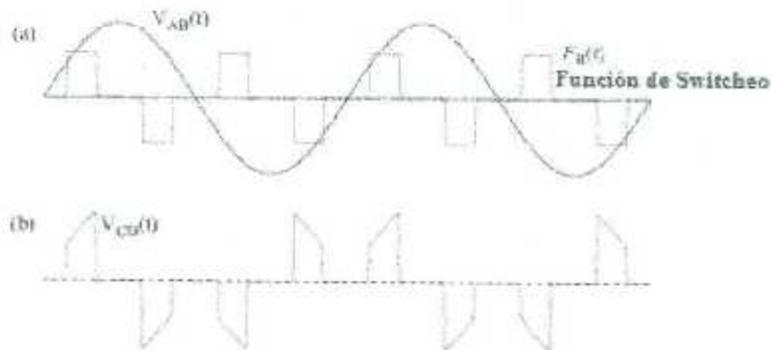


Figura 4.6. Voltajes de entrada y salida representados después de la multiplicación con las funciones de conmutación.

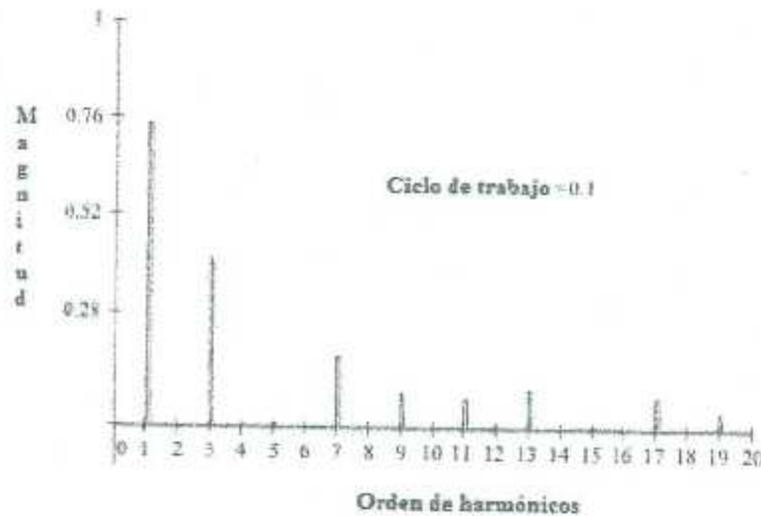


Figura 4.7. Espectro de armónicos de la señal de salida.

4.3.3 Aplicación de las funciones de conmutación en convertidores electrónicos de potencia utilizados en energías renovables

Como se describió anteriormente, las funciones de conmutación son una serie de pulsos de magnitud unitaria, ya sea unipolares o bipolares, en los convertidores electrónicos de potencia del tipo CA-CD, CD-CA y CA-CA; estas series de pulsos o funciones están directamente relacionados con las señales de entrada del circuito, es decir, en la conversión CA-CD. Las funciones de conmutación multiplican la entrada de CA arrojando como resultado una señal de salida de CD y así respectivamente para los demás casos.

Por otra parte, para los convertidores de CD-CD, en ocasiones es necesaria más de una función de conmutación [20].

En este apartado se muestra la aplicación de las funciones de conmutación en los convertidores electrónicos de potencia más comunes y los que son empleados en las energías renovables.

4.3.3.1 Análisis de un rectificador trifásico controlado utilizando las funciones de conmutación.

Para este caso de análisis, los diferentes modos de operación del circuito pueden ser descritos por el conjunto de acciones de conmutación de los seis tiristores que componen a un circuito rectificador de onda completa, como el de la Figura (4.8), controlado por la técnica de modulación SPWM.

De lo anterior se derivan tres funciones de conmutación, las cuales representarán las acciones de los dispositivos semiconductores situados en las tres piernas del convertidor, y las cuales contribuirán a la forma de la señal de salida de dicho circuito. Estas funciones de conmutación serán llamadas $F_{R1}(t)$, $F_{R2}(t)$ y $F_{R3}(t)$; son de forma cuasi cuadrada, pueden ser expresadas como la suma de cosenos y cada una de ellas se encuentra desplazada 60° la una de la otra. El ángulo de disparo de cada señal será identificada con la letra α .

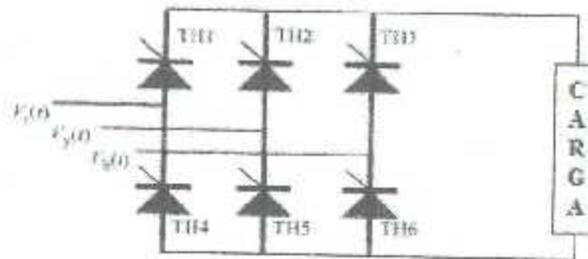


Figura 4.8. Circuito rectificador trifásico controlado con carga RL conectada.

Los seis modos de operación del circuito rectificador de puente completo se muestran en la Figura 4.9. Durante cualquier modo de operación dos de los interruptores semiconductores se encontrarán en estado de encendido, uno del grupo de los interruptores superiores y el otro de los inferiores.

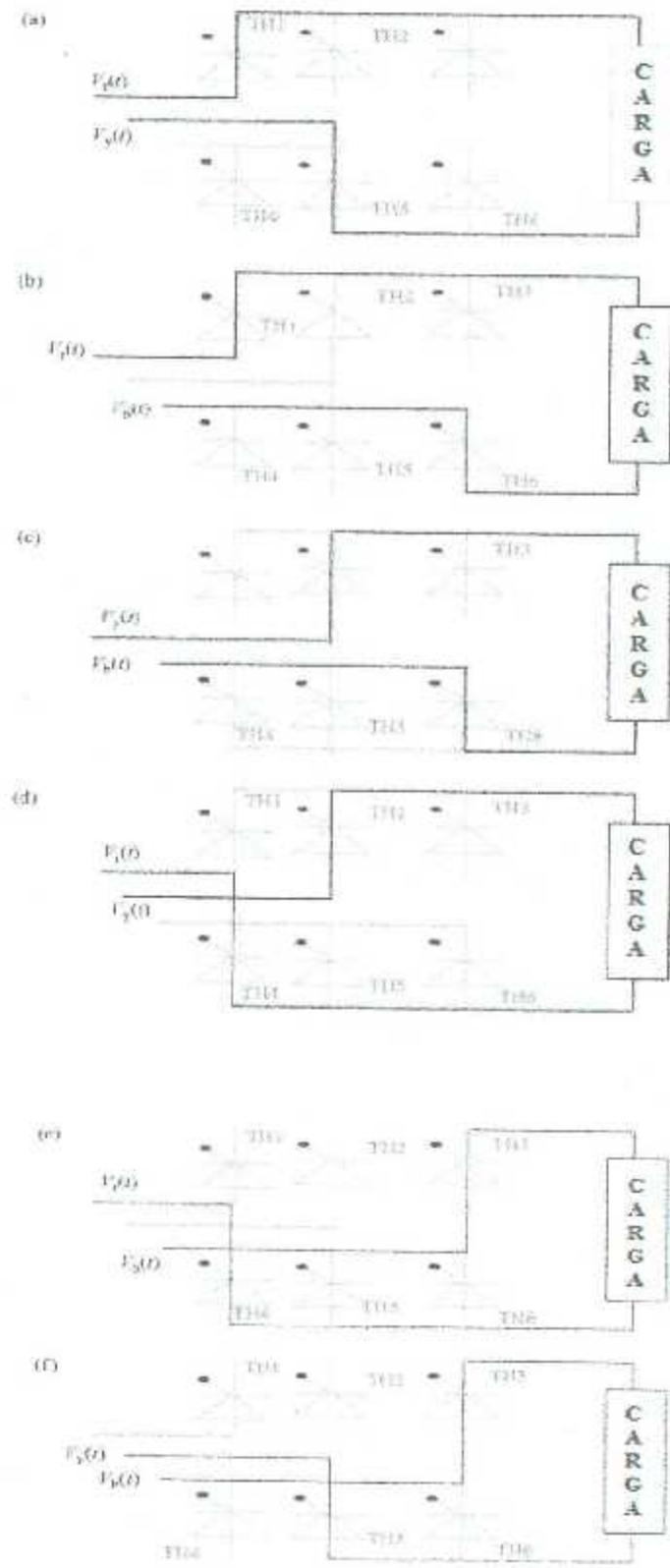


Figura 4.9. Circuito rectificador de onda completa y sus estados de operación: (a) Modo 1; (b) Modo 2; (c) Modo 3; (d) Modo 4; (e) Modo 5 y (f) Modo 6.

Las tres funciones de conmutación anteriormente descritas serán necesarias para dar forma a la señal de voltaje de salida en la carga del circuito rectificador de puente completo, los estados de estas funciones de conmutación serán de 1, 0 ó -1. Estos estados serán multiplicados por las señales de entrada del circuito rectificador, dependiendo de cada modo de operación del circuito.

A continuación se detalla cada uno de los modos de operación del circuito y sus operaciones con las funciones de conmutación correspondientes.

Modo 1:

En este modo el voltaje de línea $V_{ry}(t)$ aparecerá en la salida, por lo tanto se tendrá la siguiente relación:

$$V_o(t) = V_{ry}(t) \quad (4.17)$$

La función de conmutación, $F_{ry}(t)$ es la utilizada asociada a este modo, entonces resultará:

$$F_{ry}(t) = 1 \quad (4.18)$$

Modo 2:

Durante este período el voltaje de línea $V_{br}(t)$ aparecerá invertido en la salida:

$$V_o(t) = -V_{br}(t) \quad (4.19)$$

La función de conmutación $F_{br}(t)$ aparece asociada a este modo de operación así:

$$F_{br}(t) = -1 \quad (4.20)$$

lo cual implica que el primer pulso de esta señal es negativo y existirá un desplazamiento de fase entre $F_{br}(t)$ y $F_{ry}(t)$.

Modo 3:

Durante este período el voltaje de línea $V_{yb}(t)$ aparecerá a la salida y por lo tanto:

$$V_o(t) = -V_{yb}(t) \quad (4.21)$$

La función de conmutación $F_{yb}(t)$ se encuentra asociada a este modo de operación cuando

$$F_{yb}(t) = -1 \quad (4.22)$$

Y estará desfasada 120° de $F_{ry}(t)$.

Modo 4:

Durante este modo de operación el voltaje de línea $V_{ry}(t)$ aparece a la salida del circuito pero invertido, así:

$$V_o(t) = -V_{ry}(t) \quad (4.23)$$

La función de conmutación empleada en el *Modo 1* es ahora utilizada con valor de -1 para este estado; es por eso que el valor del voltaje es negativo:

$$F_{ry}(t) = -1 \quad (4.24)$$

Modo 5:

Durante este modo de operación del circuito rectificador, el voltaje de línea $V_{br}(t)$ aparece y el voltaje de salida toma un valor negativo, así:

$$V_o(t) = -V_{br}(t) \quad (4.25)$$

La señal de conmutación utilizada en el *Modo 2* es la apropiada para este modo pero toma el valor negativo $F_{br}(t) = -1$.

Modo 6:

Durante este periodo el voltaje de línea $V_{yb}(t)$ aparece a la salida de una forma invertida, de esta manera:

$$V_o(t) = -V_{yb}(t) \quad (4.26)$$

La función de conmutación también utilizada durante el *Modo 3* será la apropiada para este modo también, pero ahora tomando el signo contrario:

$$F_{yb}(t) = -1 \quad (4.27)$$

El modelo matemático del circuito rectificador trifásico controlado es mostrado en la Figura (4.10).

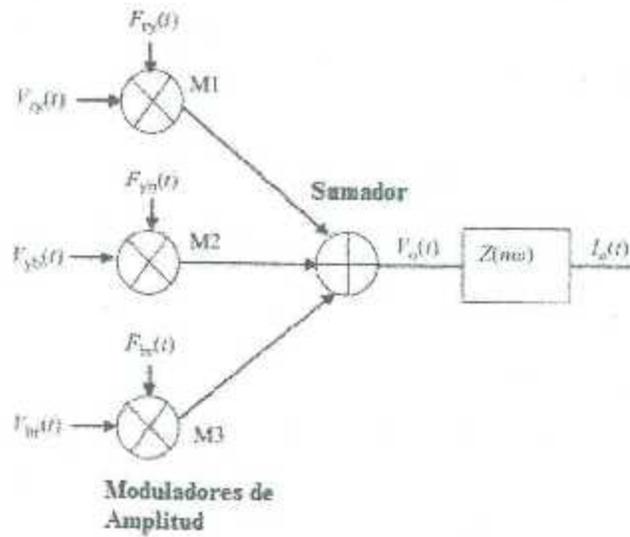


Figura 4.10. Diagrama de bloques del modelo matemático del rectificador trifásico controlado utilizando funciones de conmutación.

Las funciones de conmutación de voltajes son representadas de forma gráfica en la Figura (4.11). En donde se muestra la señal de AC que éstas multiplican, para ser rectificadas a la salida del circuito.

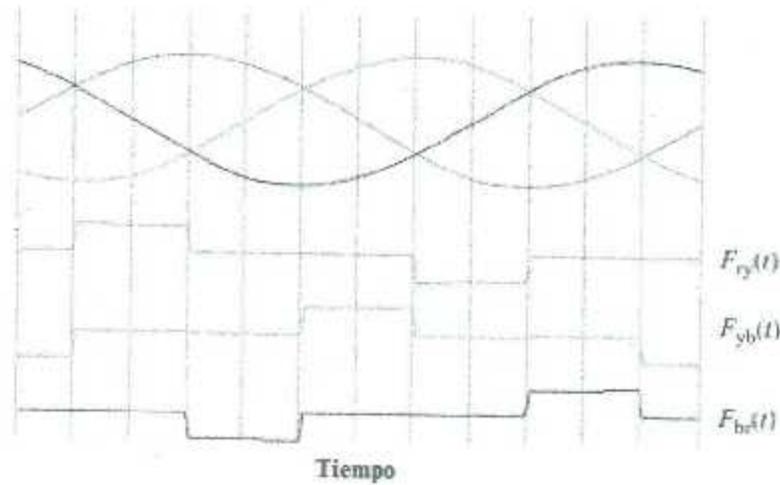


Figura 4.11. Funciones de conmutación aplicadas a la señal de entrada del circuito rectificador.

Las funciones de conmutación representadas matemáticamente pueden describirse en expansiones de series de Fourier como sigue:

$$E_{ry}(t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} K_n [\cos(n\omega t - n\theta)] \quad (4.28)$$

$$E_{br}(t) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} K_n [\cos(n\omega t - n\theta - n50^\circ)] \quad (4.29)$$

$$E_{yb}(t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} K_n [\cos(n\omega t - n\theta - n120^\circ)] \quad (4.30)$$

donde:

$$K_n = \sin(n\delta)/n\pi$$

δ = medio ciclo del periodo de encendido, 30°

$$\theta = \alpha + \delta + 30^\circ$$

n = Es un número entero impar

De esta forma los voltajes y corrientes de salida del rectificador trifásico se muestran en la Figura 4.12.

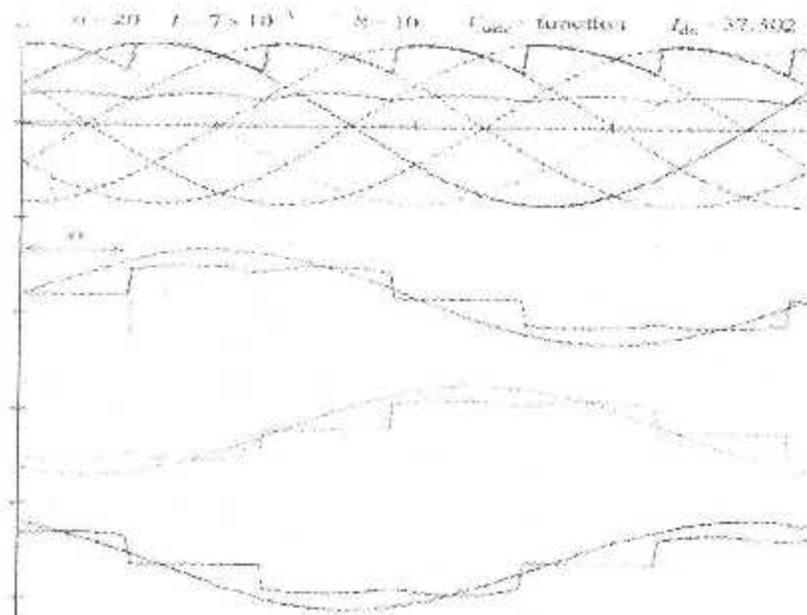


Figura 4.12. Voltajes y corrientes de salida de rectificador trifásico.

Aplicación de las funciones de conmutación en circuitos CD – CD, para el caso de un circuito elevador de voltaje (Figura 4.13).

El procedimiento para describir la operación del circuito elevador de voltaje se describe en la Figura 4.14, en donde se aprecian los diferentes modos de operación del circuito, junto con las respectivas funciones de conmutación empleadas.

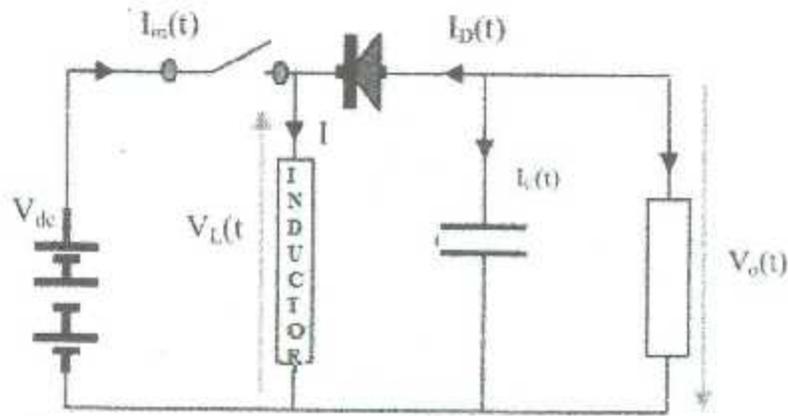


Figura 4.13. Circuito elevador de voltaje.

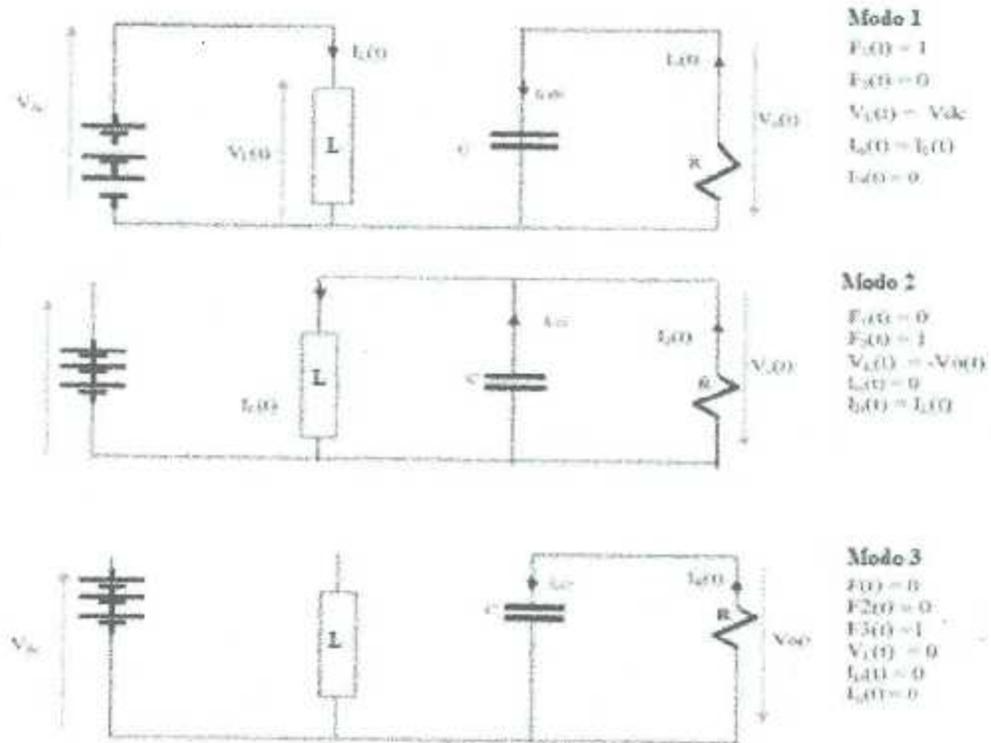


Figura 4.14. Modos de operación del circuito elevador de voltaje y sus respectivas funciones de conmutación.

Los modos de operación del circuito elevador de voltaje son 3, durante el modo 1 el conmutador se encuentra cerrado, el diodo se encuentra bloqueado, el inductor es cargado por la fuente y el capacitor se encuentra alimentando la fuente.

Cuando el conmutador está abierto se tiene el modo de operación 2 la fuente está inactiva, el diodo está polarizado y en conducción, por lo que el inductor está alimentando tanto al capacitor como a la carga.

En el modo 3 la corriente del inductor se convierte en cero y el diodo está en polarización inversa, por lo tanto el capacitor está alimentando la carga y tanto la fuente como el inductor se encuentran desconectados.

En la Tabla I se muestran los diferentes estados de operación del circuito elevador de voltaje así como el estado de las funciones de conmutación correspondientes.

Tabla I: Estados de operación del circuito elevador de voltaje.

	MODO I	MODO II	MODO III
$F_1(t)$	1	0	0
$F_2(t)$	0	1	0
$F_3(t)$	0	0	1
$V_L(t)$	V_{dc}	$-V_o(t)$	0
$I_{in}(t)$	$I_L(t)$	0	0
$I_D(t)$	0	$I_L(t)$	0

El conjunto de funciones de conmutación descritas matemáticamente mediante expansiones en series de Fourier se muestra a continuación:

$$F_1(t) = K_{10} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_{1n} \cos(n\omega t - n\theta_1) \quad (4.31)$$

$$F_2(t) = K_{20} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_{2n} \cos(n\omega t - n\theta_2) \quad (4.32)$$

$$F_3(t) = K_{30} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_{3n} \cos(n\omega t - n\theta_3) \quad (4.33)$$

Como se aprecia en el modo I, la función de conmutación $F_1(t)$ toma el valor de 1, las otras dos funciones de conmutación son 0, el voltaje del inductor $V_L(t)$ es igual a la entrada de voltaje.

