

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

**Modelado de Sistemas no Lineales Afines con la Entrada a través de  
Redes Neuronales Dinámicas mediante Acoplamiento del Dominio y  
Rango de la Incertidumbre**

presentada por  
**Ing. Lis Beatriz Govea Moreno**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestra en Ciencias en Ingeniería Electrónica**

Director de tesis  
**Dr. Juan Reyes Reyes**

Cuernavaca, Morelos, México. Abril de 2019.





**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor., 1º de abril de 2019.

OFICIO No. DIE/075/2019

**Asunto:** Aceptación de documento de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Lis Beatriz Govea Moreno**, con número de control **M16CE042** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Modelado de Sistemas no Lineales Afines con la Entrada a Través de Redes Neuronales Dinámicas Mediante Acoplamiento del Dominio y Rango de la Incertidumbre"** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS


CODIRECTOR DE TESIS


  
\_\_\_\_\_  
Dr. Juan Reyes Reyes  
Doctor en Ciencias en la Especialidad de  
Control Automático  
Cédula profesional 4214833

\_\_\_\_\_

REVISOR 1

REVISOR 2

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Carlos Daniel García Beltrán  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 8699605

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza  
Doctor en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5505019

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Estudiante  
Expediente  
RFEJ/lrr.

**cenidet**  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.  
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4106, e-mail: dir\_cenidet@tecnm.mx  
www.tecnm.mx | www.cenidet.edu.mx

PREMIO ESTATAL  
**AHORRO**  
DE ENERGÍA  
MORFOS  
2015







**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Morelos, **09/ABRIL/2019**

OFICIO No. SAC/180/2019

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**ING. LIS BEATRIZ GOVEA MORENO  
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Modelado de Sistemas no Lineales Afines con la Entrada con la Entrada a Través de Redes Neuronales Dinámicas Mediante Acoplamiento del Dominio y Rango de la Incertidumbre", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®  
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**SEP TecNM  
CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA**

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr

**cenidet**<sup>®</sup>  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.  
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4106, e-mail: dir\_cenidet@tecnm.mx  
[www.tecnm.mx](http://www.tecnm.mx) | [www.cenidet.edu.mx](http://www.cenidet.edu.mx)





---

*Dedicado a:*

*Papi y Agui, q.e.p.d*

*Mi mamá Dalia*

*Mi puchis Roi*

---





# *Agradecimientos*

**A Dios** por ser la fuerza y sustento que me ha ayudado a seguir adelante cada día.

**A mami Dalia** que a pesar de no estar a mi lado me ha dado amor y apoyo a lo largo de toda mi vida.

**Al Dr. Juan Reyes Reyes** por haberme guiado a lo largo del desarrollo de este trabajo y su gran paciencia. ¡Gracias!

**A los revisores**, Dr. Carlos Daniel García Beltrán y Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza por las valiosas observaciones realizadas para la mejora de este trabajo.

**A los profesores** que estuvieron involucrados en mi formación a lo largo de mi estancia en la maestría en CENIDET, Dr. José Francisco Gómez Aguilar, Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez, Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, Dr. Enrique Quintero Mármol, Dr. Luis Gerardo Vela Valdés, gracias por todas enseñanzas, que hasta el día de hoy han sido de mucha ayuda.

**A esa Persona Especial mi Puchis**, por ser una de las personas más importantes en mi vida, por cada momento que he pasado a tu lado, por ser una de mis principales fuentes de inspiración, por estar ahí siempre que necesite tu apoyo y por hacerme mejor persona cada día. ¡T.A.!

**A doña Elisa y don Rogelio**, por recibirme en su familia y tratarme como una hija más, nunca serán suficientes las palabras para decirles lo agradecida que estoy con ustedes.

**A Norma y Luz**, por su cariño, su hospitalidad y sus atenciones siempre.

**A Eru y Fer**, por su apoyo y consejos que me han servido para seguir adelante.

**A Bry (y familia), Bebetus y Marisol (y familia)**, por los buenos y malos momentos compartidos.

**A Goyo y Meii**, que gracias a la maestría he ganado dos buenos amigos.

**A Lorena Ruiz**, por su atención, su apoyo y trato amable con los trámites de titulación, ¡Gracias!

**A mi familia en Cuba**, mi madrina Josefa, mis tías Finita y Gladys, a todos mis primos y sus familias.

**A mis abuelos**, Tatica y Roger por siempre estar ahí cuando hizo falta y a Gigi por su apoyo en todo momento.

**Al CENIDET**, por darme la oportunidad de continuar con mi formación académica.

**Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** por el apoyo económico para el desarrollo de este trabajo.



# Resumen

Existen un sin número de problemas de las ciencias en general y la ingeniería en particular, que pueden ser modelados matemáticamente. El proceso del modelado de fenómenos físicos es en general una tarea compleja. Por otra parte, existen fuentes de incertidumbre que se suman a la tarea compleja de dichos modelados que son representaciones matemáticas. Las redes neuronales son una alternativa plausible para obtener una representación no paramétrica de dichos sistemas.

Es conocido que las redes neuronales pueden aproximarse a un gran conjunto de funciones continuas definidas en un conjunto compacto con una precisión arbitraria. En este trabajo se propone el modelado de sistemas no lineales inciertos con red neuronal dinámica mediante el acoplamiento de la incertidumbre. Con una base fundamentada en el conocimiento del dominio y rango de la incertidumbre, se formula un teorema proponiendo una red neuronal dinámica para la aproximación de esta, y se incluye una matriz de acoplamiento que una vez seleccionada brinda información sobre la incertidumbre del modelo con lo que se garantiza que la red neuronal proporcione una mejor estimación.

# Abstract

There are a number of problems in the sciences in general and engineering in particular, which can be modeled mathematically. The process of modeling physical phenomena is in general a complex task. On the other hand, there are sources of uncertainty that add to the complex task of these models that are mathematical representations. Neural networks are a plausible alternative to obtain a non-parametric representation of these systems.

It is known that neural networks can approach a large set of continuous functions defined in a compact set with arbitrary precision. In this work is propose the modeling of uncertain nonlinear systems with dynamic neural network through the coupling of uncertainty. Based on knowledge of the domain and range of uncertainty, a theorem is formulated proposing a dynamic neural network for its approximation, and a coupling matrix that once selected provides information on the uncertainty of the model guaranteeing that the neural network provides a better estimation.

# Nomenclatura

$x$	Vector de estado.
$\dot{x}$	Derivada del vector de estado.
$f(x)$	Función no lineal de retroalimentación.
$g(x)$	Función no lineal afín con la entrada.
$u$	Entrada del sistema no lineal.
$h(x)$	Función no lineal de salida.
$f_0(x)$	Parte conocida de $f(x)$ .
$\Delta_f(x)$	Incertidumbre aditiva de $f(x)$ .
$\varphi, \sigma$	Funciones de activación de la red neuronal.
$\Omega$	Conjunto de datos en un sistema.
$A^{-1}$	Inversa de una matriz.
$A^+$	Pseudoinversa de una matriz.
$tr\{A\}$	Traza de una matriz.
$\ (\cdot)\ _p$	Norma $p$ de $(\cdot)$ .
$\ (\cdot)\ _\infty$	Norma $\infty$ de $(\cdot)$ .
$\ (\cdot)\ _2 = \ (\cdot)\ $	Norma 2 o norma euclidiana de $(\cdot)$ .
$sign(\cdot)$	Función signo de $(\cdot)$ .
$\hat{x}$	Vector de variables de estado estimadas por la red neuronal.
$V(x)$	Función candidata de Lyapunov.
$\delta_f(x)$	Cota superior de la norma euclidiana de la incertidumbre.
$L$	Matriz de ganancias del factor de corrección.
$W^*$	Pesos sinápticos del modelo de incertidumbre.
$\dot{W}$	Tasa de cambio de los pesos sinápticos con respecto al tiempo.
$\psi$	Umbral neuronal.
$e$	Error de estimación.
$D$	Matriz de acoplamiento.
$DW\varphi(\hat{x}) + \psi$	Función neuronal de aproximación de la incertidumbre.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.1.1. Sistemas no lineales con incertidumbre a partir de redes neuronales artificiales . . . . .	2
1.1.2. Identificación de sistemas no lineales . . . . .	7
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	11
1.3. Justificación . . . . .	12
1.4. Objetivos y Metas . . . . .	13
1.4.1. Objetivo general . . . . .	13
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	13
1.4.3. Metas . . . . .	13
<b>2. Marco teórico</b>	<b>14</b>
2.1. Redes neuronales . . . . .	14
2.2. Neurona biológica . . . . .	14
2.3. Redes neuronales artificiales . . . . .	16
2.3.1. Modelado estático de redes neuronales artificiales . . . . .	17
2.3.2. Modelado dinámico de redes neuronales artificiales . . . . .	19
2.4. Incertidumbre . . . . .	20
2.5. Aproximación de funciones . . . . .	21
2.5.1. Nube de datos . . . . .	22
2.5.2. Aproximación de funciones mediante redes neuronales . . . . .	23
2.6. Propiedades de matrices . . . . .	24
2.7. Normas y cotas superiores de matrices y productos vectoriales . . . . .	25
2.8. Principio del teorema de estabilidad de Lyapunov . . . . .	27
2.8.1. Función candidata de Lyapunov . . . . .	27
2.8.2. Teorema de estabilidad de Lyapunov . . . . .	27
2.9. Aproximación neuronal dinámica de un sistema no lineal afín con la entrada con incertidumbre en la retroalimentación . . . . .	28
<b>3. Resultados principales</b>	<b>30</b>
3.1. Modelo de incertidumbre propuesto . . . . .	30

3.2.	Propuesta de la matriz de acoplamiento $D$ en el modelado de la incertidumbre	34
3.2.1.	Caso I: Incertidumbre total en el dominio de cada componente y en la estructura . . . . .	34
3.2.2.	Caso II: Conocimiento del dominio con conocimiento parcial de la estructura de la incertidumbre . . . . .	35
3.2.3.	Caso III: Conocimiento del dominio y rango de la estructura de la incertidumbre . . . . .	36
<b>4.</b>	<b>Simulaciones</b>	<b>38</b>
4.1.	Simulación 1: Sistema de competencia entre especies presa-depredador con incertidumbre total . . . . .	39
4.1.1.	Planteamiento del problema . . . . .	39
4.1.2.	Objetivos de la simulación . . . . .	39
4.1.3.	Desarrollo de la simulación . . . . .	39
4.2.	Simulación 2: Sistema de competencia entre especies presa-depredador con incertidumbre parcial . . . . .	48
4.2.1.	Planteamiento del problema . . . . .	48
4.2.2.	Objetivos de la simulación . . . . .	49
4.2.3.	Desarrollo de la simulación . . . . .	49
4.3.	Simulación 3: Manipulador robótico de unión rígida con incertidumbre total .	54
4.3.1.	Planteamiento del problema . . . . .	54
4.3.2.	Objetivos de la simulación . . . . .	55
4.3.3.	Desarrollo de la simulación . . . . .	56
4.4.	Simulación 4: Manipulador robótico de unión rígida con incertidumbre parcial	65
4.4.1.	Planteamiento del problema . . . . .	65
4.4.2.	Objetivos de la simulación . . . . .	66
4.4.3.	Desarrollo de la simulación . . . . .	66
4.5.	Simulación 5: Sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre total . .	71
4.5.1.	Planteamiento del problema . . . . .	71
4.5.2.	Objetivos de la simulación . . . . .	72
4.5.3.	Desarrollo de la simulación . . . . .	72
4.6.	Simulación 6: Sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre parcial .	81
4.6.1.	Planteamiento del problema . . . . .	81
4.6.2.	Objetivos de la simulación . . . . .	82
4.6.3.	Desarrollo de la simulación . . . . .	82
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>87</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	87
5.2.	Trabajos Futuros . . . . .	87
	<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# Índice de figuras

1.1. Planta parcialmente conocida. . . . .	12
2.1. Estructura de una neurona biológica. . . . .	15
2.2. Neurona artificial. . . . .	18
2.3. Estructura de una red neuronal dinámica. . . . .	20
2.4. Nube de datos $\Omega$ y aproximación de $\hat{y}$ . . . . .	23
2.5. Estructura propuesta de la red neuronal propuesta. . . . .	29
3.1. Estructura propuesta de la red neuronal propuesta. . . . .	34
4.1. Esquema general de simulación. . . . .	38
4.2. Poblaciones de ambas especies. . . . .	41
4.3. Población estimada de ambas especies. . . . .	42
4.4. Comparación entre población y población estimada para la especie presa. . .	43
4.5. Perfil del error para la especie presa. . . . .	44
4.6. Comparación entre población y población estimada para la especie depredador. .	45
4.7. Perfil del error para la especie depredador. . . . .	46
4.8. Pesos sinápticos de la RND. . . . .	47
4.9. Estimación de la incertidumbre. . . . .	48
4.10. Peso sináptico de la RND. . . . .	51
4.11. Perfil del error de estimación de la RND. . . . .	52
4.12. Estimación de la incertidumbre. . . . .	53
4.13. Manipulador robótico de unión rígida. . . . .	55
4.14. Posición de la articulación. . . . .	57
4.15. Velocidad de la articulación. . . . .	58
4.16. Comparación de la posición angular del sistema y la posición angular estimada. .	59
4.17. Perfil del error de posición de la articulación. . . . .	60
4.18. Comparación de la velocidad angular del sistema y la velocidad estimada. . .	61
4.19. Perfil del error de velocidad de la articulación. . . . .	62
4.20. Pesos sinápticos de la RND. . . . .	64
4.21. Estimación de la incertidumbre. . . . .	65
4.22. Peso sináptico de la RND. . . . .	67
4.23. Perfil del error de estimación de la RND. . . . .	69
4.24. Estimación de la incertidumbre. . . . .	70



4.25. Sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	71
4.26. Posición del carro. . . . .	74
4.27. Velocidad del carro. . . . .	75
4.28. Comparación de la posición del sistema y la posición estimada. . . . .	76
4.29. Perfil del error de posición del carro. . . . .	77
4.30. Comparación de la velocidad del sistema y la velocidad estimada. . . . .	78
4.31. Perfil del error de velocidad del carro. . . . .	79
4.32. Pesos sinápticos de la RND. . . . .	80
4.33. Estimación de la incertidumbre. . . . .	81
4.34. Peso sináptico de la RND. . . . .	83
4.35. Perfil del error de estimación de la RND. . . . .	84
4.36. Estimación de la incertidumbre. . . . .	85

# Índice de cuadros

4.1. Datos de simulación para el sistema de competencia entre especies. . . . .	40
4.2. Índices de desempeño Simulaciones 1 y 2. . . . .	54
4.3. Datos de simulación para el sistema manipulador robótico con unión rígida .	56
4.4. Índices de desempeño Simulaciones 3 y 4. . . . .	70
4.5. Datos de simulación para el sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	73
4.6. Índices de desempeño simulaciones 5 y 6. . . . .	86

# Capítulo 1

## Introducción

La identificación de parámetros para las diferentes clases de sistemas no lineales ha sido ampliamente estudiada en las últimas tres décadas, [1] y [35]. Básicamente, la clase de sistemas lineales y no lineales cuya dinámica depende de los parámetros desconocidos.

Un sistema no lineal expresado en su manera más general posee la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Donde,  $f$  es una función no lineal que depende del estado  $x$ , la entrada  $u$  y el tiempo  $t$ ; y la salida  $y$  es una función no lineal que tiene como argumento al estado  $x$ . Sin embargo, una amplia gama de sistemas no lineales pueden expresar la parte  $f(x, u, t)$  de la ecuación dinámica, como la suma de un término  $f(x)$  que expresa la función no lineal de retroalimentación, más otro término no lineal  $g(x)$  que multiplica a la entrada  $u$ , [30] y [36]. Esta clase de sistema no lineal se le conoce como sistema no lineal afín con la entrada. La estructura de esta clase de sistemas es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Las imprecisiones en los modelos, los parámetros o variables, inevitables en cualquier aplicación práctica, pueden tener efectos adversos en los sistemas de control. De hecho, no sólo pueden degradar su comportamiento y eficacia, sino que también pueden conducir a la inestabilidad del sistema. El conocimiento total del modelo de una planta en general es muy difícil tenerlo, por lo que siempre existe algún grado de incertidumbre.

La incertidumbre surge por errores en el modelado, [30], [36], [39] y [41], tanto en los parámetros como en las funciones no lineales que aparecen en las ecuaciones diferenciales, de manera que puede ser estructural o paramétrica. El modelo de la incertidumbre está dado por la suma de una parte conocida  $f_0(x)$  más una parte desconocida  $\Delta_f(x)$ .

$$f(x) = f_0(x) + \Delta_f(x)\tag{1.3}$$

La evolución del control se ha visto motivada por tres aspectos principales: la necesidad de tratar con sistemas complejos; la necesidad de cumplir con demanda de nuevos modelos de control y la necesidad de obtener esos modelos con el menor conocimiento de la planta y el medio ambiente, es decir la necesidad de controlar bajo incertidumbre.

Las redes neuronales (RN) con su propiedad de aproximación y su capacidad de aprendizaje, han demostrado ser una gran herramienta para identificar y controlar los sistemas dinámicos complejos no lineales con parámetros o estructuras inciertas, [34] y [43]. Explorar la capacidad de las redes neuronales artificiales (RNA) para aproximar funciones no lineales, permite la sustitución de las incertidumbres del sistema desconocido por modelos especiales adaptables. Cuando el modelo matemático de un proceso es incompleto o conocido parcialmente, el enfoque de RN ofrece una herramienta eficaz para hacer frente a problemas en la teoría de control moderna, tales como, la identificación, la estimación de estados, la planeación de trayectorias, entre otros.

El uso de las Redes Neuronales Dinámicas (RND) o también llamadas recurrentes han mostrado que poseen mejor desempeño en la identificación y la aproximación de funciones. A su vez, una variedad de arquitecturas de redes neuronales han sido propuestas para el control de sistemas no lineales con incertidumbre, las cuales han sido lo suficientemente eficientes para hacer frente a una amplia clase de sistemas no lineales y que no cuentan con un modelo claramente definido.

## **1.1. Estado del arte**

### **1.1.1. Sistemas no lineales con incertidumbre a partir de redes neuronales artificiales**

En [32], se proponen dos sistemas de control sin usar estimación de estados desconocidos para compensar las incertidumbres de modelado no lineales, por medio de redes neuronales. Utilizando las capacidades de aprendizaje y mapeo no lineal de las redes neuronales. En este trabajo se demostró que los sistemas de control propuestos acomodan una clase más amplia de incertidumbres de modelado que el LQR (Linear-Quadratic Regulator, por sus siglas en inglés) convencional.

En [11], se investiga un control adaptivo robusto para sistemas no lineales inciertos. El objetivo principal de la tesis es desarrollar estrategias de control adaptivo para varias clases de sistemas generales no lineales en forma de retroalimentación estricta con incertidumbres incluyendo parámetros desconocidos, funciones desconocidas del sistema no lineal, disturbios desconocidos y demoras de tiempo desconocidas. Los diseños de controladores sistemáticos se presentan utilizando metodología de backstepping, parametrización de red

neuronal y control adaptivo robusto. Los resultados en la tesis se derivan del riguroso análisis de estabilidad de Lyapunov.

En [23], es utilizado un esquema de control adaptable basado en redes neuronales para los sistemas no lineales en forma estricta de retroalimentación, se supone que las incertidumbres son desconocidas, aunque todavía satisface ciertas condiciones de crecimiento que se caracterizan por funciones delimitantes compuestas por funciones conocidas multiplicado por constantes desconocidas. Las leyes de adaptación para estas fronteras desconocidas son obtenidas de funciones de Lyapunov, así como las leyes de adaptación para las estimaciones de los pesos de la red. Además, las funciones desconocidas de la ganancia de control, no son aproximadas directamente por la red neuronal, por tanto se evaden problemas de posible singularidad del controlador. Por otro lado, bajo determinadas suposiciones en las funciones de ganancia del control, el esquema de control propuesto, garantiza que todas las señales del sistema en lazo cerrado son limitadas uniformemente. Finalmente, los estudios realizados, ilustraron la efectividad del esquema propuesto y principios prácticos de las leyes de control que se expusieron.

En [55], se propone una estrategia de control robusta para sistemas de LTI (Linear Time Invariant, por sus siglas en inglés) inciertos. La estrategia se basa en un estimador de incertidumbre y perturbación (EIP), el cual aporta un rendimiento similar al del control de retardo de tiempo (CRT). Las ventajas sobre TDC son: no se introduce demora en el sistema; no hay oscilaciones en la señal de control y no hay necesidad de medir las derivadas del vector de estado. Se analiza la robusta estabilidad de los sistemas LTI-SISO y se realizan simulaciones para mostrar la efectividad del control basado en EIP con una comparación realizada con CRT.

En [42], se utiliza el filtro de Kalman extendido para entrenar redes neuronales recurrentes en el espacio de estados para la identificación de sistemas no lineales. Para mejorar la robustez del algoritmo de filtro de Kalman, se le aplica al mismo la modificación robusta de la zona muerta. Mientras que el método Lyapunov se utiliza para probar que el entrenamiento con filtros de Kalman es estable.

En [25], se sugiere un diseño de control de  $H_\infty$  con retroalimentación robusta de salida basado en RN para el control de una clase de sistemas no lineales con retrasos de tiempo e incertidumbres. Se diseñó un controlador de retroalimentación de salida dinámica de orden completo para el sistema no lineal incierto con retardo, aproximado por la RN (por ejemplo, perceptrón multicapa, red neuronal recurrente, entre otras). El controlador  $H_\infty$  óptimo garantiza la estabilidad asintótica global robusta del sistema en lazo cerrado y elimina el efecto de errores de aproximación, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

En [4], se propone una nueva estructura dinámica de red neuronal difusa (en inglés, DSNFN), para un sistema no lineal incierto, con el propósito de abordar problemas de

seguimiento adaptable de sistemas no lineales inciertos con múltiples entradas múltiples salidas (en inglés, MIMO). En este se diseña una red neuronal difusa de cuatro capas (en inglés, NFN) para estimar las incertidumbres del sistema en línea; mientras que la característica principal de esta DSNFN es que se puede aumentar o disminuir el número de reglas difusas a medida que transcurre el tiempo, basándose en los errores de seguimiento. Por medio de un esquema de control híbrido, que involucra el control de modos deslizantes y el control adaptable de estimación limitada con diferentes pesos, se mejora el rendimiento del sistema mediante la supresión de la influencia de las perturbaciones externas y los errores de aproximación. Además, el entrenamiento de esta nueva red neuronal, evita el sobre-entrenamiento y bajo-entrenamiento; lo que se comprobó al igual que la efectividad de este esquema de control propuesto con las simulaciones y resultados obtenidos.

En [27], se presenta una estrategia basada en un algoritmo de estimación no lineal, para efectuar estimación de la variable inflación en el tiempo, a través de mediciones indirectas. Se analizan y dejan por sentadas las bases necesarias para realizar estimación no lineal a través de la técnica MHSE (Moving Horizon State Estimation, por sus siglas en inglés), utilizado en situaciones cuando producto de las incertidumbres paramétricas del modelo éste se torna no lineal. Los resultados obtenidos muestran claramente que el MHSE presenta ventajas comparativas, en particular debido a la existencia de una prueba matemática de su convergencia y a la no dependencia de un punto de operación, como lo es el caso EKF (Extended Kalman Filter, por sus siglas en inglés). La aplicación de estos métodos a datos reales permitió concluir que las estimaciones efectuadas a través del método de horizonte móvil, combinado a un algoritmo heurístico de optimización, logran los mejores resultados.

En [45], se aborda el problema de seguimiento de trayectoria robusto de un robot manipulador en presencia de incertidumbres y perturbaciones. Primero, se diseña un control adaptivo de modo deslizante basado en redes neuronales, que es una combinación de técnica de modo deslizante, aproximación a partir de redes neuronales y técnica adaptiva, para garantizar el seguimiento de trayectoria por parte del robot manipulador. Se muestra con la teoría de Lyapunov que el error de seguimiento converge asintóticamente a cero. Además, se diseña un observador adaptivo basado en redes neuronales para estimar las velocidades de los enlaces. A continuación, basado en el observador, se diseña un control de retroalimentación de salida adaptable en modo deslizante. Luego, la teoría de Lyapunov demuestra que los errores de seguimiento de la trayectoria, los errores de estimación del observador convergen asintóticamente a cero. La efectividad de las propuestas, se ilustran mediante simulaciones.

En [12], se presenta un enfoque de diseño de control de red neuronal adaptivo y robusto para sistemas no lineales de retroalimentación estricta con incertidumbres. En el proceso de diseño del controlador, todos los términos desconocidos en pasos intermedios se transmiten y se aproximan mediante una única red neuronal en el último paso. De esta manera, la estructura del controlador diseñado es mucho más simple, y la ley de control y la ley de

adaptación se pueden dar directamente.

En [46], se propone un control adaptivo robusto para una clase de sistemas no lineales de retroalimentación pura con dinámica no modelada y signos de ganancia desconocidos que utilizan redes neuronales de función de base radial (RBFNN). Las incertidumbres dinámicas se tratan usando una señal dinámica. Los signos de ganancia virtuales desconocidos se resuelven utilizando las funciones de Nussbaum. Usando el teorema del valor medio y la desigualdad de Young, sólo se necesita ajustar un parámetro de aprendizaje en línea en cada paso de la recursión. Está demostrado que el esquema de diseño propuesto puede garantizar una delimitación final uniforme y semi-global de todas las señales en el sistema de circuito cerrado.

En [48], se considera la capacidad de aprendizaje cooperativo de las redes neuronales de función de base radial en los controladores neuronales adaptivos para un grupo de sistemas no lineales inciertos de tiempo discreto en los que las estructuras del sistema son idénticas pero las señales de referencia son diferentes. El conocimiento aprendido por todos los modelos de redes neuronales, también se considera para controlar una clase de sistemas inciertos con la misma estructura pero diferentes señales de referencia.

En [8], se investiga el diseño de un control óptimo robusto basado en redes neuronales, para una clase de sistemas no lineales inciertos, través enfoque de programación dinámica adaptable. En este la metodología utilizada inicialmente, es que el controlador robusto del sistema incierto original, es obtenido añadiendo una ganancia de retroalimentación al controlador óptimo del sistema nominal (original). Hecho esto, se muestra cómo este controlador robusto puede alcanzar su óptimo desempeño por debajo de una función costo específica. Posteriormente, se diseña una red neuronal con el fin de solucionar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, correspondiente al sistema nominal, y donde se introduce un término de estabilización para realizar análisis de estabilidad. Por último, los resultados obtenidos, se extendieron a solucionar problemas de control óptimo descentralizado de sistemas no lineales en tiempo continuo interconectados a gran escala. La efectividad del esquema de control establecido, fue ilustrada mediante los ejemplos de simulación presentados.

En [54], se analiza el problema de seguimiento para una clase de sistemas dinámicos no holonómicos con incertidumbres. Para hacer frente a las incertidumbres, se diseña un sistema de control con red neuronal recurrente sin necesidad de tener conocimiento explícito de la dinámica del sistema. El sistema de control resultante tiene una estructura simple, y se pueden tratar incertidumbres paramétricas y no paramétricas, además, garantiza la estabilidad asintótica de la dinámica de error de seguimiento.

En [50], se propone una red neuronal adaptiva como control de superficie dinámica para una clase de sistemas no lineales con retardo de tiempo con incertidumbres dinámicas e histéresis desconocida. La red neuronal se utiliza para describir las no linealidades y las

dinámicas desconocidas de los sistemas no lineales con retardo de tiempo. Una de las principales ventajas del esquema desarrollado es que las redes neuronales se utilizan para describir aproximadamente no linealidades y dinámicas desconocidas de los sistemas de retardo no lineal, lo que hace posible tratar con sistemas inciertos no lineales desconocidos, y perseguir el rendimiento  $L_\infty$  del error de seguimiento. Se demostró que el esquema propuesto puede garantizar la estabilidad semiglobal del sistema de lazo cerrado y logra el rendimiento  $L_\infty$  del error de seguimiento. Los resultados de la simulación para los sistemas no lineales generales de segundo orden demostraron la eficacia del método propuesto.

En [18], se presentó una estrategia de control basada en redes neuronales diferenciales para una clase bastante amplia de sistemas no lineales inciertos SISO en la forma canónica de Brunovsky con zona muerta desconocida. El proceso de diseño se dividió en dos partes. Primero, con base en un modelo de la zona muerta, que la considera como una combinación de un término lineal más otro término tipo perturbación, se identificó directamente la dinámica desconocida mediante una red neuronal diferencial cuyos pesos se ajustan en línea a través de leyes de aprendizaje estables, también, recurriendo a un análisis estilo Lyapunov se demostró la convergencia del error de identificación a una zona acotada. Posteriormente, con base en el modelo neuronal obtenido, se construyó una ley de control para que el estado de la red neuronal siguiera una trayectoria de referencia acotada. La ley de control fue desarrollada de forma tal que permitió demostrar que la diferencia entre el estado de la red neuronal y la trayectoria de referencia, converge exponencialmente a cero. A diferencia de otros trabajos, no se necesitó el conocimiento específico de cotas para los parámetros de la zona muerta, pero sí, el conocimiento de una cota para un término de incertidumbre/perturbación. Se concluyó que la diferencia entre el estado de la planta y la trayectoria de referencia convergen asintóticamente a una zona acotada, además, que el estado del sistema y de la red neuronal, los pesos de la red y la señal de control se encuentran acotados. Finalmente, con base en un ejemplo de simulación, se observó que el esquema de control propuesto logra un desempeño satisfactorio y que lo consigue de forma eficiente ya que los parámetros adaptables únicamente se modifican cuando es necesario.

