

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Supervisión de las Dinámicas del Corazón Mediante la Estimación de
Variables del Sistema Cardiovascular Basada en Observadores

presentada por

Ing. Dulce Alejandra Serrano Cruz

como requisito para la obtención del grado de
Maestra en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirector de tesis

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez

Cuernavaca, Morelos, México. Enero de 2019.



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cuernavaca, Mor., 10 de diciembre de 2018.

OFICIO No. DIE/0185/2018

Asunto: Aceptación de documento de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la **C. Dulce Alejandra Serrano Cruz**, con número de control **M17CE012** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Supervisión de las Dinámicas del Corazón Mediante la Estimación de Variables del Sistema Cardiovascular Basado en Observadores"** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Doctor en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5505019

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez
Doctor en Ingeniería
Cédula profesional 3431842

REVISOR 1

Dr. Enrique Quintero-Mármol Márquez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química
Cédula profesional 10259407

REVISOR 2

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9968714

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Estudiante
Expediente
RFEJ/Irr.





SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cuernavaca, Morelos, **19/Diciembre/2018**

OFICIO No. SAC/591/2018

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**ING. DULCE ALEJANDRA SERRANO CRUZ
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Supervisión de las Dinámicas del Corazón Mediante la Estimación de Variables del Sistema Cardiovascular Basado en Observadores", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr



Dedicatoria

A Dios con mucho amor y gratitud, por darme como padres a dos seres maravillosos, ejemplo de honestidad, esfuerzo, perseverancia y deseos de superación a los que debo lo que soy, por sus consejos y sacrificios.

A mi familia

Agradecimientos

Agradecer siempre es agradable, para el que agradece y para el agradecido, pero no siempre es fácil acordarse de todos los que te han ayudado a llegar donde estás. A lo largo de mi vida y desarrollo académico he tenido la suerte de encontrarme con un sinfín de personas buenas, sin cuya ayuda nunca hubiera conseguido llegar a este momento. Nombrar a todos y cada uno sería imposible pero, en lo que se refiere a esta Tesis de Maestría, es necesario mencionar a algunas de ellas, sin embargo me disculpo por aquellas que no aparezcan en estas líneas y deberían de estar.

Quiero empezar por mi familia: mis padres a quienes nunca podré agradecer lo suficiente su legado puede ser que ellos no lo sepan pero son responsables por mi curiosidad por conocer nuevas cosas, son un ejemplo humildad, cariño y unión, gracias por su amor y paciencia, los amo.

A mis hermanas y hermano, que siempre traen nuevas enseñanzas a mi vida y son parte importante de mi fortaleza y amor por el crecimiento. No puedo olvidar a mi sobrina Magali quien a su corta edad me enseña que la vida son esos momentos de felicidad y que existen múltiples formas de amar y querer a los demás, gracias por iluminar mis días.

A mis asesores, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, son personas de enorme talento, capacidad de trabajo y generosidad, gracias por sus enseñanzas, paciencia, su ayuda y por acompañarme en el desarrollo de este trabajo, mil gracias.

A mis revisores, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo y Enrique Quintero Mármol Márquez, por sus valiosos consejos y por las observaciones realizadas a este trabajo.

Al Dr. Carlos Daniel García Beltrán y Dr. Guadalupe Madrigal gracias por el tiempo y por todos sus conocimientos y por sus consejos brindados para el desarrollo de este trabajo de investigación.

A mis compañeros y amigos del CENIDET con quienes compartí aulas, proyectos, tareas, desvelos y me permitieron compartir este trayecto que recorrimos juntos.

A Chuy, Pablo, Diego y Cesar con quienes compartí momentos lindos y sin conocerme me brindaron su ayuda y amistad.

A mi maestro y amigo C. Alberto, gracias porque desde que nos conocimos siempre he recibido ayuda, confianza y amistad, eres la persona que más me ha influenciado en mi vida profesional, muchas gracias.

A Lore gracias por su disponibilidad y ayuda.

A todas las personas especiales que conocí a lo largo de este proyecto quienes con su ayuda y disponibilidad, hacen más agradable la vida en CENIDET.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

Finalmente, agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico por brindarme los medios necesarios que me permitieron realizar este trabajo.

Resumen

En esta tesis se presenta el estudio de los modelos Windkessel del sistema cardiovascular. Con la finalidad de facilitar el diseño de observadores de estado y la estimación de los estados del sistema, se presenta el diseño de una nueva representación de estos modelos en forma singular.