En el modo II la función de conmutación $F_2(t)$ toma el valor de 1, las otras dos funciones son 0, el voltaje del inductor $V_L(t)$ es igual al voltaje de salida.

En el modo III, la función de conmutación $F_3(t)$ toma el valor de 1, mientras las otras dos funciones serán 0 y el voltaje del inductor será igual a 0.

El voltaje del inductor en todo momento estará dado por la siguiente expresión:

$$V_L(t) = V_{dc} \times F_1(t) + V_o \times F_2(t) + 0 \times F_3(t) \quad (4.34)$$

De manera similar las expresiones para las corrientes estarán dadas por:

$$I_{in}(t) = I_L(t) \times F_1(t) + 0 \times F_2(t) + 0 \times F_3(t) \quad (4.35)$$

$$I_D(t) = 0 \times F_1(t) + I_L(t) \times F_2(t) + 0 \times F_3(t) \quad (4.36)$$

Para una correcta aplicación de las funciones de conmutación debe cumplirse que la suma de todas las funciones del circuito debe ser igual a 1.

$$F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) = 1 \quad (4.37)$$

Por razones de simplicidad, se procede al análisis asumiendo una conducción continua, en donde $F_3(t)$ será siempre igual a 0. En ese caso y partiendo de la expresión anterior, tendremos que:

$$F_2(t) = 1 - F_1(t) \quad (4.38)$$

$$\text{Dejando } F_2(t) = K_0 + \Phi(t) \quad (4.39)$$

En donde

$$\Phi(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(n\omega t - n\theta_2) \quad (4.40)$$

Sustituyendo en (4.34)

$$V_L(t) = V_{dc}K_0 + V_{dc}\Phi(t) - V_o(t) \times [1 - K_0] - \Phi(t)V_o(t) \quad (4.41)$$

El voltaje de salida es reducido a su componente en dc V_{dco} puede ser obtenido de la siguiente forma:

$$V_{dco} = V_{dc} \frac{K_0}{1-K_0} \quad (4.42)$$

Tomando en cuenta las partes de corriente alterna del circuito e ignorando el voltaje de rizo a la salida se tiene:

$$V_L(t) = (V_{dc} - V_{dco})\Phi(t) \quad (4.43)$$

La parte de corriente alterna de la corriente del inductor es derivada de (4.43), resultando:

$$I_L(t) = I_{L,dc} + 2(V_{dc} - V_{dco}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n 2}{\omega n L} \sin(n\omega t - n\theta_2) \quad (4.44)$$

Donde $I_{L,dc}$ es la componente en dc de la corriente del inductor, y la corriente que atraviesa al diodo puede ser calculada como:

$$I_D(t) = I_L(t) \times [1 - K_0 - \Phi(t)] \quad (4.45)$$

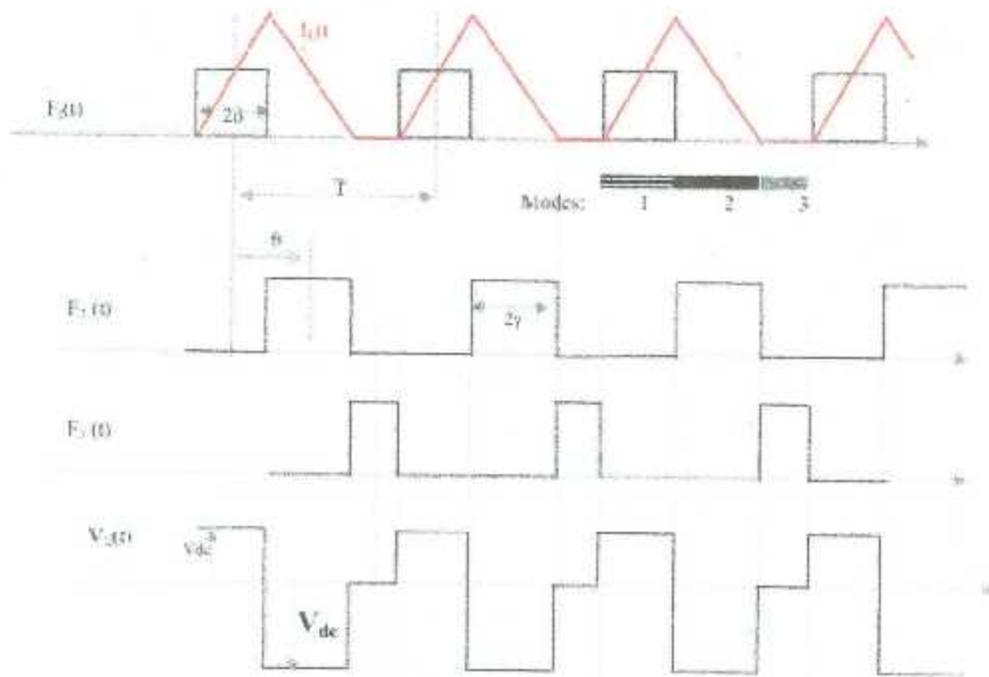


Figura 4.15. Formas de onda de las señales de conmutación del circuito elevador y el voltaje de salida.

4.3.3.2 Funciones de conmutación aplicadas a inversores trifásicos de onda completa.

Se considera un circuito inversor trifásico como el de la Figura 4.16, para ser analizado mediante la teoría de funciones de conmutación.

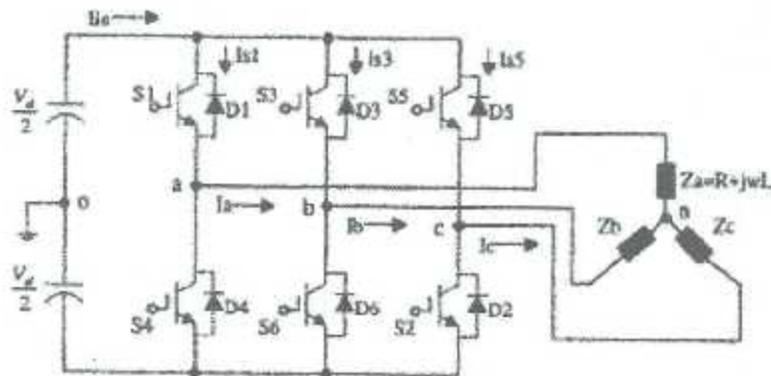


Figura 4.16. Diagrama del circuito inversor de voltaje conectado a una carga RL.

La metodología empleada para el análisis de este circuito es multiplicar las señales de entrada (CD) por las funciones de conmutación respectivas, para lograr una señal de

CA en la salida. Cabe señalar que se emplea la técnica de modulación SPWM para el control de los disparos de los interruptores semiconductores [21].

El conjunto de funciones de conmutación puede ser considerado como un bloque de función de transferencia, como se muestra en el diagrama de la Figura 4.17.

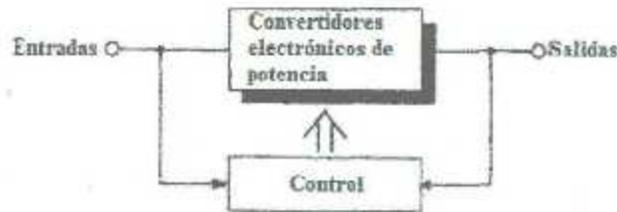


Figura 4.17. Bloque de función de transferencia de las funciones de conmutación.

Conjunto de funciones de conmutación que serán multiplicadas por las señales de entrada del circuito inversor trifásico:

$$\begin{aligned} [V_{ab}, V_{bc}, V_{ca}] &= TF \cdot V_d \\ I_{in} &= TF \cdot [I_a, I_b, I_c]^T \end{aligned} \quad (4.46)$$

En donde los voltajes trifásicos de CA son el resultado de la multiplicación del conjunto de funciones de conmutación por el voltaje de entrada de CD del circuito.

La estrategia de control y las señales de las funciones de conmutación se muestran en la Figura 4.19.

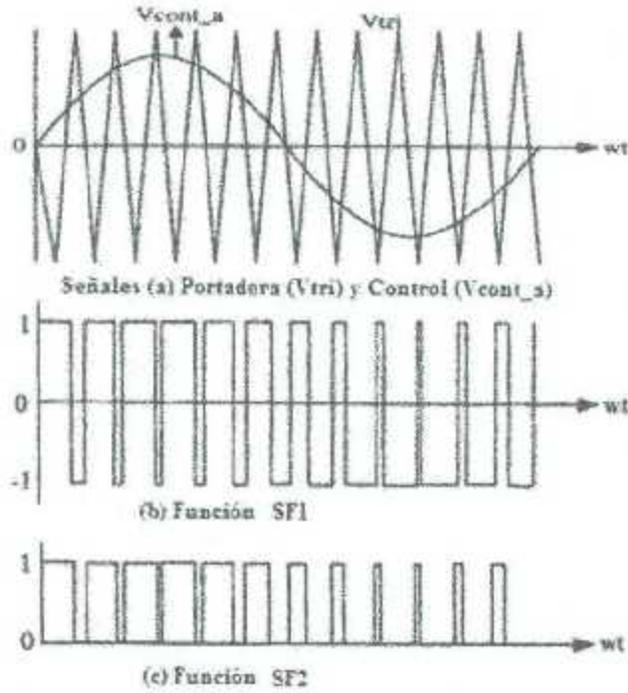


Figura 4.19. Estrategia de control del VSI.

Modelamiento matemático de las funciones de conmutación para obtener la salida de CA del inversor trifásico:

$$V_{ao} = \frac{V_d}{2} \cdot SF_{1_a} = \frac{V_d}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t) \quad (4.47)$$

$$V_{bo} = \frac{V_d}{2} \cdot SF_{1_b} = \frac{V_d}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n(\omega t - 120^\circ) \quad (4.48)$$

$$V_{co} = \frac{V_d}{2} \cdot SF_{1_c} = \frac{V_d}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n(\omega t + 120^\circ) \quad (4.49)$$

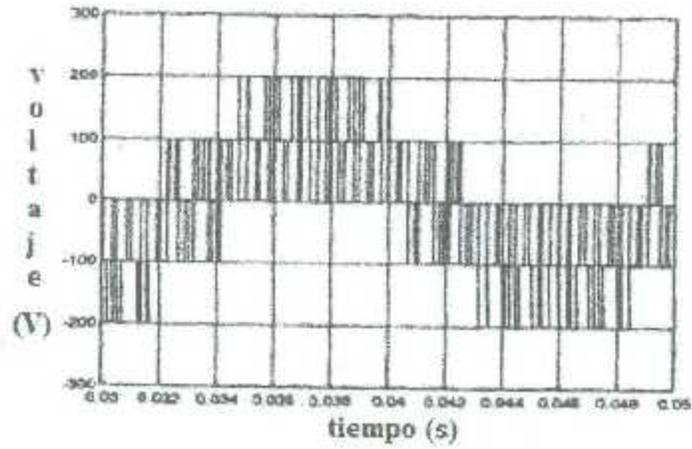


Figura 4.20 Señal del voltaje de línea de la fase a del circuito inversor.

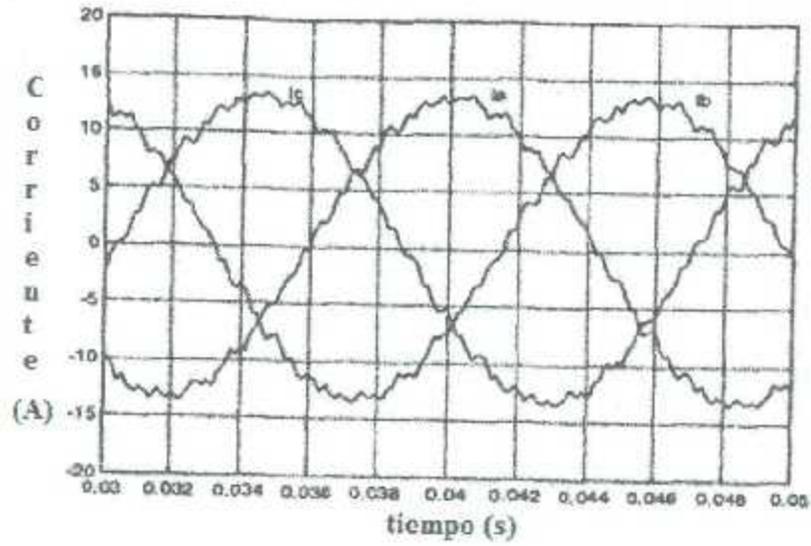


Figura 4.21. Señales de la corriente trifásica en la carga RL balanceada.

Capítulo 5

El Método de los Elementos Finitos

5.1 Introducción

La necesidad de mejorar la precisión durante los procesos de diseño y análisis de máquinas eléctricas, ha fomentado el desarrollo de modelos numéricos apropiados para la resolución de fenómenos eléctricos y magnéticos, los cuales se basan principalmente en la determinación de la distribución de los campos eléctricos y magnéticos en las estructuras que se encuentran bajo estudio, las cuales en el caso de las máquinas eléctricas, son geometrías complejas compuestas de materiales con propiedades no lineales [22].

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método numérico que es rentable para analizar este tipo de problemas, incluso en problemas con campos variantes en el tiempo y con materiales no homogéneos, anisotrópicos o no lineales, el objetivo principal de este método es encontrar una solución aproximada de las incógnitas que conforman las ecuaciones diferenciales que describen determinados puntos de un sistema físico (como las máquinas eléctricas), dividido mediante nodos y elementos.

Este método fue propuesto durante los años cuarenta, primordialmente era aplicado en el análisis y diseño de aeronaves, con el transcurso del tiempo fue adoptado en muchos problemas físicos y matemáticos. Hoy en día es el método más usado para la solución de problemas de campo vectoriales, en particular de problemas de campos electromagnéticos, permite llevar a cabo un meticuloso análisis local, incluyendo intensidad de campo magnético y saturación, permitiendo así una buena estimación del comportamiento de los dispositivos electromagnéticos bajo análisis, lo cual permite reducir substancialmente el número de prototipos físicos [23].

Sin embargo, al ser un método numérico, también presenta algunos inconvenientes. La solución es sólo una aproximación a los resultados reales; si el método no es aplicado correctamente, esto generará resultados imprecisos. Otro inconveniente será el tiempo de cálculo, generalmente largo necesario para los problemas de este tipo; para reducir estos largos tiempos de cálculo, se utilizará cada periodicidad y simetría de la geometría de la estructura bajo análisis. La precisión de los resultados obtenidos estará directamente relacionada con la dimensión de los elementos finitos y con la uniformidad de la subdivisión de la región de interés. Para incrementar la precisión, se hace uso de una fina subdivisión de la estructura, adoptando elementos de una menor dimensión, lo cual también acarreará un incremento notable en el tiempo de cálculo computacional, alargando el tiempo de simulación de una manera considerable.

Por otro lado, en la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales parciales que describen a los fenómenos de tipo térmico, eléctrico, magnético y de esfuerzos, existen diferentes métodos de análisis para resolver las ecuaciones relacionadas con este tipo de problemas, conocidos también como problemas de campo. Estos métodos pueden dividirse en dos grupos, los métodos numéricos y los analíticos.

En el siguiente diagrama se muestran este tipo de métodos, siendo los más comunes los métodos numéricos, los cuales son programados mediante la ayuda de una computadora.

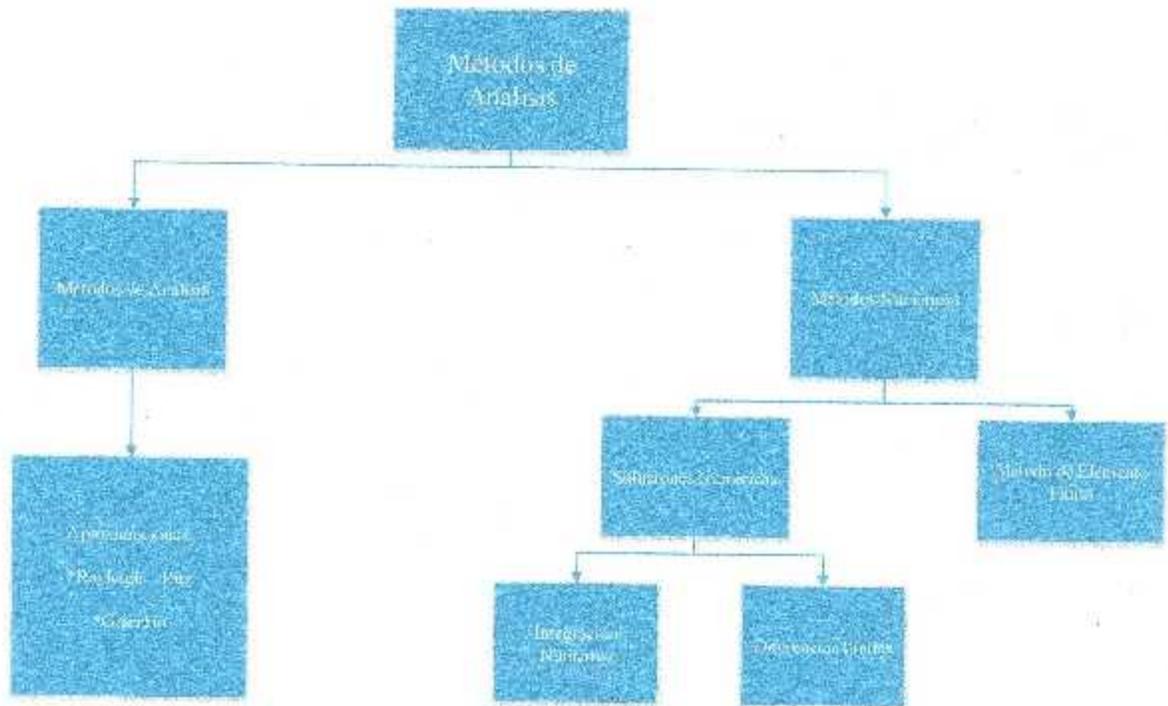


Figura. 5.1. Diagrama de métodos de análisis numérico.

5.2 El Método de los Elementos Finitos

El MEF está esencialmente basado en la subdivisión del dominio entero en un número fijo de subdominios; este método puede organizarse en los siguientes cuatro pasos:

- 1.- Discretización del dominio: El dominio o región de interés es dividido en subdominios; estos son representados por dimensiones reducidas, generalmente elementos triangulares.
- 2.- Derivación de las ecuaciones que gobiernan al elemento.
- 3.- Ensamblado de los elementos dentro de la región de interés.
- 4.- Solución del problema: La solución es obtenida resolviendo el sistema de ecuaciones resultantes [24].

5.2.1 Discretización del dominio

La discretización del dominio es el primer paso del MEF, el cual consiste en dividir el dominio de interés en un N número de elementos; la forma de lograr una buena subdivisión tiene que ver directamente con la precisión de los resultados obtenidos, por lo que a mayor número de elementos corresponderá un resultado más preciso. Sin embargo, el tiempo de cálculo y memoria consumidos aumentarán considerablemente.

En problemas de una dimensión, el dominio es una curva y cada subdominio es un segmento, la conexión de los diferentes segmentos formará la curva original.

En problemas de dos dimensiones, el subdominio es una superficie y cada subdominio es un polígono, usualmente un triángulo o rectángulo.

En problemas de tres dimensiones, el dominio es un volumen y cada subdominio es un tetraedro, un prisma triangular, o un rectángulo sólido, como se muestra en la Figura 5.2.

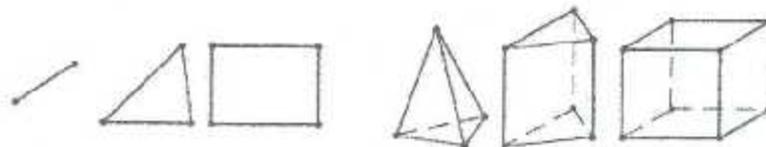


Figura 5.2. Diferentes tipos de elementos.

5.2.2 Derivación de las ecuaciones que gobiernan el problema.

Es en este paso en donde son derivadas las ecuaciones que rigen el dominio del problema a analizar, en problemas de tipo electromagnéticos estas son derivadas de las ecuaciones de Maxwell, para luego ser solucionadas mediante artificios matemáticos como los que se describen en las siguientes secciones.

5.2.3 Ensamblado de los elementos dentro de la región de interés.

Para el ensamblado de los elementos se enumeran los elementos dentro del dominio a analizar, esto mediante una numeración local y global de los elementos que conforman el mallado de la geometría, como se muestra en la Figura 5.3.