En [29], se propone un ajuste heurístico para mejorar el rendimiento del JSSF (James-Stein State Filter, por sus siglas en inglés) incluso en presencia de ruido de medición, lo que dió paso al JSSF-A (James-Stein State Filter Adjusted). Para ilustrar la aplicabilidad del enfoque en sistemas no lineales con dinámicas complejas, se considera la estimación de los atractores de Chen y Lorenz con incertidumbres en sus parámetros. Para sistemas lineales se observó que el JSSF-A produce un error cuadrático medio aceptable incluso dentro de los rangos del filtro de Kalman, que por definición es el estimador óptimo. Por otro lado, cuando se trata de sistemas no lineales, y en particular con dinámica compleja (caótica), el JSSF-A mostró ser una muy buena opción cuando se presentan incertidumbres paramétricas.

De las referencias analizadas en este apartado, se destacan los distintos tipos de arquitectura de las RND y los algoritmos de aprendizaje utilizados. Además, se pudo notar en varias



referencias que las RND las utilizan como controlador, donde el término incierto es asumido pero no estimado por la misma, sólo en algunas de ellas, se propone una estructura para la incertidumbre. Por lo anterior, se puede observar que existe una oportunidad al estimar la parte de la incertidumbre para poder extraer mayor información de dichos sistemas.

### **1.1.2. Identificación de sistemas no lineales**

#### **Identificación de sistemas no lineales**

En [44], se enfatiza en la necesidad de tener conocimiento parcial de la dinámica del sistema no lineal, y que además, esto sea reflejado para el desarrollo de un nuevo enfoque de programación dinámica aproximada mediante un proceso dividido en dos partes: la identificación del sistema en línea y la formación de control sin conexión óptima. Primero, en el proceso de identificación del sistema, se sintoniza una RN para que aprenda la dinámica completa de la planta, de modo que se demuestre la estabilidad asintótica local del error de identificación. Luego, utilizando sólo el modelo de sistema entrenado de la RN, fuera de línea se intenta obtener una nueva ley de control óptimo.

En [19], se propuso una identificación dinámica de los robots manipuladores utilizando un compensador de red neuronal. Utilizando una matriz pseudoinversa, se formuló la identificación de los parámetros y se garantizó la solución óptima en un sentido de mínimos cuadrados de los errores medios. Se diseñó una red neuronal para compensar las dinámicas no modeladas. Sobre la base del algoritmo de retropropagación, se entrenaron los pesos de la red neuronal. La comparación de los resultados de acuerdo a las simulaciones, confirman la efectividad del método de identificación propuesto.

En [5], se presenta un esquema robusto de control difuso adaptivo para una clase de sistemas no lineales inciertos que contienen una zona muerta desconocida. Las características de zona muerta se encuentran con bastante frecuencia en los actuadores, como válvulas hidráulicas y neumáticas, servomotores eléctricos y circuitos electrónicos, etc. Por lo tanto, se propone un método de control robusto difuso adaptivo sin construir la zona muerta inversa. Las funciones no lineales desconocidas del sistema controlado se aproximan mediante el sistema de lógica difusa según algunas leyes adaptativas. Mediante el teorema de estabilidad de Lyapunov, el esquema de control difuso robusto adaptable propuesto puede garantizar la sólida estabilidad de todo el sistema de lazo cerrado con una zona muerta desconocida en el actuador y obtener un buen rendimiento de seguimiento también.

En [10], se presenta un método completo para llevar a cabo el estudio de un sistema difuso de vibración inducida por fricción y para analizar los efectos de la incertidumbre en los datos de salida de un problema de estabilidad. El enfoque propuesto descompone el problema difuso en problemas de intervalo y calcula las soluciones de salida de intervalo por optimización; es decir, el número de simulaciones para propagar la incertidumbre se controla explotando los resultados del análisis de dependencia funcional y reescribiendo el problema

de propagación de incertidumbre como un problema de optimización. Cada cálculo de los datos de salida del problema de estabilidad, que es útil durante el proceso de optimización, se vuelve a analizar integrando controladores de lógica difusa para el paso estático y técnicas de desarrollo y proyección de homotopía para el paso modal.

Los trabajos analizados en esta sección, hacen uso de la identificación para estimar el modelo del sistema; sin embargo, estiman la parte incierta, lo que proporciona un campo de investigación idóneo para el estudio.

## **Neuro identificación**

En [24], se proponen redes perceptrones multicapa recurrentes (RPMR) de tiempo continuo para identificar los sistemas no lineales. A partir del teorema de la función de aproximación para perceptrones multicapa (PM), se obtuvo que las RPMR pueden aproximar cualquier sistema dinámico en cualquier grado de precisión. El algoritmo de aprendizaje propuesto es similar a la regla retropropagación, pero con un término adicional que asegura la estabilidad de error de identificación.

En [53], se utilizan las redes neuronales dinámicas multicapas para la identificación en línea de un sistema no lineal. Se demuestra que el algoritmo de retropropagación con un término modificado, puede hacer que el algoritmo de neuroidentificación sea robusto y estable con respecto a cualquier incertidumbre acotada.

En [52], se hace uso de las redes neuronales dinámicas de una capa para el sistema no lineal de identificación en línea. Es aplicado el enfoque de pasividad para acceder a varias propiedades de estabilidad del neuroidentificador. El algoritmo de retropropagación con un término modificado que se determina por el aprendizaje fuera de línea puede hacer que el neuroidentificador sea robusto con respecto a cualquier incertidumbre acotada.

En [13], se proponen esquemas de control neuronal adaptivo para dos clases de sistemas no lineales inciertos de múltiples entradas/salidas múltiples (MIMO) en formas de bloques triangulares. Se utilizaron las redes neuronales para aproximar todas las funciones no lineales inciertas en el diseño de los controladores, logrando que con los esquemas desarrollados se llegara al límite final semiglobal uniforme de todas las señales en el lazo cerrado de los sistemas MIMO no lineales. Se comprobó que las salidas de los sistemas convergen en una pequeña vecindad de las trayectorias deseadas. Los esquemas propuestos ofrecen procedimientos de diseño sistemáticos para el control de las dos clases de sistemas no lineales MIMO inciertos sin repetir el complejo procedimiento de diseño del controlador para diferentes no linealidades del sistema. Para mostrar la efectividad del enfoque, se presentaron resultados de simulación.

En [51], el neuro-identificador se incorpora una modificación robusta con el objetivo

de garantizar la estabilidad de Lyapunov. Se aplica el enfoque de estabilidad de entrada a estado para acceder a los algoritmos de entrenamiento robustos de tiempo discreto de las redes neuronales recurrentes. Se concluye, que para la identificación de sistemas no lineales, la ley del gradiente descendente y el algoritmo de retropropagación para el ajuste de ponderaciones son estables en el sentido de  $L_\infty$  y robustos para cualquier incertidumbre acotada.

En [16], se propone un esquema de identificación en línea con el fin de mejorar el rendimiento de error residual del estado frente a las perturbaciones. El esquema propuesto se basa en una ley de adaptación que modifica los pesos para aproximar las no linealidades desconocidas con error acotado. Un modelo de identificación con retroalimentación se introduce para mejorar el rendimiento de error de estado. La retroalimentación se basa en una función de delimitación para estimar el límite superior de las perturbaciones, además, de utilizar el método de Lyapunov para demostrar las características del error de identificación.

En el trabajo de investigación [26], se diseña una red neuronal feedforward 2-12-1 con una capa oculta, entrenada por medio del algoritmo Levenberg-Marquardt, la misma se propuso para tratar de aproximar el comportamiento no lineal del parámetro electromagnético de un sistema de levitación y por tanto obtener un modelo matemático más preciso, dicha red neuronal es entrenada con una serie de datos experimentales extraídos de un prototipo físico. Se seleccionaron tres estrategias diferentes de control. La primera, fue la linealización exacta del sistema no lineal por medio de una retroalimentación completa de estados. La segunda, desarrollo de un método constructivo para hallar una ley de control estabilizante por medio de la retroalimentación completa de los estados del sistema y de funciones de control de Lyapunov. En la tercera, se propuso un controlador lógico difuso tipo Mamdani con una base de 49 reglas, para el cual sólo fue necesario conocer a plenitud el comportamiento del sistema a controlar. Finalmente, se comparó el desempeño de dichas estrategias en términos de respuesta en estado transitorio y estacionario, sobrepaso, cotas sobre los estados y señales de control, considerando que todos los estados del sistema se encuentran disponibles.

En la referencia [20], se desarrolla un enfoque de identificación con redes neuronales diferenciales, en el cual se utilizan sistemas de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, las cuales representan a diversos sistemas mecánicos que presentan oscilaciones, además, del control de modos deslizantes de alto orden, que es eficiente para controlar plantas dinámicas complejas de orden dos o superior, y que a su vez operan bajo condiciones de incertidumbre.

En la referencia [38], se desarrolla un análisis sistemático para estabilización, identificación y seguimiento de trayectorias de plantas no lineales por medio de redes neuronales recurrentes, para el caso determinístico. A diferencia del control adaptable tradicional, en este trabajo se presentó una nueva forma de modelar plantas no lineales en línea por medio de redes neuronales de pesos variables en el tiempo, con el objetivo que la planta siga a una señal de referencia dada. Para esto se obtuvieron leyes de control y leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, las cuales garantizaron en conjunto que la planta siga dicha señal

de referencia. La herramienta principal utilizada para ese análisis se basó en la metodología de análisis de estabilidad de Lyapunov.

En [47], se propone un método para la estimación de la postura humana basada en las redes neuronales profundas (RNP). La estimación de la postura se formula como un problema de regresión basado en RNP hacia las articulaciones del cuerpo. Se presenta una cascada de tales regresores que dan como resultado estimaciones de pose de alta precisión. El enfoque tiene la ventaja de razonar acerca de la postura de una manera holística y tiene una formulación simple pero poderosa que aprovecha los avances del aprendizaje profundo.

El documento [2], estudia el control de seguimiento adaptivo compuesto para una clase de sistemas no lineales inciertos en forma de retroalimentación estricta. La técnica de control de superficie dinámica se incorpora en el marco de control basado en redes neuronales basadas en funciones radiales para eliminar el problema de la explosión de la complejidad. A diferencia del seguimiento asintótico directamente, se tiene en cuenta la precisión de los modelos neuronales identificados. El error de predicción entre el estado del sistema y el modelo de estimación serie-paralelo se combina con el error de seguimiento compensado para construir las leyes compuestas para la actualización de los pesos de la red neuronal. La estabilidad de acotación uniforme final se establece utilizando el método de Lyapunov.

En [40], se propone un controlador neuronal adaptable robusto de modo deslizante para el seguimiento de trayectoria de un brazo robótico tipo SCARA, donde la dinámica no lineal es desconocida. Para aproximar los términos inciertos, se propone una estructura de red neuronal de funciones de base radial, que a su vez fue utilizada para aproximar un control equivalente que forma parte de la ley de control que garantiza la condición de deslizamiento. El esquema obtenido garantiza robustez en el sentido de que el mecanismo de auto-sintonización puede ajustar automáticamente el controlador neuronal de modo deslizante mediante el uso de un algoritmo de aprendizaje, mientras que la estabilidad asintótica global del algoritmo se establece a través de las condiciones de estabilidad discreta de Lyapunov.

En [30], se presenta el diseño de una metodología de identificación en línea mediante redes neuronales dinámicas cuyo error de identificación sea estable para un sistema dinámico no lineal afín con la entrada cuya incertidumbre es parcial en el término no lineal de retroalimentación, donde dicha metodología fue formalizada por medio del planteamiento de un teorema, el cual tuvo su base en un análisis estilo Lyapunov. Dicho análisis, también permitió conocer la estructura del umbral neuronal y del algoritmo de aprendizaje de la red neuronal. La fortaleza y efectividad de esta metodología, se demostró mediante el desarrollo simulaciones de sistemas dinámicos no lineales. Finalmente se propone una metodología para aproximar al sistema no lineal incierto afín con la entrada dentro de una región de operación, mediante la utilización de los datos obtenidos a partir de las simulaciones elaboradas y la aplicación de una red neuronal estática para proponer un modelo neuronal que

aproxime a dichos sistemas dinámicos dentro de una región de operación.

En las referencias analizadas en esta sección, se intenta que la incertidumbre no afecte la estabilidad de los sistemas, pero no estiman la misma, pasando por alto la información que se puede obtener de dicha estimación. Por ejemplo, en [16], se utiliza una función de delimitación para estimar el límite superior de las perturbaciones, además de utilizar el método de Lyapunov para demostrar las características del error de identificación.

## 1.2. Planteamiento del problema

Los problemas de control automático que surgen en una amplia variedad de campos de la ingeniería, son caracterizados esencialmente por un medio ambiente incierto y por ser no lineales. La mayoría de las investigaciones realizadas sobre este tema han demostrado que las RN son una herramienta muy efectiva, para aproximar e identificar una amplia clase de sistemas no lineales complejos cuando la información del modelo matemático está incompleta; por lo tanto, desde su aparición las redes neuronales presentan un creciente interés debido a su capacidad de aproximación de funciones no lineales.

El modelado de sistemas ha tenido un rol fundamental dentro del contexto del análisis de los sistemas de control tanto lineales como no lineales y también de su diseño. Pero las características del diseño de un sistema de control van a depender en gran medida, de la fidelidad con la que el modelo empleado describa el comportamiento del mismo, [49].

Uno de los principios del modelado de sistemas es el de simplificación y/o aproximación; dado que un proceso real puede ser extremadamente complejo para ser descrito de forma absolutamente precisa por un modelo matemático, en cuyo caso se habla de errores de modelado. Se puede considerar por tanto, que cualquier modelo matemático de un proceso real va a ser en mayor o menor grado impreciso, en otras palabras, va a contar con incertidumbre estructural o paramétrica, y errores de modelado, [37]. Si se desea controlar de manera eficiente un proceso real, se deberá de tener información sobre las posibles fuentes de incertidumbre y de su modelo, el cual se puede representar como la suma de una parte conocida más una parte desconocida como se muestra en la Figura 1.1, de forma que esto permita evaluar su efecto sobre el comportamiento del sistema completo.

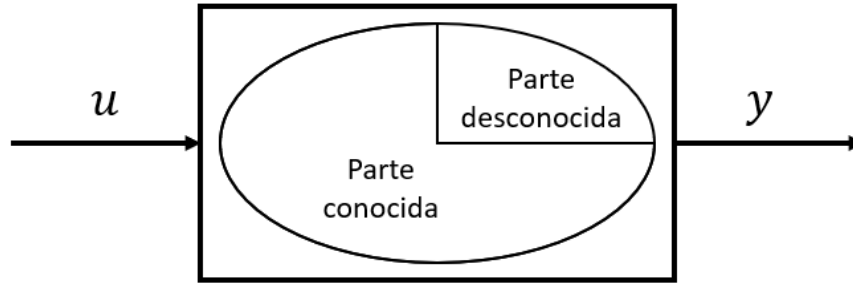


Figura 1.1: Planta parcialmente conocida.

La estabilidad se considera la propiedad cualitativa más importante de los sistemas de control, motivo por el cual la mayoría de los diseños de sistemas están dirigidos directa o indirectamente a la obtención de sistemas estables; sin embargo, a partir de estos estudios se ha concluido que en los sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad. En particular existe el análisis de estabilidad de sistemas no lineales afines con la entrada y con incertidumbre en el término de la retroalimentación; aunque, por motivo de la presencia de la misma, resulta complejo obtener una representación exacta de un modelo matemático de un determinado sistema, de manera que dicho análisis no resulta sencillo, [39].

### 1.3. Justificación

En un sistema físico siempre existe incertidumbre, por pequeño que sea su valor; por tanto, se puede tener en cuenta que alrededor de un valor nominal, se considerará un intervalo de valores inciertos. Por esta razón, una manera de modelar las plantas que tienen incertidumbre, [39], es considerando un modelo que tenga términos nominales o valores centrales conocidos más otra parte no modelada o incierta, [36].

Como se describió anteriormente, para los sistemas con esta característica, el análisis de estabilidad pasa de ser, simple a complejo, por lo que se debe garantizar que este a pesar de las incertidumbres sea estable; sin embargo, es necesario conocer que cuando un sistema posee incertidumbre de algún tipo, se convierte en una familia de sistemas. A causa de este importante problema, resultados recientes, en los que se han empleado diversas arquitecturas de las RND para el control de sistemas no lineales con incertidumbre, han demostrado que una de las principales ventajas de las mismas en el diseño de control no lineal es la capacidad de construir mapeos no lineales complejos, lo que a su vez, genera que esta técnica sea muy eficiente para identificar una gran cantidad de sistemas no lineales complejos cuando no se tiene información completa del modelo.

Mediante el uso de la identificación en línea con las RND, se busca obtener un modelo

para aproximar al sistema no lineal dentro de una región de operación, buscando garantizar un buen desempeño de todos los elementos de la familia. Lo que resulta en aplicaciones como, diagnóstico de desgaste de algún componente de la planta, control robusto a incertidumbre, diagnosticar el comportamiento de la planta bajo distintos factores, entre otros, [30].

## **1.4. Objetivos y Metas**

### **1.4.1. Objetivo general**

Proponer una metodología de modelado para sistemas no lineales inciertos afines con la entrada a partir de redes neuronales dinámicas, mediante acoplamiento del dominio y rango de la incertidumbre a lo largo de una región de operación de interés.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

- Proponer un modelo de incertidumbre para sistemas no lineales inciertos afines con la entrada.
- Construir un modelo con una red neuronal dinámica para modelar sistemas no lineales inciertos afines con la entrada mediante acoplamiento de la incertidumbre.

### **1.4.3. Metas**

- Diseño del modelo de incertidumbre para sistemas no lineales inciertos afines con la entrada.
- Propuesta de una matriz de acoplamiento en el modelo de incertidumbre.
- Comparación entre sistemas con incertidumbre total y parcial mediante el acoplamiento del dominio y rango.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Redes neuronales

En 1949, Hebb propuso una ley de aprendizaje que puede ser considerada como el inicio de los algoritmos de entrenamiento de las RN, mientras que la primera estructura de RN fue propuesta por Rosenblatt en 1958. A partir de ese momento, el interés por las RN ha tenido un gran auge, proponiéndose nuevos modelos que han superado las restricciones de las redes anteriores, proporcionándoles mayores capacidades.

Las RN deben su origen a la observación de los sistemas neuronales de los seres vivos; sin embargo, éstas no son un reflejo fiel de dichas redes biológicas.

### 2.2. Neurona biológica

El cerebro humano tiene más de 10 billones de células neuronales, las cuales tienen interconexiones complicadas, y constituyen una red neuronal de procesamiento de señal y memoria a gran escala. El estudio matemático de un modelo neuronal individual es el primer paso en el diseño de una red neuronal compleja, [38].

Una neurona biológica es una célula especializada que se encarga de transmitir información a otras células o neuronas a partir de señales electro-químicas, [33]. Estas son los componentes básicos del sistema nervioso. A pesar de que tienen la misma organización general y aparato bioquímico de otras células, poseen características únicas. Tienen una forma distintiva, una membrana externa capaz de generar impulsos eléctricos, y una estructura única, [35].

En términos de procesamiento de información, una neurona individual con dendritas como terminales de entrada múltiple y un axón como una sola terminal de salida podría ser considerada como un sistema múltiple-entrada/única salida (MISO). Las funciones de procesamiento de este sistema neuronal se dividen en las siguientes categorías, [38]:



- Cuerpo de la célula o soma: proporciona las funciones de soporte y la estructura de la célula; además recibe y procesa la información sináptica. La mayoría de las funciones lógicas de la neurona se llevan a cabo en el soma.
- Dendritas: son extensiones de fibras sumamente ramificadas en forma de tubo que forman un árbol espeso alrededor del cuerpo celular y actúan como puntos de entrada para el cuerpo principal de la neurona. En promedio, hay de 103 a 104 dendritas por neurona, que forman una superficie receptiva las señales de entrada a las neuronas.
- Axón o salida: se extiende lejos del cuerpo celular, aparece en forma de un potencial de acción, y proporciona el camino sobre el cual se transmite la información otras neuronas para un procesamiento más.
- Sinapsis: es un área de almacenamiento de la experiencia pasada (base del conocimiento) que proporciona la memoria a largo plazo a la experiencia acumulada pasada, además, es el punto de unión entre un axón y una dendrita; su función, tiene naturaleza excitatoria o inhibitoria, por esto tiene la habilidad de incrementar o atenuar la excitación de la neurona; así como, transferir información de una neurona a otras neuronas, [6] y [36].

Es posible distinguir las diferentes regiones de esta célula especializada, como se muestra en la Figura 2.1.

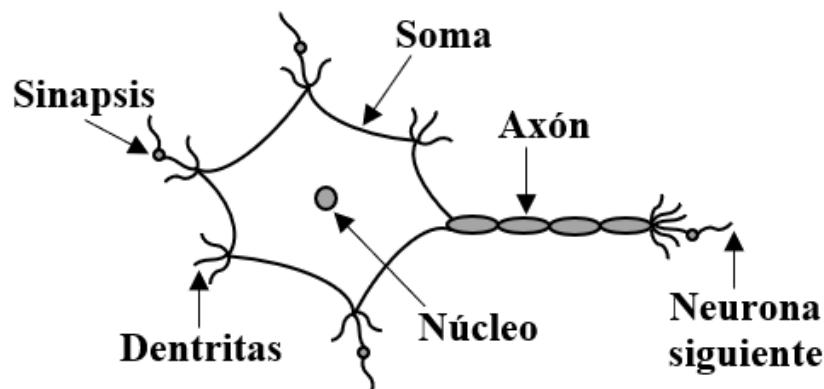


Figura 2.1: Estructura de una neurona biológica.

Cada neurona actúa como un procesador en paralelo debido a que recibe potenciales de acción en paralelo a partir de sus neuronas vecinas y transmite pulsos en paralelo a otras sinapsis vecinas. En términos de procesamiento de información, la sinapsis también realiza un cambio en la frecuencia y voltaje de un impulso.

Una neurona biológica cuenta con procesos muy complejos que no han sido conocidos totalmente. Sin embargo, existe flexibilidad en el modelado de una neurona biológica; es decir; una neuronal artificial es diseñada para realizar funciones o cálculos que sean específicos, de manera que la arquitectura de la misma es muy particular para cada problema que se desee resolver con esta técnica.

## 2.3. Redes neuronales artificiales

La tecnología neuronal trata de reproducir el proceso de solución de problemas del cerebro. Así como los humanos aplican el conocimiento ganado con la experiencia a nuevos problemas o situaciones, una red neuronal toma como ejemplos problemas resueltos para construir un sistema que toma decisiones y realiza clasificaciones. Los problemas adecuados para la solución neuronal son aquellos que no tienen solución computacional precisa o que requieren algoritmos muy extensos como en el caso del reconocimiento de imágenes.

Entre las características más sobresalientes de las RNA, se encuentran las siguientes, [20]:

1. Capacidad de aprendizaje: la naturaleza no lineal de las mismas les permite manifestar comportamientos complejos. Esta característica junto con algoritmos que extraen un mayor rendimiento de tales sistemas, les asignan esa capacidad.
2. Posibilidad de procesamiento paralelo: aspecto que es aprovechado en la implementación y conlleva a un aumento considerable de la velocidad de procesamiento.
3. Tolerancia a fallos: esta propiedad las hace favorables en ciertas aplicaciones, donde, una avería puede significar un grave peligro.

En la actualidad, uno de los desafíos de la ingeniería de control es ante sistemas cada vez más complejos, a condiciones de diseño más exigentes, al desconocimiento de las plantas y sus entornos. En cuanto a la clasificación de las RN, se puede definir una división de las mismas en base a su arquitectura y forma de procesar las señales, en general, existen las clases siguientes de las RNA:

1. Redes neuronales estáticas: utilizan algoritmos de optimización local; es decir, el método de retro-propagación, utilizado para el ajuste de los parámetros de la red con el objetivo de aproximar una función no lineal desconocida.
2. Redes neuronales recurrentes: solucionan el problema de aproximación de funciones, empleando ecuaciones en diferencias, [35].
3. Redes neuronales diferenciales: aprovechan las propiedades de los sistemas retroalimentados, lo que permite evitar la mayoría de los problemas relacionados con la búsqueda de un extremo global, por medio del cambio de la ley de aprendizaje como algoritmo estático a un modelo diferencial de ajuste de los pesos de la RNA, [35].

### 2.3.1. Modelado estático de redes neuronales artificiales

Una RNA es un elemento capaz de procesar gran cantidad de información de forma paralela y distribuida, y está inspirada en las redes neuronales biológicas, las cuales pueden almacenar conocimiento y tenerlo disponible para su uso. Si la respuesta de una red neuronal depende únicamente de sus entradas y no depende de señales en instantes anteriores de tiempo, se dice que es una red neuronal estática, por lo que la respuesta de la red neuronal es invariante en el tiempo, [33]. La RNA tiene similitudes con el cerebro, tales como:

- El conocimiento es adquirido a través de un proceso de aprendizaje.
- Las conexiones entre neuronas son llamadas pesos sinápticos y son utilizados para almacenar el conocimiento.

El procedimiento para el proceso de aprendizaje es conocido como algoritmo de aprendizaje, la función del mismo consiste en modificar los pesos sinápticos de las RN con el objetivo de minimizar una función de costo. La modificación de los pesos sinápticos es el método tradicional para el diseño y el funcionamiento de las redes neuronales, [38] y [41].

La neurona es la unidad fundamental para la operación de la RN y consiste en tres elementos básicos, [38]:

1. Un conjunto de enlaces sinápticos, donde cada uno está caracterizado por su propio peso.
2. Una sumatoria para los componentes de las señales de entrada, multiplicadas por el peso sináptico respectivo.
3. Una función de activación no lineal que transforma la suma de salida en la salida de la neurona.

En la Figura 2.2 se muestra el esquema de una neurona artificial según el modelo propuesto por McCulloch-Pitts, [6].

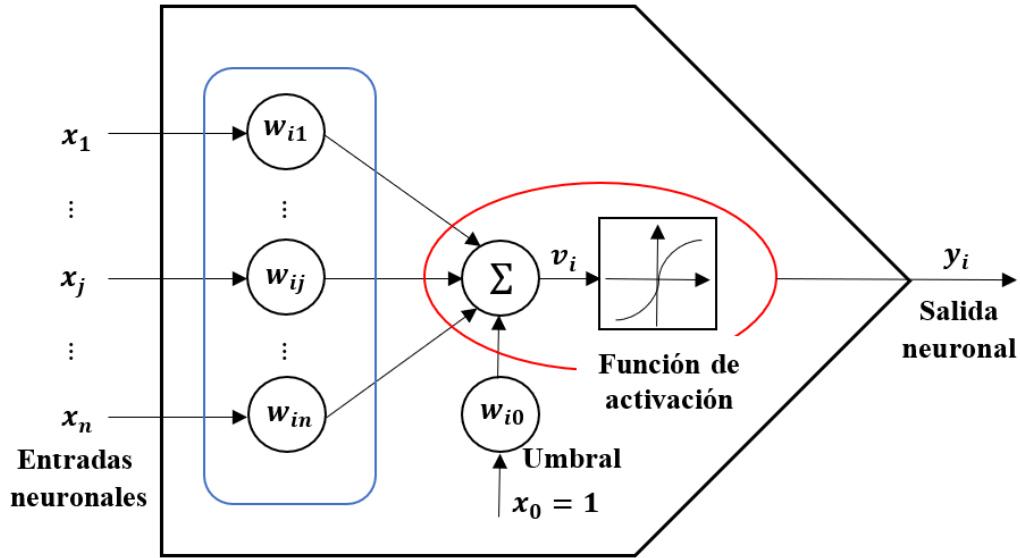


Figura 2.2: Neurona artificial.

En términos matemáticos, la  $i$ -ésima neurona se puede describir como:

$$y_i = \varphi(w_{i1}x_1 + w_{ij}x_j + w_{in}x_n + w_{i0}x_0)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j + w_{i0}x_0 = \varphi(Wx + \theta) \quad (2.1)$$

Donde:

$x_j$ :  $j$ -ésima componente de la entrada.

$w_{ij}$ : peso que conecta la  $j$ -ésima componente de la entrada a la neurona  $i$ .

$v_i$ : salida del sumador.

$\theta$ : umbral.

$\varphi(\cdot)$ : función de activación.

$y_i$ : salida de la neurona  $i$ .

La función de activación denotada por  $\varphi(\cdot)$ , recibe como entrada a  $v_i$  y genera el elemento de salida  $y_i$ . Una neurona individual realiza una suma de sus entradas ponderadas y proporciona una salida a través de una función de activación no lineal con un umbral. La misma, en general es no lineal y acotada, generalmente se escoge el perfil sigmoideal, pero puede tener otros perfiles, por ejemplo, el de saturación, la función escalón, tangente hiperbólica, etc, [6].