La tesis presenta el diseño y simulación de observadores para sistemas singulares aplicados a los modelos Windkessel de tres y cuatro elementos. Dentro de los algoritmos que se desarrollaron, se encuentra el observador de orden completo y el observador de orden reducido, que permiten la estimación de los estados no disponibles.

Posteriormente, los observadores diseñados se validaron por medio de simulaciones numéricas, utilizando como referencia las ondas de presión reportadas en la literatura, así como los rangos de presión para una persona normotensa, hipertensa e hipotensa. El desempeño de los observadores se evaluó a través de mediciones del error de convergencia y de transitorio.

Para analizar el comportamiento del sistema cardiovascular a partir del análisis de presión, se presenta un esquema de detección de anomalías en el comportamiento de las presiones sanguíneas del sistema cardiovascular. Con ello es posible estimar cuando una persona presenta algún comportamiento anormal en el sistema, donde para simular la anomalía se consideró un cambio de presión de resistencia periférica total y compliancia arterial.

Finalmente, se presenta un primer acercamiento a los sistemas conmutados con la finalidad de observar el cambio a cada modelo por medio de la frecuencia cardiaca del sujeto, se consideran tres modelos, que describen a una persona en estado de vigilia, realizando actividad física y en estado de reposo.

Abstract

This thesis presents the study of the Windkessel models of the cardiovascular system. In order to facilitate the design of state observers and the estimation of the states of the system, the design of a new representation of these models in singular form is presented.

The thesis presents the design and simulation of observers for singular systems applied to Windkessel models of three and four elements. Within the algorithms that were developed, there is the observer of complete order and the observer of reduced order, which allow the estimation of the unavailable states.

Afterwards, the designed observers were validated by numeric simulations, using as reference the pressure waves reported in the literature, as well as pressure ranges for a normotensive, hypertensive and hypotensive person. The observer performance was assessed through convergence and transient error measurements.

To analyze the behavior of the cardiovascular system to analyze the behavior of the cardiovascular system from the pressure analysis, a scheme of anomalies detection in the behavior of the blood pressures of the cardiovascular system is presented. With this it is possible to estimate when a person presents some abnormal behavior in the system. To simulate the anomaly, a change in pressure of total peripheral resistance and arterial compilation was considered.

Finally, a first approach to the switched systems is presented in order to observe the change to each model by means of the heart rate of the subject, three models are considered that describe a person in a waking state doing physical activity and in a state of repose.

Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Hipótesis	2
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivo general	2
1.3.2. Objetivos específicos	3
1.4. Alcances	3
1.5. Aportación	3
1.6. Originalidad	3
1.7. Anatomía del sistema cardiovascular	4
1.7.1. El corazón	4
1.7.2. Válvulas del corazón	5
1.7.3. Sangre	6
1.7.4. Vasos sanguíneos	7
1.7.5. Fisiología de la circulación sanguínea	9
1.7.6. Señales biomédicas	10
1.8. Enfermedades cardiovasculares	11
1.8.1. Hipotensión	13
1.8.2. Hipertensión	13
1.9. Principios físicos que rigen a la circulación sanguínea	14
1.9.1. Presión arterial	14
1.9.2. Flujo sanguíneo	15
1.9.3. Resistencia vascular	15
1.9.4. Compliancia	15
1.9.5. Gasto cardíaco	15
1.10. Analogía con circuitos eléctricos	16
1.11. Organización del documento	18
2. Modelos del sistema cardiovascular	19
2.1. Modelos matemáticos del sistema cardiovascular	20
2.1.1. Modelos análogos mecánicos	20
2.1.2. Modelos análogos eléctricos	21