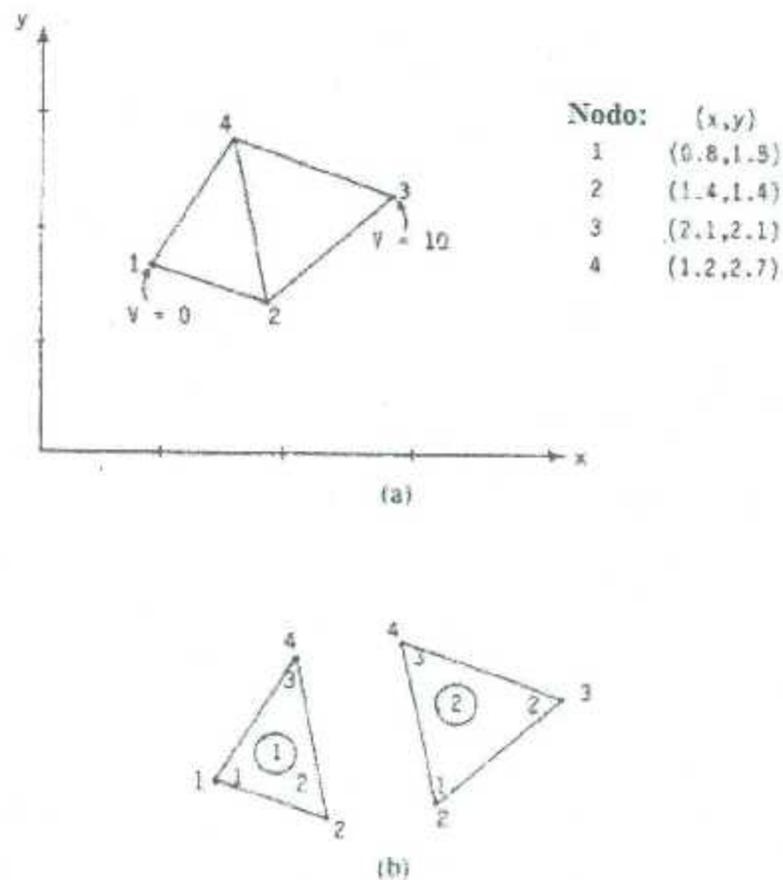


Figura 5.3. Ensamblado y numeración de los elementos finitos.

5.2.4 Solución del problema

Es en este paso en donde se resuelven las ecuaciones que rigen el dominio de interés, para luego mostrar la solución en forma de gráficas la solución obtenida.

5.3 Aplicación del método de elemento finito en dos dimensiones

La mayoría de los problemas de campo que conciernen al análisis de máquinas eléctricas pueden ser llevados a cabo por un análisis en dos dimensiones (2D). Esto proporciona muchas ventajas, ya que genera resultados con una apreciable reducción del tiempo de cómputo. Los fenómenos omitidos en el análisis en 2D que no son despreciables, tienen que ser tomados en cuenta por medio de las correcciones adecuadas para la solución obtenida.

Los elementos utilizados pueden ser triangulares o cuadrilaterales, con lados curvos o rectos como los mostrados en la Figura 5.4, siendo los elementos triangulares los más utilizados ya que contienen un menor número de nodos, lo que reduce el número de incógnitas del dominio discretizado. [25].

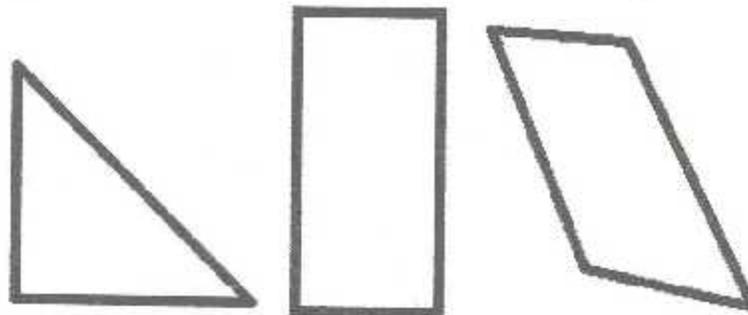


Figura 5.4. Elementos en dos dimensiones.

5.4 Método de los Elementos Finitos en Electromagnetismo

La mayoría de los fenómenos con campos electromagnéticos a bajas frecuencias pueden ser descritos por la ecuación de Poisson (o para regiones en el vacío la ecuación de Laplace) o la ecuación de difusión. Para campos estáticos, es decir, donde no existen variaciones en el tiempo, se aplica la ecuación de Poisson. Para problemas en donde ocurren corrientes de Eddy se utiliza la ecuación de difusión. En un principio estas ecuaciones diferenciales pueden ser fáciles de resolver, de hecho muchas de las funciones, cuando son substituidas en estas ecuaciones, se convierten en la solución al problema.

En el diseño y construcción de dispositivos electromagnéticos, en la mayor parte de los casos el entrehierro es de particular importancia, como por ejemplo, en motores, generadores, transformadores y contactores electromecánicos. Esto se debe a que es en esa región en donde se lleva a cabo la conversión de la energía eléctrica a energía mecánica y viceversa. En el entrehierro las cantidades de campo, como la densidad de flujo e intensidad del campo magnético, deben ser calculadas de forma muy precisa con el fin de evaluar correctamente el comportamiento operativo del dispositivo.

Con los recientes desarrollos en investigación en lo que se refiere al desarrollo de hardware y software computacional, así como de técnicas numéricas, las dificultades relacionadas con problemas numéricos y los costos computacionales asociados a los mismos han sido disminuidas considerablemente. Hoy en día se puede obtener soluciones numéricas eficientes para un amplio rango de problemas; en particular, no existen las limitaciones impuestas por los métodos analíticos, a sólo resolver problemas homogéneos, lineales y en estado estacionario.

Las formulaciones para resolver problemas en electromagnetismo mediante cálculos numéricos, se pueden clasificar en dos grupos, según el tipo de ecuaciones que se resuelven: están las basadas en la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell y las basadas en potenciales escalares o vectoriales.

Las formulaciones que se basan en la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell son utilizadas en problemas transitorios y estáticos; este tipo de formulaciones permiten encontrar directamente las intensidades de campo eléctrico y magnético sin la necesidad de utilizar derivación numérica, obteniendo resultados más exactos.

Las formulaciones basadas en potenciales son bastante utilizadas en problemas de tipo armónico, estático y en problemas de corrientes de Foucault; estos presentan la ventaja de verificar automáticamente las ecuaciones de divergencia (leyes de Gauss). Sin embargo también presentan una pérdida notable de precisión en el cálculo de intensidades de campo eléctrico y magnético debido a la propagación de errores en la diferenciación numérica.

5.4.1 Ecuaciones de campos electromagnéticos

Todos los problemas electromagnéticos pueden ser descritos por un conjunto de ecuaciones básicas, las cuatro ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica y aquellas ecuaciones de los tipos de materiales que pueden ser: isotrópicos o anisotrópicos, lineales o no lineales y homogéneos y no homogéneos. En esta sección se describen las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

Todos los vectores de campos magnéticos y eléctricos \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , y \mathbf{J} y la densidad de carga espacial ρ son en general funciones de espacio tiempo.

La densidad de corriente puede ser dividida por una parte dependiente de un material/campo \mathbf{J}_c y por un valor impuesto \mathbf{J}_0 . Por otra parte, se asume que las propiedades físicas de la permitividad del material ϵ , permeabilidad μ y conductividad σ son independientes del tiempo. Por lo tanto se asumirá que esas cantidades son homogéneas.

A continuación se presenta el conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de los campos electromagnéticos; primero se muestran las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y luego las ecuaciones que conciernen a los materiales:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.4)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_c = \mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{E} \quad (5.7)$$

En caso de que ϵ , μ y σ sean constantes en un cierto dominio, su posición en las ecuaciones puede ser cambiado por los operadores vectoriales geométricos $\nabla \cdot$.

Si son constantes en el tiempo, su posición puede ser cambiada por las derivadas de tiempo $\partial/\partial t$.

La primera ecuación 5.1 es conocida como la ley de Lenz – Faraday, en donde la intensidad de campo eléctrico es \mathbf{E} y la densidad de flujo magnético es denotado por \mathbf{B} .

La segunda ecuación 5.2 es conocida como la ley de Ampere, en donde \mathbf{H} es la intensidad del campo magnético, la densidad de corriente \mathbf{J} y \mathbf{D} es la densidad del flujo eléctrico.

Las ecuaciones 5.3 y 5.4 describen las propiedades constitutivas de la densidad del flujo magnético y la corriente de desplazamiento con la densidad de carga espacial ρ .

Las seis cantidades de campo \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{J} y ρ son dependientes unas de otras.

5.4.2 Potenciales y sus formulaciones

Las ecuaciones de Maxwell representan las propiedades físicas de los campos electromagnéticos, y para resolver estas ecuaciones, especialmente las de forma vectorial se utilizan funciones matemáticas llamadas potenciales.

Existen varios tipos de formulaciones de potenciales ya sean vectoriales o escalares, la elección de estos dependerá del tipo de campo y de problema a resolverse. Al usar este tipo de artificios de campos, el número de ecuaciones diferenciales se reduce, resultando un sistema de ecuaciones diferenciales de $n-1$ ecuaciones.

A continuación se describen los diferentes vectores y escalares de potencial de los campos eléctricos y magnéticos.

Potenciales escalares y vectoriales del campo eléctrico:

Escalar

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.8)$$

Vector

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T} \quad (5.9)$$

Potenciales escalares y vectoriales del campo magnético:

Escalar

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \phi \quad (5.10)$$

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi \quad (5.11)$$

Vector

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.12)$$

El vector de potencial magnético:

Usando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (5.13)$$

Aplicando la ecuación 5.3, se introduce el vector de potencial magnético \mathbf{A} .

La densidad de flujo magnético es obtenida como el rotacional de otro campo vectorial:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.14)$$

Un problema magnetostático se describe por:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (5.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.16)$$

Usando el vector de potencia magnético \mathbf{A} , el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_0 \quad (5.17)$$

Aplicando el cálculo vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ a la ecuación anterior, se obtiene:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_0 \quad (5.18)$$

Con $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ y asumiendo una permeabilidad constante μ , la formulación \mathbf{A} del vector de potencial magnético para un campo magnetostático se convierte en la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (5.19)$$

Considerando los campos cuasi estacionarios, por ejemplo en cálculos de corrientes de Eddy, se deben emplear las formulaciones magneto dinámicas; añadiendo la ley de Ampere, la ley de Faraday deberá ser considerada para evaluar la contribución del campo por las corrientes de Eddy, así pues se tendrá:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.20)$$

Empleando la ley de Ohm para calcular las corrientes de Eddy \mathbf{J}_e se obtiene:

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad (5.21)$$

La ley de Ampere ahora puede ser reescrita, utilizando la formulación \mathbf{A} para un campo magnético cuasi estacionario en el dominio del tiempo:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = \mathbf{J}_0 \quad (5.22)$$

Sustituyendo nuevamente $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ y asumiendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, resultando en formulación \mathbf{A} similar en el dominio del tiempo para el campo magnético transitorio:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (5.23)$$

Asumiendo corrientes de excitación con una frecuencia angular ω y sustituyendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = j\omega \mathbf{A} \quad (5.24)$$

Resultará una formulación \mathbf{A} en el dominio de la frecuencia, para resolver problemas de corrientes de Eddy.

$$\nabla^2 \mathbf{A} - j\omega \cdot \mu\sigma \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (5.25)$$

Esta ecuación es la formulación \mathbf{A} para describir problemas armónico-temporales, los componentes dependientes del tiempo del vector de potencial.

5.4.3 Simple descripción de los campos electromagnéticos

Esta sección trata con algunas simples aplicaciones del MEF para campos electromagnéticos en 2D, expresados en coordenadas cartesianas. Para todos los problemas de campo, una función potencial conveniente ϕ es singularizada y se logra la correspondiente funcional F. En particular, las diferentes expresiones del funcional F_m serán reportadas, referidas como el m-ésimo elemento.

Gracias a las pequeñas dimensiones de los elementos las funciones de interpolación pueden ser simples, se asume una interpolación lineal como la de la expresión 5.26 para la función ϕ en todos los elementos.

$$\phi_m(x, y) = a + bx + cy \quad (5.26)$$

5.4.3.1 Para un campo electrostático

Empezando desde las ecuaciones de Maxwell, el problema de campo electrostático es descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (5.27)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (5.28)$$

$$D = \epsilon E \quad (5.29)$$

Todos los términos derivativos son nulos y la densidad de corriente J es nula también. La única fuerza eléctrica especificada es el campo eléctrico de Coulomb, $E = E_c$. La segunda ecuación asegura que la fuerza del campo eléctrico es irrotacional en todo el dominio, por lo que es conservativo. Entonces es posible definir un escalar de potencial eléctrico V como es $E_c = -\nabla V$.

De estas ecuaciones, el problema de campo es descrito por la siguiente ecuación escalar armónica:

$$\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon E_c) = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\rho \quad (5.30)$$

En caso de un campo en 2D, en donde se usan coordenadas cartesianas, estas ecuaciones se convierten en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon_x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_y \frac{\partial V}{\partial y} = -\rho \quad (5.31)$$

Si el medio es homogéneo e isotrópico, por ejemplo, si la permitividad eléctrica ϵ es constante, la ecuación anterior se reduce a la ecuación escalar de Poisson:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.32)$$

El funcional relacionado al campo electrostático en 2D, referido a la superficie S de un dominio D , está dado por:

$$F = \int_S \left(\frac{1}{2} \epsilon E_c^2 - \rho V \right) dS \quad (5.33)$$

El funcional K_m está dado por:

$$\begin{aligned}
F_m &= \frac{1}{2} \epsilon \int_{A_m} (\nabla V \cdot \nabla V) dS - \rho \int_{A_m} V dS & (5.34) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon \int_{A_m} (b^2 + c^2) dS - \rho \int_{A_m} (a + bx + cy) dS \\
&= \frac{1}{2} \epsilon A_m (b^2 + c^2) - \rho A_m \left(a + b \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + c \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)
\end{aligned}$$

Los coeficientes a , b y c son funciones de potencial V_1 , V_2 , y V_3 de los nodos del mismo elemento triangular, donde el funcional es calculado. F_m puede ser escrita como:

$$F_m = \frac{1}{2} [V_{123}]^T [S_m] [V_{123}] - [V_{123}]^T [T_m] \quad (5.35)$$

Donde $[V_{123}]$ es la columna de vector de potenciales V_1 , V_2 , V_3 de los tres nodos del elemento triangular, y $[S_m]$ es la matriz de rigidez, con dimensión de 3×3 . El componente genérico correspondiente al i -ésimo renglón y j -ésima columna de $[S_m]$ está dado por:

$$S_{ij} = \frac{\epsilon}{4A_m} (q_i q_j + r_i r_j) \quad (5.36)$$

Finalmente $[T_m]$ es una columna vector de términos conocidos, la cual es

$$[T_m] = [t_1, t_2, t_3]^T \quad (5.37)$$

donde:

$$t_i = -\frac{A_m}{y} \rho \quad (5.38)$$

5.4.3.2 Para un campo de corriente estacionario

Las ecuaciones que describen la corriente de campo estacionario son:

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (5.39)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (5.40)$$

$$J = \sigma E \quad (5.41)$$

Todas las derivadas con respecto al tiempo son nulas y la única fuerza eléctrica especificada es el campo eléctrico de Coulomb, $E = E_c$

El estudio se puede establecer de dos maneras:

Por medio del potencial escalar:

Desde que el campo es estacionario, el campo eléctrico E es irrotacional en todo el dominio; entonces será conservativo. Es posible definir un escalar de potencial eléctrico V como es $E = -\nabla V$.

El problema de campo es descrito por la siguiente, ecuación escalar armónica.

$$\nabla \cdot J = \nabla \cdot (\sigma E) = \nabla \cdot \sigma(-\nabla V) = 0 \quad (5.42)$$

que en un campo en 2D, usando coordenadas cartesianas, se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.43)$$

Además, si la conductividad eléctrica σ es constante, se tiene la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (5.44)$$

El funcional F_m , referido a la superficie A_m del m -ésimo elemento, es:

$$F_m = \int_{A_m} \left(\frac{1}{2} \sigma E^2 \right) dS \quad (5.45)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma \int_{A_m} (\nabla V \cdot \nabla V) dS \quad (5.46)$$

$$\frac{1}{2} \sigma A_m (b^2 + c^2) \quad (5.47)$$

Los coeficientes a , b , y c son funciones de los potenciales V_1 , V_2 y V_3 de los nodos del elemento triangular, el funcional F_m puede ser expresado como:

$$F_m = \frac{1}{2} [V_{123}]^t [S_m] [V_{123}] \quad (5.48)$$

Donde $[V_{123}] = [V_1, V_2, V_3]^t$, y el componente genérico de la matriz $[S_m]$ está dado por:

$$S_{ij} = \frac{\sigma}{4A_m} (q_i q_j + r_i r_j) \quad (5.49)$$

Por medio del vector de potencial magnético:

Alternativamente, en lugar del escalar de potencial V , el campo de corriente estacionario puede ser estudiado por medio de un vector de potencial adecuado.

Siendo el vector de densidad de corriente J solenoidal, es posible definir un vector de potencial eléctrico N como es $J = \nabla \times N$, siempre siendo $\nabla \cdot (\nabla \times N) = 0$. Manejando estas ecuaciones, el problema de campo es descrito por la ecuación vectorial casi armónica.

$$\nabla \times E = \nabla \times \left(\frac{J}{\sigma} \right) = \nabla \times \frac{1}{\sigma} (\nabla \times N) = 0 \quad (5.50)$$

El sistema de coordenadas es escogido para que el vector de potencial N tenga solamente una componente en el eje Z , el cual será $Z = [0, 0, N_z]$. De esta forma, sólo habrá componentes en el eje X y en el eje Y del vector de densidad de corriente J :

$$J = \nabla \times [0, 0, N_z] = \left[\frac{\partial N_z}{\partial y}, -\frac{\partial N_z}{\partial x}, 0 \right] \quad (5.51)$$

Con una constante de conductividad σ se logra la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 N_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_z}{\partial y^2} = 0 \quad (5.52)$$

El funcional del m -ésimo elemento es:

$$\begin{aligned} F_m &= \int_{A_m} \left(\frac{1}{2\sigma} J^2 \right) dS \\ &= \frac{1}{2\sigma} \int_{A_m} (\nabla \times N \cdot \nabla \times N) dS \\ &= \frac{1}{2\sigma} A_m (b^2 + c^2) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Siendo a , b , y c funciones de los valores de potencial N_1 , N_2 , y N_3 de los tres nodos del elemento triangular, el funcional F_m se convierte en:

$$F_m = \frac{1}{2} [N_{123}]^t [S_m] [N_{123}] \quad (5.54)$$

Donde $[N_{123}] = [N_1, N_2, N_3]^t$ y $[S_m]$ es la matriz de rigidez; sus componentes genéricos son:

$$S_{ij} = \frac{1}{4\sigma A_m} (q_i q_j + r_i r_j) \quad (5.55)$$

Para un campo Magnetostático:

Empezando por las ecuaciones de Maxwell, los problemas de campo magnetostáticos son descritos por las ecuaciones:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (5.56)$$

$$\nabla \times H = J \quad (5.57)$$

$$B = \mu H \quad (5.58)$$

Siendo que para $\nabla \cdot (\nabla \times B) = 0$, un vector de potencial magnético A es definido como $B = \nabla \times A$. El problema de campo es descrito por al menos una ecuación vectorial armónica:

$$\nabla \times H = \nabla \times \frac{B}{\mu} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A = J \quad (5.59)$$

En el campo 2D, usando coordenadas cartesianas, el vector de densidad de corriente J tiene solamente una componente normal al plano (x,y) , la cual es solamente una componente en el eje Z . Consecuentemente, el vector de potencial magnético A tiene solamente una componente en el eje Z , en este caso el vector A es paralelo al vector J . Entonces estos vectores pueden ser expresados como:

$$J = [0, 0, J_z] \quad (5.60)$$

$$A = [0, 0, A_z] \quad (5.61)$$

La ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A_z}{\partial y} = -J_z \quad (5.62)$$

El vector de densidad de flujo magnético B tiene componentes solamente en el plano (x,y) , debido a:

$$B = \nabla \times [0, 0, A_z] = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, 0 \right] \quad (5.63)$$

En un medio homogéneo, con permeabilidad magnética $\mu_x = \mu_y = \mu$, la ecuación (3.66) es reducida a la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \quad (5.64)$$

Por medio de la interpolación lineal de la ecuación (3.19), el funcional referido al mismo elemento finito está dado por:

$$F_m = \int_{A_m} \left(\frac{1}{2} B \cdot H - J \cdot A \right) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mu} \int_{A_m} (\nabla \times A \cdot \nabla \times A) dS - J_z \int_{A_m} A_x dS \\
&= \frac{1}{2\mu} A_m (b^2 + c^2) - J_z A_m \left(a + b \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + c \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Siendo a , b , y c funciones de los potenciales A_1 , A_2 , y A_3 de los tres nodos del elemento triangular, F_m se convierte en:

$$F_m = \frac{1}{2} [A_{123}]^t [S_m] [A_{123}] - [A_{123}]^t [T_m] \quad (5.66)$$

Donde $[A_{123}] = [A_1, A_2, A_3]^t$, y $[S_m]$ es la matriz de rigidez, de la cual su componente genérico es:

$$S_{ij} = \frac{1}{4\mu A_m} (q_i q_j + r_i r_j) \quad (5.67)$$

El vector columna $[T_m]$ es una función de la densidad de corriente, la cual es impuesta como la fuente. Su componente genérica es:

$$t_i = -\frac{A_m}{3} J_z \quad (5.68)$$

Para un campo magnetostático sin corriente:

Considerando un problema de campo magnetostático caracterizado por un vector de densidad de corriente nula $\mathbf{J}=0$ en todo el dominio. En cuyo caso las ecuaciones que describen el campo son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.69)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (5.70)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.71)$$

Partiendo de que la intensidad de campo \mathbf{H} es irrotacional, un escalar de potencial magnético Ψ puede ser definido como $\mathbf{H} = -\nabla\Psi$, como $\nabla \times (\nabla\Psi) = 0$. De estas ecuaciones, el problema de campo es descrito por una casi ecuación armónica escalar:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mu (-\nabla\Psi) = 0 \quad (5.72)$$

En el campo 2D descrito usando coordenadas cartesianas, y con una constante de permeabilidad magnética μ , la ecuación anterior se convierte en la ecuación de Laplace, dada por:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.73)$$

El funcional F_m del m-ésimo elemento triangular está dado por:

$$\begin{aligned} F_m &= \int_{A_m} \left(\frac{1}{2} B \cdot H \right) dS \\ &= \frac{1}{2} \mu \int_{A_m} (\nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) dS \\ &= \frac{1}{2} \mu A_m (b^2 + c^2) \end{aligned} \quad (5.74)$$

Dado que a , b , y c dependerán de los potenciales Ψ_1 , Ψ_2 , y Ψ_3 de los tres nodos del elemento triangular, la ecuación (5.74) se convierte en:

$$K_m = \frac{1}{2} [\Psi_{123}]^T [S_m] [\Psi_{123}] \quad (5.75)$$

Donde $[\Psi_{123}] = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3]^T$, y $[S_m]$ es la matriz de rigidez de la cual el componente genérico corresponde a:

$$S_{ij} = \frac{\mu}{4A_m} (q_i q_j + r_i r_j) \quad (5.76)$$

Para un campo magnético con Imanes Permanentes:

Las ecuaciones que describen el campo son:

$$\nabla \times H = 0 \quad (5.77)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (5.78)$$

$$B = B_{res} + \mu H \quad (5.79)$$

Donde B_{res} es el vector de densidad de flujo remanente del imán permanente.