Las funciones de activación más utilizadas están definidas por las siguientes expresiones:

$$\text{Escalón : } \varphi(u) = \sigma(x) = \begin{cases} 1 ; & \text{si } x \geq 0 \\ 0 ; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Sigmoidal : } \varphi(u) = \textit{sigm}(x) = \frac{1}{1+e^{-s}}$$

$$\text{Tangente hiperbólica : } \varphi(u) = \textit{tanh}(x) = \frac{1-e^{2s}}{1+e^{-2s}} \quad (2.2)$$

$$\text{Saturación : } \varphi(u) = \textit{sat}(x) = \begin{cases} -1 ; & \text{si } x < -1 \\ x ; & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 ; & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

El interés en cualquier arquitectura neuronal es el ajuste de las sinapsis o pesos, con el fin de realizar una tarea determinada, a lo que se le conoce como ley de aprendizaje. La estrategia más básica de una ley de aprendizaje consiste en el ajuste de los pesos de una red neuronal para minimizar una función de costo, por lo cual es fácil encontrar el uso de las redes neuronales para resolver problemas de optimización, [36]. El ajuste mencionado se puede realizar de dos formas:

1. Fuera de línea: el ajuste de los pesos se realiza antes de implementar la red neuronal, y una vez realizado el ajuste, la red neuronal se implementa con sus pesos fijos.
2. En línea: el ajuste se realiza simultáneamente con la red neuronal implementada; en este caso los pesos o aprendizaje puede sufrir modificaciones ante posibles perturbaciones en la tarea que realizan.

Las redes neuronales artificiales están construidas en base a elementos de cálculo relativamente sencillos, que tienen la propiedad de aprender de su medio y modificar la forma de interactuar con él; estas se clasifican atendiendo tres arquitecturas elementales: redes con una sola capa, multicapas y en malla; además la organización de las neuronas en la red, es conocida como topología.

### 2.3.2. Modelado dinámico de redes neuronales artificiales

Las redes neuronales dinámicas o recurrentes se distinguen de las estáticas en que poseen al menos una señal retroalimentada. Esta retroalimentación puede estar hecha en tiempo discreto o en tiempo continuo, [30], [36] y [35].

Los lazos de retroalimentación dan como resultado un comportamiento dinámico no lineal debido a la función de activación no lineal de las neuronas; por tanto, esto puede describir mejor la estructura de las redes neuronales. Estas redes permiten una mejor comprensión de las estructuras biológicas, y ofrecen también grandes ventajas computacionales,

[35]

Una red neuronal dinámica puede tener una estructura en tiempo continuo como la siguiente, [36]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \varphi \left( W_1 \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \theta_1 \right) \\ y &= \sigma \left( W_2 \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \theta_2 \right)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Donde:

$x$ : entrada de la RN.

$\hat{x}$ : estado de la RN.

$y$ : salida construida con una neurona que depende del estado.

$W$ : vector de pesos sinápticos.

La estructura mostrada en (2.3) podría ser representada como en la Figura 2.3.

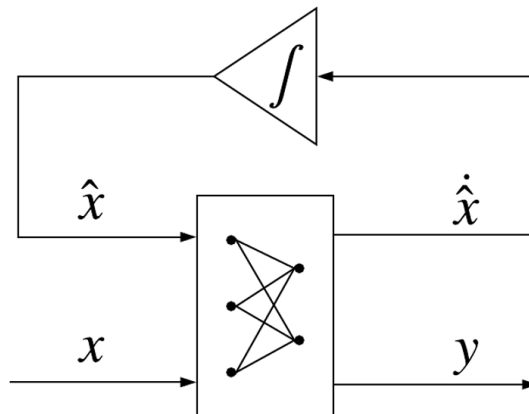


Figura 2.3: Estructura de una red neuronal dinámica.

## 2.4. Incertidumbre

Los sistemas actuales a controlar se han vuelto muy complejos, la mayoría de ellos presentan algún grado de no linealidad, pueden ser variantes e invariantes en el tiempo, y presentar incertidumbres en sus entradas o en su estructura. Las incertidumbres en la entrada son causadas por la imprecisión al medir el valor de sus parámetros o desconocimiento de los mismos; mientras que las incertidumbres en la estructura se refieren a las dinámicas no modeladas, como fricción no lineal, acoplamiento de engranes, ruido en los sensores, perturbaciones externas, etc.; este tipo de fenómenos no pueden ser tratados por las técnicas

de control clásico.

Los modelos matemáticos que se obtienen de los sistemas físicos no representan de una manera exacta al sistema que describen ni su comportamiento; sin embargo, en la medida que el modelo se apegue al sistema físico, más precisa será la representación.

En muchos casos es complejo obtener dicho modelo, pero lo que es posible determinar es a un aproximado a la realidad, por lo cual, es necesario considerar que existirá una incertidumbre que tendrá que ser tomada en cuenta en el momento de hablar de la estabilidad y en general del desempeño del sistema en cuestión.

La representación de incertidumbres [17] y [28] puede variar dependiendo de qué tanta estructura se conozca de la incertidumbre, del conocimiento que se tenga del sistema físico y la habilidad para poder representar la incertidumbre de manera tal que permita su manipulación matemática.

La incertidumbre puede ser de diferentes tipos, [9]:

- Incertidumbre paramétrica: existe cuando el modelo matemático es correcto, pero se desconoce el valor exacto de los parámetros físicos del sistema.
- Incertidumbre estructural: esta falta de información surge cuando en el modelo que se está construyendo no se hayan tomado en cuenta por determinada razón, ciertas dinámicas de la planta, en este caso la estructura real de la planta tendrá diferencia con respecto a la estructura del modelo matemático; es decir; se refiere a las suposiciones realizadas por los investigadores en la elección y diseño del modelo.

Existen ciertos efectos de la incertidumbre que se deben tener en cuenta, tales como:

- Sobre el modelo: no se reciben los datos esperados o se reciben con un error mayor al esperado.
- Sobre el controlador: se produce al retroalimentar; es decir; el controlador del sistema recibe datos con incertidumbre, por lo que el principal efecto es mayor esfuerzo de control; es decir; mayor energía, esto es porque el controlador está diseñado a partir de la respuesta de la señal controlada y no por manipulación del modelo.

## 2.5. Aproximación de funciones

Se puede considerar el problema de aproximación de funciones como antecedente al de identificación de sistemas. El problema de aproximación de funciones se divide en dos tipos, [33]:

1. Se supone que se conoce la expresión de la función, y lo que se busca es una estructura paramétrica que aproxime la función con algún grado de precisión deseado.

2. El problema consiste en obtener una función que se ajuste a un conjunto finito de datos.

En el primer caso se busca representar cierta clase de funciones como una suma de potencias a través de manipular series geométricas, como lo son las series de McLaurin y de Taylor; este enfoque permite obtener versiones simplificadas de funciones, con el único fin de ayudar al análisis de los problemas y también para simplificar los cálculos. Por otra parte, el segundo caso está enfocado de manera experimental debido a que no se cuenta con una expresión explícita de la función de la cuál se desea obtener una aproximación.

### 2.5.1. Nube de datos

Se considera que  $\Omega$  contiene un número finito de puntos en un sistema de coordenadas bidimensionales, tridimensionales,  $q$ -dimensionales, cuyos elementos se pueden representar como coordenadas  $X, Y, Z$ , etc.

Particularmente en el caso bidimensional se tiene el siguiente conjunto:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.4}$$

Donde,

$$\Omega = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\} \tag{2.5}$$

Si se propone encontrar una  $\hat{y}$ , que es una función que aproxima a  $\Omega$ , se podría tener una interpretación gráfica como la mostrada en la Figura 2.4.

$$\begin{aligned} \hat{y} &= f(x) \\ f(x_i) &\cong y_i \quad \forall (x_i, y_i) \in \Omega \end{aligned} \tag{2.6}$$



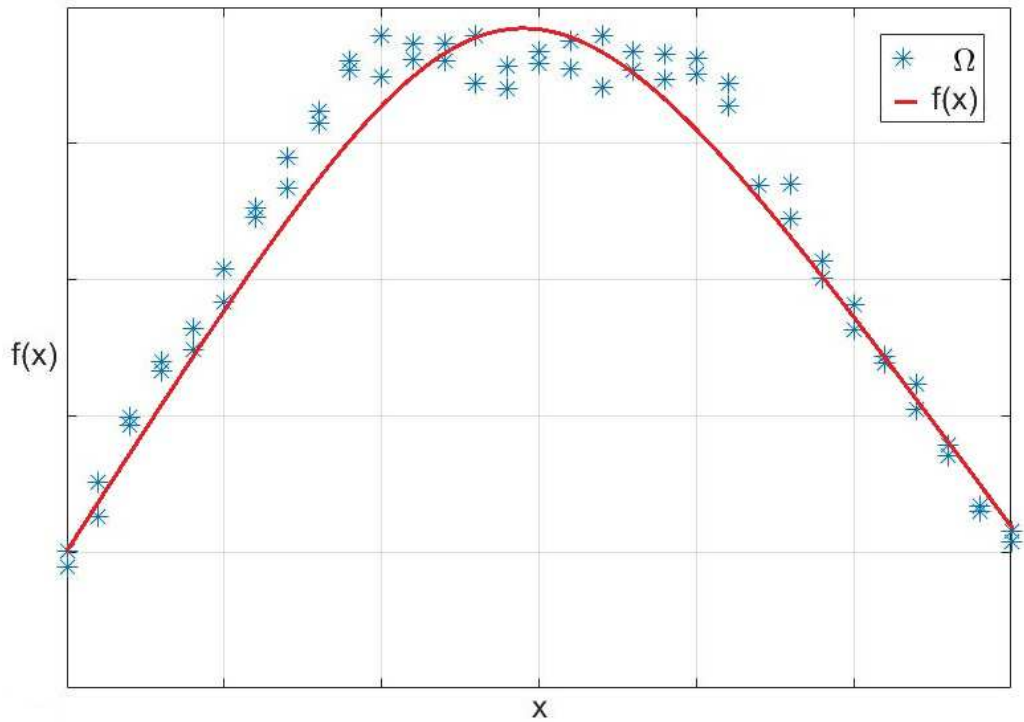


Figura 2.4: Nube de datos  $\Omega$  y aproximación de  $\hat{y}$ .

Para construir el conjunto de datos para la aproximación, ante todo se debe tener en cuenta que el conjunto de puntos inicial podría contener una gran cantidad de puntos, por lo que es necesario simplificarlo, con el objetivo de eliminar valores cercanos y las redundancias, y así evitar información errónea y aumentar la velocidad en el procesamiento de los datos.

### 2.5.2. Aproximación de funciones mediante redes neuronales

Las redes neuronales han demostrado una gran capacidad de aproximar funciones. Los resultados con relación a esto han ido perfeccionándose, y uno de los autores que contribuyó con ello fue Cybenko, quien demostró la existencia de una red neuronal de dos capas, con  $N$  neuronas en la primera capa que puede aproximar cualquier función, [6].

El motivo por el cual las redes neuronales han sido más utilizadas en el campo de la identificación y el control de procesos, es por su ya comprobada capacidad de aproximar funciones con un grado arbitrario de precisión. Los resultados relacionados a este tema tiene sus bases en los trabajos desarrollados por Kolmogorov, [22]; los cuales fueron modificados por autores como Hecht-Nielsen, [14], [15], [21] y [7], entre otros. Siendo el resultado más

general e interesante, el formulado en [21] y [7], donde se expone que las redes neuronales de dos y tres capas con funciones de activación sigmoideas son aproximadores universales.

Un perceptrón multicapa entrenado con el algoritmo backpropagation es capaz de realizar un mapeo general no lineal de entrada-salida de  $\mathbb{R}^m$  (dimensión del espacio de entrada) a  $\mathbb{R}^n$  (dimensión del espacio de salida), [35]. Fue en [7] donde primero se demostró que una sola capa oculta es suficiente para aproximar uniformemente cualquier función continua con soporte en una unidad hipercubo. La capacidad del perceptrón multicapa para aproximar funciones continuas arbitrarias, es establecida en el Teorema 2.1.

Cybenko demostró la existencia de una red neuronal de dos capas con  $N$  neuronas en la primera capa, que puede aproximar cualquier función con soporte en un hipercubo unitario, [35].

**Teorema 2.1** *Sea  $\sigma(\cdot)$  una función estacionaria, acotada y monótona decreciente. Donde  $I_n$  denota un hipercubo unitario. Sea  $C(I_n)$  el espacio de funciones continuas en  $I_n$ . Entonces para cualquier  $f \in C(I_n)$  y  $\epsilon > 0$ , existe un entero  $m$  y constantes reales  $\alpha_i$ ,  $\rho_i$  y  $w_{ij}$ , con  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ , tal que defina a  $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$  como*

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} u_j - \rho_i \right) \quad (2.7)$$

La aproximación realizada de  $f(\cdot)$ , es,

$$|F(u_1, u_2, \dots, u_n) - f(u_1, u_2, \dots, u_n)| < \epsilon, \quad \forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in I_n. \quad (2.8)$$

Como ya se mencionó, este teorema se aplica directamente a un perceptrón multicapa, con las siguientes características:

1.  $u_1, u_2, \dots, u_n$ : son los nodos de entrada.
2. Una capa oculta de  $m$  neuronas conectadas completamente a la entrada.
3. La función de activación  $\varphi(\cdot)$ , para las neuronas ocultas es una constante, acotada y monotónicamente creciente.
4. La salida de la red es una combinación lineal de la salida de las neuronas ocultas.

## 2.6. Propiedades de matrices

El estudio de sistemas de ecuaciones ordinarias no lineales diferenciales, ecuaciones en diferencias, álgebra lineal y programación no lineal es fundamental para el análisis y la síntesis de las redes neuronales artificiales. En esta sección se muestran algunas propiedades

de las matrices que contribuyen con esta tesis.

Sean,  $A, B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , la matriz  $A$  puede ser expresada compactamente como:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad (2.9)$$

Donde,  $a_{ij}$  es la entrada de la  $i$ -ésima fila en la  $j$ -ésima columna.

Entonces, la transpuesta de cualquier matriz es obtenida reescribiendo todas las columnas como filas. La transpuesta de la matriz  $A$  es denotada por  $A^T$ ; algunas de sus propiedades se muestran a continuación, [6]:

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(AB)^T = B^T A^T$
3.  $(A + B)^T = A^T + B^T$

La traza de  $A$  es la suma de los elementos de la diagonal principal de  $A$ , se denota como,  $tr\{\cdot\}$ .

$$tr\{A\} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \quad (2.10)$$

Entre sus propiedades están las siguientes:

1.  $tr\{\alpha A\} = \alpha tr\{A\}$
2.  $tr\{A + B\} = tr\{A\} + tr\{B\}$
3.  $tr\{AB\} = tr\{BA\}$

Por lo cual, si  $a \in \mathfrak{R}^m, b \in \mathfrak{R}^m, M \in \mathfrak{R}^{m \times q}, N \in \mathfrak{R}^{q \times m}$

$$a^T M N b = tr\{M N b a^T\} = tr\{N b a^T M\} = tr\{b a^T M N\} \quad (2.11)$$

## 2.7. Normas y cotas superiores de matrices y productos vectoriales

Las normas son escalares no negativos, los cuales son usados como una medida de longitud, tamaño o distancia, en dependencia del contexto, [6].

La  $p$ -norma de un vector de  $n \times 1$ ; es decir;  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , donde,  $p \in \mathfrak{R}^+$ , y esta se define por:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.12)$$

1.  $\|x\| \geq 0$  ;  $\forall x \in \mathfrak{R}^n$  ; con  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  ;  $\forall x, y \in \mathfrak{R}^n$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

El parámetro  $p$  usualmente toma los valores de 1, 2 o  $\infty$ , y las normas correspondientes se denominan, norma 1 ( $\|x\|_1$ ), norma 2 ( $\|x\|_2$ ) y norma  $\infty$  ( $\|x\|_\infty$ ), las cuales se definen como sigue, respectivamente:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (2.13)$$

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (2.15)$$

Las normas vectoriales para  $p = 1, 2, \infty$  inducen tres normas para la matriz  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ .

La suma absoluta máxima de la columna:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (2.16)$$

La raíz cuadrada del autovalor máximo de  $A^T A$ :

$$\|A\|_2 = (\lambda_{\max})^{1/2} \quad (2.17)$$

La suma absoluta máxima de la fila:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.18)$$

## 2.8. Principio del teorema de estabilidad de Lyapunov

El problema del control de una planta se vincula al concepto de estabilidad. Los sistemas no lineales presentan una gran riqueza en cuanto a sus respuestas dinámicas.

De la teoría clásica de la mecánica se sabe que un sistema es estable si su energía total, una función definida positiva, es decreciente de forma continua hasta alcanzar un estado de equilibrio. En un sistema no lineal no tiene porque existir una manera simple de definir una función de energía, por ello, el método directo de Lyapunov introduce una función de energía ficticia, denominada función de Lyapunov, [3] y [31].

### 2.8.1. Función candidata de Lyapunov

Suponiendo que,  $V : R^n \rightarrow R$  es una función escalar.  $V$  es una función candidata de Lyapunov si es una función positiva definida localmente; es decir; la función candidata de Lyapunov es mayor que cero para todo valor en los reales excepto el cero, y el único valor donde tiene un valor de cero es el mismo cero:

$$V(0) = 0 \tag{2.19}$$

$$V(x) > 0 ; \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$$

### 2.8.2. Teorema de estabilidad de Lyapunov

**Teorema 2.2** *Considere el sistema no lineal  $\dot{x} = f(x, t)$ , donde,  $f(0, t) = 0$ . Si existe una función escalar  $V(x, t)$  con las primeras derivadas parciales continuas que satisface las condiciones,*

*Es definida positiva:*

$$V(x, t) > 0 ; \forall x, t \neq 0 \tag{2.20}$$

*Su derivada es definida negativa:*

$$\dot{V}(x, t) < 0 ; \forall x, t \neq 0 \tag{2.21}$$

*entonces el estado de equilibrio en el origen es uniforme y asintóticamente estable.*

*Si se satisface (2.2), pero  $\dot{V}$  es semidefinida negativa; es decir;  $\dot{V}(x, t) \leq 0$ , entonces el estado de equilibrio en el origen es estable.*

## 2.9. Aproximación neuronal dinámica de un sistema no lineal afín con la entrada con incertidumbre en la retroalimentación

En [30], se realizó la metodología para obtener un modelo neuronal dinámico que aproxima a sistemas no lineales afines con la entrada, y que presentan incertidumbre, dentro de una región de operación.

Si se considera el siguiente sistema no lineal:

$$\sum_{SNL} : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = x \end{cases} \quad (2.22)$$

Donde,  $f(x)$  está dada por la expresión (1.3), en la que  $\Delta_f(x)$ , es la incertidumbre aditiva por definición; además, se supone que la misma está acotada según, (2.23), y que se cumple la Suposición 1 de [30]:

**Suposición 2.1** *Suponga que la incertidumbre del sistema  $\Delta_f(x)$  está acotada, y sólo se conoce que la norma euclídeana de la incertidumbre es menor o igual que un valor dado, denominado  $\delta_f(x)$ ; es decir;  $\|\Delta_f(x)\|$  tiene como cota superior el valor de  $\delta_f(x)$ , esto es representado por (2.23), el valor de  $\delta_f(x)$  es conocido o seleccionado por diseño.*

$$\|\Delta_f(x)\| \leq \delta_f(x) \quad (2.23)$$

Por lo que si se toma en cuenta la incertidumbre en el sistema no lineal (2.22), se tiene un sistema representado por (2.24).

$$\sum_{SNL} : \begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \Delta_f(x) + g(x)u \\ y = x \end{cases} \quad (2.24)$$

Además, la estructura propuesta de la red neuronal dinámica para identificación de la incertidumbre, Figura 2.5 es la presentada en [30], en la que el término neuronal  $W\varphi(\hat{x}) + \psi$ , se propone para realizar la aproximación de la incertidumbre. Mientras que el término  $L(x - \hat{x})$ , se incluye porque la dinámica del error puede ser modificada convenientemente mediante la elección de  $L$ , tal que se garantice que el error de identificación sea estable.

$$\sum_{RND} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f_0(x) + W\varphi(\hat{x}) + \psi + g(x)u + L(x - \hat{x}) \\ \dot{W} = e\varphi^T(\hat{x}) \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases} \quad (2.25)$$

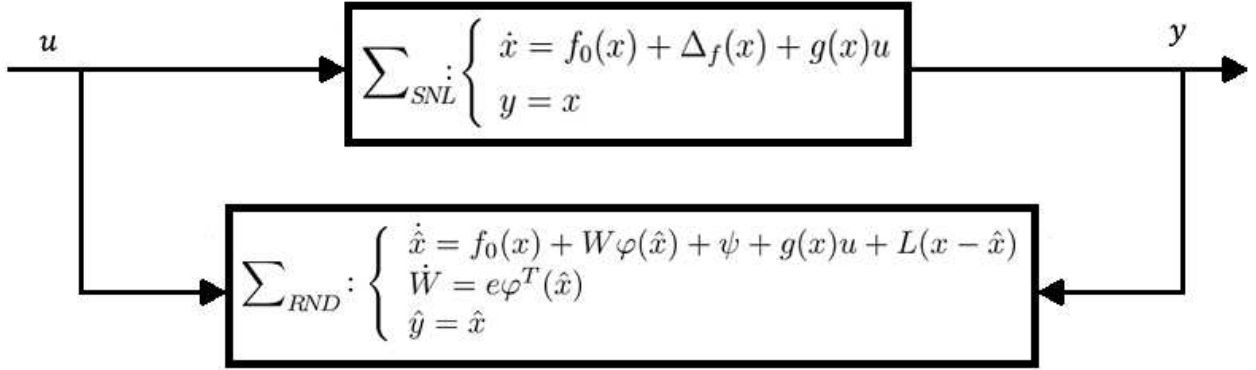


Figura 2.5: Estructura propuesta de la red neuronal propuesta.

Para realizar la estimación de la incertidumbre del sistema, es por medio de un análisis estilo Lyapunov, el cual se le debe aplicar a la estructura de la red mostrada en (2.5). Esto fue lo formulado en el Teorema 3.1 de [30].

**Teorema 2.3** Considere un sistema  $\sum_{SNL}$  de la forma (2.24), el cual es identificado por una  $\sum_{RND}$ , (2.25), y a su vez la Suposición 2.1, expresada en (2.23), se satisface, si se selecciona al algoritmo de aprendizaje de la red neuronal  $\dot{W}$  como

$$\dot{W} = e\varphi^T(\hat{x}) \quad (2.26)$$

si el umbral,  $\psi$ , también se elige, entonces

$$\psi = \text{sign}(e)\delta_f(x) \quad (2.27)$$

donde  $\text{sign}(e)$  es la función signo del error de identificación y  $\delta_f(x)$  es la cota superior de la incertidumbre; además, se asegura que la matriz de ganancias  $L$  sea simétrica y definida positiva; es decir;

$$L = L^T > 0 \quad (2.28)$$

entonces el error de identificación  $e = x - \hat{x}$  es estable y acotado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| < \epsilon ; \epsilon > 0 \quad (2.29)$$

# Capítulo 3

## Resultados principales

Inicialmente, en [30] se utilizó una neurona con una componente neuronal,  $W\varphi(\hat{x})$ ; sin embargo; cuando se están enfrentando problemas de incertidumbre, quien se encuentre ante esa problemática al menos sabe o podría saber que la misma depende de alguno de los estados o es afín a uno de los estados, y que a su vez afecta alguna parte de la tasa de cambio de alguno de los estados; es decir; que está acoplada con cierta parte del sistema. Por tanto, la siguiente sección de este capítulo plantea y formula una matriz de desacoplamiento que premultiplica a la red neuronal que se propone para realizar la aproximación.

### 3.1. Modelo de incertidumbre propuesto

Se tiene un sistema no lineal afín con la entrada con la siguiente representación.

$$\sum_{SNL} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(x) + g(x)u \\ y = x \end{cases} \quad (3.1)$$

**Suposición 3.1** *Suponga que se tiene un sistema no lineal como el representado en (3.1), donde se tiene disponible todo el estado a la salida, y la función  $f(x)$  está dada por la suma de una parte conocida  $f_0(x)$  más una parte desconocida  $\Delta_f(x)$ , denominada incertidumbre aditiva.*

$$f(x) = f_0(x) + \Delta_f(x) \quad (3.2)$$

*Donde, la incertidumbre del sistema  $\Delta_f(x)$  está acotada, y sólo se conoce que la norma euclídeana de la misma es menor o igual que un valor dado, denominado  $\delta_f(x)$ ; es decir;  $\|\Delta_f(x)\|$  tiene como cota superior el valor de  $\delta_f(x)$ , esto es representado por (3.3), el valor de  $\delta_f(x)$  es conocido o seleccionado por diseño.*

$$\|\Delta_f(x)\| \leq \delta_f(x) \quad (3.3)$$



$$\Delta_f(x) = \begin{bmatrix} \Delta_{f1}(x) \\ \Delta_{f2}(x) \\ \vdots \\ \Delta_{fn}(x) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Por lo cual, se desea construir un modelo con RND con la estructura siguiente.

$$\sum_{mod_{RND}} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f_0(x) + DW\varphi(\hat{x}) + g(x)u \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases} \quad (3.5)$$

A partir del modelo neuronal propuesto, se formula el Teorema 3.1; para demostrar dicho teorema y realizar la estimación de la incertidumbre del sistema es por medio de un análisis estilo Lyapunov.

**Teorema 3.1** *Considere un sistema de la forma (3.1), para el cual se propone un modelo con red neuronal dinámica como el de (3.5), que incluye en su componente neuronal una matriz que aporta información sobre dependencias de la incertidumbre, y a su vez se satisface la Suposición 2.1, expresada en (2.23), si se selecciona al algoritmo de aprendizaje de la red neuronal  $\dot{W}$  como*

$$\dot{W} = D^T e \varphi^T(\hat{x}) \quad (3.6)$$

Si el umbral,  $\psi$ , también se elige, entonces

$$\psi = \text{sign}(e)\delta_f(x) \quad (3.7)$$

Donde  $\text{sign}(e)$  es la función signo del error de identificación y  $\delta_f(x)$  es la cota superior de la incertidumbre; además, se asegura que la matriz de ganancias  $L$  sea simétrica y definida positiva; es decir;

$$L = L^T > 0 \quad (3.8)$$

Entonces el error de identificación  $e = x - \hat{x}$  es estable en el sentido de Lyapunov y acotado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| < \epsilon ; \quad \epsilon > 0. \quad (3.9)$$

**Demostración:** Se selecciona a  $V(x)$  como la función candidata de Lyapunov

$$V(e, W) = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\text{tr}\{WW^T\} \quad (3.10)$$

La derivada con respecto al tiempo de la función candidata es

$$\dot{V}(e, W) = e^T \dot{e} + \text{tr}\{W\dot{W}^T\} \quad (3.11)$$

Con un error de identificación:

$$e = x - \hat{x} \quad (3.12)$$

Donde:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (3.13)$$

Sustituyendo (2.24) y (3.26), en (3.13), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e} &= f_0(x) + \Delta_f(x) + g(x)u - f_0(\hat{x}) - DW\varphi(\hat{x}) - \psi - g(\hat{x})u - L(x - \hat{x}) \\ \dot{e} &= \cancel{f_0(\hat{x})} + \Delta_f(x) + \cancel{g(\hat{x})u} - \cancel{f_0(\hat{x})} - DW\varphi(\hat{x}) - \psi - \cancel{g(\hat{x})u} - L(x - \hat{x}) \\ \dot{e} &= \Delta_f(x) - DW\varphi(\hat{x}) - \psi - Le \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.14) en (3.11)

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, W) &= e^T [\Delta_f(x) - DW\varphi(\hat{x}) - \psi - Le] + \text{tr}\{W\dot{W}^T\} \\ \dot{V}(e, W) &= e^T \Delta_f(x) - e^T DW\varphi(\hat{x}) - e^T \psi - e^T Le + \text{tr}\{W\dot{W}^T\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si, se consideran los siguientes términos de (3.15) se tiene por propiedades de la traza

$$\begin{aligned} & -e^T DW\varphi(\hat{x}) + \text{tr}\{W\dot{W}^T\} \\ &= -\text{tr}\{W\varphi(\hat{x})e^T D\} + \text{tr}\{W\dot{W}^T\} \\ &= \text{tr}\{W [-\varphi(\hat{x})e^T D + \dot{W}^T]\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Haciendo manipulaciones algebraicas

$$\dot{V}(e, W) = e^T \Delta_f(x) - e^T \psi - e^T Le + \text{tr}\{W [-\varphi(\hat{x})e^T D + \dot{W}^T]\} \quad (3.17)$$

Se selecciona como algoritmo de aprendizaje a

$$\begin{aligned} \text{tr}\{W [-\varphi(\hat{x})e^T D + \dot{W}^T]\} &= 0 \\ \dot{W}^T &= \varphi(\hat{x})e^T D \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sustituyendo (3.18) en (3.17)

$$\dot{V}(e, W) = e^T \Delta_f(x) - e^T \psi - e^T Le \quad (3.19)$$

Aplicando propiedad de la norma a  $e^T \Delta_f(x)$

$$\begin{aligned} e^T \Delta_f(x) &\leq \|e\|_1 \|\Delta_f(x)\| \\ e^T \Delta_f(x) &\leq e^T \text{sign}(e) \|\Delta_f(x)\| \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo la cota superior de (3.20) en (3.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, W) &\leq e^T \text{sign}(e) \|\Delta_f(x)\| - e^T \psi - e^T L e \\ \dot{V}(e, W) &\leq e^T [\text{sign}(e) \|\Delta_f(x)\| - \psi] - e^T L e \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como la incertidumbre se supone acotada según (3.3) entonces

$$\dot{V}(e, W) \leq e^T [\text{sign}(e) \delta_f(x) - \psi] - e^T L e \quad (3.22)$$

De forma tal, que si se selecciona  $\psi = \text{sign}(e) \delta_f(x)$  se tendrá

$$\dot{V}(e, W) \leq -e^T L e \quad (3.23)$$

Por lo que, sólo se tendría que asegurar que  $L = L^T > 0$ , con lo que se garantizaría que  $\dot{V}(e, W)$  sea definida negativa

$$\dot{V}(e, W) \leq 0 \quad (3.24)$$

Entonces, se concluye que existe garantía de un error de identificación estable en el sentido de Lyapunov y acotado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| < \epsilon ; \quad \epsilon > 0. \quad (3.25)$$

Considerando el análisis anterior, se propone para la aproximación de la incertidumbre una RND con la estructura mostrada en (3.26) y una arquitectura como se muestra en la Figura 3.1.

$$\sum_{RND_m} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f_0(x) + DW \varphi(\hat{x}) + \psi + g(x)u + L(x - \hat{x}) \\ \dot{W} = D^T e \varphi^T(\hat{x}) \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases} \quad (3.26)$$

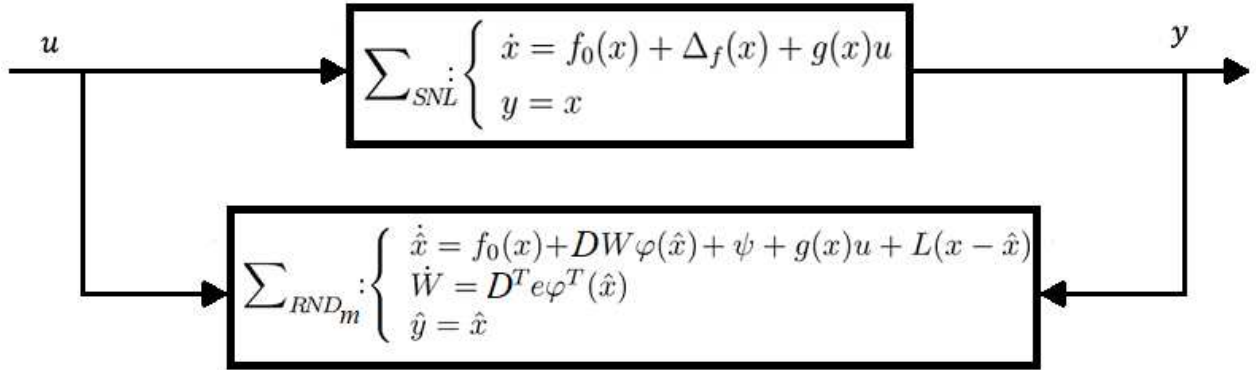


Figura 3.1: Estructura propuesta de la red neuronal propuesta.