2.2.	Tipos de modelos Windkessel	24
2.2.1.	Comparación de los modelos Windkessel de dos, tres y cuatro elementos	30
2.3.	Sistemas singulares	30
2.3.1.	Representación de los sistemas singulares	31
2.3.2.	Ejemplo 1 de sistema singular (Sistema eléctrico)	33
2.3.3.	Ejemplo 2 de sistema singular (Sistema mecánico)	34
2.3.4.	Ejemplo 3 de sistema singular (Sistema hidráulico)	35
2.4.	Representación del modelo Windkessel de 3 elementos en forma singular	37
2.5.	Representación del modelo Windkessel de 4 elementos en forma singular	39
2.6.	Conclusiones particulares	41
3.	Observadores para sistemas singulares	42
3.1.	Clasificación de Observadores	44
3.2.	Metodología para el diseño de observadores	47
3.3.	Observadores para sistemas singulares	50
3.3.1.	Observador de orden completo para sistemas singulares	51
3.3.2.	Observador de orden reducido para sistemas singulares	57
3.4.	Conclusiones parciales de capítulo	60
4.	Diseño de observadores para la supervisión de las dinámicas del corazón	61
4.1.	Observador de orden completo para el modelo singular Windkessel de 3 elementos	62
4.1.1.	Simulación 1. Observador de orden completo para el modelo Windkessel de 3 elementos	64
4.2.	Observador de orden completo para el modelo singular Windkessel de 4 elementos	68
4.2.1.	Simulación 2. Observador de orden completo para el modelo singular Windkessel de cuatro elementos	71
4.2.2.	Simulación 3. Observador de orden completo con perturbación para modelo Windkessel de cuatro elementos	74
4.3.	Observador de orden reducido para el modelo singular Windkessel de cuatro elementos	77
4.3.1.	Simulación 4. Observador de orden reducido para modelo Windkessel de cuatro elementos	79
4.3.2.	Simulación 5. Observador de orden reducido para el modelo singular Windkessel con perturbación	82
4.4.	Detección de anomalías en el comportamiento del sistema cardiovascular	84
4.4.1.	Simulación 6. Detección de presión arterial alta (Hipertensión Tipo 1)	85
4.4.2.	Simulación 7. Detección de Presión arterial baja (Hipotensión)	89
4.5.	Simulación de los modelos Windkessel conmutados	93
4.5.1.	Simulación de conmutación entre el modelo 1 y el modelo 2	94
4.5.2.	Simulación de conmutación entre el modelo 1 y el modelo 3	96

4.6. Conclusiones particulares del capítulo	98
5. Conclusiones y comentarios finales	99
5.1. Contribuciones	99
5.2. Conclusiones	100
5.3. Trabajos Futuros	100
Bibliografía	102
6. Anexos	106
6.1. Anexo A. Publicación de artículo en el Congreso Nacional de Control Automático 2018 (AMCA)	106
6.2. Sistema de adquisición y tratamiento de señales electrocardiográficas	107
6.2.1. Ondas de señal electrocardiográfica	107
6.2.2. Materiales y métodos	107
6.2.3. Diseño de prototipo	108

Índice de figuras

1.1.	Partes del corazón	5
1.2.	Válvulas del corazón	6
1.3.	Vasos sanguíneos	7
1.4.	Curvas de caída de la presión arterial a lo largo de los vasos sanguíneos.	8
1.5.	Representación de la circulación sistémica y pulmonar formando un circuito cerrado. El color rojo representa la sangre oxigenada y el color azul el flujo de sangre desoxigenada.	10
1.6.	Rangos de presión arterial.	13
2.1.	Sistema cardiovascular	20
2.2.	Modelo hidráulico del SCV	21
2.3.	Modelos matemáticos del sistema cardiovascular.	23
2.4.	La analogía entre el Windkessel y el sistema arterial	24
2.5.	Modelo Windkessel de dos elementos	25
2.6.	Flujo sanguíneo	26
2.7.	Curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de dos elementos	26
2.8.	Modelo Windkessel de tres elementos	27
2.9.	Curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de tres elementos	28
2.10.	Modelo Windkessel de cuatro elementos	28
2.11.	Curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de cuatro elementos	29
2.12.	Comparación de modelos Windkessel	30
2.13.	Circuito eléctrico	33
2.14.	Modelo de disco rodando	34
2.15.	Modelo tanques	36
3.1.	Clasificación de observadores	43
3.2.	Metodología general para el diseño de observadores	50
4.1.	Diagrama a bloques de modelo con observador de orden completo	65
4.2.	Flujo sanguíneo	66
4.3.	Gráfica de presión sistémica de una persona normotensa	66
4.4.	Gráfica de presión aórtica de una persona normotensa	66
4.5.	Gráficas de error de convergencia del observador de orden completo	67
4.6.	Diagrama a bloques del modelo con observador de orden completo	71