Entonces, dado que $\nabla \cdot (\nabla \times B) = 0$ y $\nabla \cdot B = 0$, es posible definir un vector de potencial magnético A , así $B = \nabla \times A$. De estas ecuaciones, resultará que:

$$\begin{aligned}\nabla \times H &= \nabla \times \left(\frac{B - B_{res}}{\mu} \right) = \nabla \times \left(\frac{B}{\mu} \right) - \nabla \times \left(\frac{B_{res}}{\mu} \right) \\ &= \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times A) - \nabla \times \left(\frac{B_{res}}{\mu} \right) = 0\end{aligned}\quad (5.80)$$

El vector $M = \nabla \times \left(\frac{B_{res}}{\mu} \right)$ es el vector de magnetización. La ecuación diferencial que describe el problema de campo es:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times A) = \nabla \times \left(\frac{B_{res}}{\mu} \right) \quad (5.81)$$

El funcional que es asociado con el campo, referido como el área A_m del m -ésimo elemento triangular, está dado por:

$$\begin{aligned}F_m &= \int_{A_m} \frac{1}{2\mu} (B - B_{res})^2 dS \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_{A_m} (B^2 - 2B B_{res} + B_{res}^2) dS \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_{A_m} (\nabla \times A \cdot \nabla \times A - 2B_{res} |\nabla \times A| + B_{res}^2) dS\end{aligned}\quad (5.82)$$

Substituyendo la interpolación lineal dada en la ecuación (5.32) en $A = A_2 u_2$, el funcional F_m (5.83) se convierte en:

$$F_m = \frac{1}{2} [A_{123}]^t [S_m] [A_{123}] - [A_{123}]^t [T_m] \quad (5.83)$$

Donde $[A_{123}] = [A_1, A_2, A_3]^t$, y la componente genérica de la matriz de rigidez $[S_m]$ es:

$$S_{ij} = \frac{1}{4\mu A_m} (q_i q_j + r_i r_j) \quad (5.84)$$

El componente genérico del vector columna $[T_m]$ es una función de la densidad de flujo remanente, y es expresado como:

$$t_i = \frac{1}{\mu} (B_{res,y} q_i - B_{res,x} r_i) \quad (5.85)$$

5.4.4 Procedimiento de análisis usando el método de elemento finito

En las máquinas eléctricas como transformadores, motores, generadores y actuadores, los modelos son estructuras en tres dimensiones en la vida real. Analizar este tipo de dispositivos mediante el MEF en tres dimensiones requiere un largo proceso y considerable tiempo de cálculo. Es por esto que si es posible, el problema de campo debe ser reducido a un problema en dos dimensiones; esto es posible separando todas las simetrías de la máquina a analizar.

Una simetría puede ser de dos tipos:

1.- Simetría plana (simetría xy):

Los fenómenos magnéticos son asumidos para ser idénticos en cada plano (x,y) normal al eje z, por lo tanto se desprecian los efectos en los bordes de las máquinas eléctricas.

2.- Simetría axial (simetría rz):

Se asume que los fenómenos magnéticos son idénticamente repetidos en cada plano (r,z) obtenidos como una rotación alrededor del eje z, el cual es llamado el eje de simetría.

El estudio de un problema de campo magnetostático en 2D con simetría plana se simplifica como sigue:

1.- El vector de densidad de corriente \mathbf{J} tienen solamente un componente en el eje z, el cual es $\mathbf{J} = [0, 0, J_z]$.

2.- El vector de potencial magnético \mathbf{A} es paralelo al vector \mathbf{J} , por lo tanto tiene solamente una componente en el eje z, por ejemplo $\mathbf{A} = [0, 0, A_z]$. En cuanto a la divergencia del vector de potencial magnético, generalmente se adopta la posición de Coulomb, la cual es $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

3.- El vector de densidad de flujo \mathbf{B} tiene componentes solamente en los planos (x,y), como se mostró en la ecuación (5.69).

4.- Con una constante de permeabilidad magnética μ , el problema de campo es descrito por la ecuación de Poisson, la cual se reporta nuevamente como:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \quad (5.86)$$

5.4.5 Condiciones frontera

El vector de potencial magnético A_z , puede ser determinado como la ecuación de Poisson, en cada punto de un dominio D , una vez que se fija la densidad de corriente J_z y el valor de A_z es conocido en la frontera Γ del dominio mismo. Entrando en detalles, en una parte de la frontera llamada Γ_1 , se asigna el valor de A_z (condición Dirichlet), y en la parte restante de la frontera, denominada Γ_2 , se asigna el valor de la derivada A_z normal a la frontera de línea (condición Neumann).

La asignación de condiciones frontera es una operación minuciosa, la cual asume una importancia fundamental en la solución del problema de campo. La elección de condiciones frontera, no influye únicamente en la solución final, sino que también puede reducir el dominio bajo estudio.

5.4.5.1 Condición frontera tipo Dirichlet

Esta condición asigna el valor del vector de potencial magnético A_z a una parte de la frontera. Generalmente, el valor asignado es una constante, así que la línea de frontera asume el mismo valor del vector de potencial magnético A_z . Esto indica que las líneas de flujo son tangenciales a la misma frontera y ninguna línea de flujo cruza la frontera. Es común asignar la condición homogénea Dirichlet, fijando el vector de potencial magnético $A_z = 0$ a lo largo de la parte de la frontera.

Tal condición es equivalente a considerar un material externo con permeabilidad magnética nula, el cual es material aislante magnético, justo fuera del dominio.

Como un ejemplo se considera un generador síncrono con polos salientes. Negando los efectos en el borde de la geometría (esencialmente en los terminales de los devanados), se reconoce una simetría plana, así que la única sección de la máquina representada en la figura 5.4, puede ser analizada. Dado que las líneas de flujo son confinadas dentro del estator de hierro, la condición $A_z = 0$ es asignada a lo largo de la circunferencia externa de la máquina síncrona.

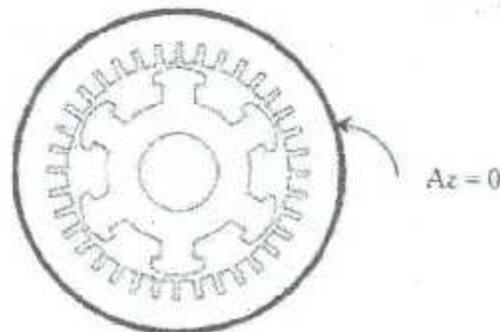


Figura 5.5. Condición Frontera Dirichlet aplicada al borde de la geometría de un generador.

5.4.5.2 Condición frontera tipo Neumann

Esta condición considera imponer un valor dado a la derivada de A_z normal a la frontera, así que las líneas de flujo tienen un ángulo de incidencia respecto a la frontera. En el caso de la condición homogénea Neumann, las líneas de flujo son forzadas a ser perpendiculares respecto a la frontera de línea. Esta condición es equivalente a tener un material externo con infinita permeabilidad magnética justo fuera del dominio.

5.4.5.3 Condición frontera de periodicidad

Esta condición considera asignar una correspondencia entre los valores del vector de potencial magnético a lo largo de dos o más líneas de frontera de la estructura. En términos generales, dos o más líneas de frontera son elegidas; entre ellas se selecciona una línea principal y el potencial de la otra (línea secundaria) se expresa como una función del potencial de la línea principal.

Estas condiciones de frontera son útiles en estructuras que exhiben una repetición de los campos electromagnéticos, pero las condiciones Dirichlet y Neumann no son apropiadas para este caso. Asignando las condiciones de periodicidad a lo largo de al menos dos líneas de la frontera, la estructura puede ser reducida nuevamente y el análisis llevado a cabo sólo en esa parte; las partes disgregadas se convierten en imágenes espejo. Como ejemplo, considere la sección del generador síncrono de la Figura 5.5.



Figura 5.6. Distintos tipos de frontera de periodicidad.

5.4.6 Acoplamiento de modelos de elementos finitos en 2D con ecuaciones de circuitos

Para problemas de campos electromagnéticos analizados mediante elementos finitos, la fuente de excitación de los modelos es la densidad de corriente, la cual puede ser suministrada por un circuito eléctrico externo, el cual comúnmente está compuesto por fuentes de voltaje y elementos pasivos; las ecuaciones de los modelos de elementos finitos y las ecuaciones eléctricas pueden ser acopladas mediante las densidades de corriente, siendo estas últimas las incógnitas del problema a analizar.

Existen dos maneras de acoplar estas ecuaciones, en la primera las ecuaciones obtenidas mediante el método de elementos finitos y los circuitos eléctricos se integran en un simple sistema de ecuaciones, teniendo el vector de potencial magnético como solución principal a este método; se le llama acoplamiento directo. En la segunda metodología se opta por resolver las ecuaciones de manera separada, por lo que se le denomina acoplamiento indirecto.

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell, usando la formulación del vector de potencial magnético, la formulación para encontrar la densidad de corriente en un problema de dos dimensiones resulta de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v(\mathbf{B}) \frac{\partial A(x,y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v(\mathbf{B}) \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} \right) = -J(x,y) \quad (5.87)$$

Donde:

$A(x,y)$ es el vector de potencial magnético,

$J(x,y)$ la densidad de corriente (con componente en z) y

v la reluctividad que depende del vector de densidad de flujo magnético \mathbf{B} .

La expresión de densidad de corriente depende de cómo son definidos los conductores, ya sea si son trenzados o sólidos.

$$\nabla \times v \nabla \times \mathbf{A} = \sigma \mathbf{E}_{ext} - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma v_e \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.88)$$

El primer término del lado derecho de la expresión anterior, siendo \mathbf{E}_{ext} el campo eléctrico externo y σ la conductividad eléctrica, representa la densidad de corriente debida a la fuente de voltaje. El segundo término toma en cuenta la densidad de corriente debida a la variación temporal de \mathbf{A} . El tercer término representa la densidad de corriente debida al movimiento, siendo v_e la velocidad del conductor con respecto

a B. [26]. Usando un marco de referencia en donde la velocidad relativa se convierte en cero, la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\nabla \times v \nabla \times \mathbf{A} = \sigma \mathbf{E}_{ext} - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.89)$$

La corriente total de un conductor puede ser obtenida integrando el lado derecho de la expresión anterior, como sigue:

$$I_c = \iint_{S_c} \left(\sigma \mathbf{E}_{ext} - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} \quad (5.90)$$

En problemas de dos dimensiones la ecuación (5.89). Se convierte en:

$$-\nabla(v \nabla A) = \sigma \frac{u_s}{l} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (5.91)$$

Donde u_s es el voltaje en terminales de los conductores y l es la longitud a lo largo del eje z ; la ecuación anterior toma en cuenta el efecto piel.

Cuando los conductores son considerados trenzados se define que la corriente i_f es la misma en todos los conductores conectados en serie (bobinados). Por lo que la densidad de corriente podrá ser obtenida por $J = N i_f / S$.

Donde S es la sección entera de todos los conductores que componen a los bobinados de N vueltas, y σ es la conductividad eléctrica.

La corriente puede ser calculada, en problemas de dos dimensiones, considerando el voltaje u_F entre los terminales de los bobinados como la suma de los voltajes de sus conductores, así:

$$i_f = \frac{u_F}{R_F} = \frac{1}{R_F} \frac{1}{S} \iint_S \frac{dA}{dt} d\mathbf{S} \quad (5.92)$$

Donde R_F es la resistencia de los conductores en serie.

Usando las expresiones (5.89) y (5.92):

$$-\nabla(v\nabla A) = \frac{N u_P}{S R_f} - \frac{\sigma N}{S} \iint_S \frac{dA}{dt} dS \quad (5.93)$$

En la Figura 5.7 se puede apreciar un ejemplo de bobinados creados en un modelo de elementos finitos en 2D conectados en estrella.

Las resistencias totales, incluyendo las resistencias correspondientes a los bobinados y la carga, son llamadas R_R, R_S, R_T . De la misma manera L_R, L_S, L_T toman en cuenta la inductancia correspondiente a la carga y a la parte del encadenamiento de flujo no considerado en el modelo de dos dimensiones.

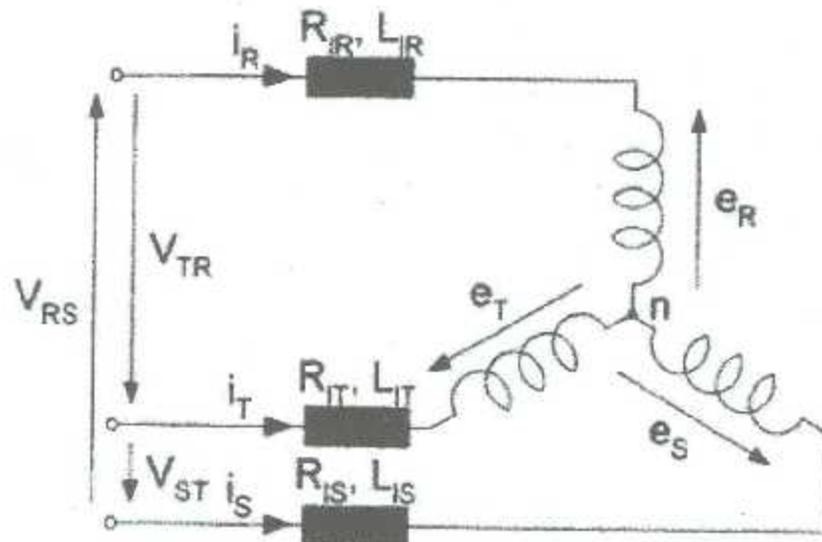


Figura 5.7. Bobinados conectados en estrella en un modelo de elementos finitos en 2D.

Las ecuaciones obtenidas del circuito eléctrico anterior son las siguientes:

$$V_{RS} = e_R - e_S + \left(R_R i_R + L_R \frac{di_R}{dt} \right) - \left(R_S i_S + L_S \frac{di_S}{dt} \right) \quad (5.94)$$

$$V_{ST} = e_S - e_T + \left(R_S i_S + L_S \frac{di_S}{dt} \right) - \left(R_T i_T + L_T \frac{di_T}{dt} \right) \quad (5.95)$$

$$V_{TR} = e_T - e_R + \left(R_T i_T + L_T \frac{di_T}{dt} \right) - \left(R_R i_R + L_R \frac{di_R}{dt} \right) \quad (5.96)$$

$$i_R + i_S + i_T = 0 \quad (5.97)$$

Los valores de e_R , e_S , y e_T pueden ser obtenidos usando:

$$e_j = -l N_j \left(\frac{dA_{m,j}}{dt} \right) \quad j = R, S, T \quad (5.98)$$

En donde A_m es el vector de potencial magnético en el bobinado j , y está definido por:

$$\begin{aligned} A_{m,j}(t) &= \frac{\iint_{S_j} \{\varphi(x,y)\}^T \{A(t)\} dS}{\iint_{S_j} dS} \\ &= \frac{\iint_{\Omega} \beta_j(x,y) \{\varphi(x,y)\}^T d\Omega}{\iint_{S_j} dS} \{A(t)\} = \{w\}^T \{A(t)\} \end{aligned} \quad (5.99)$$

Siendo $\{w\}^T$ el vector de fase que provee información acerca de la topología de cada bobinado, $\varphi(x,y)$ las funciones de interpolación las cuales son definidas para los elementos, y Ω el dominio entero donde la integral es extendida usando las funciones de fase β_j .

Usando el método de Crank - Nicholson, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{di}{dt} \right)^{t+\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{di}{dt} \right)^t = \frac{i^{t+\Delta t} - i^t}{\Delta t} \quad (5.100)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dA_m}{dt} \right)^{t+\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{dA_m}{dt} \right)^t = \frac{A_m^{t+\Delta t} - A_m^t}{\Delta t} \quad (5.101)$$

Usando (5.94), (5.95), (5.96), (5.97), (5.98), (5.100) y (5.101):

$$\begin{Bmatrix} i_R^{t+\Delta t} \\ i_S^{t+\Delta t} \\ i_T^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \frac{\Delta t}{M_E^2} \begin{bmatrix} M_T & 0 & -M_S \\ -M_T & M_R & 0 \\ 0 & -M_R & M_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{RS}^{t+\Delta t} + V_{RS}^t \\ V_{ST}^{t+\Delta t} + V_{ST}^t \\ V_{TR}^{t+\Delta t} + V_{TR}^t \end{Bmatrix} - \frac{2l}{M_E^2}$$

$$\begin{bmatrix} M_S + M_T & -M_T & -M_S \\ M_T & M_T + M_R & M_R \\ M_S & M_R & M_S + M_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 & 0 \\ 0 & N_S & 0 \\ 0 & 0 & N_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{m,R}^{t+\Delta t} - A_{m,R}^t \\ A_{m,S}^{t+\Delta t} - A_{m,S}^t \\ A_{m,T}^{t+\Delta t} - A_{m,T}^t \end{Bmatrix} - \frac{1}{M_E^2} \begin{bmatrix} M'_R(M_S + M_T) & M'_S M_T & -M'_T M_S \\ M'_R M_T & M'_S(M_T + M_R) & M'_T M_R \\ M'_R M_S & M'_S M_R & M'_T(M_S + M_R) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i'_R \\ i'_S \\ i'_T \end{Bmatrix} \quad (5.102)$$

Donde:

$$\begin{aligned} M_j &= R_j \Delta t + 2L_j & j &= R, S, T \\ M'_j &= R_j \Delta t - 2L_j & j &= R, S, T \\ M_E^2 &= M_R M_S + M_S M_T + M_T M_R \end{aligned} \quad (5.103)$$

La ecuación (5.102). Puede ser escrita en forma compacta como sigue:

$$\begin{aligned} \{i^{t+\Delta t}\} &= \Delta t [G_a] \{u_{ext}^{(t+\Delta t)+t}\} \\ -l [G_b] [N] (\{A_m^{t+\Delta t}\} - \{A_m^t\}) &- [G_a] [G_c] \{i^t\} \end{aligned} \quad (5.104)$$

La densidad de corriente puede ser obtenida usando:

$$\{J^{t+\Delta t}\} = \begin{Bmatrix} J_R^{t+\Delta t} \\ J_S^{t+\Delta t} \\ J_T^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_R}{S_R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_S}{S_S} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_T}{S_T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_R^{t+\Delta t} \\ i_S^{t+\Delta t} \\ i_T^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \quad (5.105)$$

Usando (5.104), (5.105) y la definición de A_m en (5.99), la siguiente ecuación es obtenida:

$$\{J^{t+\Delta t}\} = \Delta t [W] [N] [G_a] \{u_{ext}^{(t+\Delta t)+t}\}$$

$$\begin{aligned}
& -l[W][N][G_b][N][W]^T (\{A^{t+\Delta t}\} - \{A^t\}) \\
& -[W][N][G_a][G_c]\{i^t\}
\end{aligned} \tag{5.106}$$

Donde el término $[W]$ es llamado la matriz definida como la matriz que contiene los vectores de fase.

Usando (5.87) y (5.105):

$$\begin{aligned}
& ([S^{t+\Delta t}] + l[W][N][G_b][N][W]^T)\{A^{t+\Delta t}\} = \\
& \Delta t[W][N][G_a]\{u_{ext}^{(t+\Delta t)+t}\} + l[W][N][G_b][N][W]^T\{A^t\} \\
& -[W][N][G_a][G_c]\{i^t\}
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Donde $[S^{t+\Delta t}]$ es la matriz de rigidez. Sin embargo, la ecuación (5.107) modela circuitos eléctricos con una conexión en estrella de bobinados trenzados, el vector de potencial magnético en los nodos a $(t + \Delta t)$ es un valor desconocido. Además, la corriente en los bobinados a un tiempo t debe ser calculada usando algoritmos eficientes.

Sistema generalizado de ecuaciones

La siguiente formulación puede ser generalizada para diferentes tipos de conexiones y conductores, ya sean sólidos o trenzados.

$$\begin{aligned}
& \left([S^{t+\Delta t}] + \frac{2\sigma}{\Delta t} [T] + l[W][N][G_b][N][W]^T \right) \{A^{t+\Delta t}\} = \\
& \left(-[S^t] + \frac{2\sigma}{\Delta t} [T] + l[W][N][G_b][N][W]^T \right) \{A^t\} \\
& + [T] \left[\frac{\sigma}{l} Q \right] \{u_{mas,ext}^{t+\Delta t}\} + \Delta t [W][N][G_a] \{u_{ext}^{t+\Delta t}\} \\
& - ([W][N][G_a][G_c] - [W][N]) \{i_{cub}^t\}
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Entonces, si por ejemplo un problema incluye bobinados de conductores trenzados en conexión estrella, como en los casos de estudio de esta tesis, la contribución de los bobinados conectados en estrella a los términos (5.108) es obtenida de (5.107).