## 3.2. Propuesta de la matriz de acoplamiento $D$ en el modelado de la incertidumbre

Cuando se desea aproximar incertidumbre, y se está modelando con redes neuronales, es común que el que está realizando la aproximación o proponiendo el modelo neuronal no cuenta con un conocimiento del modelo, así sea, de su estructura y dependencias, de modo que existirá incertidumbre total.

En [30], se determinó que la incertidumbre de un sistema puede ser aproximada por la componente neuronal,  $W\varphi(\hat{x})$ , de la red neuronal de la Figura 2.5.

A continuación se presentan tres casos que muestran diferentes propuestas de cómo modelar la incertidumbre, considerando varias situaciones.

### 3.2.1. Caso I: Incertidumbre total en el dominio de cada componente y en la estructura

Si, no se conoce a que está acoplada la incertidumbre o de qué estados depende, lo que implica que la red neuronal dinámica va a tratar de aproximar con los recursos de la estructura que presenta, entonces se propone como matriz de acoplamiento  $D$  a la matriz identidad  $I$ .

$$D = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; D \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3.27)$$

Entonces, existirá una  $\Delta_f(x)$  conformada por  $\Delta_{f_1}(x)$ ,  $\Delta_{f_2}(x)$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_{f_n}(x)$ , como se muestra en (3.28), que dependen de forma implícita de los estados y no se conoce su dominio o las dependencias que tienen cada una de las entradas de la incertidumbre.

$$\Delta_f(x) = D \begin{bmatrix} \Delta_{f_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \Delta_{f_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Delta_{f_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{f_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \Delta_{f_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Delta_{f_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Considerando lo expuesto, es válido que se estime la incertidumbre total en el sistema como se muestra en la ecuación (3.29); es decir; como una combinación lineal entre los pesos sinápticos de la red y la función de activación.

$$\Delta_f(x) \cong DW\varphi(\hat{x}) \quad (3.29)$$

### 3.2.2. Caso II: Conocimiento del dominio con conocimiento parcial de la estructura de la incertidumbre

Si, se tiene conocimiento parcial de la estructura de la incertidumbre, alguna de sus dependencias, a qué dominio afecta la misma y que depende implícitamente de los estados, se sugiere la inclusión de una matriz de acoplamiento,  $D$  de la forma que se propone a continuación.

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; D \in \mathfrak{R}^{n \times m} \quad (3.30)$$

Entonces,  $\Delta_f(x)$  quedará expresada como en (3.31).

$$\Delta_f(x) = D\Delta_{f_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{f_1}(x) \quad (3.31)$$

Por tanto, para la aproximación de  $\Delta_f(x)$  se incluye la matriz de acoplamiento  $D$  con la forma presentada en (3.30), que modifica a la componente neuronal,  $W\varphi(\hat{x})$ , de forma tal que con ello dicho término se transforme en un escalar con dependencias respecto a los

estados, como se presenta en (3.32).

$$\begin{aligned}
\Delta_f(x) &\cong DW\varphi(\hat{x}) \in \mathfrak{R}^n \\
W\varphi(\hat{x}) &\in \mathfrak{R} \\
W &\in \mathfrak{R} \\
\varphi : \mathfrak{R}^n &\rightarrow \mathfrak{R}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Al realizar las consideraciones anteriores, se logra que la aproximación neuronal de la incertidumbre quede desacoplada del resto de las ecuaciones dinámicas pero a la vez se enriquezca de ellas.

### 3.2.3. Caso III: Conocimiento del dominio y rango de la estructura de la incertidumbre

En el siguiente caso, se tendrá en cuenta la factibilidad de considerar y evaluar el acoplamiento partiendo de que se conoce el dominio y rango de la incertidumbre, proponiendo una matriz de acoplamiento  $D$  con la siguiente estructura.

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; D \in \mathfrak{R}^{n \times m} \tag{3.33}$$

Por lo que, la información obtenida es que la incertidumbre del sistema sólo afecta a la tasa de cambio del segundo estado del modelo y depende únicamente del primer estado del mismo, como se muestra en (3.34).

$$\Delta_f(x) = D\Delta_{f_2}(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{f_2}(x_1) \tag{3.34}$$

La aproximación de la incertidumbre estará dada por (3.35), y se puede ver que  $\Delta_f(x)$  al depender de un solo estado, otra de las ventajas que proporciona es que la función de activación,  $\varphi(\hat{x})$ , también se podrá considerar que depende del mismo estado.

$$\begin{aligned}
\Delta_f(x) &\cong DW\varphi(\hat{x}_1) \in \mathfrak{R}^n \\
W\varphi(\hat{x}_1) &\in \mathfrak{R} \\
W &\in \mathfrak{R} \\
\varphi &: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}
\end{aligned}
\tag{3.35}$$

Considerando lo anterior, se puede lograr el acoplamiento de la incertidumbre con el resto de las ecuaciones dinámicas para realizar la aproximación neuronal de la misma pero tomando información basada en el dominio y rango de ella.

Por todo lo anterior, se propone agregar a la incertidumbre información acerca de:

- Se conoce el dominio.
- Se conoce a qué ecuación dinámica del modelo afecta.

Se puede concluir, considerando lo explicado anteriormente, que inicialmente se tomó como punto de origen para realizar la aproximación de la incertidumbre en un sistema, aplicar un criterio de aproximación partiendo de la falta de conocimiento de la incertidumbre, a que está acoplada o de qué estados depende, donde la misma sería aproximada según lo planteado en el Teorema 2.3. Siguiendo esta propuesta, donde existe incertidumbre total, lo más probable que podía resultar era que la red neuronal dinámica trataría de aproximar con los recursos de la estructura que presenta y técnicamente lo que sucedería es que los pesos sinápticos estarían antagonizando, de modo que, pudieran ser marginalmente estables y crecerían invariablemente, lo que quiere decir que, se estaría tratando de estimar con exceso de variables, lo que también pudiera causar que estos sean inestables, por tanto, en una situación como esta no es recomendable estimar la incertidumbre usando exceso de estados, ya que esto causaría que la red neuronal no termine de aprender.

Sin embargo, una propuesta para dar solución a esto fue lo formulado en el Teorema 3.1, donde considerando que existe conocimiento parcial de la incertidumbre; es decir; de cómo se modela y alguna de sus dependencias, se sugiere una matriz,  $D$ , que contribuye a que no exista acoplamiento entre las ecuaciones dinámicas del modelo, y por otra parte, entre las entradas de la parte neuronal, ya que estas intentarán cancelarse para hacerse 0, pero al incluir a  $D$  dentro de la aproximación se puede lograr obtener este valor de 0 y a la vez el desacople. Además, otro de los resultados esperados es que se realice correctamente el entrenamiento de la red neuronal propuesta y con ello una buena aproximación de la incertidumbre.

# Capítulo 4

## Simulaciones

En este capítulo se presentan una serie de simulaciones con el propósito de demostrar la efectividad y factibilidad de la propuesta presentada en el Teorema 3.1 y la inclusión de la matriz de acoplamiento  $D$  en el modelo neuronal y a su vez en la red neuronal dinámica propuesta para la aproximación de la incertidumbre, partiendo de esto, se presenta como esquema general de simulación el mostrado en la Figura. Además, en cada simulación el objetivo principal es la obtención de la aproximación del término incierto, así como el análisis de cómo influye tener incertidumbre total o parcial en un sistema al considerar el efecto de la información proporcionada por  $D$ .

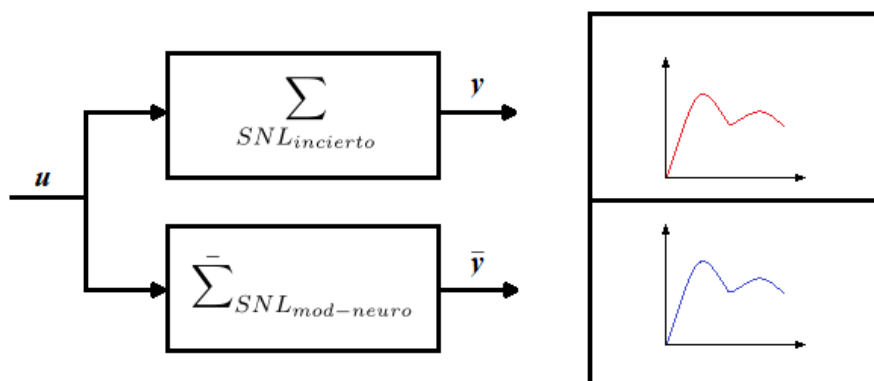


Figura 4.1: Esquema general de simulación.



## 4.1. Simulación 1: Sistema de competencia entre especies presa-depredador con incertidumbre total

### 4.1.1. Planteamiento del problema

Las siguientes ecuaciones diferenciales son conocidas como modelo de Lotka-Volterra para sistemas de poblaciones presa-depredador.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\alpha - \beta x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(\gamma - \kappa x_1)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Si se introduce la competencia intraespecífica (interacción que se produce cuando los miembros de la misma especie compiten por recursos limitados, lo que reduce la aptitud de todos los individuos en competencia), las ecuaciones de (4.1) se expresan como sigue.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\alpha - \beta x_2) - \rho x_1^{1/2} \\ \dot{x}_2 &= -x_2(\gamma - \kappa x_1)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Donde,  $x_1$  representa la población de presas y  $x_2$  la población de depredadores; además, el sistema (4.2) tiene como incertidumbre al término  $\rho x_1^{1/2}$  que corresponde a la competencia intraespecífica en el hábitat para la especie de presas.

### 4.1.2. Objetivos de la simulación

La simulación tiene como objetivos:

1. Analizar las consecuencias de la existencia de incertidumbre total en el sistema; es decir; no se tiene información sobre su dominio o la ecuación dinámica a la que afecta.
2. Estimar la competencia intraespecífica para la especie de presas.

### 4.1.3. Desarrollo de la simulación

El modelo de simulación del sistema (4.2), es el siguiente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \rho x_1^{-1/2} & -\beta x_1 \\ \kappa x_2 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\tag{4.3}$$

Donde,

$$f_0(x) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta x_1 \\ \kappa x_2 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_f(x) = \begin{bmatrix} -\rho x_1^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix}\tag{4.4}$$

La estructura de la RND toma la forma que se muestra en (2.25).

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta x_1 \\ \kappa x_2 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + W\varphi(\hat{x}) + \psi + L(x - \hat{x}) \quad (4.5)$$

El umbral neuronal que se utilizará es

$$\psi = \text{sign}(e)\delta_f(x) \quad (4.6)$$

En el cual la cota superior de la norma de la incertidumbre se selecciona como

$$\delta_f(x) = \rho^+ x_1^{1/2} \quad (4.7)$$

Donde, la función de activación seleccionada es

$$\varphi(\hat{x}) = \hat{x} + 10 \tanh\left(\frac{1}{10}\hat{x}\right) \quad (4.8)$$

Las simulaciones serán realizadas siguiendo los datos que se muestran en la tabla.

Cuadro 4.1: Datos de simulación para el sistema de competencia entre especies.

Datos	Valor	Descripción
$\alpha$	1	Tasa per cápita neta de crecimiento de la población de presas
$\beta$	0.01	Factor de proporcionalidad que indica el grado de efectividad del proceso de interacción entre la presa y el depredador
$\gamma$	0.5	Tasa per cápita de crecimiento de la población depredadora
$\kappa$	0.009	Factor de proporcionalidad que indica el grado en que afecta el éxito de la caza en los depredadores
$\rho$	$\rho^- \leq \rho \leq \rho^+$	Coefficiente de competencia intraespecífica en el hábitat de la especie de presas

En la Figura 4.2 se muestra el desarrollo de las poblaciones de presa y depredador; se puede observar la dependencia de una especie y otra; es decir; el número de presas afecta proporcionalmente al número de depredadores.

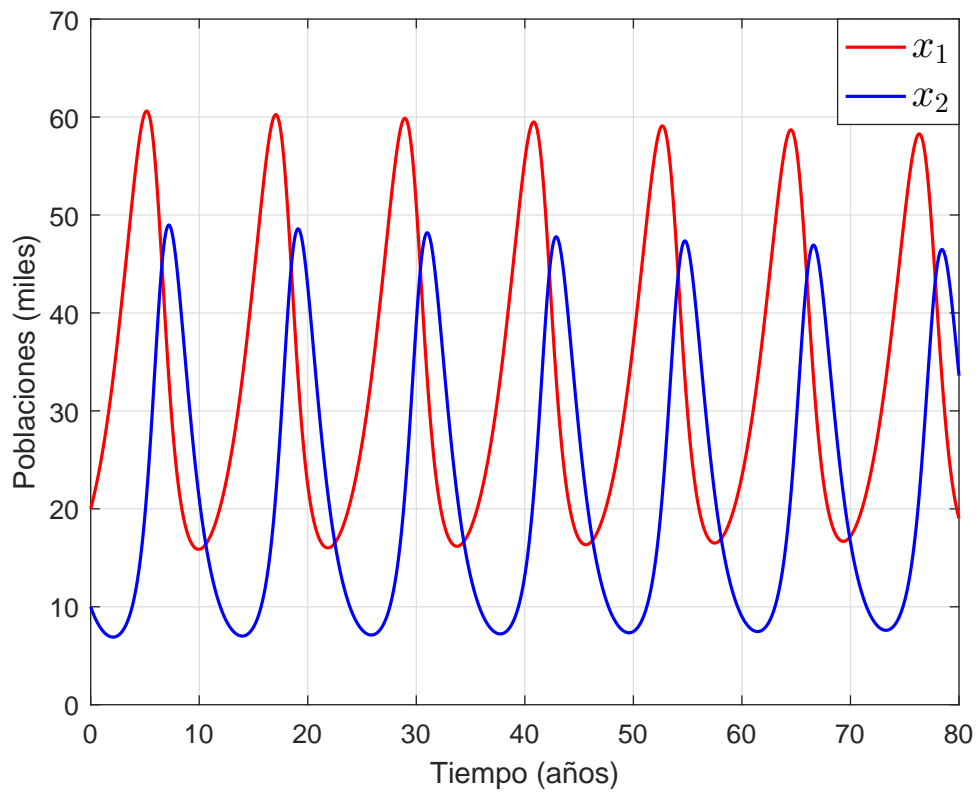


Figura 4.2: Poblaciones de ambas especies.

La Figura 4.3 muestra el número estimado de individuos determinado por la RN.

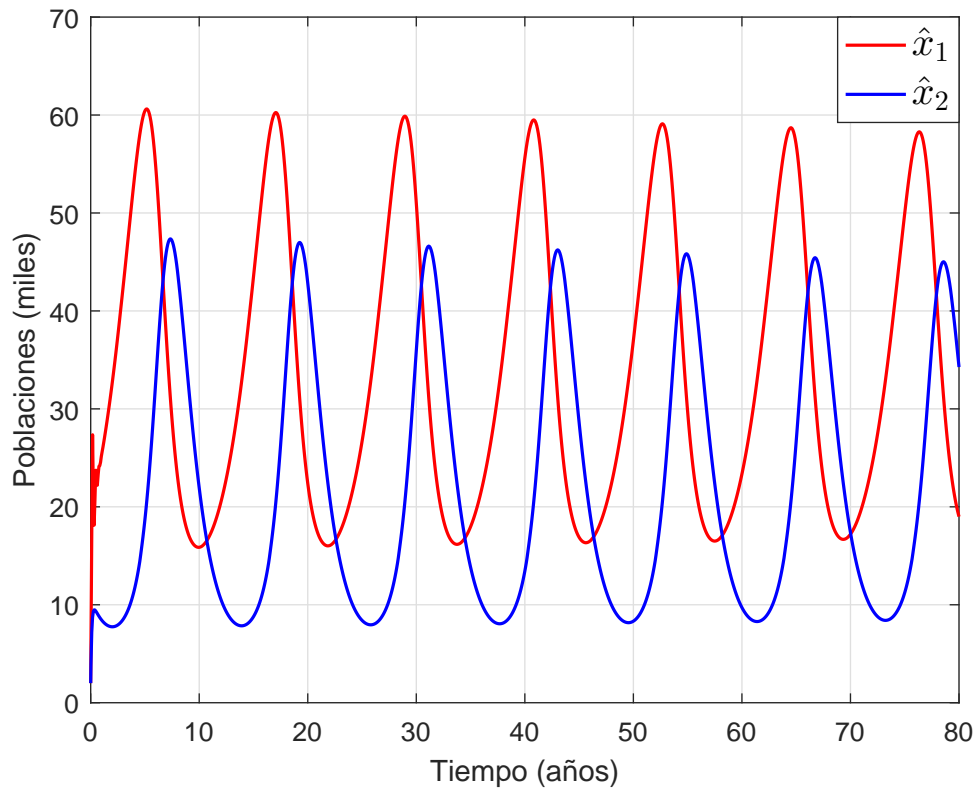


Figura 4.3: Población estimada de ambas especies.

La Figura 4.4 presenta una comparación de la población de la especie de la presa y la población estimada de la presa obtenida de la RN.

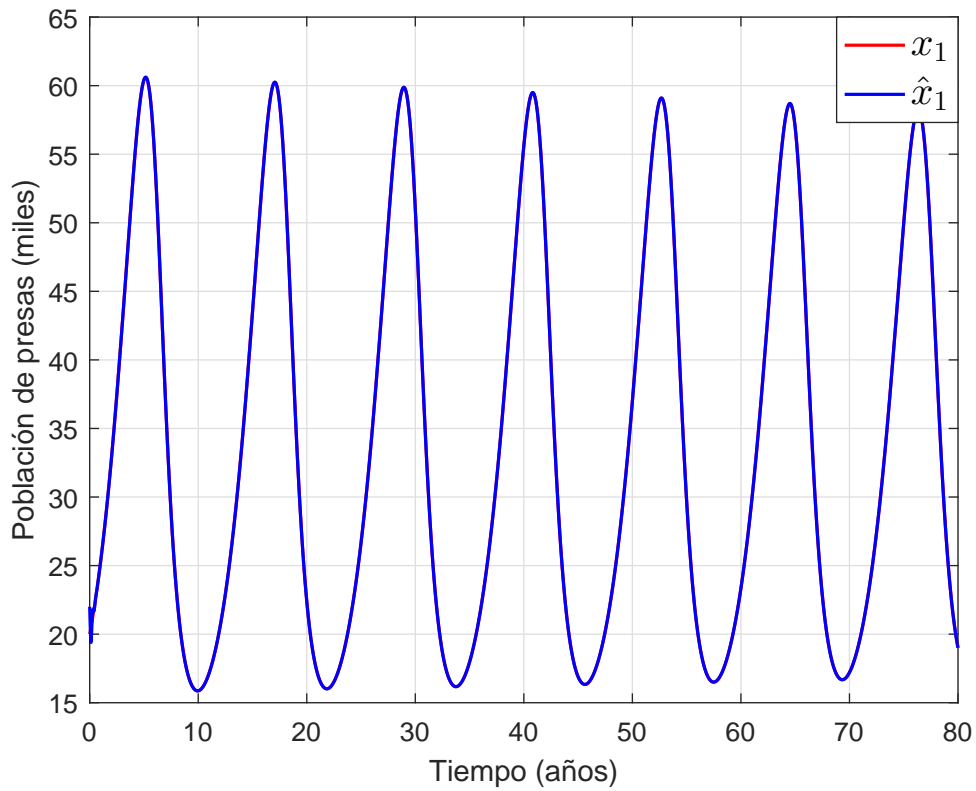


Figura 4.4: Comparación entre población y población estimada para la especie presa.

La Figura 4.5 representa el error de estimación entre la población real y la población estimada por la RN para la especie de la presa. Como se observa, existe una pequeña diferencia entre ellas, sin embargo, se puede considerar una buena estimación.

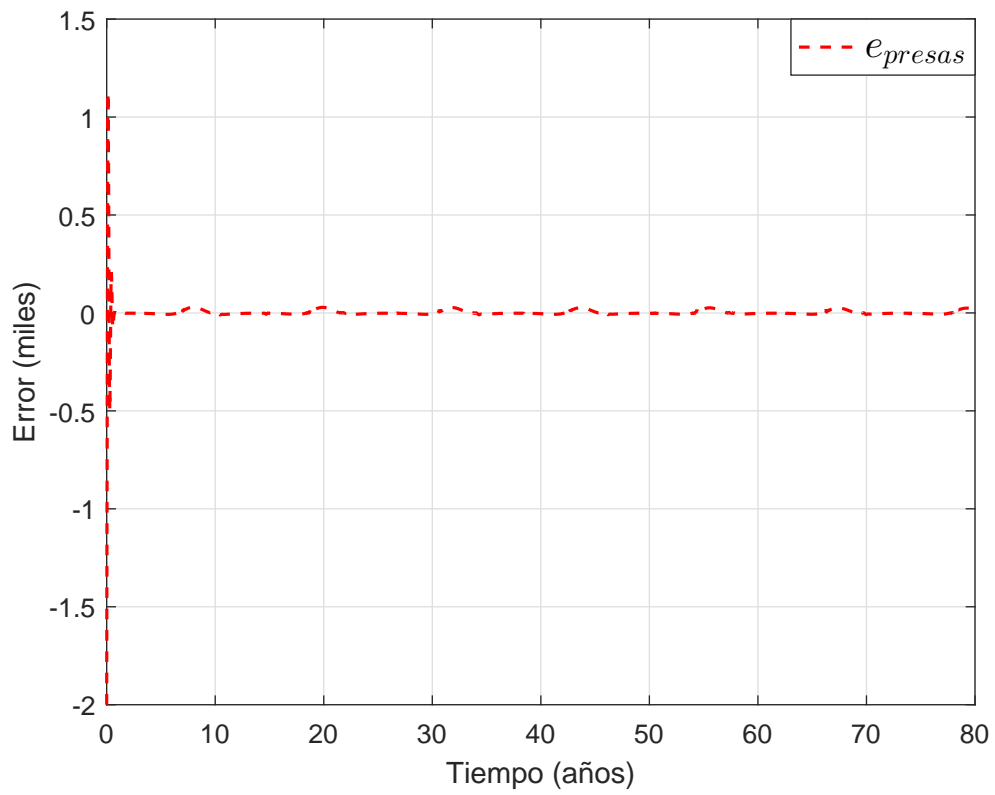


Figura 4.5: Perfil del error para la especie presa.

En la Figura 4.6 se compara la población real y la población estimada del depredador obtenida de la RN.

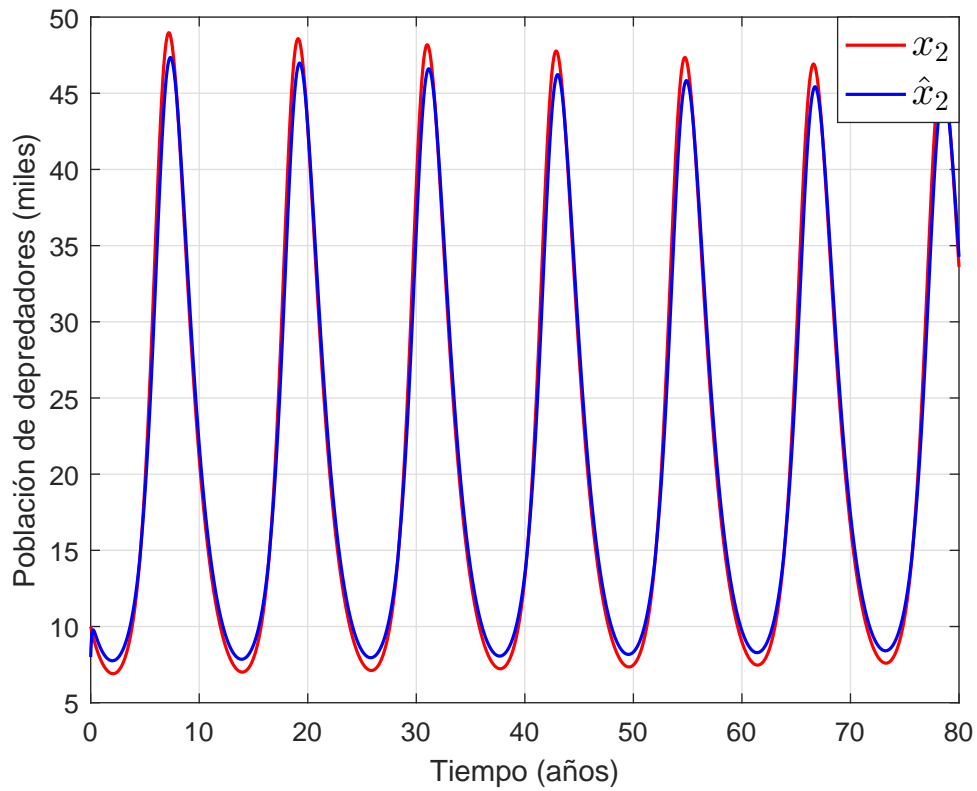


Figura 4.6: Comparación entre población y población estimada para la especie depredador.

La Figura 4.7 representa el error de estimación entre las población real y la población estimada por la RN para la especie del depredador. Como se observa, existe una pequeña diferencia entre ellas, sin embargo, se puede considerar una buena estimación.

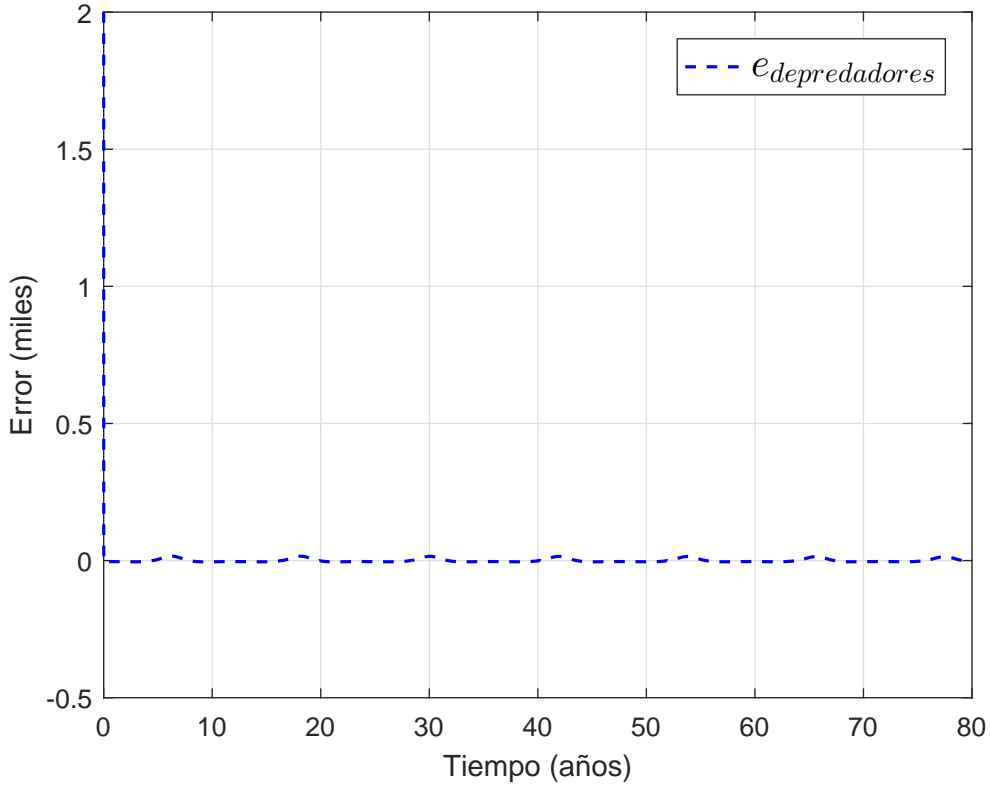


Figura 4.7: Perfil del error para la especie depredador.

Nótese, de (4.9) que derivado de la incertidumbre estructural total; es decir; el lado izquierdo de la misma es desconocido completamente, los efectos que se producen es que el diseñador va a utilizar todo el estado para aproximar, y como consecuencia, de forma potencial hay un gran costo computacional incluso para construir un 0.

$$\Delta_f(x) \cong W\varphi(\hat{x}) \tag{4.9}$$

$$\begin{bmatrix} -\rho x_1^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} w_{11}\varphi_1(\hat{x}) + w_{12}\varphi_2(\hat{x}) \\ w_{21}\varphi_1(\hat{x}) + w_{22}\varphi_2(\hat{x}) \end{bmatrix}$$

En la figura que se muestra a continuación, se representan gráficamente los pesos sinápticos de obtenidos tras aplicar la estructura de la RN mostrada en (2.25).

Como se observa, los pesos sinápticos podrían considerarse como pesos que están antagonizando, son marginalmente estables y crecen invariablemente, lo que significa que se está tratando de estimar con variables de más, lo cual podría ser la causa de la inestabilidad de



los mismos. Esta situación es causada por la falta de conocimiento con respecto a la incertidumbre, y también debido a que existe una combinación lineal entre los pesos sinápticos y las funciones de activación que depende de ambos estados.

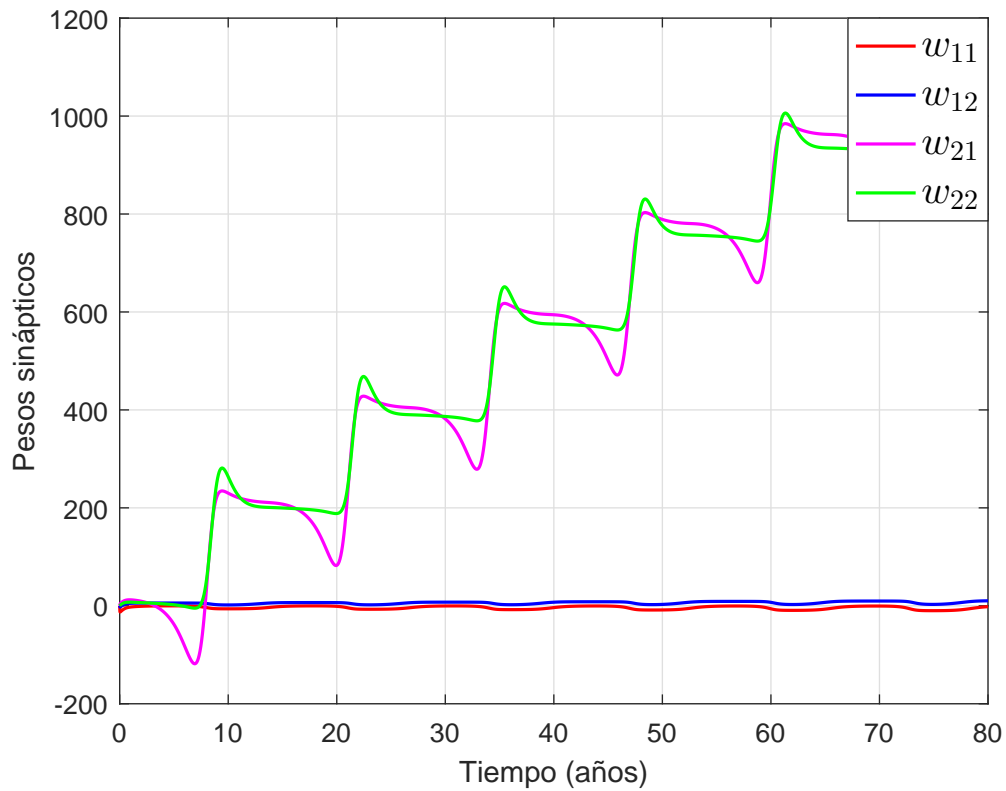


Figura 4.8: Pesos sinápticos de la RND.

La aproximación obtenida por la RN es la mostrada en la siguiente figura.

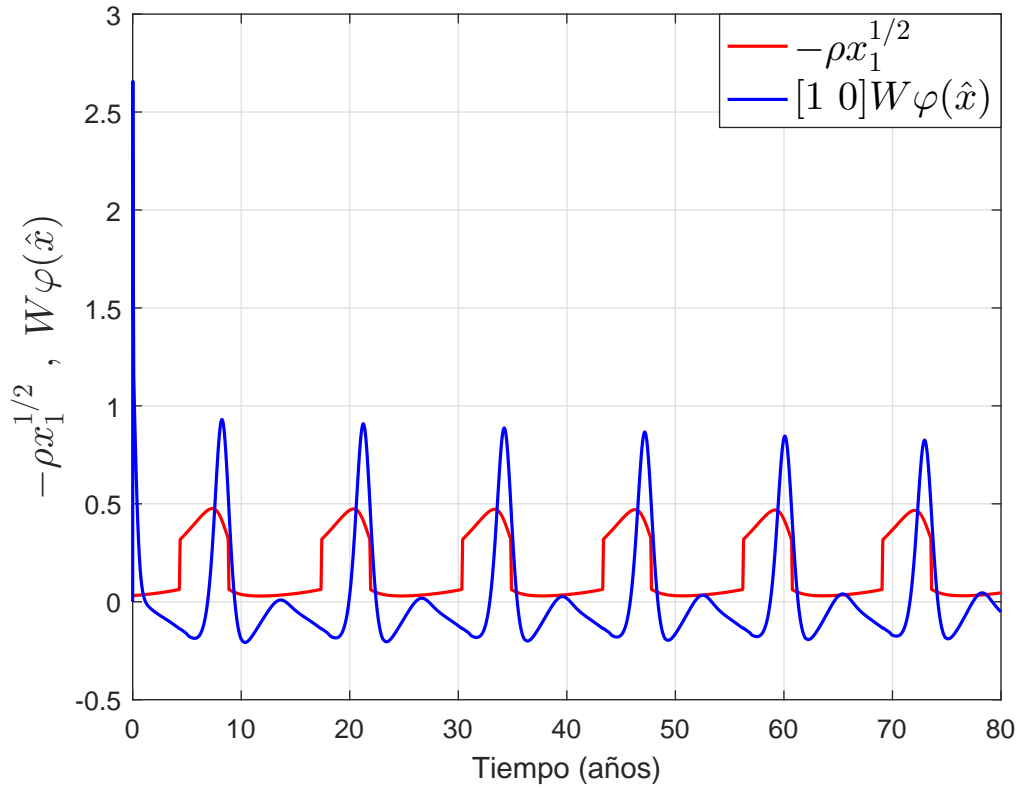


Figura 4.9: Estimación de la incertidumbre.

Como se observa en la Figura 4.9 la incertidumbre estimada por la red neuronal no presenta buena convergencia con relación al perfil propuesto para el coeficiente de competencia intraespecífica para la especie de las presa. A partir de esto, se concluye que no es recomendable estimar la incertidumbre con estados de los que no depende, ya que esto causaría que la RN no termine de aprender.

## 4.2. Simulación 2: Sistema de competencia entre especies presa-depredador con incertidumbre parcial

### 4.2.1. Planteamiento del problema

En esta simulación se utilizarán las ecuaciones diferenciales del modelo de Lotka-Volterra del ejemplo anterior (4.1).

De igual manera se introduce la competencia intraespecífica en las ecuaciones del modelo como en (4.2), obteniéndose lo siguiente.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\alpha - \beta x_2) - \rho x_1^{1/2} \\ \dot{x}_2 &= -x_2(\gamma - \kappa x_1)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Recordando que,  $x_1$  representa la población de presas y  $x_2$  la población de depredadores; además, el término de incertidumbre es  $\rho x_1^{1/2}$  correspondiente a la competencia intraespecífica en el hábitat para la especie de presas.

### 4.2.2. Objetivos de la simulación

La simulación tiene como objetivos:

1. Realizar una comparación entre la Simulación 1 y la 2, analizando las consecuencias de incluir la matriz  $D$  en el caso de la Simulación 2.
2. Estimar el perfil de la competencia intraespecífica en el hábitat para la especie de presas.

### 4.2.3. Desarrollo de la simulación

El modelo de simulación del sistema (4.10), es el siguiente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \rho x_1^{-1/2} & -\beta x_1 \\ \kappa x_2 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\tag{4.11}$$

Donde,

$$f_0(x) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta x_1 \\ \kappa x_2 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_f(x) = \begin{bmatrix} -\rho x_1^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix}\tag{4.12}$$

Para esta simulación los datos que se utilizarán son los mismos que en la simulación anterior, mostrados en la tabla 4.1.

La estructura de la RND para realizar la estimación del parámetro incierto, toma la forma que se muestra en (4.13).

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta x_1 \\ \kappa x_2 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + DW_p \varphi(\hat{x}_1) + \psi + L(x - \hat{x}) \\ \dot{W}_p &= D^T e \varphi^T(\hat{x}_1)\end{aligned}\tag{4.13}$$

El umbral neuronal que se utilizará es

$$\psi = \text{sign}(e)\delta_f(x) \quad (4.14)$$

En el cual la cota superior de la norma de la incertidumbre se selecciona como

$$\delta_f(x) = \rho^+ x_1^{1/2} \quad (4.15)$$

Donde, la función de activación seleccionada es

$$\varphi(\hat{x}_1) = \hat{x}_1 + 10 \tanh\left(\frac{1}{10}\hat{x}_1\right) \quad (4.16)$$

Se propone para estimar a  $\Delta_f(x)$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta_f(x) &\cong DW_p\varphi(\hat{x}_1) ; W_p \in \mathfrak{R} , \varphi(\hat{x}_1) \in \mathfrak{R} \\ \Delta_f(x) &= \begin{bmatrix} -\rho x_1^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \cong DW_p\varphi(\hat{x}_1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nótese, de (4.17) que para que la componente neuronal propuesta estime a  $\Delta_f(x)$ , se propone una  $D \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , que contribuye a la tasa de cambio o a la aproximación de la dinámica de  $(x_1)$ , y con lo que se asegura que la incertidumbre sólo afecte al primer estado del sistema; en otras palabras, no se va a utilizar todo el estado para aproximar como en la simulación anterior.

$$DW_p\varphi(\hat{x}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} W_p\varphi(\hat{x}_1) = \begin{bmatrix} W_p\varphi(\hat{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\Delta_f(x) = \begin{bmatrix} -\rho x_1^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} W_p\varphi(\hat{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

En la siguiente figura, se muestra el peso  $W_p$ , correspondiente a la expresión anterior; se puede ver como intenta tener un comportamiento convergente mejor que en el caso de simulación anterior.

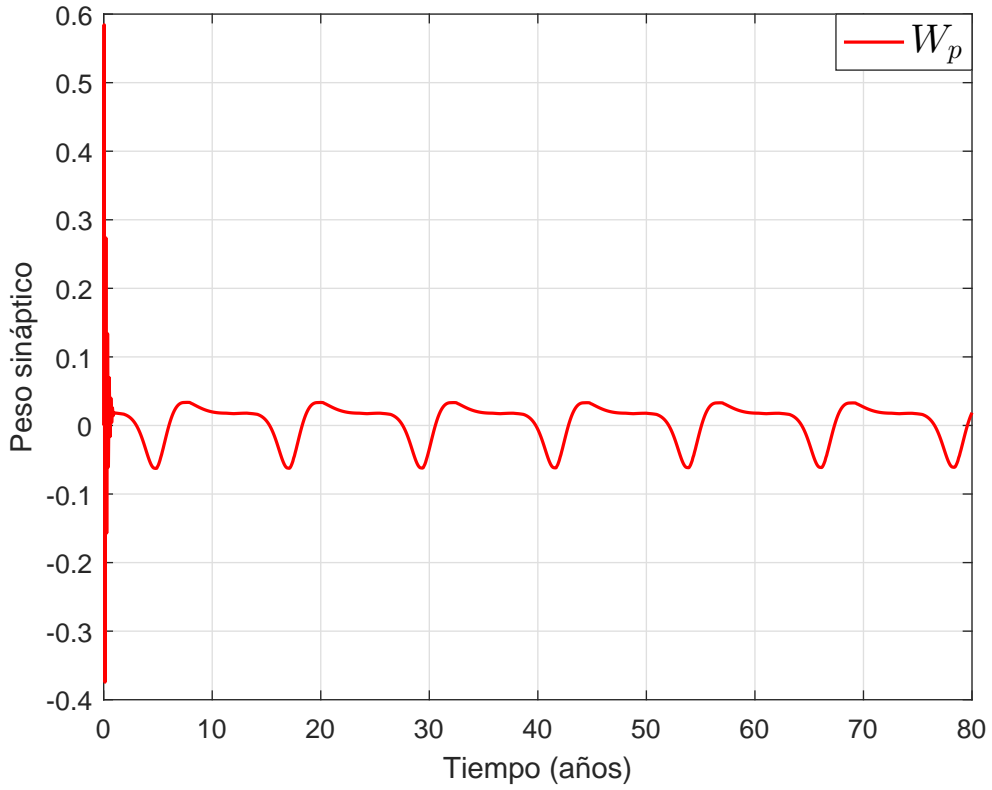


Figura 4.10: Peso sináptico de la RND.

Por otra parte, se determina el error de identificación.

$$e \cong 0$$

$$\dot{e} \cong \Delta_f(x) - DW_p\varphi(\hat{x}_1) - \psi - Le \quad (4.20)$$

$$0 \cong \Delta_f(x) - DW_p\varphi(\hat{x}_1) - \psi - Le$$

Considerando lo planteado en las ecuaciones (3.7) y (3.8) del Teorema 3.1, se observa:

$$Le \cong 0$$

$$\psi \cong \text{sign}(0) \cdot Le \cong 0$$

(4.21)

Entonces, se tiene que la incertidumbre del sistema  $\Delta_f(x)$  será aproximadamente igual

a la componente neuronal  $DW_p\varphi(\hat{x}_1)$ .

$$\begin{aligned}\Delta_f(x) - DW_p\varphi(\hat{x}_1) &\cong 0 \\ \Delta_f(x) &\cong DW_p\varphi(\hat{x}_1)\end{aligned}\tag{4.22}$$

De la expresión anterior, se puede determinar como error de estimación lo presentado en la siguiente ecuación:

$$e_{est} \cong \Delta_f(x) - DW_p\varphi(\hat{x}_1)\tag{4.23}$$

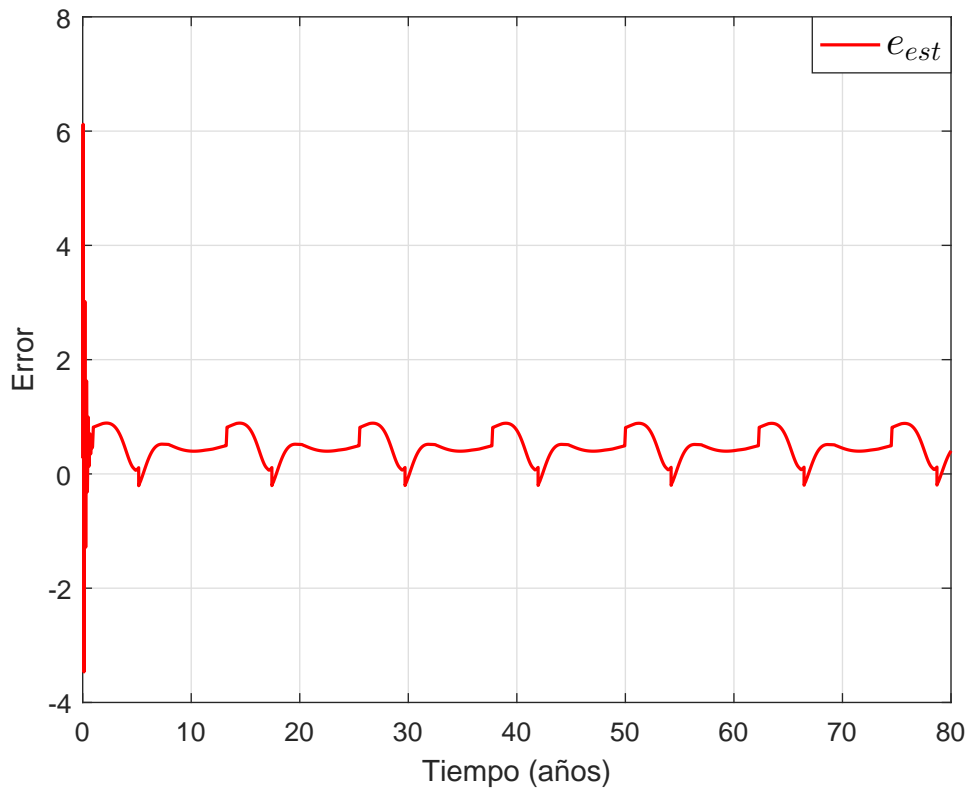


Figura 4.11: Perfil del error de estimación de la RND.

En este caso no se tiene conocimiento sobre el dominio de la incertidumbre, pero si de la ecuación dinámica a la que afecta, por ejemplo, se afecta a la primera ecuación dinámica y se propone una determinada función de activación; por tanto a partir de esta información se pudo definir una determinada  $D$ , mientras que  $W_p$  y  $\varphi(\hat{x}_1)$  son escalares. Con esta leve información, se pudo obtener un peso sináptico que tiene un mejor compartamiento que

el ejemplo anterior y un error de estimación cercano a 0 una vez que termina la etapa de entrenamiento de la red neuronal dinámica.

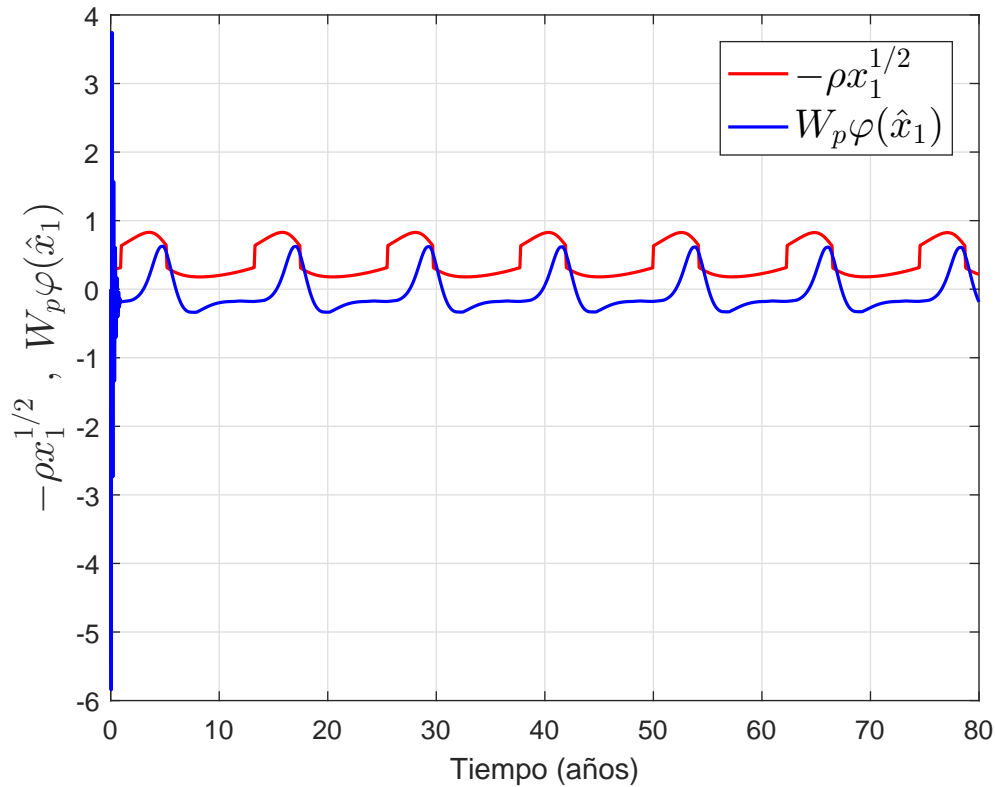


Figura 4.12: Estimación de la incertidumbre.

Como se observa en la Figura 4.12 la incertidumbre estimada por la red neuronal presenta un perfil similar al propuesto, ya que al terminarse el entrenamiento de la red, se nota un intento de converger a dicho perfil. Realizando una comparación entre este ejemplo de simulación y el ejemplo anterior, se demuestra que con poca información acerca de la incertidumbre, se puede obtener una mejor estimación.

Una forma para cuantificar el comportamiento en los sistemas fue el establecimiento de los índices de desempeño basados en la señal de error  $e(t)$ , en este caso particular es la diferencia entre el valor de la salida de la planta y el valor de salida estimado por la red neuronal. De estos los más conocidos son los llamados criterios integrales definidos como:

1. Integral del error absoluto

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (4.24)$$

2. Integral del error cuadrático

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (4.25)$$

3. Integral del tiempo por el error absoluto

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (4.26)$$

A partir de los resultados gráficos obtenidos de la comparación realizada del sistema de competencia de especie presa-predador con incertidumbre total y parcial en el modelo, a continuación se muestran en la Tabla 4.2 los resultados cuantitativos de dicha comparación basados en los criterios integrales del error.

Cuadro 4.2: Índices de desempeño Simulaciones 1 y 2.

Índices de desempeño	Sistema con incertidumbre total	Sistema con incertidumbre parcial
<i>IAE</i>	$[0.5617 \ 5.5178] \cdot 10^4$	$[0.1762 \ 1.0827] \cdot 10^4$
<i>ISE</i>	$[1.4594 \ 8.7157] \cdot 10^4$	$[5.7577 \ 5.1075] \cdot 10^3$
<i>ITAE</i>	$[0.1866 \ 2.1479] \cdot 10^6$	$[0.1841 \ 4.2461] \cdot 10^5$

Al obtener estos resultados se comprobó que el modelo de incertidumbre propuesto, en el que se incluye el acoplamiento  $D$  y se estima el término incierto con el modelo de RND y algoritmo de aprendizaje  $\dot{W}$  propuestos en el Teorema 3.1, es válido y proporciona mejores resultados debido a que la información resultante conlleva a la incertidumbre parcial en el modelo. Sin embargo, esto no ocurre si existiese incertidumbre total en el modelo y se estimara la misma como una combinación lineal entre los pesos sinápticos y la función de activación de una red neuronal, lo que se comprueba en los valores de los índices de desempeño calculados, estos son mayores que los obtenidos para el sistema con incertidumbre parcial.

### 4.3. Simulación 3: Manipulador robótico de unión rígida con incertidumbre total

#### 4.3.1. Planteamiento del problema

Considérese el manipulador robótico de una sola unión que se muestra en la Figura 4.13.



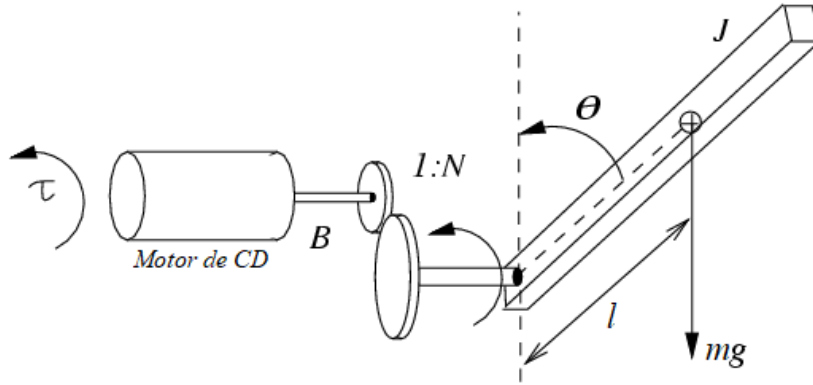


Figura 4.13: Manipulador robótico de unión rígida.

El modelo no lineal de este sistema se puede representar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{B}{J}x_2 - \frac{mgl}{J}\text{sen}\left(\frac{x_1}{N}\right) + \frac{1}{J}u \\ y &= x \end{aligned} \quad (4.27)$$

Donde:

- $x_1 = \theta$ : posición angular del brazo (variable de estado).
- $x_2 = \dot{\theta}$ : velocidad angular del brazo (variable de estado).
- $u = \tau$ : par aplicado a la articulación (entrada).

La representación en espacio de estado del sistema (4.27) se muestra en (4.28).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{J}\text{sen}\left(\frac{x_1}{N}\right) & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u \quad (4.28)$$

### 4.3.2. Objetivos de la simulación

Esta simulación tiene como objetivos:

1. Analizar las consecuencias de que exista incertidumbre total en el sistema.
2. Estimar la incertidumbre en el coeficiente de fricción viscosa del sistema.

### 4.3.3. Desarrollo de la simulación

La incertidumbre a estimar en el sistema representado en (4.28) es el coeficiente de fricción viscosa  $B$ , el cual está formado por una parte conocida ( $B_0$ ) y una parte desconocida ( $B_f$ ), por tanto la representación en espacio de estado es la mostrada en (4.29).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{J}\text{sen}(\frac{x_1}{N}) & -\frac{B_0}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u \quad (4.29)$$

Donde,

$$f(x) = f_0(x) + \Delta_f(x) \quad (4.30)$$

$$f_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{J}\text{sen}(\frac{x_1}{N}) & -\frac{B_0}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B_f}{J}x_2 \end{bmatrix}$$

En la siguiente tabla se muestran los datos utilizados en la simulación.

Cuadro 4.3: Datos de simulación para el sistema manipulador robótico con unión rígida

Datos	Valor	Descripción
$m$	0.2 kg	Masa
$l$	0.1 m	Distancia del eje al centro de masa del brazo manipulador
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>	Aceleración de la gravedad
$N$	10	Factor de reducción angular del juego de engranajes
$B_0$	100e <sup>-4</sup> Nm/rad/s	Parte conocida del coeficiente de fricción viscosa
$J$	48.5e <sup>-2</sup> kgm <sup>2</sup>	Momento de inercia
$u$	0.1 N	Fuerza aplicada
$B_f$	$B_{f-} \leq B_f \leq B_{f+}$	Parte desconocida del coeficiente de fricción viscosa

En la Figura 4.14 se muestra la posición angular de la articulación, luego de haber aplicado una fuerza  $u$ .

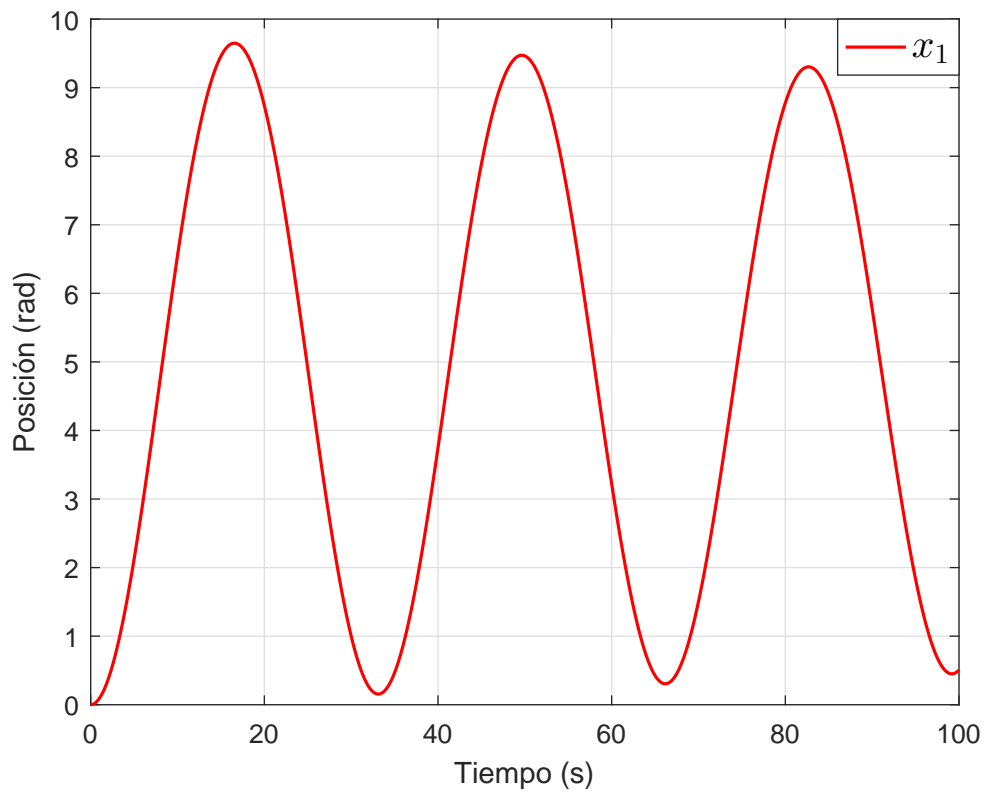


Figura 4.14: Posición de la articulación.

En la Figura 4.15 muestra la velocidad del angular de la articulación una vez aplicada la fuerza  $u$ .