Las matrices en (5.108) se mantienen dispersas, simétricas, definidas positivas del tradicional método de elemento finito. Obviamente la dispersidad depende de la geometría y el número de nodos, desde que el vector de potencial magnético introduce

conexiones a lo largo de los nodos de los bobinados modelados con conductores trenzados,

Si se definen n , m y p como el número de nodos y bobinados hechos de conductores trenzados y conductores sólidos respectivamente, el significado y dimensiones de los términos anteriores se puede expresar como sigue:

$[S]_{n \times n}$ Es la matriz de rigidez.

$[T]_{n \times n}$ Es llamada la matriz de masa, contiene información de la distribución de corriente.

$[W]_{n \times m}$ Es la matriz de fase, muestra información sobre la distribución de los bobinados compuestos de conductores trenzados. Está compuesta por los vectores de fase definidos en (5.99).

$[G_a]_{m \times m}$, $[G_b]_{m \times m}$ y $[G_c]_{m \times n}$ toman en cuenta como los bobinados definidos en $[W]$ están conectados. En (5.102) y (5.104) están conectados en estrella.

$\{A^{t+\Delta t}\}_n$ Es el vector de los valores desconocidos en los nodos del vector de potencial magnético en el tiempo $t + \Delta t$.

$\{A^t\}_n$ Representa el valor del vector de potencial magnético en el anterior paso de tiempo t .

$[Q]$ Tiene el mismo significado en conductores sólidos como $[W]$ en conductores trenzados.

$\{u_{mas,ext}^{t+\Delta t}\}_p$ Representa la suma de voltajes aplicados a los conductores sólidos en el paso de tiempo $t + \Delta t$ y al paso de tiempo anterior t .

$\{u_{ext}^{(t+\Delta t)+t}\}_m$ Representan la suma de voltajes aplicados a los conductores trenzados a un tiempo $t + \Delta t$ y a un paso de tiempo anterior t .

$\{i_{cab}^t\}_m$ Representa el valor de la corriente en el anterior paso de tiempo en los conductores definidos como trenzados.

Como se mencionó anteriormente, las corrientes en los bobinados deben ser calculadas durante la etapa de solución. Sin embargo, el costo computacional debe mantenerse lo más bajo posible debido a que otros resultados como inductancia, flujo magnético y fuerza electromotriz pueden ser obtenidos haciendo uso de los términos definidos en (5.108), calculados en cada paso de tiempo, evitando el consumo de cálculos en la etapa de post procesamiento.

Cálculos de corriente

Las corrientes en los bobinados pueden ser calculadas usando:

$$i_f(t) = \iint_{S_c} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) dS \quad (5.109)$$

La corriente en los bobinados compuestos por conductores trenzados se puede calcular usando (5.87), (5.91) y la definición del vector de fase:

$$[S^{t+\Delta t}][A^{t+\Delta t}] = [I^{t+\Delta t}] = \sum_{k=1}^m N_k \{\omega_k\} i_k^{t+\Delta t} \quad (5.110)$$

Donde m es el número de bobinados. La corriente de un bobinado (i) puede ser multiplicada por ambos términos en (5.110) por el vector de fase i transpuesto $\{\omega_i\}^T$, tomando en cuenta que el producto de $\{\omega_i\}^T$ y $\{\omega_k\}$ es nulo cuando k no es igual a i :

$$i_i^{t+\Delta t} = \frac{\{\omega_i\}^T [S^{t+\Delta t}][A^{t+\Delta t}]}{N_i \{\omega_i\}^T \{\omega_i\}} \quad (5.111)$$

Este método calcula las corrientes de fase usando como datos, el vector de fase, el número de vueltas, junto con la matriz de rigidez y el vector de potencial magnético nodal a un paso de tiempo $t + \Delta t$.

Capítulo 6

Modelo en elementos finitos del generador síncrono de imanes permanentes

6.1 Introducción

El GSIP es un dispositivo electromagnético rotativo de alta eficiencia, que está constituido por dos partes principales como lo son el estator y rotor, los cuales están formados por laminaciones de tipo ferromagnético de alta permeabilidad, lo cual garantiza una buena conducción del flujo magnético a través de la máquina. En el estator se encuentra montado el devanado de tipo trifásico en el cual se inducen los voltajes y corrientes de tipo trifásico provocados por el movimiento de los campos magnéticos de los imanes permanentes incrustados en el rotor o montados sobre éste.

Los tipos de imanes permanentes empleados en los generadores síncronos pueden ser de diferentes características, desde diferentes compuestos de elementos como Alnico (Al, Ni, Co), Ferritas y tierras raras como Samario Cobalto (SmCo) y Neodimio (NdFeB). En los GSIP se busca que éstos tengan un alto magnetismo remanente, volumen pequeño y coercitividad alta; con ello se logra que la máquina tenga una alta densidad de par y un menor peso, lo cual reduce su costo de fabricación y se obtiene así como una alta eficiencia comparada con otros tipos de generadores empleados en turbinas eólicas [27].

En este capítulo se describe el modelo en elementos finitos en dos dimensiones de un GSIP y las ecuaciones que describen su comportamiento ante diferentes condiciones de operación, como por ejemplo, su conexión a la red eléctrica o a una carga aislada, mediante los convertidores electrónicos de potencia necesarios para la regulación de amplitud y frecuencia de las señales eléctricas del generador hacia la red eléctrica o cargas aisladas. El modelado y discretización en elementos finitos de la geometría de la máquina son llevados a cabo en el software Flux 2D, mientras que el control de los convertidores electrónicos conectados al circuito equivalente de la máquina son realizados en el software de Matlab Simulink.

6.2 Software de elementos finitos Flux 2D

El software de elementos finitos Flux 2D de la compañía Cedrat situada en Grenoble, Francia, es un software para simulación de problemas de tipo electromagnético y térmico en dos y tres dimensiones; se centra especialmente en el análisis, diseño y optimización de dispositivos electromagnéticos como generadores, motores, transformadores y actuadores electromecánicos.

Las diferentes ecuaciones que describen los fenómenos de tipo electromagnético y térmico que aparecen en este tipo de dispositivos son difíciles de simular en conjunto, ya que el número de cálculos a realizar se incrementa. Es por esto que el software Flux 2D está formado por varias aplicaciones, las cuales resuelven un tipo determinado de problema; estas aplicaciones son las siguientes:

- Aplicación Eléctrica.
- Aplicación Magnética.
- Aplicación Térmica.

Debe tomarse en cuenta que para la combinación de dichas aplicaciones, como la térmica con la magnética o con la eléctrica, el número de cálculos, así como el tiempo de simulación aumentarán notablemente.

El tipo de aplicaciones anteriores puede clasificarse en función de los diferentes campos a estudiar, como son:

- Estado estacionario:
Es utilizado para estudiar dispositivos en los que las fuentes de campo son independientes del tiempo.
- Estado Transitorio:
Es aplicado para el estudio de dispositivos en los que las fuentes de campo son dependientes del tiempo.
- Estado Estable con Corriente Alterna:
Es aplicado en dispositivos en donde la variación del campo con respecto al tiempo es senoidal.

La Figura 6.1 muestra las diferentes aplicaciones y campos disponibles en el software Flux 2D.

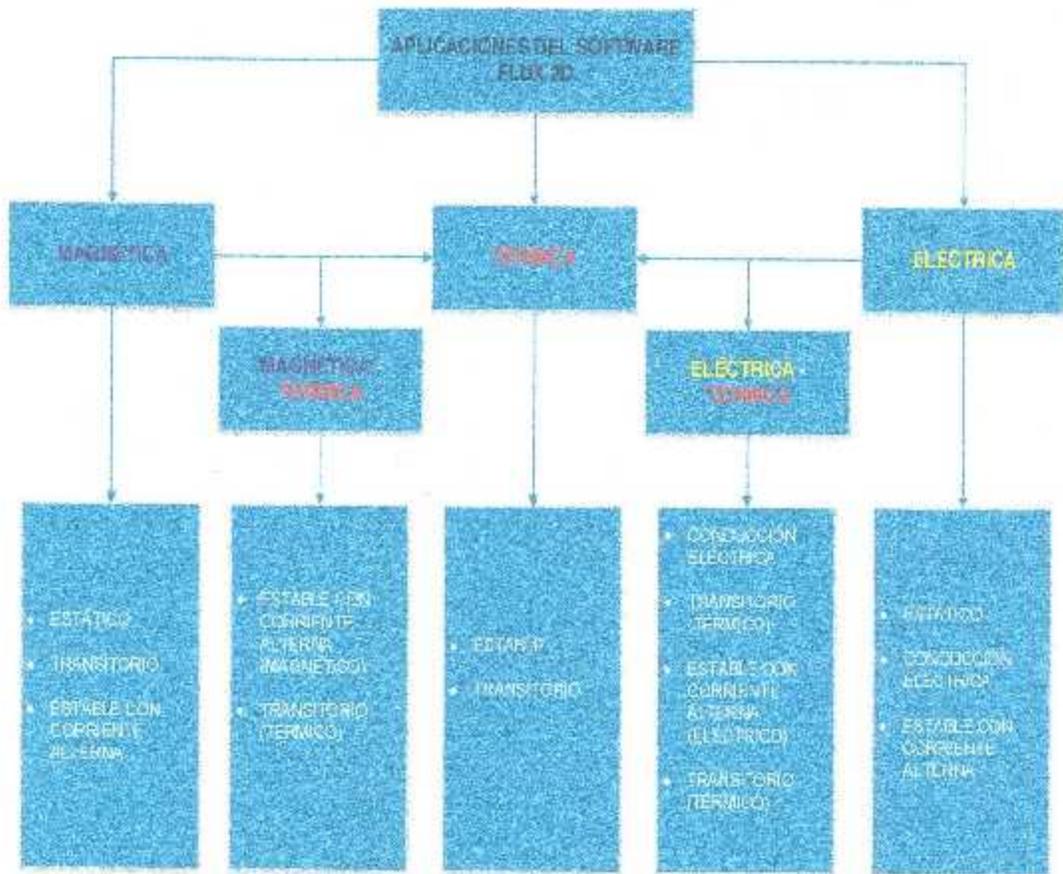


Figura 6.1. Aplicaciones y campos de análisis en FLUX.

6.2.1 Descripción del funcionamiento del software de elementos finitos Flux 2D

El software de elementos finitos de Cedrat, Flux 2D puede dividirse en tres módulos principales de trabajo:

- **Pre – Procesamiento:**

En este módulo es en donde se lleva a cabo la realización del dibujo o importación de la geometría (si ha sido generada desde un programa de tipo CAD que genere ficheros compatibles con Flux 2D).

Se define el tipo de estudio; en función del tipo de estudio que se realizará, este software dispone de diferentes elementos para cada tipo de aplicación, ya sea transitoria, estacionaria, térmica, magnética o eléctrica.

También se realiza la asignación de elementos y propiedades de los materiales a las regiones del modelo a analizar, así como la aplicación de cargas y fuentes (asignación de condiciones de frontera o contorno y mallado a la geometría de los modelos a analizar).

- **Procesamiento:**

Es en este módulo en donde se realiza el cálculo y generación de la solución mediante el siguiente procedimiento:

Selección del tipo de cálculo a realizar, por ejemplo, si es de tipo transitorio, estacionario o de régimen armónico.

Configuración de los parámetros del cálculo, selección de intervalos de tiempo y espacio a simular. Inicio del cálculo cuando el programa empezará a transferir las cargas y fuentes al modelo, generando matrices de datos y resolviendo sistemas de ecuaciones.

- **Post – Procesamiento:**

Este es el módulo que permitirá la representación gráfica de los resultados obtenidos, así como la exportación de las soluciones a diferentes tipos de archivos para poder realizar comparaciones o nuevos cálculos numéricos.

Los dos casos de prueba que se muestran en esta tesis corresponden a un sistema de generación eólico con GSIP, el cual alimenta a una carga aislada trifásica balanceada, como se muestra en la Figura 6.2.

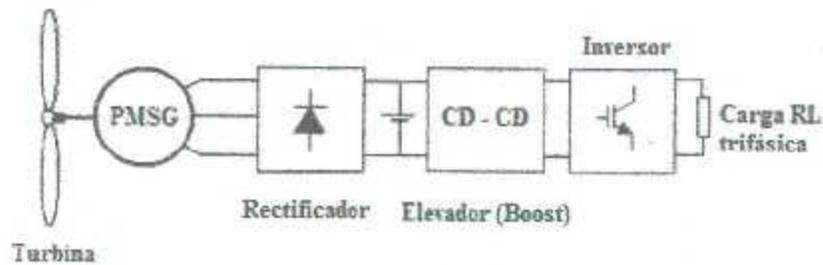


Figura 6.2. Diagrama del sistema cónico de generación a analizar.

El objetivo es analizar el comportamiento electromagnético del modelo en 2D del GSIP a analizar y observar el comportamiento de las variables eléctricas, como voltajes y corrientes del generador, así como de los elementos pasivos controlados por las funciones de conmutación descritas en los capítulos anteriores. Se pretende crear un ambiente de co-simulación para analizar las señales y observar la distribución de los campos magnéticos en la geometría de la máquina, los cuales son necesarios para la conversión de la energía mecánica en eléctrica.

Los circuitos de los convertidores electrónicos de potencia son directamente conectados a los terminales del generador dentro del circuito de Flux 2D, debido a que es la forma en la que se obtiene una respuesta directa en el comportamiento del generador, ya que si estos elementos son modelados en la interfaz de Simulink, la máquina no responde ante la conexión, es decir, toma como fuentes ideales a los semiconductores, contrario a cuando son directamente conectados al circuito de los devanados del generador, esto es de suma importancia al momento de hacer un análisis.

Por otra parte, se optó por implementar el control de estos convertidores en Simulink, debido a las herramientas que este software ofrece y que darán el control a los elementos pasivos en el software de Flux, como la frecuencia de conmutación de los interruptores en el inversor y en el circuito elevador de voltaje. Además de que es en este ambiente en donde las funciones de conmutación son utilizadas para brindar el control a estos elementos, responsables de abastecer a la carga trifásica balanceada, a una determinada frecuencia y amplitud de voltaje.

6.2.2 Modelo en elementos finitos del GSIP en 2D

Las ecuaciones diferenciales que describen el funcionamiento electromagnético del generador son una derivación de las ecuaciones de Maxwell descritas en el capítulo 5; se describen de la siguiente forma para el estudio del generador síncrono de imanes permanentes en dos dimensiones:

$$\nabla \times v \nabla \times A = J \quad (6.1)$$

Dónde A es el vector de potencial magnético, v es la reluctividad y J es la densidad de corriente, la cual consiste de tres partes: la primera debido a las fuentes de voltaje aplicadas al modelo, la segunda debida al campo eléctrico inducido producido por la variación del flujo magnético respecto al tiempo y la última debido al voltaje inducido por el movimiento, como se indica a continuación.

$$J = \sigma \frac{V_b}{\ell} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma V \times B \quad (6.2)$$

Donde σ es la conductividad eléctrica, ℓ es la longitud de la máquina (geometría en 2D), V_b es el voltaje aplicado en la región de elementos finitos y V es la velocidad del conductor con respecto a B .

Por lo tanto se tendrá:

$$\nabla \times v \nabla \times A = \sigma \frac{V_b}{\ell} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma V \times \nabla \times A \quad (6.3)$$

La expresión anterior permite, mediante la formulación del vector de potencial magnético, conocer la densidad del flujo magnético dentro del generador síncrono de imanes permanentes en 2D [28].

El modelo analizado en dos dimensiones corresponde al de un generador síncrono de imanes permanentes de Neodimio, el cual consta de dos pares de polos salientes; es trifásico con conexión estrella, 120 vueltas y una resistencia del conductor de 0.456 por fase, tiene 24 ranuras en el estator, una potencia nominal de 248 W y una velocidad nominal de 1000 rpm.

En la Figura 6.3 se muestra una sección correspondiente a la cuarta parte de la geometría total del generador, aprovechando la condición frontera de periodicidad que ofrece la geometría del generador. Como se mencionó en el capítulo anterior, esto reducirá considerablemente el tiempo de cómputo debido a que se analizará solamente una parte de la geometría total. Al ser simétrico, el resultado será el mismo para las otras partes de la máquina.

Un análisis en dos dimensiones podrá determinar el flujo mutuo y los enlaces de flujo a lo largo de la longitud radial de los conductores en el estator del generador.

La discretización del modelo del generador síncrono de imanes permanentes es realizada mediante un mallado compuesto por 9136 nodos, 1355 elementos de línea y 4327 elementos de superficie, el mallado es de segundo orden; se puede observar esta discretización en la Figura 6.5

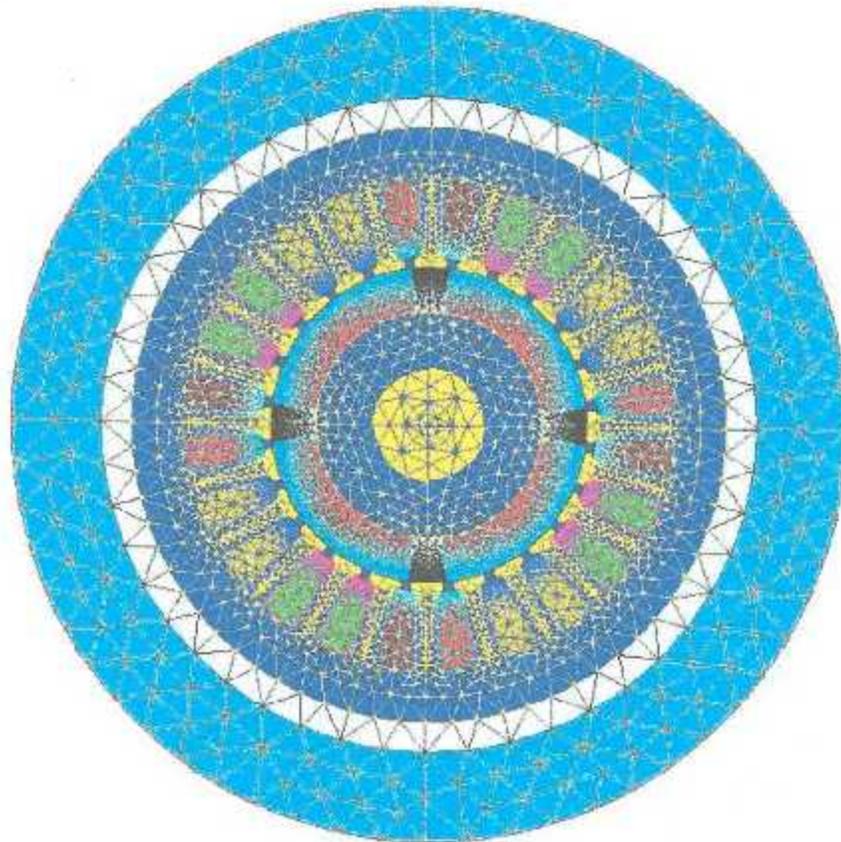


Figura 6.5. Discretización de la geometría del generador síncrono en elementos finitos de segundo orden.

Número de elementos no evaluados: 0%

Número de elementos de excelente calidad: 95.15%

Número de elementos de buena cantidad: 2.91%

Número de elementos de pobre calidad: 0.28%

A continuación se presentan las principales propiedades de los materiales que componen al generador síncrono de imanes permanentes.

Las propiedades magnéticas de las laminaciones que componen el estator y el rotor del generador se muestran en la Tabla I, seguida de su respectiva curva B – H.

Tabla II. Propiedades magnéticas de las laminaciones del generador síncrono.

Intensidad del campo (A.m-1)	Densidad de Flujo (T)
0.0	0.0
9.83	0.1
19.66	0.2
29.5	0.3
39.3	0.4
49.1	0.5
58.3	0.6
62.3	0.65
66.18	0.7
70.2	0.75
74.77	0.8
80.0	0.85
86.3	0.9
104.2	1.0
130.5	1.1
175.9	1.2
282.5	1.3
613.0	1.4
1751.0	1.5
3820.0	1.6
7401.0	1.7
12600.0	1.8
20400.0	1.9
31500.0	2.0
44000.0	2.05
70500.0	2.1
150000.0	2.2
200000.0	2.3
310000.0	2.4
400000.0	2.5

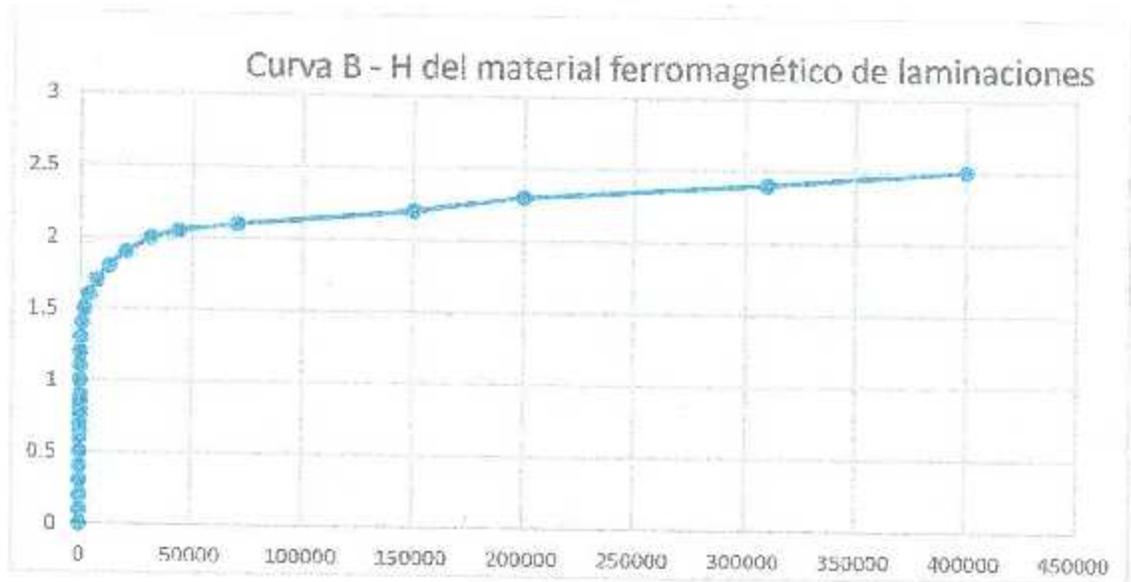


Figura 6.6. Curva B – H del material ferromagnético de las laminaciones.