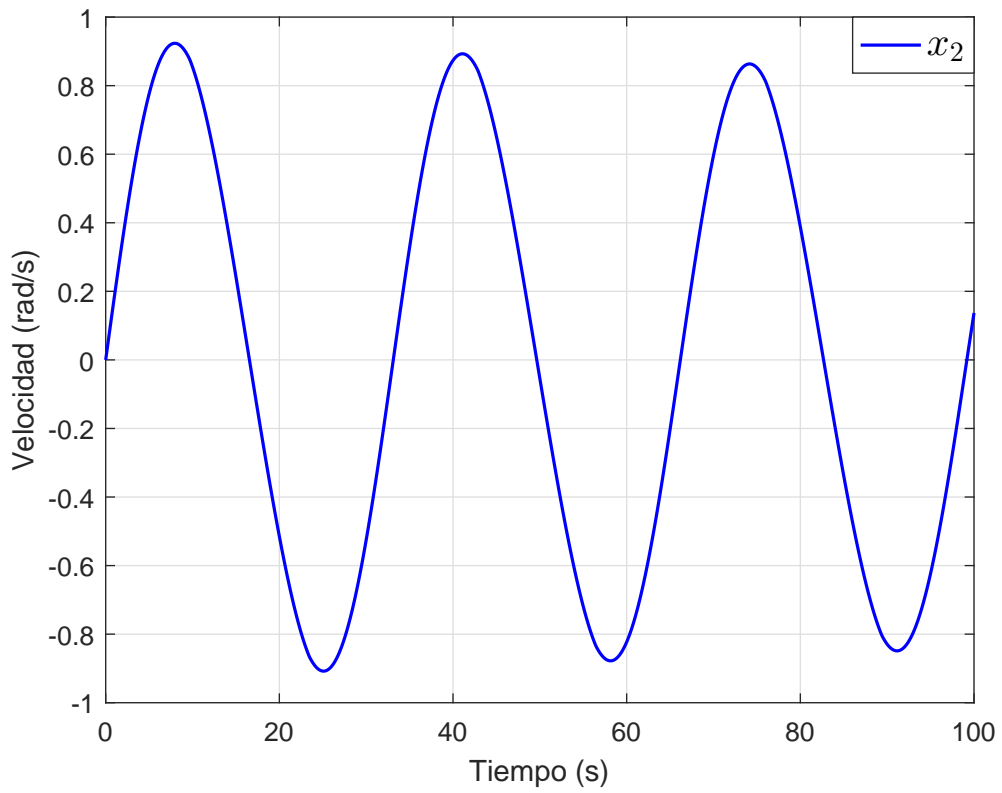


Figura 4.15: Velocidad de la articulación.

A continuación, se muestra en la Figura 4.16 la comparación entre la posición del sistema y la posición angular estimada, como se puede ver ambos perfiles son similares.

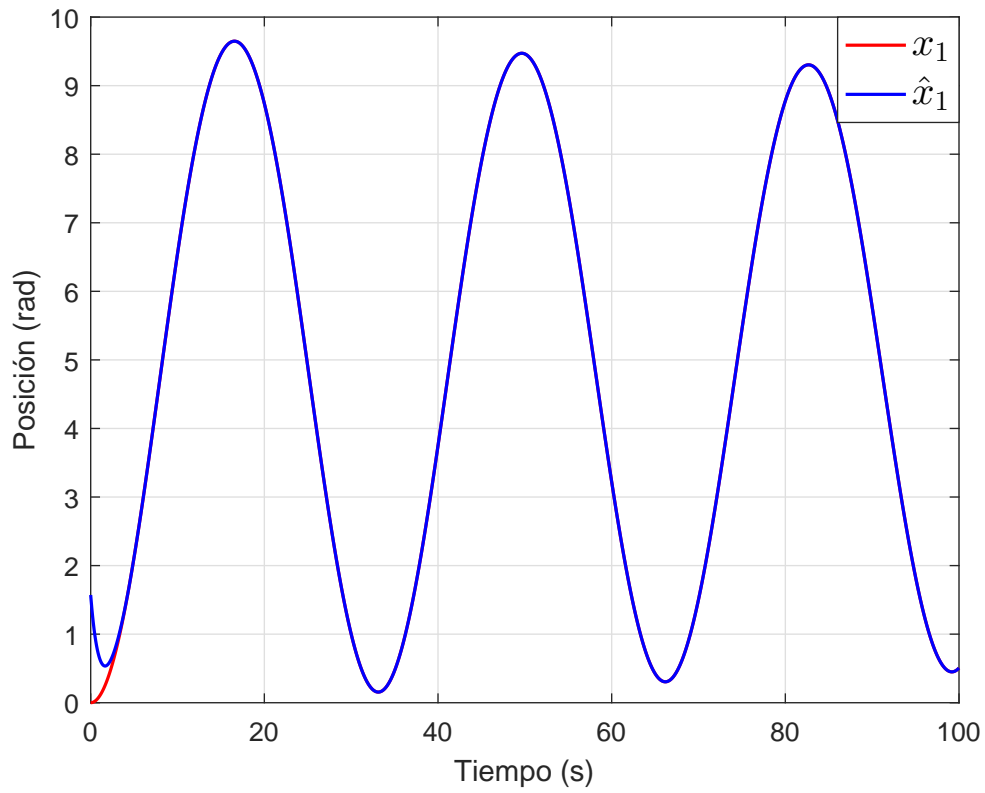


Figura 4.16: Comparación de la posición angular del sistema y la posición angular estimada.

La Figura 4.17 representa el error entre la posición real y la posición estimada por la RN para la articulación. Entre ellas no existe gran diferencia ya a que una vez que la red culmina su entrenamiento, el valor del error es 0, por tanto, se considera que se ha realizado una buena estimación.

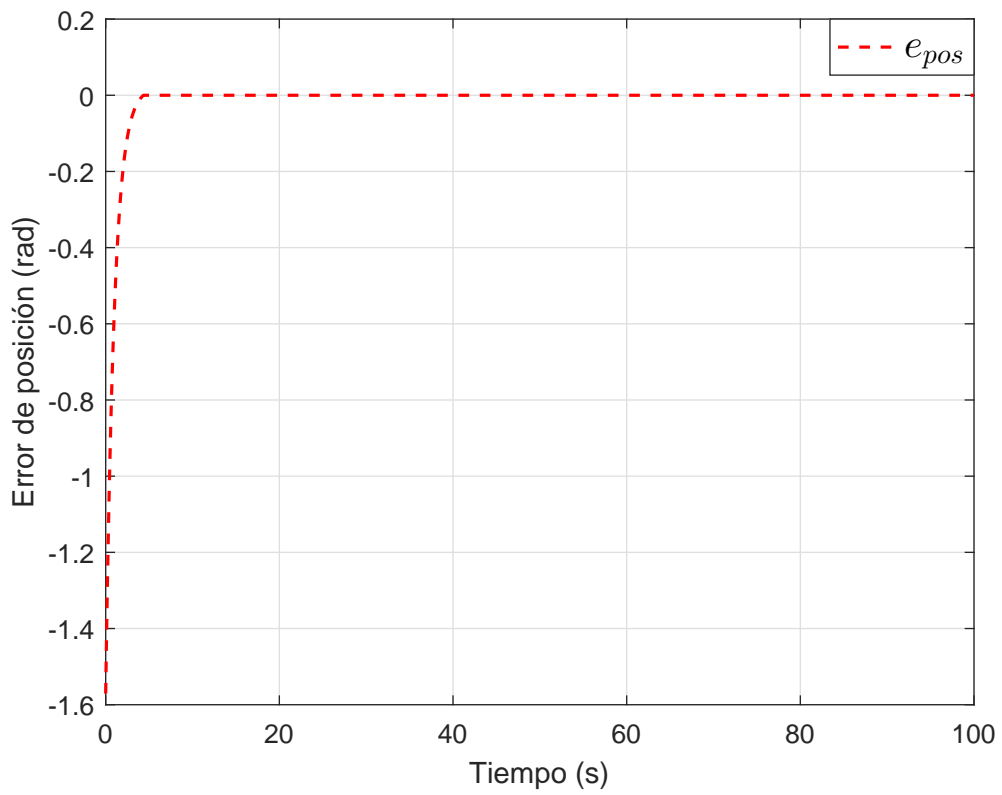


Figura 4.17: Perfil del error de posición de la articulación.

En la siguiente figura se muestra la comparación entre la velocidad angular del sistema y la velocidad angular estimada, se puede notar que existe mucha similitud entre ambas.

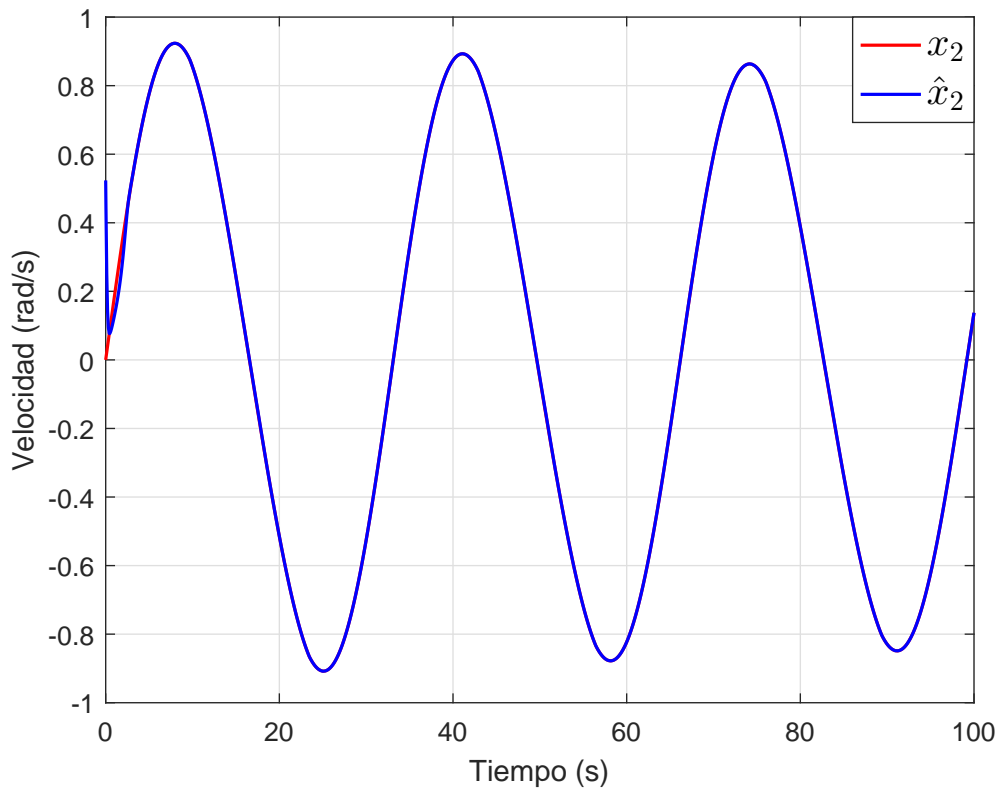


Figura 4.18: Comparación de la velocidad angular del sistema y la velocidad estimada.

La Figura 4.19 representa el error entre la velocidad real y la velocidad estimada por la RN para la articulación. Similar a la respuesta del error de posición, concluido el entrenamiento de la red, el valor del error es 0, por tanto, se considera que se ha realizado una buena estimación.

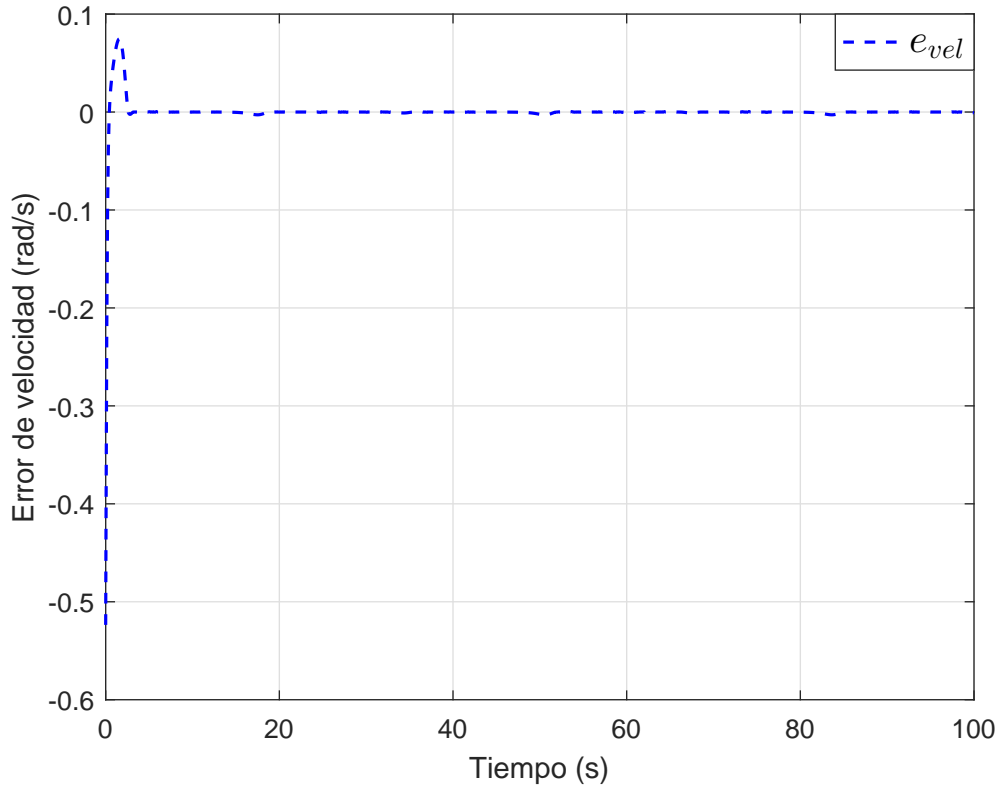


Figura 4.19: Perfil del error de velocidad de la articulación.

La estructura de la RND toma la forma siguiente:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{J} \text{sen}(\frac{x_1}{N}) & -\frac{B_0}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + W\varphi(\hat{x}) + \psi + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u + L(y - \hat{y}) \quad (4.31)$$

$$\dot{W} = e\varphi^T(\hat{x})$$

El umbral neuronal que se utilizará es

$$\psi = \text{sign}(e)\delta_f(x) \quad (4.32)$$

En el cual la cota superior de la norma de la incertidumbre se selecciona como

$$\delta_f(x) = \frac{B_{f+}}{J}x_2 \quad (4.33)$$



Donde, la función de activación seleccionada es

$$\varphi(\hat{x}) = \hat{x} + \frac{1}{10} \tanh\left(\frac{1}{2}\hat{x}\right) \quad (4.34)$$

Nótese, de (4.9) que derivado de la incertidumbre estructural total; es decir; el lado izquierdo de la misma es desconocido completamente, los efectos que se producen es que el diseñador va a utilizar todo el estado para aproximar, y como consecuencia, de forma potencial hay un gran costo computacional incluso para construir un 0.

$$\Delta_f(x) \cong W\varphi(\hat{x})$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B_f}{J}x_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} w_{11}\varphi_1(\hat{x}) + w_{12}\varphi_2(\hat{x}) \\ w_{21}\varphi_1(\hat{x}) + w_{22}\varphi_2(\hat{x}) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

En la figura que se muestra a continuación, se representan gráficamente los pesos sinápticos de obtenidos tras aplicar la estructura de la RN mostrada en (2.25).

Como se observa, los pesos sinápticos podrían considerarse como pesos que están antagonizando, son marginalmente estables y crecen invariablemente, lo que significa que se está tratando de estimar con variables de más, lo cual podría ser la causa de la inestabilidad de los mismos. Esta situación es causada por la falta de conocimiento con respecto a la incertidumbre, y también debido a que existe una combinación lineal entre los pesos sinápticos y las funciones de activación que depende de ambos estados.

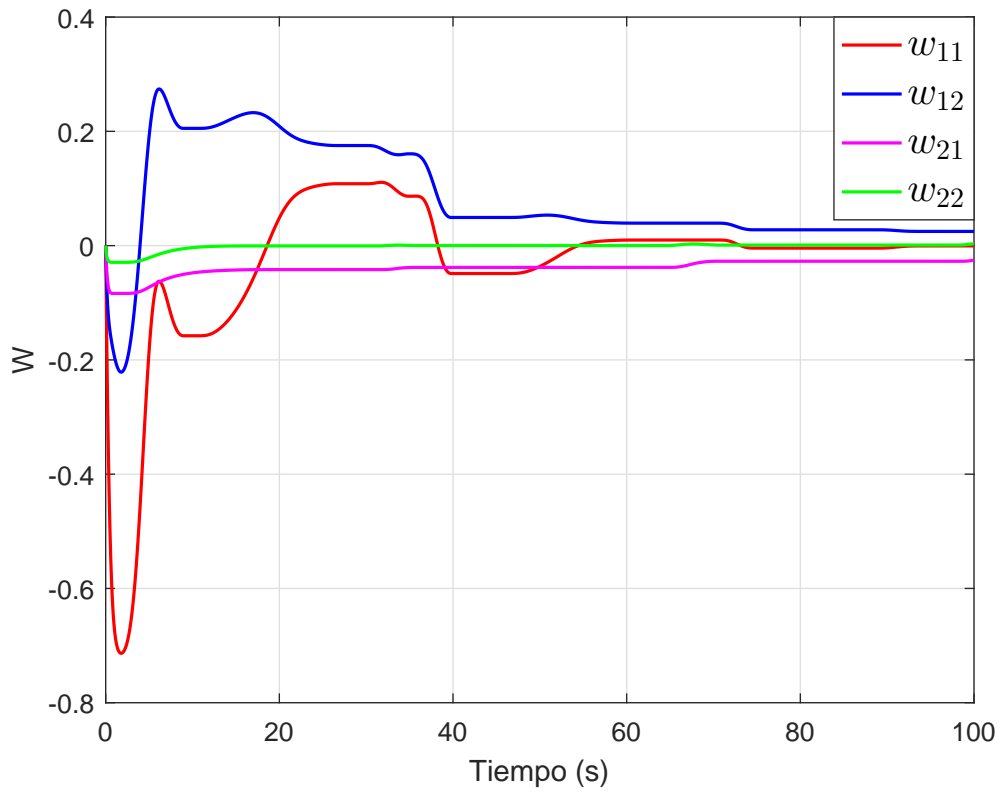


Figura 4.20: Pesos sinápticos de la RND.

La aproximación obtenida por la RN es la mostrada a continuación.

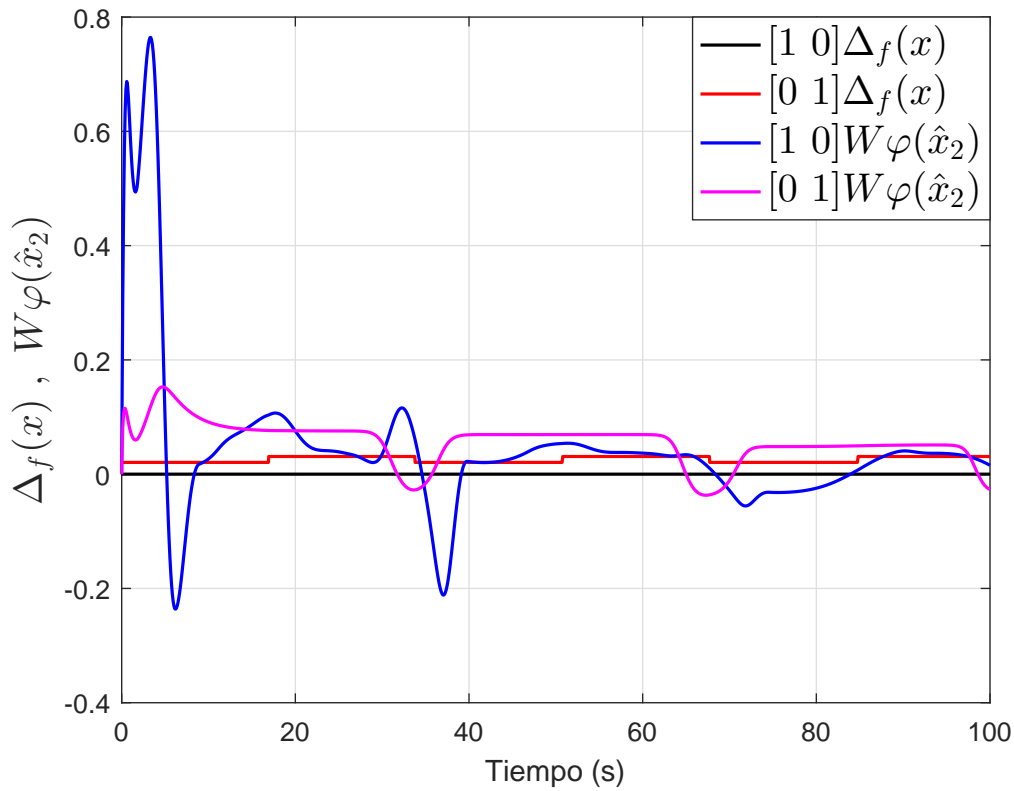


Figura 4.21: Estimación de la incertidumbre.

Como se observa en la Figura 4.21 la incertidumbre estimada por la red neuronal no presenta buena convergencia con relación al perfil propuesto para el coeficiente de fricción viscosa del manipulador. De manera, que se concluye que la RN no realiza correctamente su etapa de entrenamiento.

## 4.4. Simulación 4: Manipulador robótico de unión rígida con incertidumbre parcial

### 4.4.1. Planteamiento del problema

Se considera al sistema no lineal masa-resorte-amortiguador de la Figura 4.13, cuya representación en espacio de estado es la mostrada en (4.29).

#### 4.4.2. Objetivos de la simulación

Esta simulación tiene como objetivos:

1. Realizar una comparación entre la Simulación 3 y la 4, analizando las consecuencias de la matriz  $D$  en el caso de la Simulación 4.
2. Estimar la incertidumbre del coeficiente de fricción viscosa del modelo.

#### 4.4.3. Desarrollo de la simulación

La estructura de la RND que se encargará de realizar la aproximación de la incertidumbre del sistema en cuestión es (4.36).

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{J} \text{sen}\left(\frac{x_1}{N}\right) & -\frac{B_0}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + DW_r \varphi(\hat{x}_2) + \psi + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u + L(y - \hat{y}) \\ \dot{W}_r &= D^T e \varphi^T(\hat{x}_2) \end{aligned} \quad (4.36)$$

El umbral neuronal que se utilizará es

$$\psi = \text{sign}(e) \delta_f(x) \quad (4.37)$$

En el cual la cota superior de la norma de la incertidumbre se selecciona como

$$\delta_f(x) = \frac{B_{f+}}{J} x_2 \quad (4.38)$$

Donde, la función de activación seleccionada es

$$\varphi(\hat{x}_2) = \hat{x}_2 + \frac{1}{10} \tanh\left(\frac{1}{2} \hat{x}_2\right) \quad (4.39)$$

Se propone para estimar a  $\Delta_f(x)$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta_f(x) &\cong DW_r \varphi(\hat{x}_2) ; W_r \in \Re, \varphi(\hat{x}_2) \in \Re \\ \Delta_f(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B_f}{J} x_2 \end{bmatrix} \cong DW_r \varphi(\hat{x}_2) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nótese, de (4.40) que para que la componente neuronal propuesta estime a  $\Delta_f(x)$ , se propone una  $D \in \Re^{n \times m}$ , que contribuye a la tasa de cambio o a la ecuación dinámica de  $\dot{x}_2$ ,

y con lo que se asegura que la incertidumbre sólo afecte al segundo estado del sistema; en otras palabras, no se va a utilizar todo el estado para aproximar, y el costo computacional disminuiría.

$$DW_r\varphi(\hat{x}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} W_r\varphi(\hat{x}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ W_r\varphi(\hat{x}_2) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\Delta_f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B_f}{J}x_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ W_r\varphi(\hat{x}_2) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

En la siguiente figura, se muestra el peso  $W_r$ , correspondiente a la expresión anterior; se puede ver no como tiene un comportamiento convergente pero si acotado, con respecto a la simulación anterior se observa que el peso sináptico  $W_r$  no es inestable.

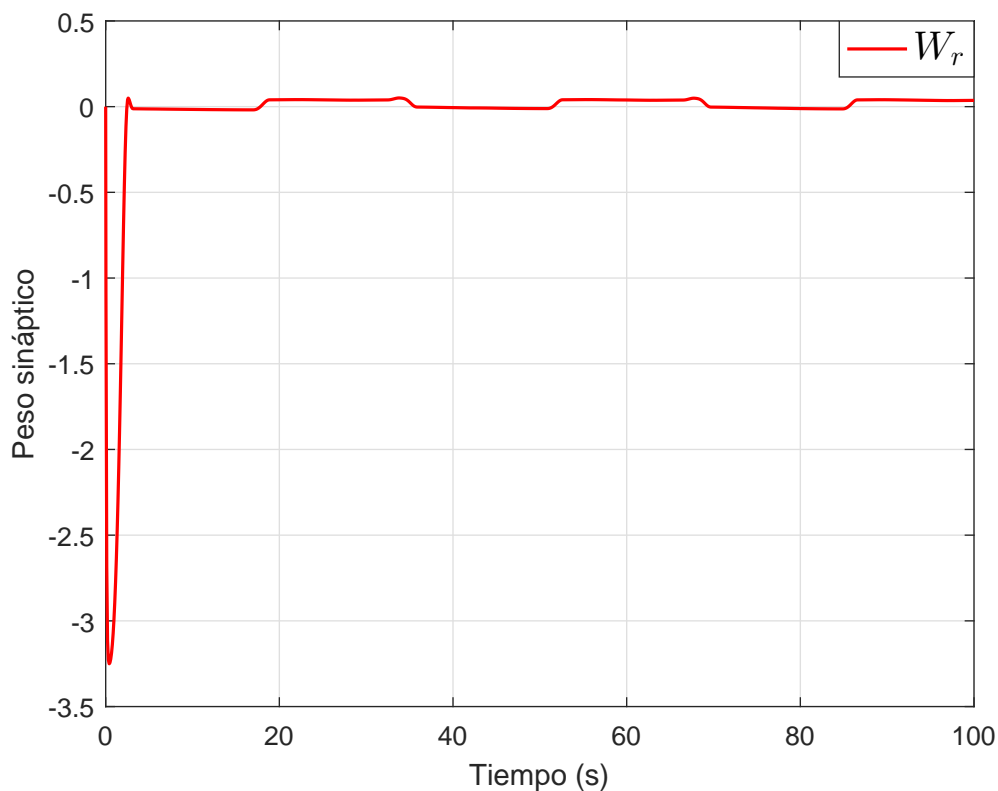


Figura 4.22: Peso sináptico de la RND.

Además de los análisis anteriores, se estima la incertidumbre del sistema; es decir; el coeficiente de fricción viscosa  $B$ . Luego de la realización de la simulación, se tiene que si

el error de identificación fuera prácticamente 0 se tendría que su derivada también será el mismo valor:

$$e \cong 0$$

$$\dot{e} \cong \Delta_f(x) - DW_r\varphi(\hat{x}_2) - \psi - Le \quad (4.43)$$

$$0 \cong \Delta_f(x) - DW_r\varphi(\hat{x}_2) - \psi - Le$$

Considerando lo planteado en las ecuaciones (3.7) y (3.8) del Teorema 3.1, se observa:

$$Le \cong 0$$

$$(4.44)$$

$$\psi \cong \text{sign}(0) \cdot Le \cong 0$$

Entonces, se tiene que la incertidumbre del sistema  $\Delta_f(x)$  será aproximadamente igual a la componente neuronal  $DW_r\varphi(\hat{x}_2)$ .

$$\Delta_f(x) - DW_r\varphi(\hat{x}_2) \cong 0$$

$$(4.45)$$

$$\Delta_f(x) \cong DW_r\varphi(\hat{x}_2)$$

De la expresión anterior, se puede determinar como error de estimación lo presentado en la siguiente ecuación:

$$e_{est} \cong \Delta_f(x) - DW_r\varphi(\hat{x}_2) \quad (4.46)$$

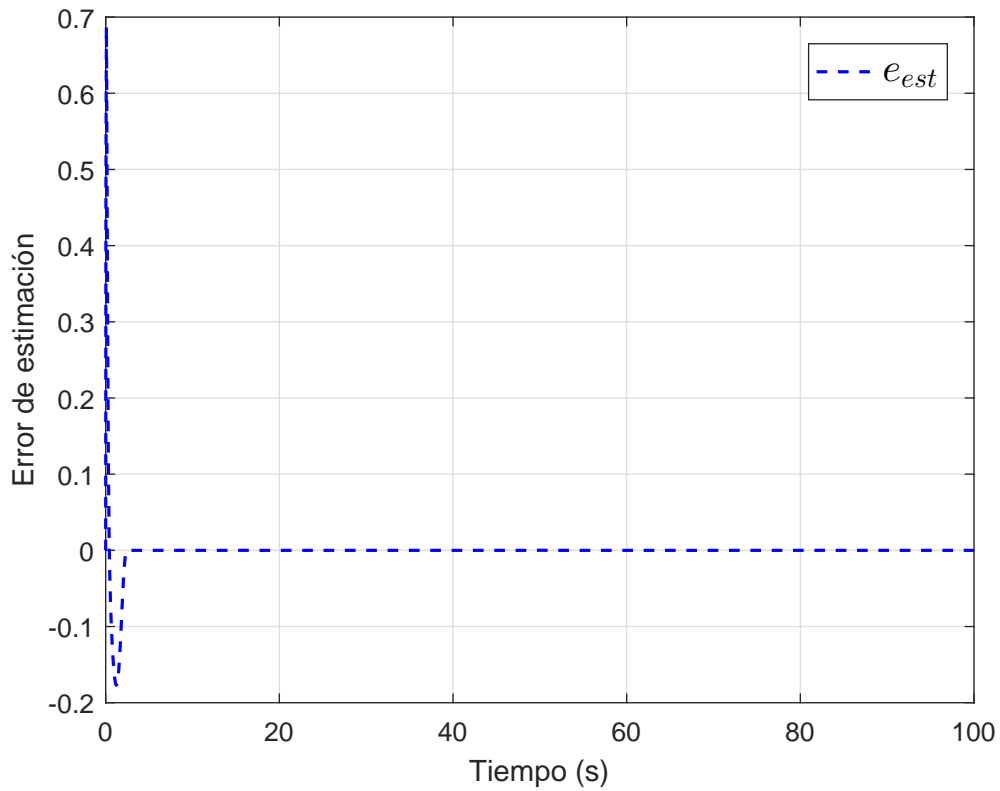


Figura 4.23: Perfil del error de estimación de la RND.

En este caso no se tiene conocimiento sobre el dominio de la incertidumbre, pero si de la ecuación dinámica a la que afecta, por ejemplo, se afecta a la segunda ecuación dinámica y se propone una determinada función de activación; por tanto a partir de esta información se pudo definir una determinada  $D$ , mientras que  $W_r$  y  $\varphi(\hat{x}_2)$  son escalares. Con esta leve información, se pudo obtener un peso sináptico que intenta converger a lo largo del tiempo y un error de estimación igual a 0 una vez que termina la etapa de entrenamiento de la red neuronal dinámica.

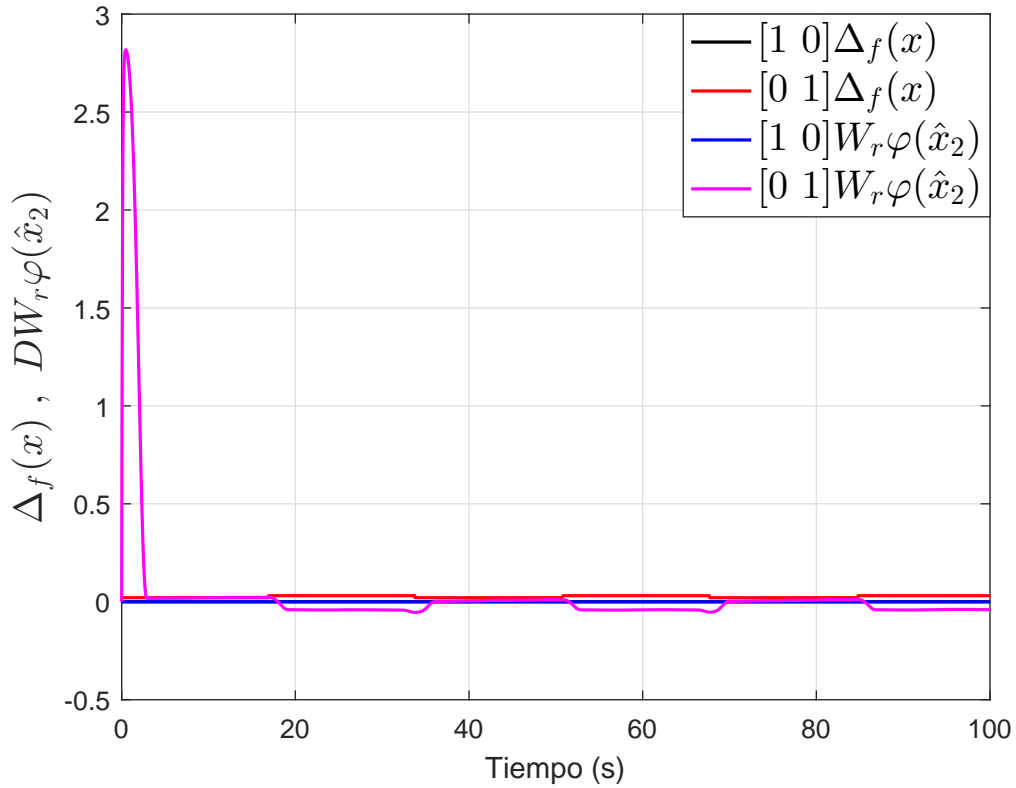


Figura 4.24: Estimación de la incertidumbre.

Como se observa en la Figura 4.24 la incertidumbre estimada por la red neuronal presenta un perfil similar al propuesto, ya que al terminarse el entrenamiento de la red, se nota un intento de converger a dicho perfil; y físicamente lo que significa esto es que en un sector del engrane hay una determinada fricción y en otra región del mismo existe otra, por lo cual se aprecian los cambios en la estimación realizada.

De los resultados gráficos obtenidos de la comparación realizada del sistema manipulador robótico con unión rígida con incertidumbre total y parcial en el modelo, a continuación se muestran en la Tabla 4.4 los resultados cuantitativos de dicha comparación basados en los criterios integrales del error.

Cuadro 4.4: Índices de desempeño Simulaciones 3 y 4.

Índices de desempeño	Sistema con incertidumbre total	Sistema con incertidumbre parcial
$IAE$	$[2.6189 \ 0.1783] \cdot 10^3$	$[13.7428 \ 3.0050]$
$ISE$	$[1.1802 \ 0.0276] \cdot 10^3$	$[15.2949 \ 1.0787]$
$ITAE$	$[3.0248 \ 0.1019] \cdot 10^4$	$[8.6413 \ 30.6150]$



Con estos resultados se comprueba que el modelo de incertidumbre propuesto en el trabajo, donde se incluye el acoplamiento  $D$  y se estima el término incierto con la RND para aproximación y algoritmo de aprendizaje  $\hat{W}$  propuestos en el Teorema 3.1, es válido y proporciona mejores resultados debido a que la información resultante conlleva a la incertidumbre parcial en el modelo. Observando que los valores de los índices de desempeño calculados para el sistema con incertidumbre total son mayores que los obtenidos para el sistema con incertidumbre parcial.

## 4.5. Simulación 5: Sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre total

### 4.5.1. Planteamiento del problema

Considerando al sistema no lineal masa-resorte-amortiguador de la Figura 4.25, su ecuación usando la Ley de Newton es la mostrada en (4.47).

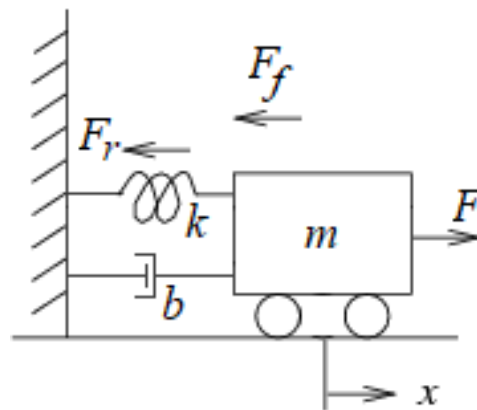


Figura 4.25: Sistema masa-resorte-amortiguador.

$$m\ddot{x} + F_v + F_f + F_r = F \quad (4.47)$$

Donde,

$x$ : desplazamiento del carro.

$m$ : masa del carro.

$F$ : fuerza externa.

$F_v$ : fuerza de fricción viscosa.

$F_f$ : fuerza resistiva de fricción.

$F_r$ : fuerza de recuperación del resorte.

Se asume que  $F_r$  es función del desplazamiento  $x$ ; es decir;  $F_r = h(x)$ . Para desplazamientos pequeños,  $F_r$  puede modelarse como la relación lineal,  $h(x) = kx$ ; mientras que para grandes desplazamientos, esta fuerza puede depender de manera no lineal de  $x$ . Por ejemplo, para el caso de resortes duros,  $h(x) = k(1 + a^2x^2)x$ . También, la fuerza de fricción viscosa o amortiguamiento del aire, que suele modelarse como una función no lineal de la velocidad,  $F_v = h(\dot{x})$ , en caso de velocidades pequeñas,  $F_v = b\dot{x}$ . Combinando un resorte duro con amortiguamiento lineal, se obtiene la ecuación diferencial mostrada en (4.48).

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x - \frac{ka^2}{m}x^3 + \frac{A_m}{m}\cos(\omega t) \quad (4.48)$$

### 4.5.2. Objetivos de la simulación

1. Analizar las consecuencias de incertidumbre total en el sistema.
2. Estimar la fuerza de recuperación del resorte.

### 4.5.3. Desarrollo de la simulación

Partiendo de la ecuación (4.48), se obtuvo la siguiente representación en espacio de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} - \frac{ka^2}{m}x_1^2 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_m}{m}\cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

La incertidumbre a estimar en el sistema representado en (4.48) es el término no lineal de la fuerza de recuperación del resorte ( $F_r$ ), por tanto la representación en espacio de estado es la mostrada en (4.50).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{ka^2}{m}x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_m}{m}\cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Donde,

$$f(x) = f_0(x) + \Delta_f(x) \quad (4.51)$$

$$f_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ka^2}{m}x_1^3 \end{bmatrix}$$

La estructura de la RND que se encargará de realizar la aproximación de la incertidumbre del sistema en cuestión, es la mostrada en (4.52).

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 \end{bmatrix} + W\varphi(\hat{x}) + \psi + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_m}{m}\cos(wt) \end{bmatrix} + L(y - \hat{y}) \quad (4.52)$$

$$\dot{W} = e\varphi^T(\hat{x})$$

El umbral neuronal que se utilizará es

$$\psi = \text{sign}(e)\delta_f(x) \quad (4.53)$$

En el cual la cota superior de la norma de la incertidumbre se selecciona como

$$\delta_f(x) = \mu_k mg [\hat{x}_1^3 \ \hat{x}_2^3]^T \quad (4.54)$$

Donde, la función de activación seleccionada es

$$\varphi(\hat{x}) = [\hat{x}_1^3 \ \hat{x}_2^3]^T \quad (4.55)$$

La simulación fue realizada con los siguientes datos.

Cuadro 4.5: Datos de simulación para el sistema masa-resorte-amortiguador.

Datos	Valor	Descripción
$m$	0.5 kg	Masa
$k$	1 N/m	Constante elástica
$b$	0.3 Ns/m	Coefficiente de amortiguamiento
$a$	0.8	Parámetro que indica el tipo de resorte
$A_m$	0.65	Amplitud
$w$	1.2 rad/s	Frecuencia angular
$\mu_k$	0.15	Coefficiente de fricción cinética
$\mu_s$	0.35	Coefficiente de fricción estática
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>	Aceleración de la gravedad

En la Figura 4.26 y 4.27 se muestra la posición y la velocidad del carro, respectivamente.

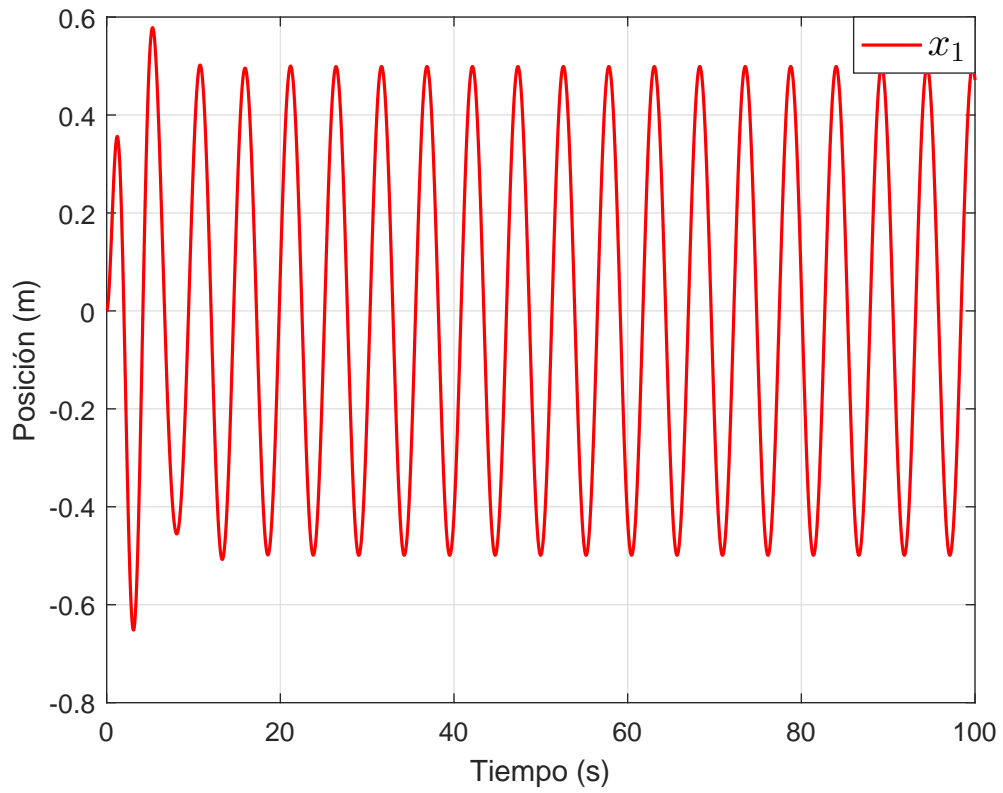


Figura 4.26: Posición del carro.

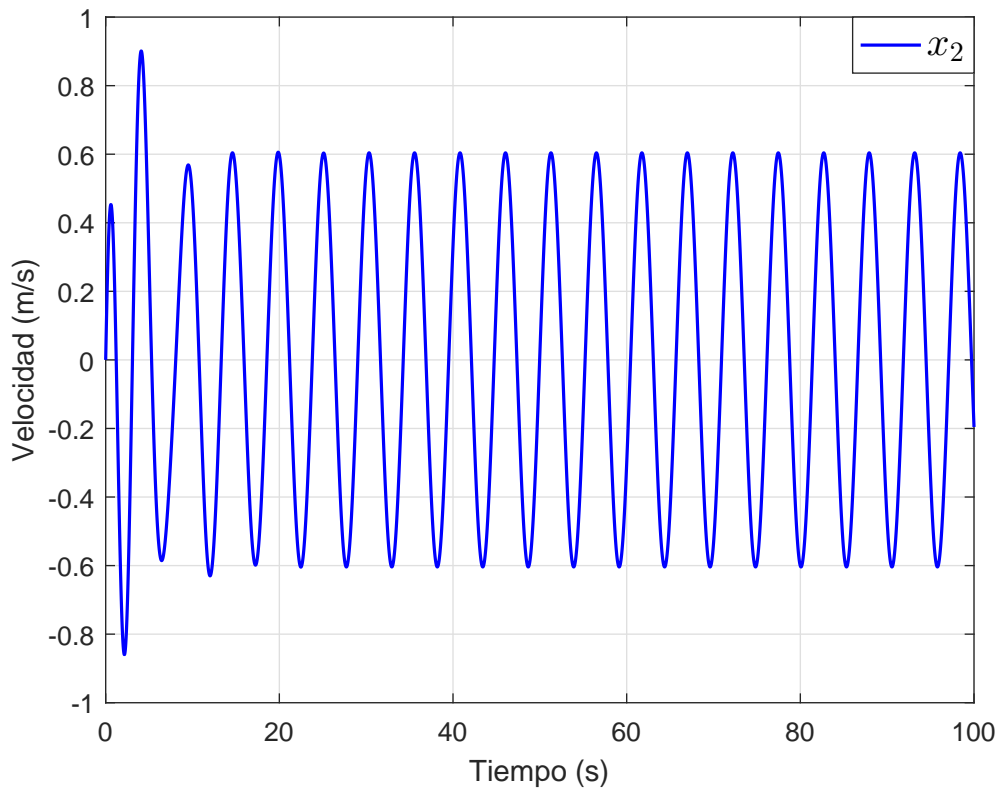


Figura 4.27: Velocidad del carro.

A continuación, se muestra en la Figura 4.28 la comparación entre la posición del sistema y la posición estimada, donde como se puede ver ambos perfiles son similares.

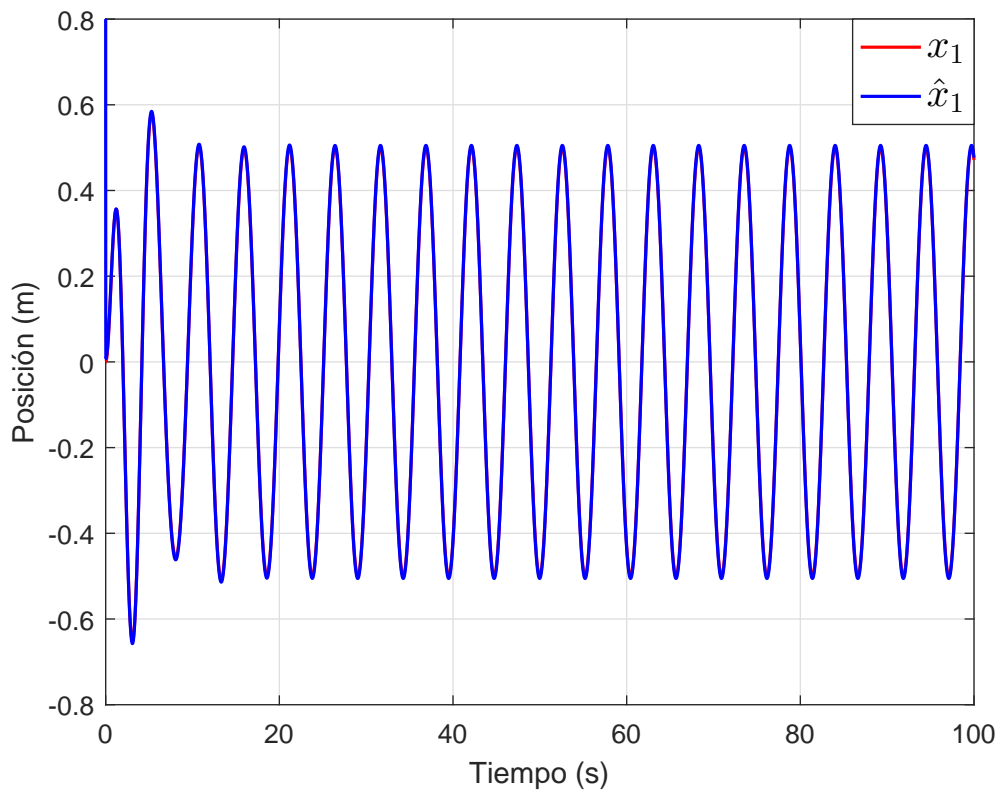


Figura 4.28: Comparación de la posición del sistema y la posición estimada.

La Figura 4.29 representa el error entre la posición real y la posición estimada por la RN. El valor del error es 0, comprobándose que se ha realizado una buena estimación.

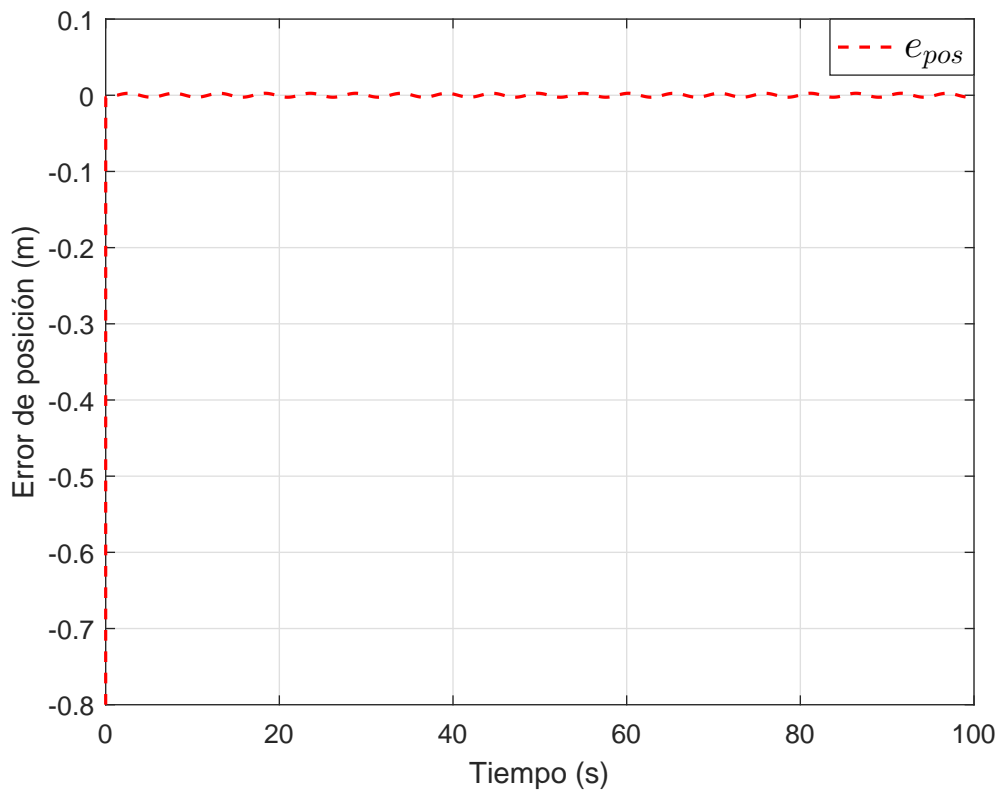


Figura 4.29: Perfil del error de posición del carro.

En la figura se compara la velocidad del sistema y la velocidad estimada, notando que existe una buena estimación.

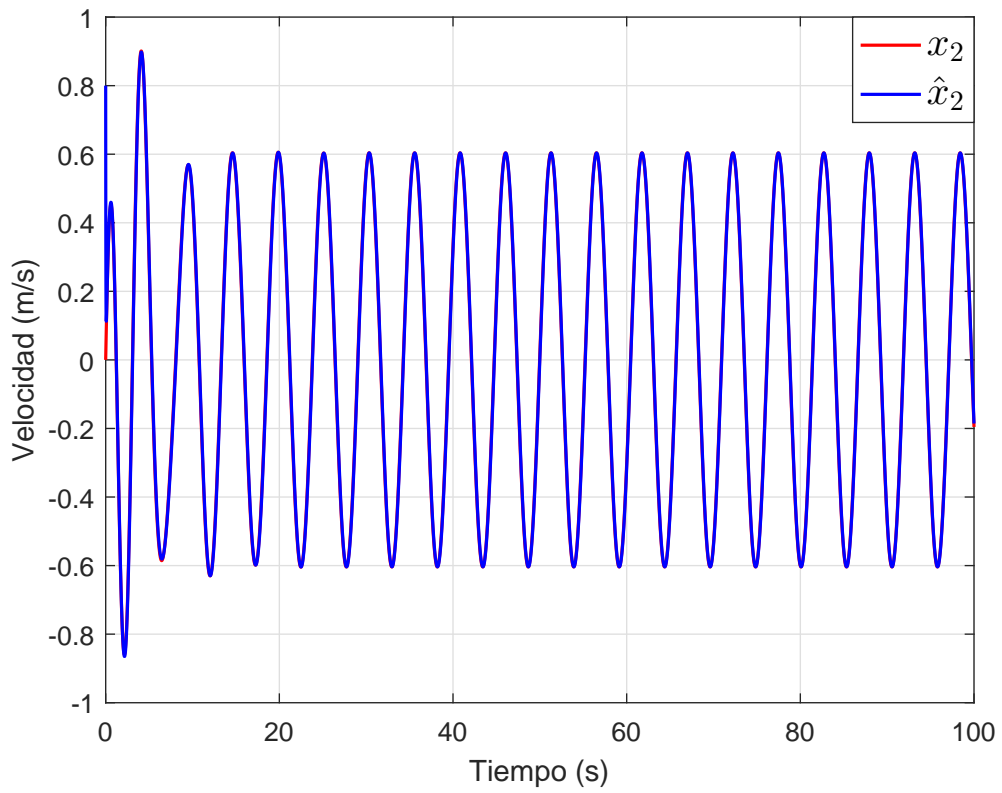


Figura 4.30: Comparación de la velocidad del sistema y la velocidad estimada.

La Figura 4.31 representa el error entre la velocidad real y la velocidad estimada por la RN. El valor del error converge a 0 y se considera que se ha realizado una buena estimación.



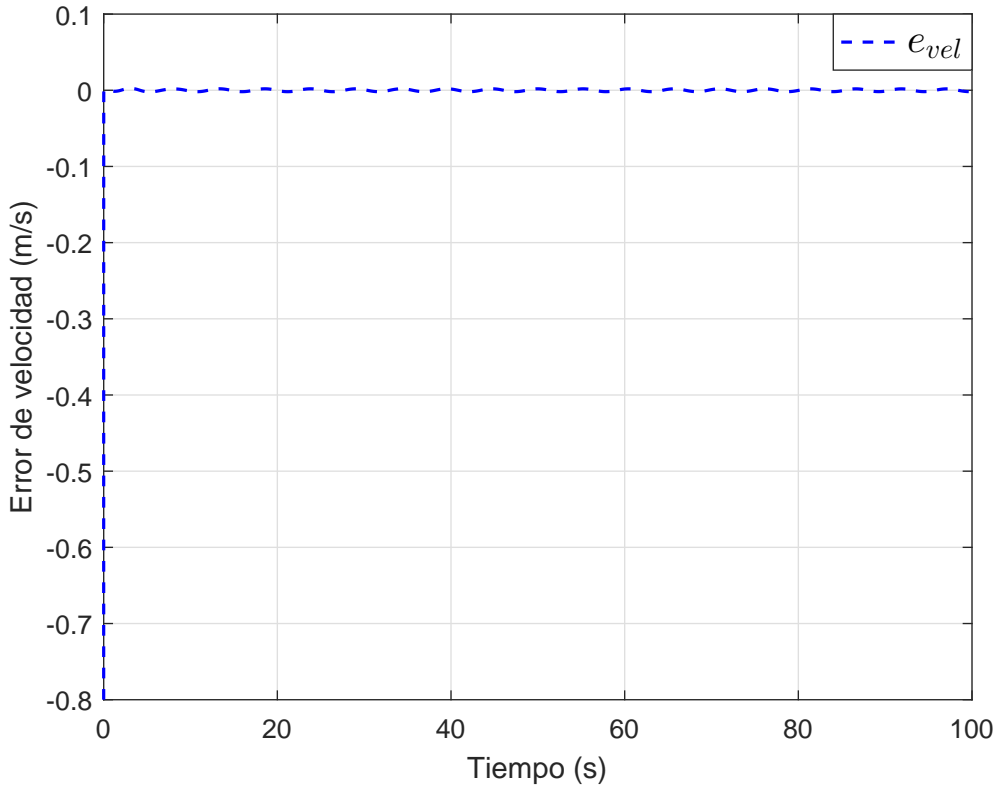


Figura 4.31: Perfil del error de velocidad del carro.

En (4.56) existe incertidumbre estructural total siendo el lado izquierdo desconocido completamente, por tanto, se utiliza todo el estado para aproximar como en el Caso *I*.

$$\Delta_f(x) \cong W\varphi(\hat{x})$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ka^2}{m}x_1^3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} w_{11}\hat{x}_1^3 + w_{12}\hat{x}_2^3 \\ w_{21}\hat{x}_1^3 + w_{22}\hat{x}_2^3 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

En la figura, se representan los pesos sinápticos, que podrían considerarse como pesos que antagonizan, son marginalmente estables y crecen invariablemente. Esto quiere decir que se está estimando con exceso de variables, lo que causa la inestabilidad de los mismos. Esta situación es causada por la falta de conocimiento con respecto a la incertidumbre, y también por la combinación lineal existente entre los pesos sinápticos y las funciones de activación de la red dependiente de ambos estados.

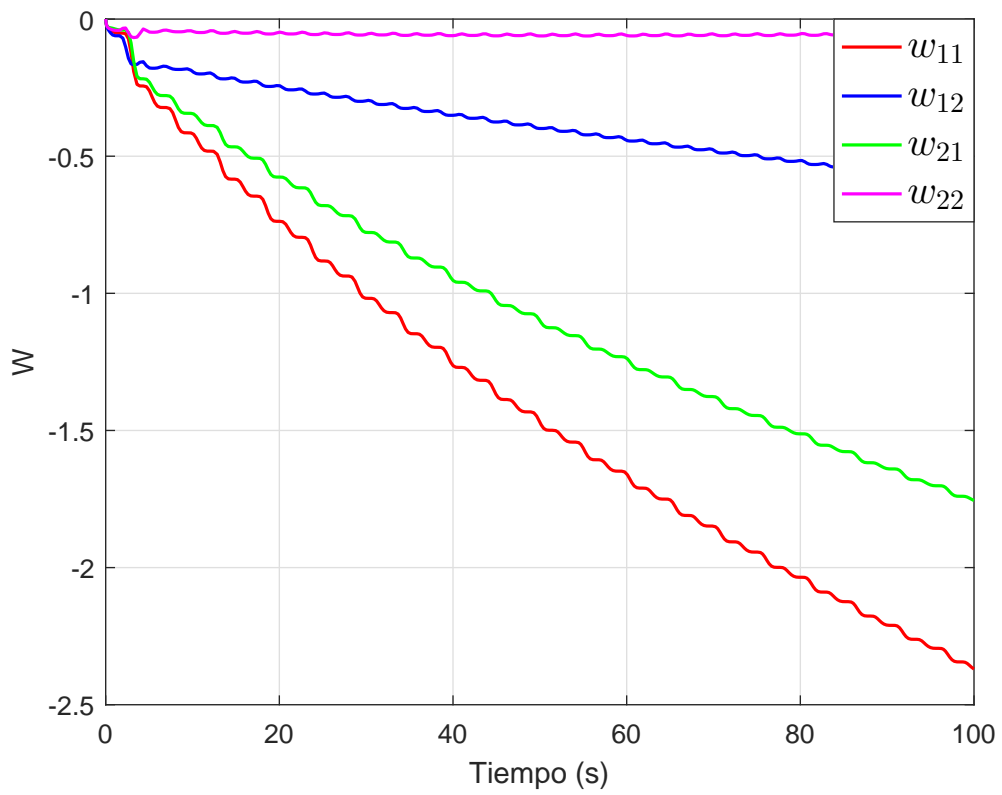


Figura 4.32: Pesos sinápticos de la RND.