Las propiedades magnéticas de los imanes permanentes de NdFeB se presentan en el recuadro de la Figura 6.7, el cual corresponde a la asignación de material en la interfaz de Flux.



Figura 6.7. Propiedades magnéticas de los imanes permanentes.

6.2.2.1 Caso de prueba con conexión a carga aislada del GSIP

El modelo en elementos finitos de la máquina es acoplado a un circuito como el de la Figura 6.8. En este se aprecia una conexión tipo estrella de los conductores con un puente de diodos rectificador trifásico, las fuentes de voltaje en serie con los diodos representan la caída de tensión propia de estos elementos, la cual es de 0.7 V (voltaje de umbra de algunos dispositivos semiconductores compuestos por Silicio).

Luego de la rectificación del voltaje trifásico generado, este es almacenado en el condensador conectado en paralelo con un inversor trifásico controlado representado por elementos semiconductores conectados en serie, con las caídas de tensión propias de cada elemento.

El inversor está conectado a una carga trifásica resistiva inductiva balanceada y conectada en estrella.

Para este caso de prueba los parámetros de la máquina fueron modificados a 120 vueltas por fase, 3600 rpm y una carga resistiva de 120 Ohms.

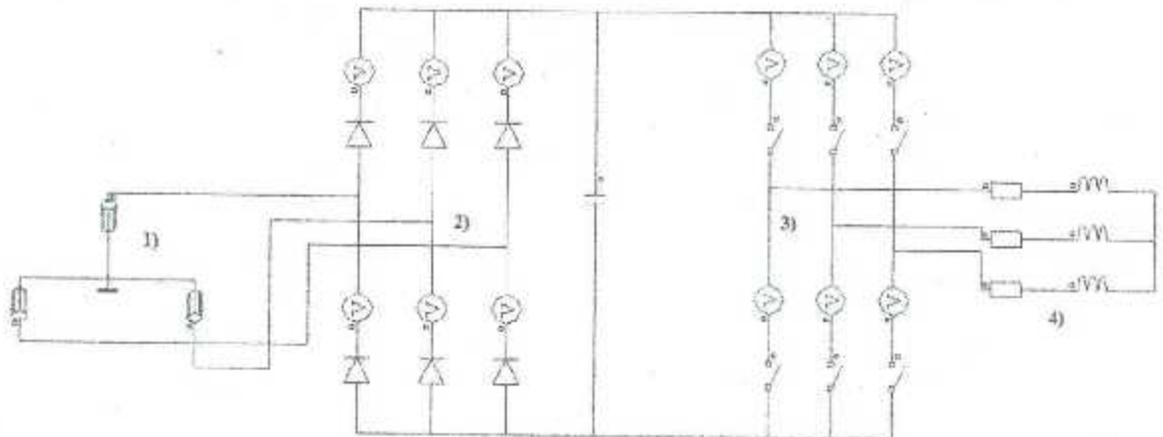


Figura 6.8. Diagrama del circuito del generador sincrónico de imanes permanentes conectado a una carga trifásica balanceada mediante convertidores electrónicos de potencia. (1) Conductores del estator del generador con conexión estrella. (2) Rectificador trifásico. (3) Inversor trifásico. (4) Carga RL conectada en estrella.

El software Flux ofrece un bloque de acoplamiento con Simulink como el que se muestra en la 6.9.



Figura 6.9. Bloque en Simulink que permite la co-simulación con Flux 2D.

Es en este bloque en donde se reflejan los parámetros de entrada y salida que se definen previamente en Flux, en el árbol de datos del modelo, como se muestra en la Figura 6.10 y que permitirán llevar un flujo de datos o co-simulación entre ambas herramientas, ya que es en Simulink en donde se dará el control de conmutación a los elementos semiconductores de los convertidores electrónicos de potencia conectados al generador, utilizando las funciones de conmutación descritas en el Capítulo 4.

El bloque tiene una extensión .F2MS, por lo que cuando éste sea generado en la sección de la barra de herramientas de Flux, como se muestra en la Figura 6.11, pedirá un nombre para poder ser utilizado en el bloque de Simulink, que permite el acoplamiento generando un aspecto como el del bloque en la Figura 6.12.

Es muy importante saber la ruta de almacenamiento en donde se encuentran: el archivo que contiene los datos del modelo de elementos finitos con extensión .FLU, el archivo .F2MS y el archivo .mdl de Simulink, en donde se llevará a cabo la simulación, ya que esta no funcionará si los tres archivos no se encuentran en la misma carpeta.

Una vez generado el bloque de co-simulación, se procede a la implementación de las funciones de conmutación y de control en Simulink, las cuales son de gran importancia para el funcionamiento de los convertidores conectados a los terminales del generador. Cabe señalar que el tiempo de simulación, así como el paso de integración se definen en Simulink, y las ecuaciones se resuelven simultáneamente, lo que lleva a un largo proceso de cómputo, pero reducido en comparación a otros, debido a la implementación de las funciones de conmutación.



Figura 6.10. Configuración de los parámetros de entrada y salida para la generación del bloque .F2MS.

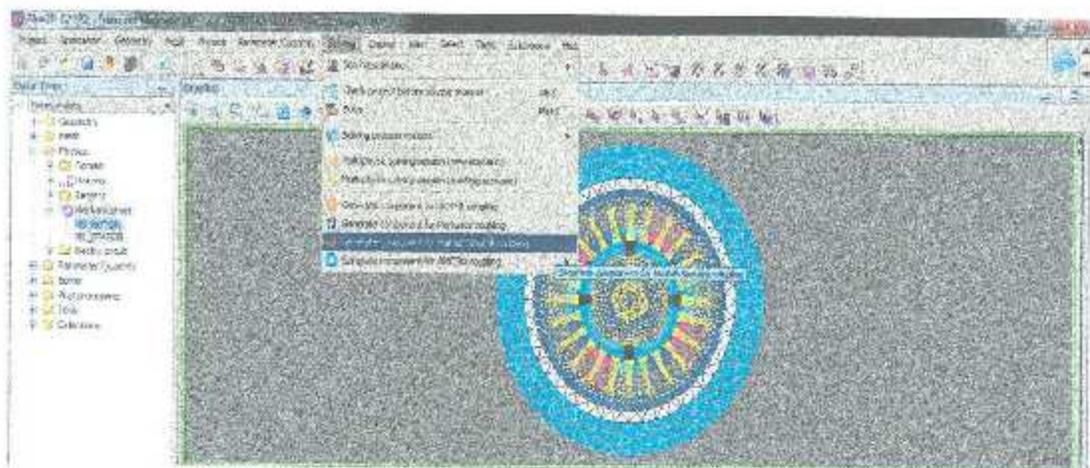


Figura 6.11. Sección de la barra de herramientas de Flux que permite la generación del bloque de co-simulación .F2MS.

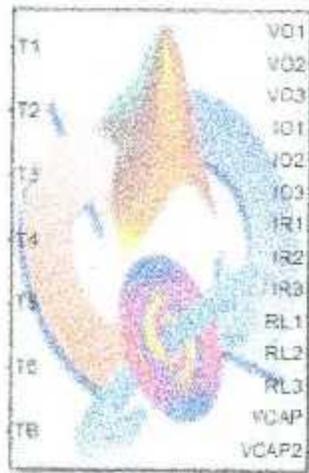


Figura 6.12. Forma final del bloque con extensión .F2MS, luego de ser definidos los parámetros de entrada y salida (I/O) en Flux.

Finalmente, se prepara la simulación en la interfaz de Simulink, como se muestra en la Figura 6.13. Es aquí en donde se llevará a cabo la implementación de las funciones de conmutación que darán control a la frecuencia y amplitud del voltaje de salida del circuito inversor, que es conectado a la carga trifásica balanceada.

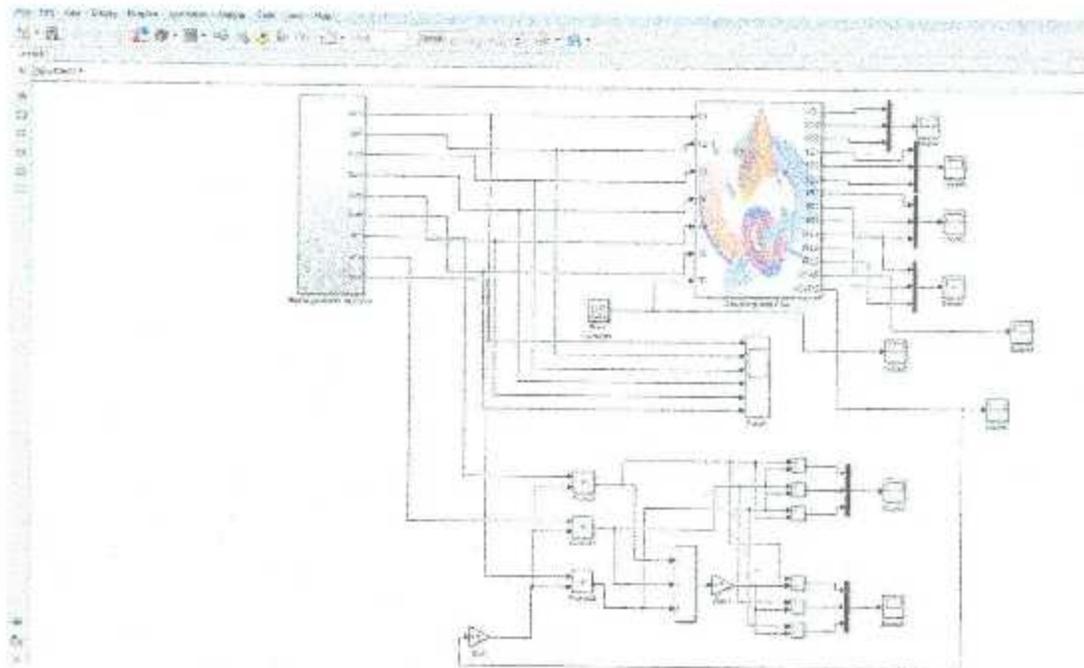


Figura 6.13. Diagrama de conexiones de las señales de conmutación que controlan los disparos del inversor y el circuito elevador de voltaje dentro del modelo de Flux.

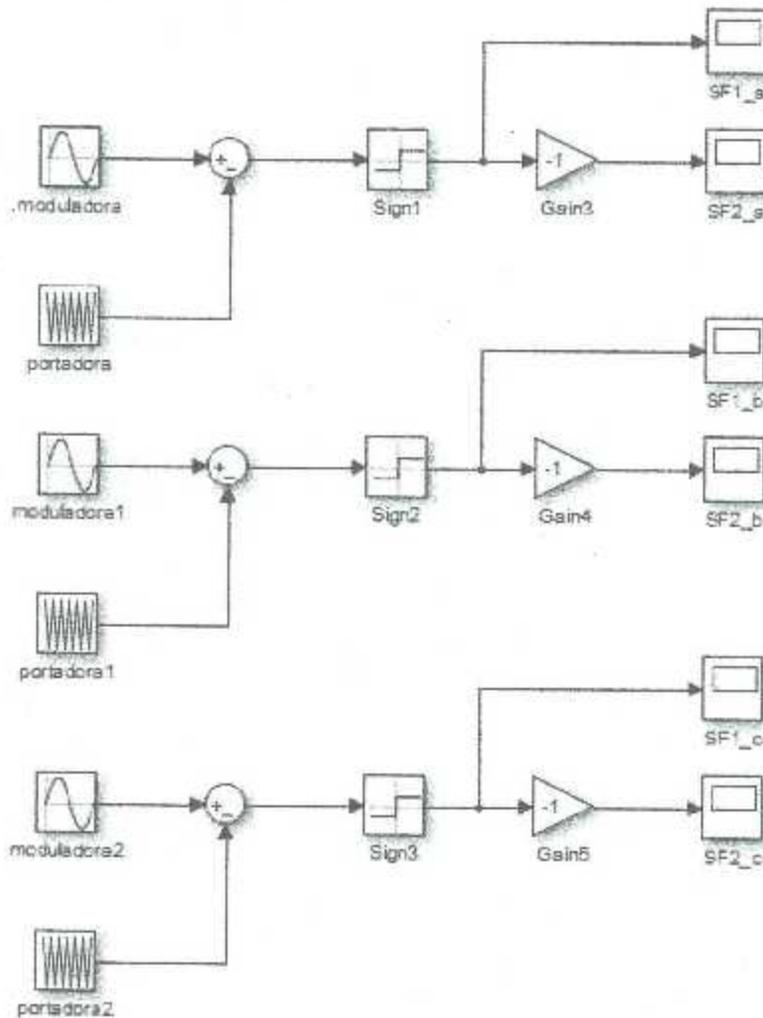


Figura 6.14. Creación de las funciones de conmutación dentro del subsistema de la Figura 6.13, que controlan los estados de los conmutadores dentro del circuito en Flux.

En la figura anterior se muestran las señales de conmutación que controlan los estados de encendido y apagado de los conmutadores del inversor dentro de Flux, en donde SF_1 y SF_2 son señales homólogas para cada pierna del inversor creadas mediante la técnica SPWM, las señales moduladoras se encuentran desfasadas 120° entre sí, a 60 Hz, y una amplitud de 0.8, mientras que la señal portadora es la misma para las tres fases y su frecuencia es de 10 kHz para el primer caso y de 1Khz para el segundo caso con una amplitud de 1.

Los resultados que se presentan a continuación muestran las señales de las variables eléctricas y magnéticas del generador síncrono de imanes permanentes, se dio un tiempo de simulación de 0.5 segundos con un paso variable definido en los parámetros de simulación del archivo .mdl en Simulink.

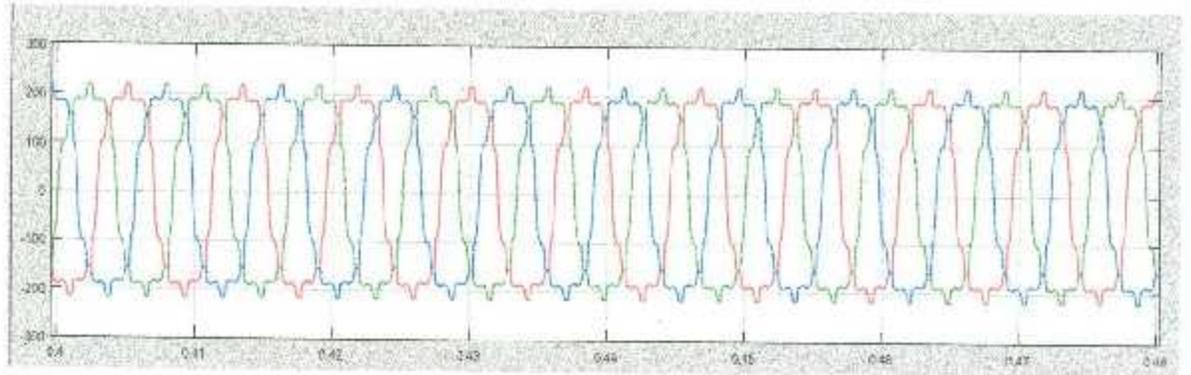


Figura 6.15. Voltajes en conductores del generador.

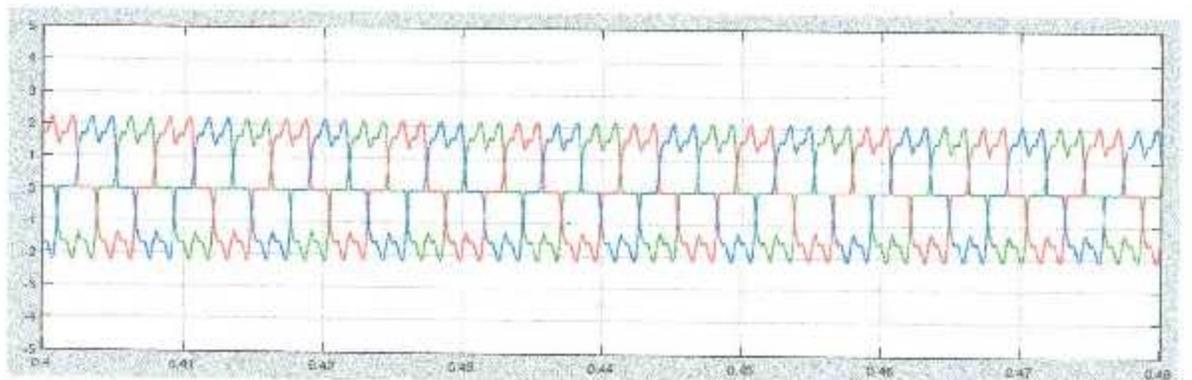


Figura 6.16. Corrientes en los conductores del generador.

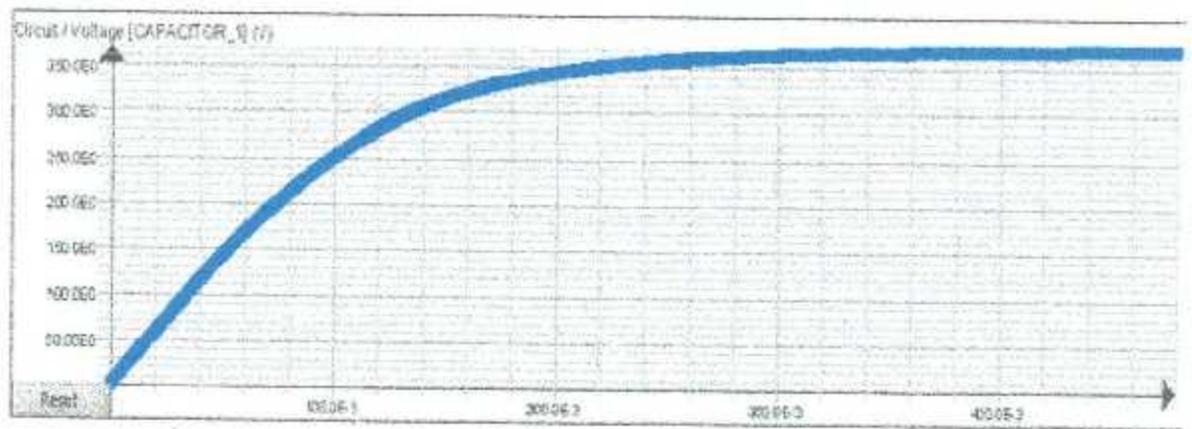


Figura 6.17. Voltaje en el capacitor.

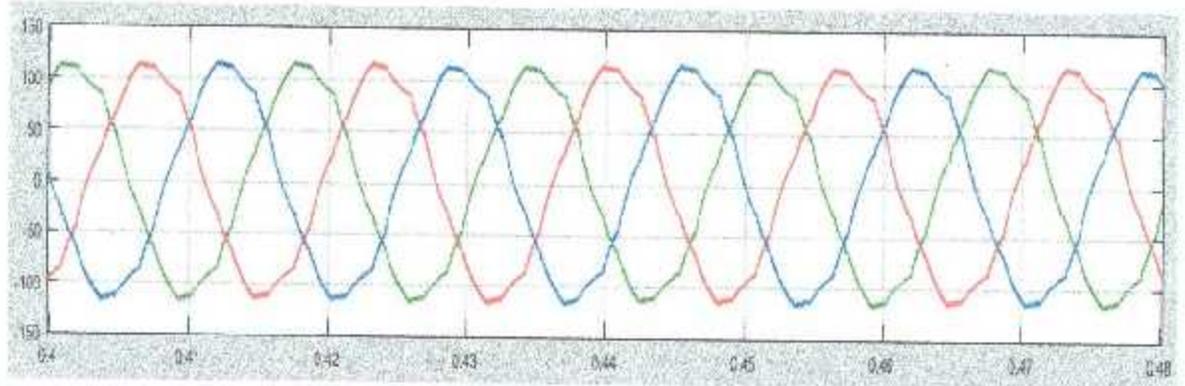


Figura 6.18. Voltajes en la carga trifásica RL a 10 kHz de operación del inversor.

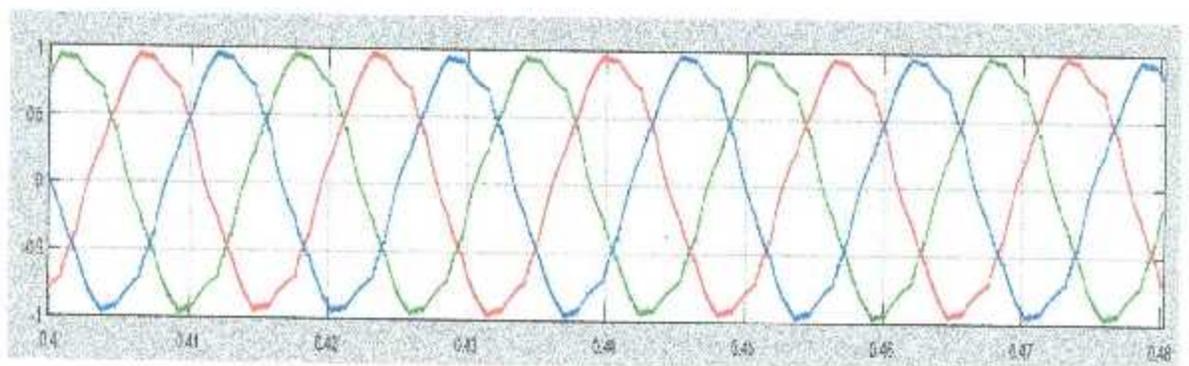


Figura 6.19. Corrientes en la carga trifásica RL a 10 kHz de operación del inversor.