La aproximación obtenida por la RN es la mostrada en la Figura 4.33.

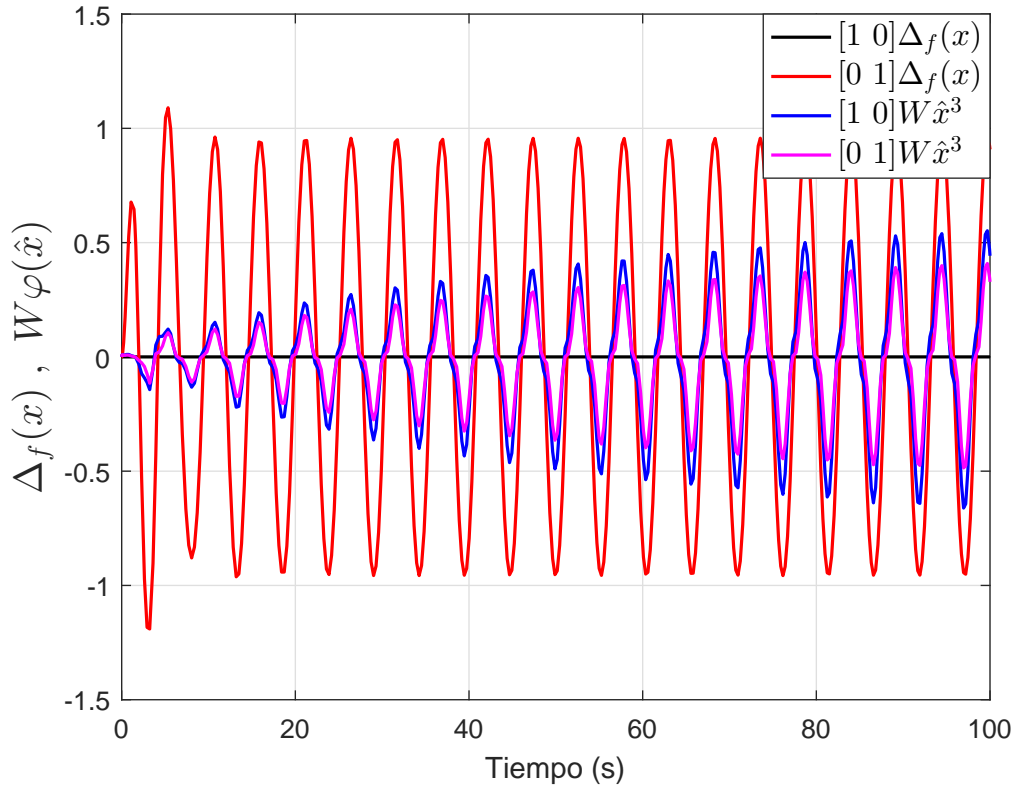


Figura 4.33: Estimación de la incertidumbre.

Se concluye que por la existencia de una combinación lineal entre los pesos sinápticos y las funciones de activación, la primera componente de  $W\varphi(\hat{x})$  tratará de obtener un 0 lo que implica gran costo computacional; mientras que su segunda componente intenta aproximarse al perfil propuesto pero no presenta buena convergencia con relación al perfil propuesto para la fuerza de recuperación del resorte.

## 4.6. Simulación 6: Sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre parcial

### 4.6.1. Planteamiento del problema

Se considera al sistema no lineal masa-resorte-amortiguador de la Figura 4.25, cuya representación en espacio de estado es la mostrada en (4.50).

Donde,  $x_1$  es el desplazamiento del carro,  $x_2$  su velocidad y el término incierto es la fuerza de recuperación del resorte  $-\frac{ka^2}{m}x_1^3$ .

### 4.6.2. Objetivos de la simulación

Esta simulación tiene como objetivos:

1. Realizar una comparación entre la Simulación 5 y la 6 analizando las consecuencias de incluir la matriz  $D$  para el caso de la Simulación 6.
2. Estimar el perfil de la fuerza de recuperación del resorte, considerando que la misma será estimada por el producto de una matriz  $D$  y la componente neuronal de la red.

### 4.6.3. Desarrollo de la simulación

La estructura de la RND utilizada es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 \end{bmatrix} + DW_q\varphi(\hat{x}_1) + \psi + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_m}{m}\cos(\omega t) \end{bmatrix} + L(y - \hat{y}) \\ \dot{W}_q &= D^T e\varphi^T(\hat{x}_1) \end{aligned} \quad (4.57)$$

El umbral neuronal que se utilizará es

$$\psi = \text{sign}(e)\delta_f(x) \quad (4.58)$$

En el cual la cota superior de la norma de la incertidumbre se selecciona como

$$\delta_f(x) = \mu_k mgx_1^3 \quad (4.59)$$

Donde, la función de activación seleccionada es

$$\varphi(\hat{x}_1) = \hat{x}_1^3 \quad (4.60)$$

Se propone para estimar a  $\Delta_f(x)$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta_f(x) &\cong DW_q\varphi(\hat{x}_1) ; W_q \in \mathfrak{R} , \varphi(\hat{x}_1) \in \mathfrak{R} \\ \Delta_f(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ka^2}{m}x_1^3 \end{bmatrix} \cong DW_qx_1^3 \cong \begin{bmatrix} 0 \\ W_qx_1^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Nótese, que la  $D$  seleccionada  $D \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , contribuye a la tasa de cambio de  $x_2$  e indica que la aproximación de la incertidumbre depende del estado  $x_1$ , con lo que se logra que no se utilice todo el estado para estimar, y que el costo computacional disminuya.

En la siguiente figura, se muestra el peso sináptico,  $W_q$ , correspondiente a la expresión anterior; se puede ver como este tiene un comportamiento convergente después de un tiempo determinado.

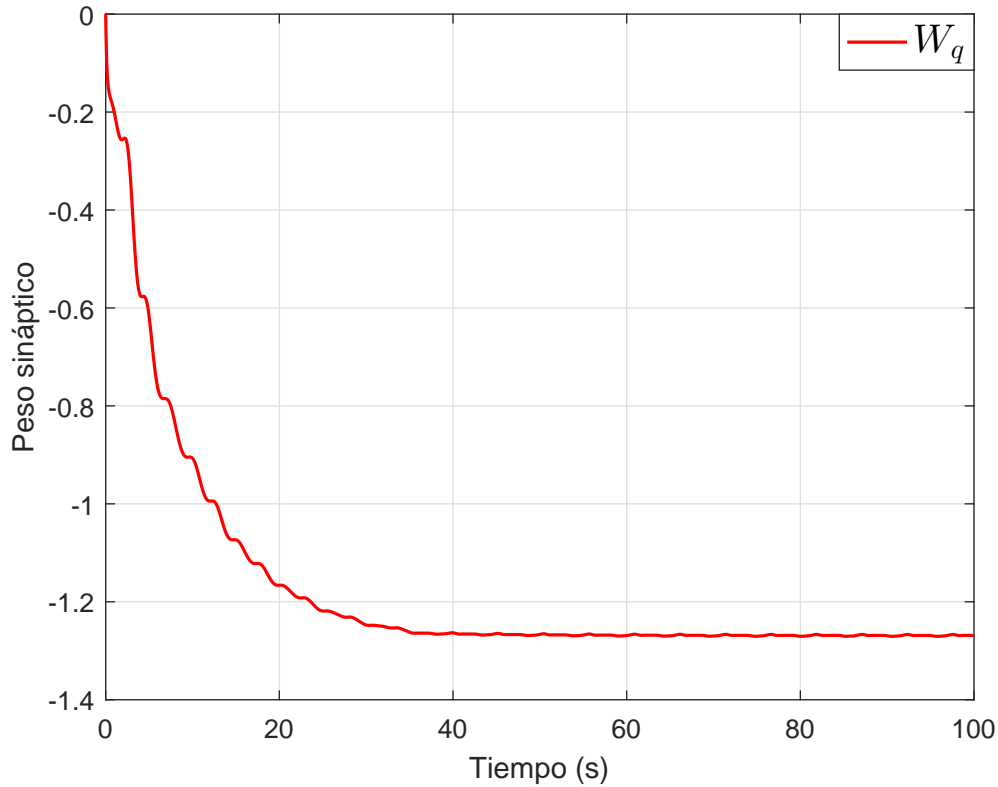


Figura 4.34: Peso sináptico de la RND.

Además de los análisis anteriores, se estima la incertidumbre del sistema; es decir; el término no lineal del modelo. De la simulación, se tiene que si el error de identificación fuera prácticamente 0 se tendría que su derivada también será el mismo valor:

$$e \cong 0$$

$$\dot{e} \cong \Delta_f(x) - DW_q\varphi(\hat{x}_1) - \psi - Le \quad (4.62)$$

$$0 \cong \Delta_f(x) - DW_q\varphi(\hat{x}_1) - \psi - Le$$

Considerando lo planteado en las ecuaciones (3.7) y (3.8) del Teorema 3.1, se observa:

$$Le \cong 0 \quad (4.63)$$

$$\psi \cong \text{sign}(0) \cdot Le \cong 0$$

Entonces, se tiene que la incertidumbre del sistema  $\Delta_f(x)$  será aproximadamente igual a la componente neuronal  $DW_q\varphi(\hat{x}_1)$ .

$$\begin{aligned}\Delta_f(x) - DW_q\varphi(\hat{x}_1) &\cong 0 \\ \Delta_f(x) &\cong DW_q\varphi(\hat{x}_1)\end{aligned}\tag{4.64}$$

De la expresión anterior, se puede determinar como error de estimación:

$$e_{est} \cong \Delta_f(x) - DW_q\varphi(\hat{x}_1)\tag{4.65}$$

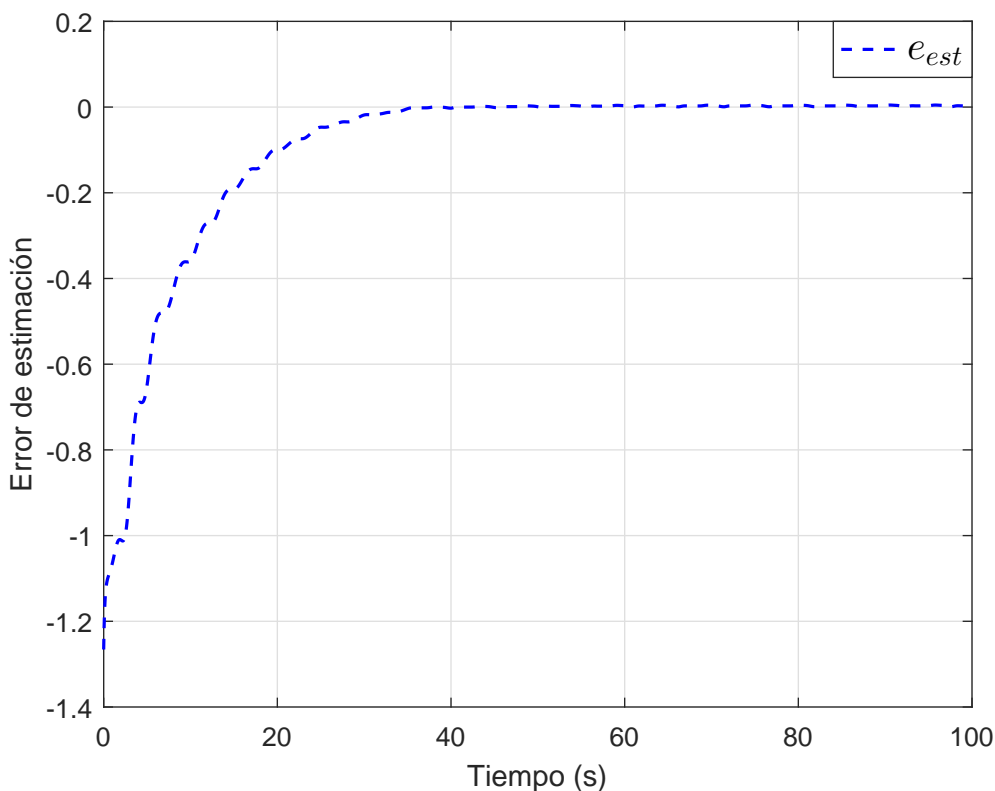


Figura 4.35: Perfil del error de estimación de la RND.

Se puede observar que los efectos de tener conocimiento del dominio y ecuaciones dinámicas a las que afecta la incertidumbre; es por ejemplo, en este caso, que la misma depende del primer estado del modelo del sistema y afecta a la segunda ecuación dinámica; entonces a partir de esta información se pudo definir una determinada  $D$ , mientras que  $W_q$  y  $\varphi(\hat{x}_1)$

son escalares. Con la unión de estas especificaciones, se pudo obtener un peso sináptico que converge una vez que ha terminado la etapa de entrenamiento de la red neuronal dinámica.

La aproximación obtenida por la red neuronal es la mostrada en la siguiente figura.

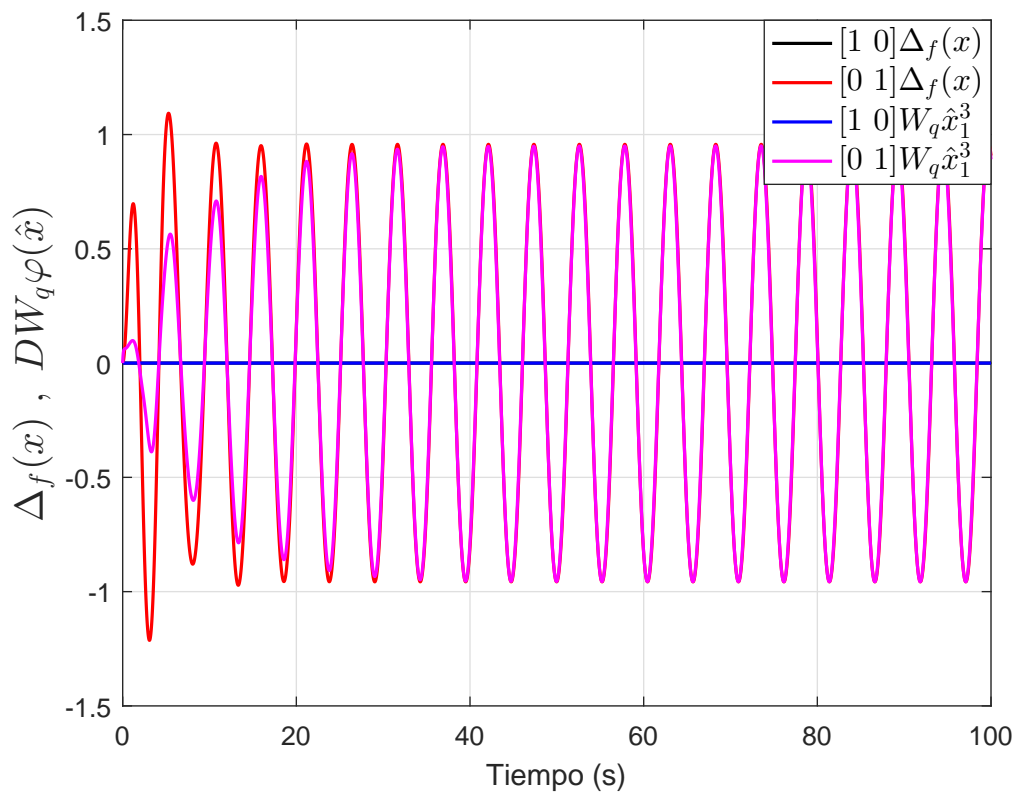


Figura 4.36: Estimación de la incertidumbre.

Como se observa en la figura se logró una buena estimación por la red neuronal y convergencia de la incertidumbre aproximadamente cuando la red concluyó su etapa de entrenamiento.

Comparando lo obtenido, en el Ejemplo 1a con incertidumbre total del modelo, no es recomendable estimarla con estados de los que no depende porque la red utilizará los recursos que presente causando que no termine su aprendizaje y el gasto computacional será mayor. Por otra parte, en el Ejemplo 1b, se estimó teniendo incertidumbre parcial, mostrándose los efectos de tener conocimiento leve de esta con la inclusión de la matriz  $D$ , y concluyendo de la comparación de ambos ejemplos, que la estimación realizada por la RND proporcionó mejores resultados en el segundo ejemplo; es decir, al considerar la matriz de desacoplamiento en la estimación.

Analizando los resultados gráficos obtenidos de la comparación realizada del sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre total y parcial en el modelo, a continuación se muestran en la Tabla 4.6 los resultados cuantitativos de dicha comparación basados en los criterios integrales del error.

Cuadro 4.6: Índices de desempeño simulaciones 5 y 6.

Índices de desempeño	Sistema con incertidumbre total	Sistema con incertidumbre parcial
<i>IAE</i>	$[1.6277 \ 0.1289] \cdot 10^3$	$[46.9515 \ 36.5919]$
<i>ISE</i>	$[331.6561 \ 15.2795]$	$[10.0284 \ 7.0087]$
<i>ITAE</i>	$[8.0770 \ 0.1823] \cdot 10^4$	$[2.0384 \ 1.5495] \cdot 10^3$

Con la comparación cuantitativa obtenida se comprueba que el modelo de incertidumbre propuesto, que incluye el acoplamiento  $D$  y se estima el término incierto con la RND para aproximación y algoritmo de aprendizaje  $\hat{W}$  propuestos en el Teorema 3.1, es válido y proporciona mejores resultados debido a que la información resultante conlleva a la incertidumbre parcial en el modelo. Observando que los valores de los índices de desempeño calculados para el sistema con incertidumbre total son mayores que los obtenidos para el sistema con incertidumbre parcial.



# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajos Futuros

### 5.1. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló una metodología de modelado para sistemas no lineales inciertos afines con la entrada a partir de redes neuronales dinámicas, mediante acoplamiento del rango y dominio de la incertidumbre.

Se propuso un modelo de incertidumbre que incluye una matriz de acoplamiento,  $D$ , que aporta información a la incertidumbre sobre las dependencias que existan y ecuaciones dinámicas a las que podría afectar dentro de modelo.

Se formuló el Teorema 3.1 para realizar la estimación de la incertidumbre del sistema y donde se presentan las condiciones necesarias para acotar el error de identificación y hacerlo estable, obteniéndose un nuevo algoritmo de aprendizaje,  $\hat{W}$ , que depende de la matriz acoplamiento  $D$ , y de lo que se obtiene un modelo de incertidumbre con una red neuronal dinámica.

Con la aplicación de la propuesta en las simulaciones realizadas, se comprobó que se logra que las dependencias de la incertidumbre puedan ser acopladas y no se estime la misma con exceso de variables, reduciendo el costo computacional y que la red neuronal termine su aprendizaje y por consiguiente se realice una estimación eficiente.

### 5.2. Trabajos Futuros

Partiendo de lo desarrollado en este trabajo se derivan distintos puntos de interés.

- Modelar sistemas no lineales inciertos afines con la entrada mediante una red neuronal dinámica de estructura conmutada.
- Definir las subregiones en la que la red neuronal conmutará.

- Diseñar la arquitectura de la red neuronal dinámica de estructura conmutada.
- Determinar el valor de la cota superior del error de estimación de la incertidumbre.

# Bibliografía

- [1] M. Guven A. Derdiyok Z. Yan y V. Utkin. “A sliding mode speed and rotor time constant observer for induction machines”. En: *IEEE on Industrial Electronics Society* 2 (2001), págs. 1400-1405.
- [2] C. Yang B. Xu Z. Shi. “Composite Neural Dynamic Surface Control of a Class of Uncertain Nonlinear Systems in Strict-Feedback Form”. En: *IEEE Transactions on Cybernetics* 44 (2014).
- [3] A. J. Barragán. “Síntesis de sistemas de control borroso estables por diseño”. Tesis doct. Universidad de Huelva, 2009.
- [4] C-S. Chen. “Dynamic structure adaptive neural fuzzy control for MIMO uncertain nonlinear systems”. En: *Information Sciences* 15 (2009).
- [5] C-C. Chiang. “Robust Adaptive Fuzzy Control of Uncertain Nonlinear Systems with Unknown Dead-Zone”. En: *American Journal of Intelligent Systems* 2 (2012), págs. 191-199.
- [6] A. Cichocki y R. Unbehauen. *Neural networks for optimization and signal processing*. John Wiley & Sons Ltd., 1993. ISBN: 0-471-93010-5.
- [7] G. Cybenko. “Approximation by superpositions of a sigmoidal function”. En: *Mathematics of control, signals and systems* 2.4 (1989), págs. 303-314.
- [8] D. Liu D. Wang y H. Ma. “Neural-network-based robust optimal control design for a class of uncertain nonlinear systems via adaptive dynamic programming”. En: *Information Sciences* (2014), págs. 167-179.
- [9] C. Elizondo. “Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal”. Tesis doct. Universidad Autónoma de Nuevo León, UANL, 1998.
- [10] T. Tison F. Massa Q. H. Do y O. Cazier. “Uncertain friction induced vibration study: coupling of fuzzy logic, fuzzy sets and interval theories”. En: *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering* 1 (2016).
- [11] H. Fang. “Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems”. Tesis doct. Department of Electrical y Computer Engineering, National University of Singapore, 2003.

- [12] Z. Peng H. Wang N. Wang G. Sun D. Wang y W. Lan. “Robust adaptive neural network control for strict-feedback nonlinear systems with uncertainties”. En: *IEEE Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation* (2012), 1328–1333.
- [13] S. Sam Ge y C. Wang. “Adaptive Neural Control of Uncertain MIMO Nonlinear Systems”. En: *IEEE Transactions on Neural Networks* 3 (2004).
- [14] R. Hecht-Nielsen. “Kolmogorov’s mapping neural network existence theorem”. En: *In Proceedings of the international conference on Neural Networks, New York: IEEE Press* 3 (1987), págs. 11-14.
- [15] R. Hecht-Nielsen. “Theory of the backpropagation neural network”. En: *In Neural Networks. IJCNN., International Joint Conference on, IEEE,* (1989), págs. 593-605.
- [16] K. H. Gularte J. A. Vargas y E. M. Hemerly. “An Improved On-Line Neuro-Identification Scheme”. En: *UKACC International Conference on Control* (2012).
- [17] G. Stein J. C. Doyle. “Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis”. En: (1980).
- [18] J. Flores J. Cruz J. Rubio y E. Rangel. “Control of Uncertain Plants with Unknown Deadzone Via Differential Neural Networks”. En: *IEEE Latin America Transactions* 7 (2015).
- [19] Z. H. Jiang. “Dynamic Parameter Identification of Robots using a Neural Network as a Compensator”. En: *Neurocomputing* (2009).
- [20] F. Juárez. “Identificación por Redes Neuronales Diferenciales de un Sistema Incierto descrito en Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas, utilizando un Pseudo-Observador por Modos Deslizantes de Alto Orden”. Tesis doct. Centro de Investigación en Computación, IPN, 2012.
- [21] H. White K. Hornik y M. Stinchcombe. “Multilayer feedforward networks are universal approximators”. En: *Neural Networks* 3 (1989), págs. 11-14.
- [22] A. N. Kolmogorov. “On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition”. En: *Amer. Math. Soc. Transl.* 28 (1963), págs. 55-59.
- [23] J. H. Li y P. M. Lee. “Neural network adaptive control for a class of nonlinear systems with unknown-bound unstructured uncertainties”. En: *43rd IEEE Conference in Decision and Control* 1 (2004), págs. 692-697.
- [24] X. Li y W. Yu. “Dynamic system identification via recurrent multilayer perceptrons”. En: *Information Sciences* 1 (2002), 45–63.
- [25] M. Liu. “Robust  $H_\infty$  control for uncertain delayed nonlinear systems based on standard neural network models”. En: *Neurocomputing* 16 (2008), 3469–3492.

- [26] D. Luviano. “Control no lineal de un sistema de levitación magnética basado en estimación de parámetros electromagnéticos”. Tesis de mtría. Departamento de Control Automático. CINVESTAV, 2012.
- [27] H. Valdés y L. Pedraja M. Arriagada. “Métodos de estimación no lineal aplicados al problema de expectativas de inflación”. En: *Revista chilena de ingeniería* 3 (2009).
- [28] A. W. Olbrot M. Fu y M. P. Polis. “Introduction to the Parametric Approach to Robust Stability”. En: *IEEE Control Systems Magazine* (1989).
- [29] J. A. Meda. “Estimation of complex systems with parametric uncertainties using a JSSF heuristically adjusted”. En: *IEEE Latin America Transactions* 2 (2018).
- [30] C. O. Márquez. “Neuro-Identificación de sistemas dinámicos no lineales afines con la entrada con incertidumbre en la retroalimentación”. Tesis de mtría. Departamento de Electrónica, CENIDET, 2016.
- [31] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall, 1998. ISBN: 970-17-0048-1.
- [32] H. Ohta y S. Yokota. “A regulator design of dynamical systems with nonlinear uncertainties using multilayered neural networks”. En: *Proceedings of 1993 International Conference on Neural Networks (IJCNN-93-Nagoya, Japan)* (1993).
- [33] F. R. Ortiz. “Análisis y diseño de redes neuronales CMAC para la identificación y control de sistemas no lineales”. Tesis doct. Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 2008.
- [34] A. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. Volume 1: Deterministic Techniques*. Elsevier, 2008. ISBN: 978-0-08-044674-5.
- [35] A. S. Poznyak y W. Yu. *Differential neural networks for robust nonlinear control: Identification, state estimation and trajectory tracking*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001. ISBN: 981-02-4624-2.
- [36] J. Reyes. “Pasividad robusta de sistemas no lineales vía redes neuronales dinámicas”. Tesis doct. Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, ene. de 2002.
- [37] F. Rodríguez. “Control adaptivo y robusto”. En: Universidad de Sevilla, 1996. Cap. 8, págs. 159-190.
- [38] F. Rodríguez. “Identificación y Control de Sistemas no Lineales por Medio de Redes Neuronales Recurrentes Adaptables”. Tesis doct. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL, 2014.
- [39] J. A. Rojas. “Análisis de estabilidad de sistemas lineales en variables de estado con incertidumbre paramétrica”. Tesis doct. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, UANL, 1994.
- [40] F. Rossomando y C. Soria. “Adaptive Neural Sliding Mode Control in Discrete Time for a SCARA Robot Arm”. En: *IEEE Latin America Transactions* (2016), págs. 2556-2564.

- [41] J. Rubio. “Modelado y control para una clase de sistemas no lineales desconocidos en tiempo discreto”. Tesis doct. Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 2007.
- [42] J. J. Rubio y W. Yu. “Nonlinear system identification with recurrent neural networks and dead zone Kalman filter algorithm”. En: *Neurocomputing* 70.13 (2007), págs. 2460-2466.
- [43] T. Sato. “Sliding mode control with proportional integral compensation and application to an inverted pendulum system”. En: *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* 6.2 (2010), págs. 519-528.
- [44] B. Thumati T. Dierks y S. Jagannathan. “Optimal control of unknown affine nonlinear discrete-time systems using offline-trained neural networks with proof of convergence”. En: *Neural Networks* 5 (2009), 851–860.
- [45] Y. Pan H. Zhou T. Sun H. Pei y C. Zhang. “Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators”. En: *Neurocomputing* (2011), 2377–2384.
- [46] Q. Zhu T. Zhang X. Shi e Y. Yang. “Adaptive neural tracking control of pure-feedback nonlinear systems with unknown gain signs and unmodeled dynamics”. En: *Neurocomputing* 121 (2013), págs. 290-297.
- [47] A. Toshev y C. Szegedy. “DeepPose: Human pose estimation via deep neural networks”. En: *IEEE In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (2014), 1653–1660.
- [48] S. Hua W. Chen y S. S. Ge. “Consensus-based distributed cooperative learning control for a group of discrete-time nonlinear multi-agent systems using neural networks”. En: *Automatica* 9 (2014), págs. 2254-2268.
- [49] P. E. Wellstead. “Introduction to Physical System Modelling”. En: Academic Press Ltd., 1979. Cap. 1, págs. 1-5.
- [50] Y. Lin L. Ma X. Zhang C.-Y. Su y J. Wang. “Adaptive Neural Network Dynamic Surface Control for a Class of Time-Delay Nonlinear Systems With Hysteresis Inputs and Dynamic Uncertainties”. En: *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 26 (2015), págs. 2844 -2860.
- [51] W. Yu. “Nonlinear system identification using discrete-time recurrent neural networks with stable learning algorithms”. En: *Information Sciences* 158 (2004), págs. 131-147.
- [52] W. Yu. “Passivity analysis for dynamic neuro identifier”. En: *Computación y Sistemas* (2002), págs. 83-91.
- [53] W. Yu. “Stability analysis of dynamic multilayer neuro identifier”. En: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* 2 (2002), págs. 1770-1775.
- [54] Y. Wang Z. Miao e Y. Yang. “Robust tracking control of uncertain dynamic nonholonomic systems using recurrent neural networks”. En: *Neurocomputing* 142 (2014), págs. 216-227.

- [55] Q. Ch. Zhong y D. Rees. “Control of Uncertain LTI Systems Based on an Uncertainty and Disturbance Estimator”. En: *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 126 (2004).