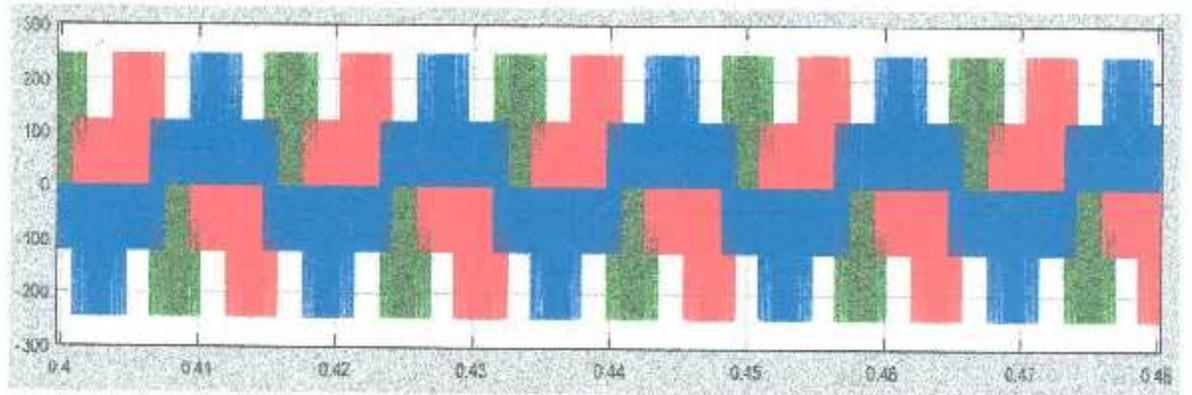


Figura 6.20. Señales de voltajes trifásicos generados mediante el spwm en el subsistema de pulsos en el diagrama de Simulink a 10 kHz de operación.

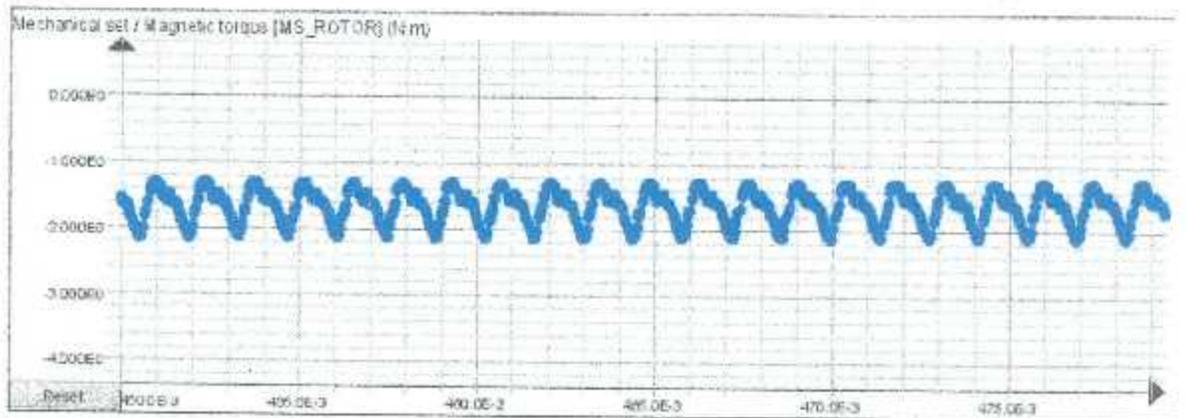


Figura 6.21. Par electromagnético.

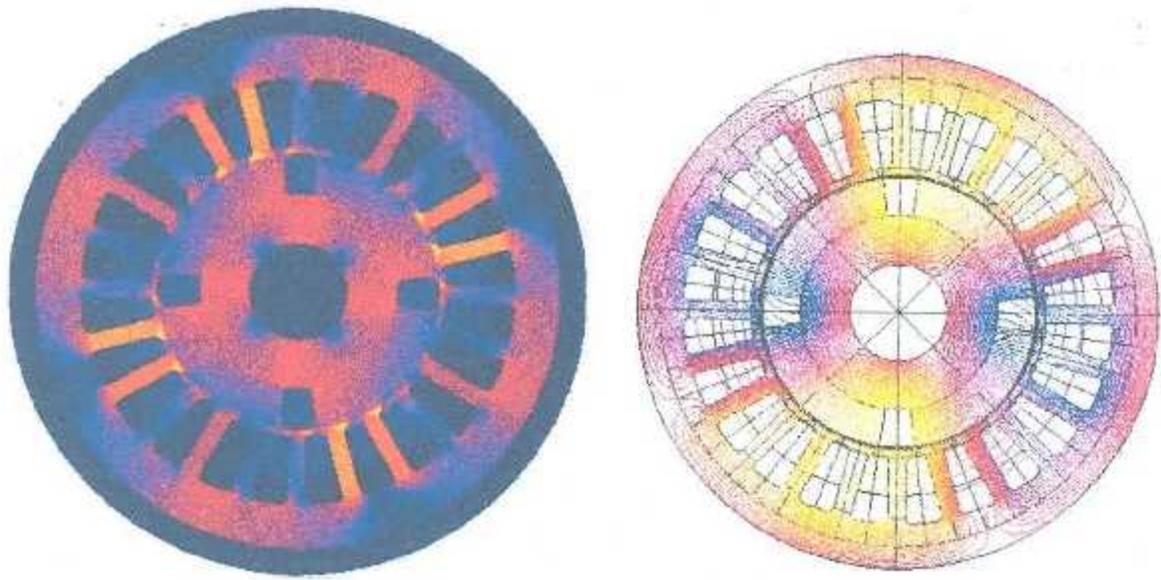


Figura 6.22. Distribución de la densidad y líneas de flujo magnético en el generador a los 0,1 segundos.

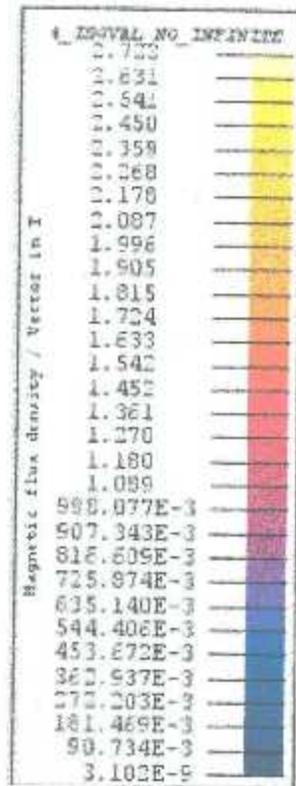


Tabla III. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0,1 s.

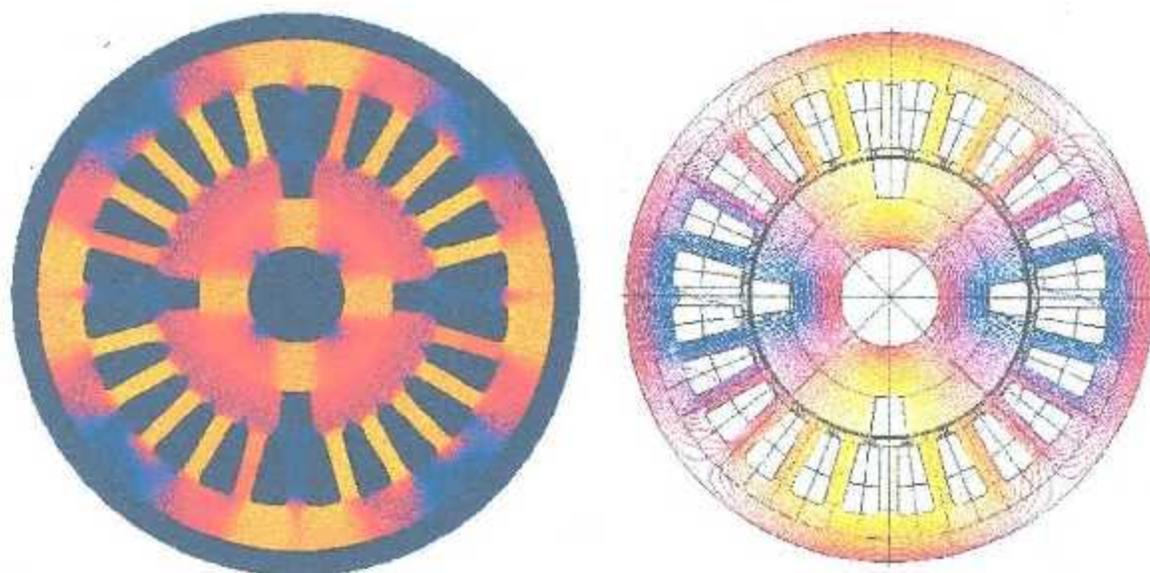


Figura 6.23. Distribución de la densidad y líneas de flujo magnético en el generador a los 0.3 segundos.

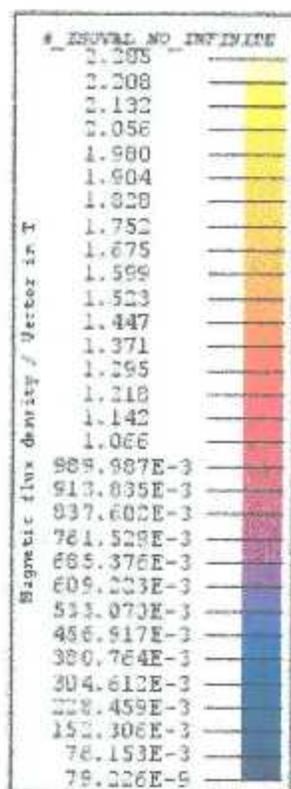


Tabla IV. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.3 s.

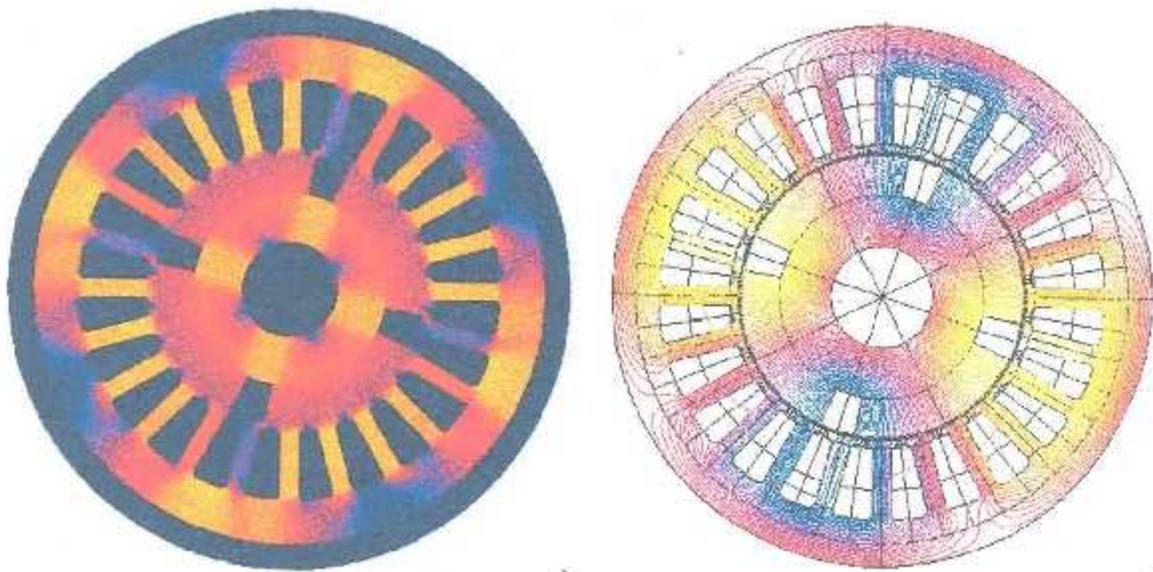


Figura 6.24. Distribución de la densidad y líneas de flujo magnético en el generador a los 0.47 segundos.

#_ISOVAL	NO_	IMPINITE
2.264		
2.189		
2.113		
2.038		
1.962		
1.887		
1.811		
1.736		
1.660		
1.585		
1.510		
1.434		
1.359		
1.283		
1.208		
1.132		
1.057		
501.195E-3		
505.719E-3		
530.242E-3		
754.766E-3		
679.289E-3		
603.813E-3		
528.336E-3		
452.859E-3		
377.383E-3		
301.906E-3		
226.430E-3		
150.953E-3		
75.477E-3		
71.947E-3		

Magnetic flux density / Vector in T

Tabla V. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.47 s.

6.3.2 Caso de prueba con conexión a un circuito elevador de voltaje de CD

En este caso el circuito sufrió una modificación al ser conectado en paralelo un circuito elevador de voltaje o Boost a la salida del puente rectificador de diodos. Este circuito será el encargado de aumentar el nivel de voltaje en el enlace de CD con el objetivo de abastecer cargas mayores, el diagrama del circuito se muestra en la Figura 6.25.

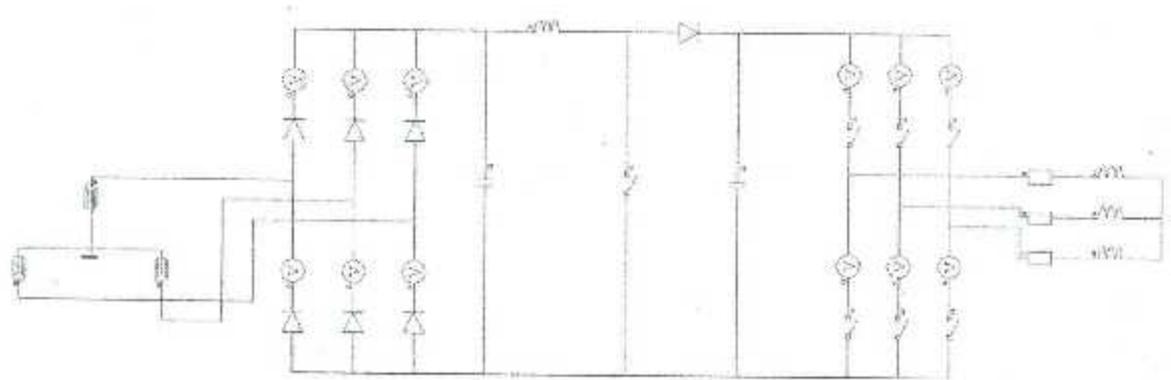


Figura 6.25. Diagrama del circuito elevador conectado a la salida del puente rectificador.

A continuación se presentan las señales obtenidas de las variables eléctricas y mecánicas, así como la distribución de los campos magnéticos en el generador a determinados tiempos de operación.

Las Figuras 6.26 y 6.27 muestran los voltajes y corrientes en terminales del generador síncrono de imanes permanentes en Simulink y Flux, respectivamente.

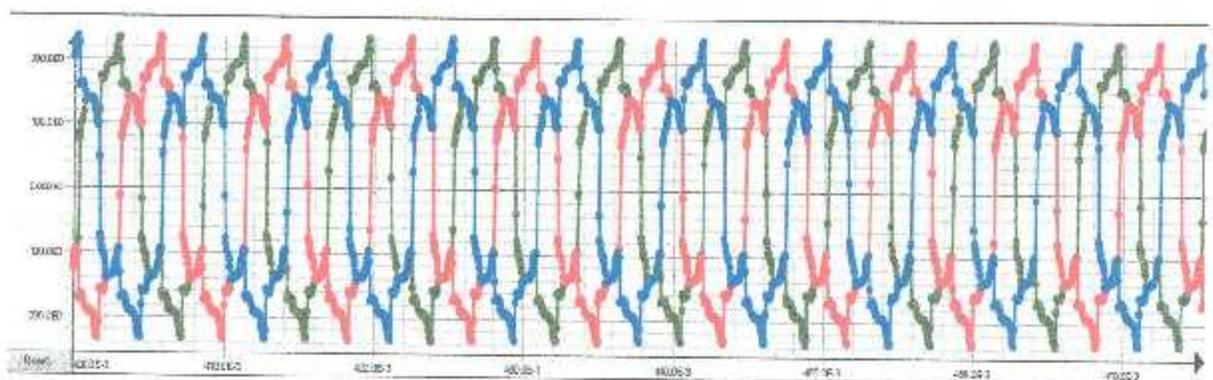


Figura 6.26. Voltajes en terminales del generador después de 0.4 s de simulación.

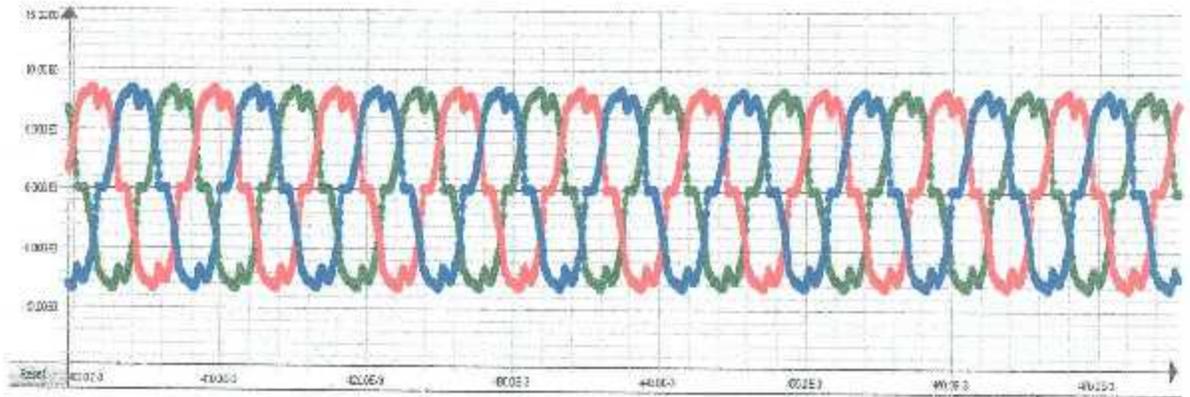


Figura 6.27. Corrientes en terminales del generador.

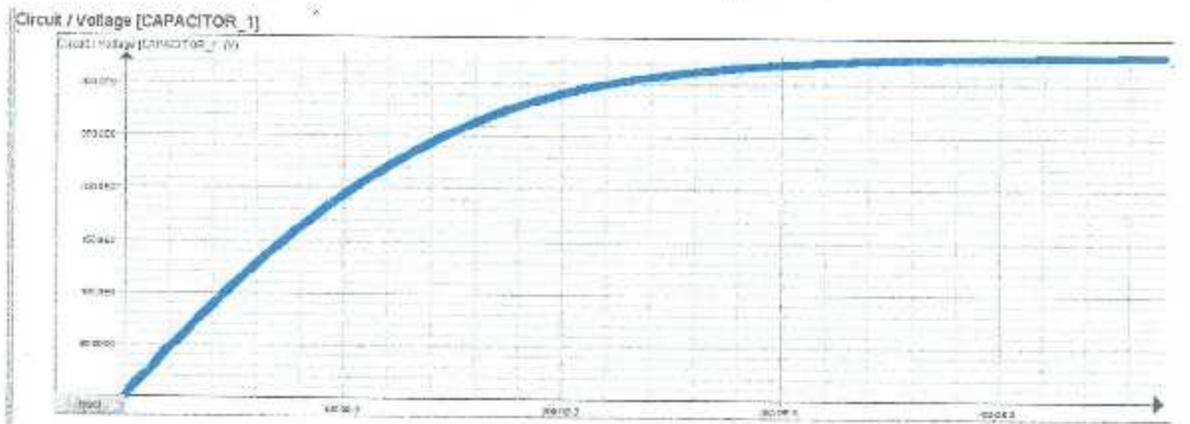


Figura 6.28. Voltaje en el capacitor de 10,000 micro Faradios conectado a la salida del rectificador de puente completo.

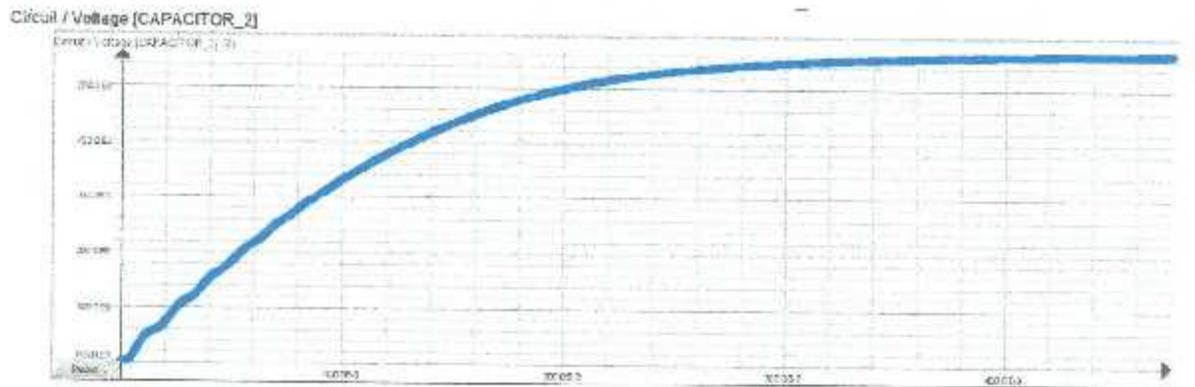


Figura 6.29. Voltaje en el capacitor de 1000 micro Faradios conectado a la salida del circuito elevador de CD.

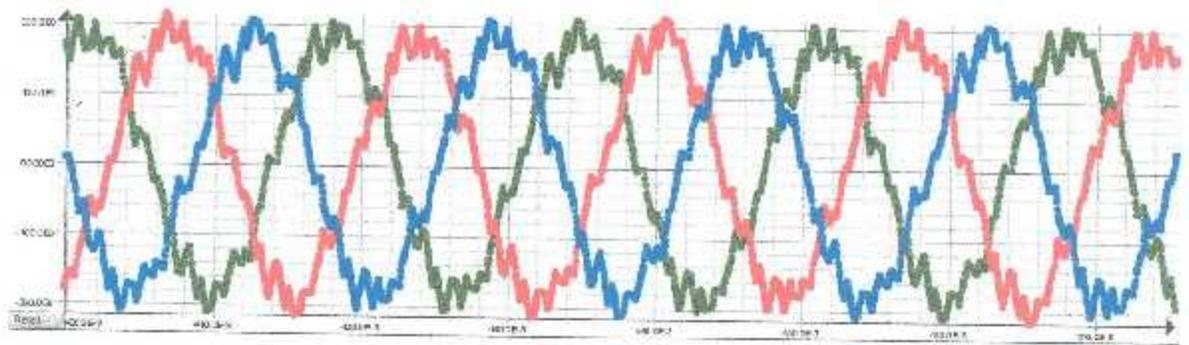


Figura 6.30. Voltajes en la carga trifásica RL a 1 kHz de operación del inversor.

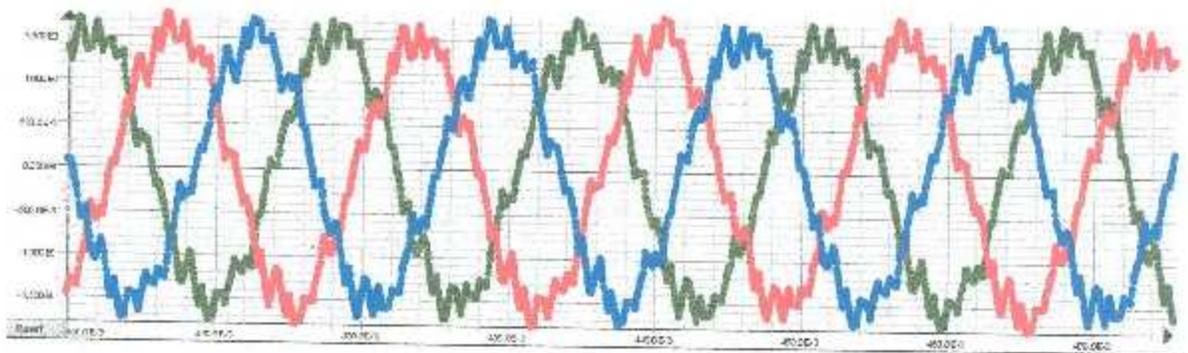


Figura 6.31. Corrientes en la carga trifásica RL a 1 kHz de operación del inversor.

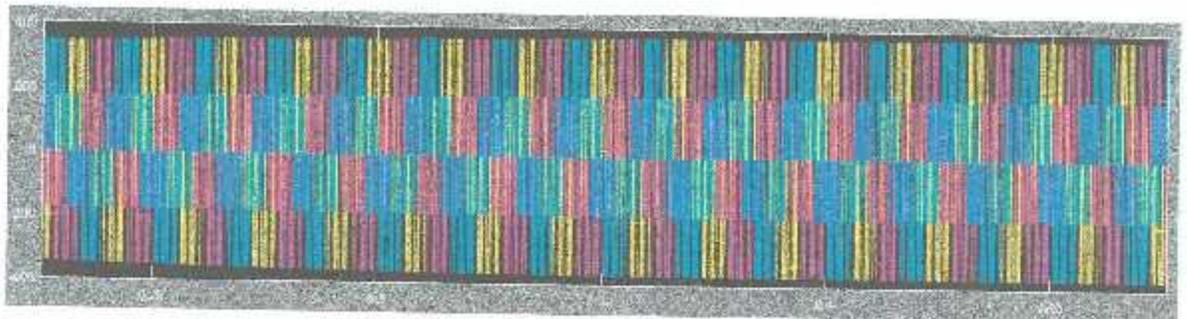


Figura 6.32. Señales de voltajes trifásicos generados mediante el spwm en el subsistema de pulsos en el diagrama de Simulink.

Mechanical set / Magnetic torque (MS ROTOR)

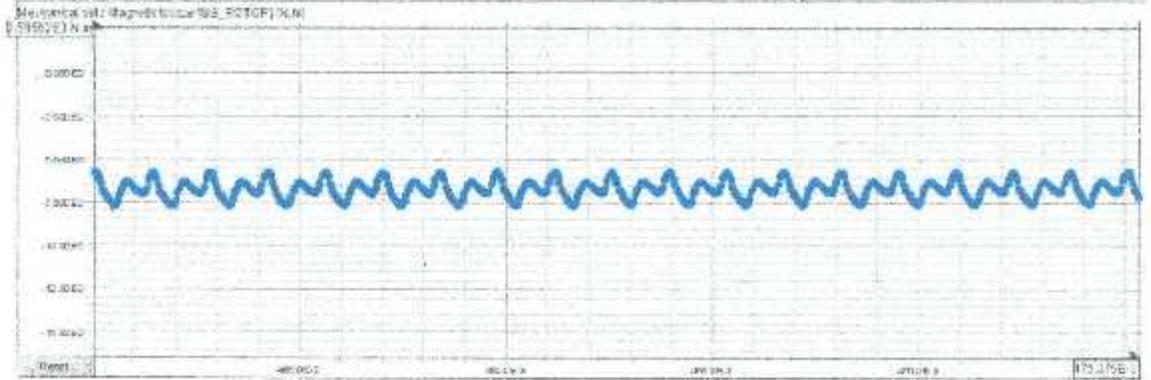


Figura 6.33. Par Electromagnético.

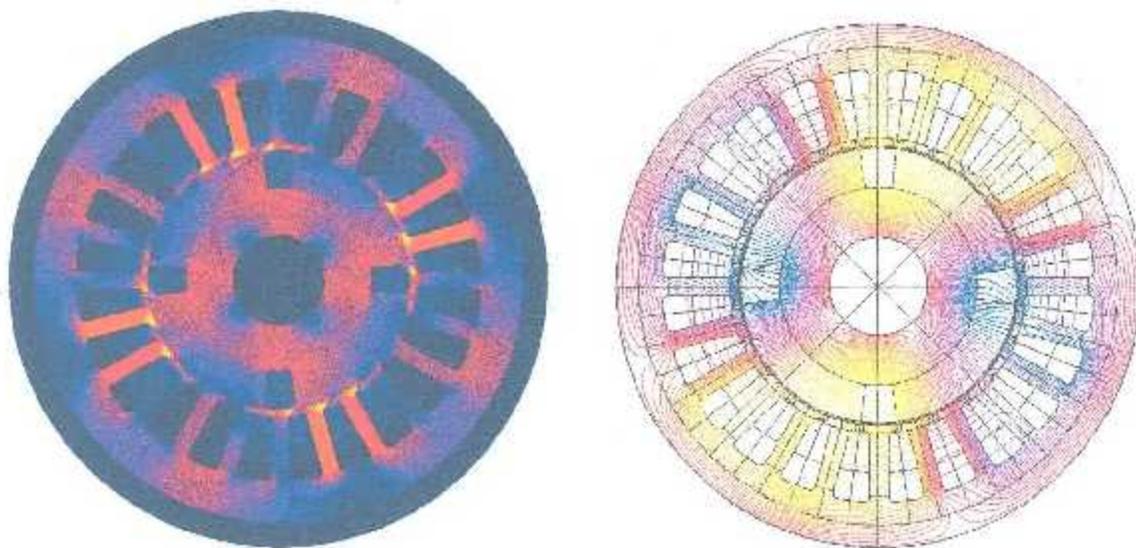


Figura 6.34. Distribución de la densidad y líneas de flujo magnético en el generador a 0.1 segundos.

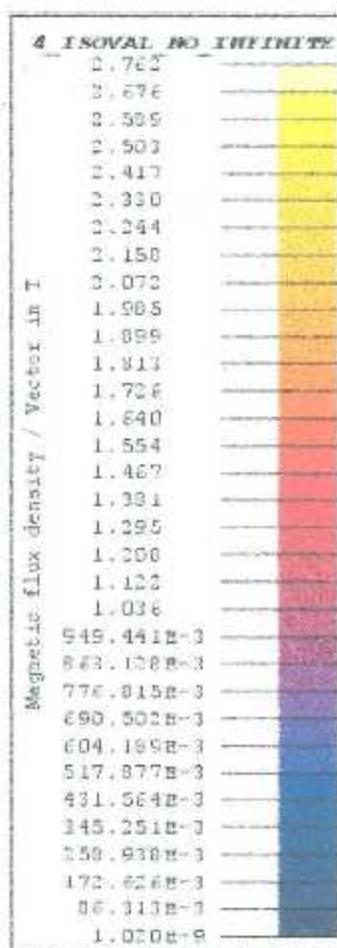


Tabla VI. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.1 s.

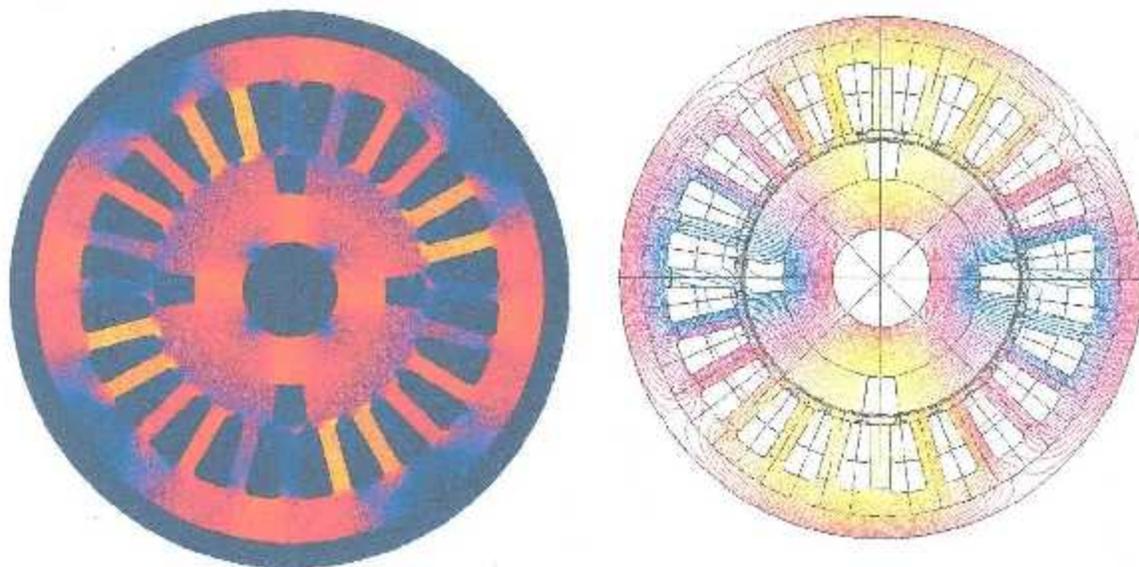


Figura 6.35. Distribución de la densidad y líneas de flujo magnético en el generador a 0.3 segundos.

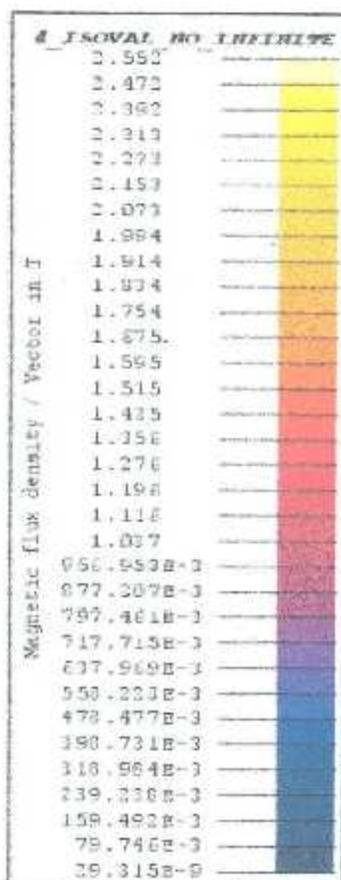


Tabla VII. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.3 s.

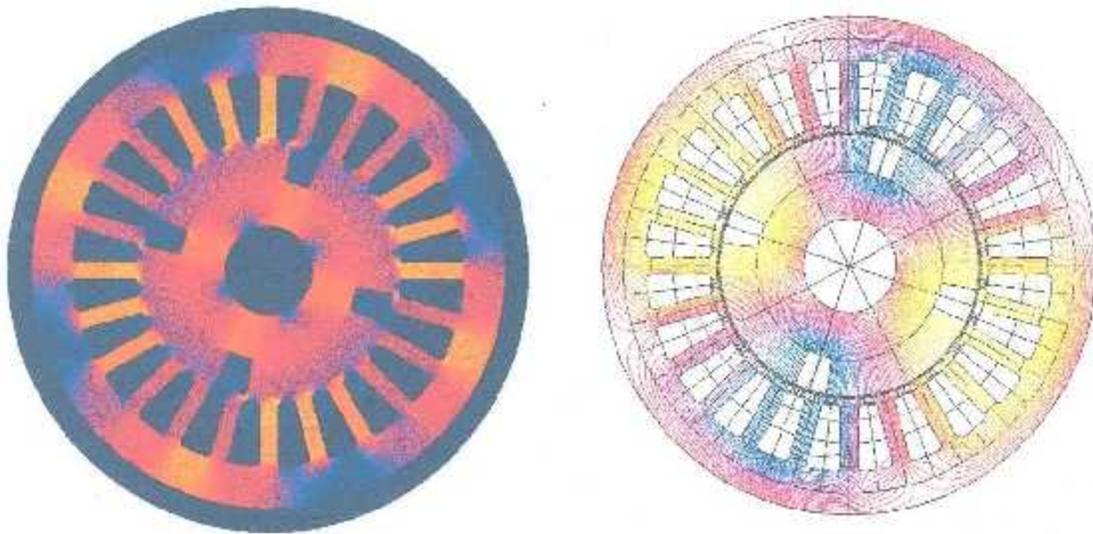


Figura 6.36. Distribución de la densidad y líneas de flujo magnético en el generador a 0.47 segundos.

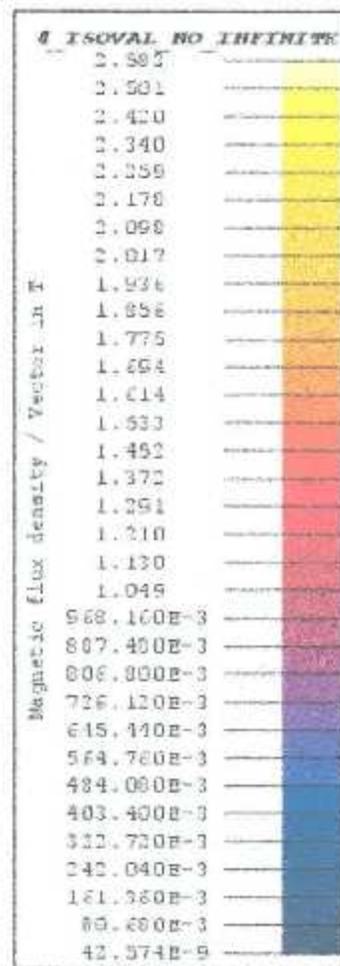


Tabla VIII. Magnitudes de la densidad de flujo magnético a los 0.47 s.

Capítulo 7

Conclusiones

Los sistemas eólicos de generación son hoy en día una de las alternativas más viables en cuanto al consumo de energía eléctrica necesaria para los grandes requerimientos de tipo industrial y doméstico que día a día son más demandantes; es por esta razón que surge cada vez más la necesidad de investigar sobre este tipo de energías alternas, que no contaminan al medio ambiente y que permiten aprovechar los recursos naturales.

En esta tesis se realizó el análisis electromagnético del dispositivo responsable de la conversión de la energía mecánica en eléctrica, en un sistema de generación eólico de generador síncrono de imanes permanentes, conectado a una carga aislada trifásica balanceada mediante los convertidores electrónicos de potencia necesarios para la regulación de la energía suministrada a la carga. El modelo del generador fue creado en el software de elementos finitos Flux, el cual permite un acoplamiento de co-simulación con el software de Simulink, en donde se llevó a cabo la implementación de los controles de los dispositivos semiconductores contenidos en los convertidores conectados al circuito eléctrico de la máquina dentro del software de Flux.

Como contribuciones de esta tesis se puede resaltar el uso de las funciones de conmutación, las cuales fueron implementadas en la interfaz de Simulink y las cuales dictaminan el comportamiento de los elementos pasivos de los convertidores elevador e inversor. Este tipo de funciones son de gran ayuda debido a que reducen considerablemente el tiempo de cómputo de la co-simulación, ya que emplean solamente operaciones funcionales básicas comparadas con los modelos preestablecidos de los convertidores, lo cuales contienen funciones exponenciales que harían que una simulación tardara mucho tiempo de cómputo. Cabe señalar que además, estos modelos preestablecidos no tienen ningún efecto en el comportamiento de las señales del generador, es por eso que tampoco se utilizaron, contrario a las funciones de conmutación, que brindan los estados de conmutación de los interruptores en los circuitos electrónicos de potencia, también se puede destacar como contribución el ahorro de tiempo de cálculo con el usos de esta metodología y el acoplamiento entre flux y simulink que en mucha de la bibliografía contemporánea se han tenido dificultades para llevarlo a cabo.

Trabajo Futuro

Como trabajo futuro de esta tesis se puede resaltar el análisis del sistema en lazo cerrado y variando la velocidad de giro del generador, su conexión con la red de distribución eléctrica, la validación del modelo analizado contra un prototipo de prueba real, así como el análisis de un generador de inducción doblemente alimentado conectado a la red eléctrica.

Referencias

- [1]. H. Li and Z. Chen, "Overview of different wind generator systems and their comparisons," *IET Renewable Power Generation*, 2008, vol. 2, No. 2, pp. 123 – 138.
- [2]. O. Ojo and Cox, "Investigation into the performance characteristics of an interior permanent magnet generator including saturation effects," in *Proc. 31st IEEE Industry H Application Society Annual Meeting*, 1996, pp. 533 – 540.
- [3]. L. Fang, J. Jung, J. Hong, J. Lee, "Study on High – Efficiency Performance in Interior Permanent – Magnet Synchronous Motor with Double – Layer PM Design", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 45, No. 5, May 2009, pp. 2085 – 2089.
- [4]. T. Ding, N. Takorabet, "Design and Analysis of Different Line – Start PM Synchronous Motor for Oil – Pump Applications". *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 45, No. 3, March 2009, pp. 1816 - 1819.
- [5]. E. Spooner and A. C. Williamson, "Direct Coupled, Permanent Magnet Generators for Wind Turbine Applications", *IEEE proceedings, Part B*, vol. 143, No. 1, pp. 1 – 8, January 1996.
- [6]. P. M. Lindh, H. K. Jussila, M. Niemelea, ".Comparison of Concentrated Winding Permanent Magnet Motors With Embedded and Surface – Mounted". *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 45, No. 5, May 2009, pp. 2085 – 2089.
- [7]. K. Hameyer and R. Belmans, *Numerical Modelling and Design of Electrical Machines and Devices*, UK, WITPRESS, 2001.
- [8]. Flux 2D, Manual de usuario. 2014.
- [9]. MATLAB Simulink 2013 rev. b.

- [10]. Bin Wu, Yongqiang Lang, Navid Zargari, Samir Kouro, "Power Conversion and Control of Wind Energy Systems", John Wiley & Sons, 2011.
- [11]. N. Mohan, T. Undeland, and W. Robbins, Power Electronics : Converters Applications and Design, 3rd ed. New York: Wiley, 2002.
- [12]. B. K. Bose, Modern Power Electronics and AC Drives. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [13]. M. H. Rashid, Ed., Handbook of Power Electronics. New York: Academic, 2001, ch. 12, pp. 599–627.
- [14]. M. A. Boost and P. Ziogas, "State-of-the-art PWM techniques, a critical evaluation," IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 24, no. 2, pp. 271–280, Mar./Apr. 1988.
- [15]. J. W. Dixon, "Boost type PWM rectifiers for high power applications," Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Comput. Eng., McGill Univ., Montreal, QC, Canada, Jun. 1988.
- [16]. Qiang Chang Zhong, Tomas Hornik, "Control of Power Inverters in Renewable Energy and Smart Grid Integration, John Wiley & Sons, 2013.
- [17]. Christos Marouchos, "The Switching Function: Analysis of Power Electronic Circuits", The Institution of Engineering and Technology, 2006.
- [18]. MAROUCHOS, C.C.: "Switched capacitor circuits for reactive power generation". PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Electronics, Brunel University, UK, 1982.
- [19]. Bin Wu, Yongqiang Lang, Navid Zargari, Samir Kouro, "Power Conversion and Control of Wind Energy Systems", John Wiley & Sons, 2011.

- [20]. Marouchos, C. C., Darwish M., "Teaching Power Electronics using the Control of Wind Energy Systems", John Wiley & Sons, 2011.
- [21]. Byoung – Kuk Lee, Mehrdad Ehsani, "A simplified Functional Simulation Model for Three – Phase Voltage – Source Inverter Using Switching Function Concept," IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol. 48, no. 2, April 2001.
- [22]. S. J. Salon, "Finite element analysis of electric machinery," IEEE Trans. Computer Applications in Power, vol. 3, no. 2, pp. 29 – 32, April 1990.
- [23]. Bianchi Nicola, "Electrical Machine Analysis Using Finite Elements", CRC Press, 2005.
- [24]. M. N. O. Sadiku, "A simple introduction to finite element analysis of electromagnetic problems," IEEE Trans. Education, vol. 32, no.2, pp.85-93, 1989.
- [25]. H.C. Martin and G.F. Carey, Introduction to Finite Element Analysis: Theory and Application, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [26]. E. Gómez, J. Roger – Folch, A. Gabaldón and A. Molina, "Coupling 2D Finite Element Models and Circuit Equations using a Bottom – Up Methodology", ACES Journal, Vol. 17, No. 3, November 2002.
- [27]. P. Campbell, "Permanent Magnet Materials and Their Application", Cambridge University Press, primera edición, 1994.
- [28]. S. J. Salon, Finite Element Analysis of Electrical Machines, Springer Science + Business Media New York, 1995.