4.7.	Gráfica de la presión sistémica del modelo Windkessel de 4 elementos	71
4.8.	Gráficas de flujo sanguíneo en aorta	72
4.9.	Gráficas de presión aórtica	72
4.10.	Error de convergencia del observador de orden completo	74
4.11.	Diagrama a bloques de modelo con observador de orden completo . .	75
4.12.	Gráfica de presiones del sistema cardiovascular de una persona normotensa con perturbación.	76
4.13.	Error de convergencia del observador de orden completo con perturbación.	77
4.14.	Diagrama a bloques de modelo Windkessel de 4 elementos y observador de orden reducido	80
4.15.	Gráfica de presiones del modelo y el observador de orden reducido. . .	81
4.16.	Error de convergencia del observador de orden reducido.	82
4.17.	Gráfica de presiones del sistema cardiovascular de una persona normotensa con perturbación provocada por estrangulación en la arteria carótida.	83
4.18.	Error de estimación del observador de orden reducido con perturbación.	84
4.19.	Rangos de presión arterial.	85
4.20.	Diagrama a bloques del modelo con observador de orden completo . .	86
4.21.	Residuo 1 sin anomalía	87
4.22.	Gráficas de cambio en la resistencia periférica total y compliancia arterial	88
4.23.	Residuo 1 con anomalía	89
4.24.	Diagrama a bloques del modelo con observador de orden completo . .	90
4.25.	Residuo 1 sin anomalía	91
4.26.	Gráficas de cambio en la resistencia periférica total y compliancia arterial	92
4.27.	Respuesta de presión	92
4.28.	Residuo 1 caso 2 con anomalía	93
4.29.	Esquema de conmutación	93
4.30.	Gráfica de frecuencia cardíaca durante ejercicio físico	94
4.31.	Gráfica de sistemas conmutados modelo 1 y modelo 2	95
4.32.	Gráfica de la frecuencia cardíaca para modelo 1 y 3	96
4.33.	Sistemas conmutados. Modelo 1 y modelo 3	97
6.1.	Artículo publicado en congreso CNCA	106
6.2.	Formas de onda de un ECG	107
6.3.	Esquema a bloques del ECG	108
6.4.	PCB en Altium Designer	109
6.5.	Implementación del sistema de adquisición de señales eléctricas	110
6.6.	Resultados de ECG a una persona en posición supino y sentada	111

Índice de tablas

1.1.	Algunas enfermedades cardiovasculares	12
1.2.	Analogías entre parámetros cardiovasculares y eléctricos	18
3.1.	Estructura de un observador	49
4.1.	Parámetros cardiovasculares	63
4.2.	Parámetros cardiovasculares modelo de cuatro elementos.	68
4.3.	Parámetros de modelos Windkessel con diferentes estados de presión .	85
4.4.	Escenario de prueba	86
4.5.	Matriz de incidencia de fallas para una persona con aumento de presión.	87
4.6.	Escenario de prueba	90
4.7.	Matriz de incidencia de fallas	90
6.1.	Tabla de Materiales	112

Nomenclatura

Síglas

SCV *Sistema cardiovascular.*

PA *Presión arterial.*

PAS *Presión arterial sistólica.*

PAD *Presión arterial diastólica.*

RPT *Resistencia periférica total.*

GC *gasto cardíaco.*

ECG *Electrocardiograma.*

PCB *Placa de circuito impreso.*

EMG *Electromiograma.*

EEG *Electroencefalograma.*

WK2 *Windkessel de dos elementos.*

WK3 *Windkessel de tres elementos.*

WK4 *Windkessel de cuatro elementos.*

IA *Inteligencia artificial.*

mmHg milímetro de mercurio.

Símbolos

P_s *Presión arterial sistémica.*

P_s *Presión aórtica.*

P_{sis} *Presión arterial sistólica.*

P_{diast} *Presión arterial diastólica.*

i_L *Flujo sanguíneo en aorta.*

$i(t)$ *Flujo sanguíneo.*

T_s *Tiempo de sístole.*

T *Tiempo de diástole.*

r_1 *Residuo 1.*

Capítulo 1

Introducción

De acuerdo con la Secretaría de Salud, las enfermedades cardiovasculares son una de las causas más frecuentes de mortandad no solo en México, sino en el mundo. Estas enfermedades superan ampliamente a las enfermedades infecciosas y parasitarias y cada día es más frecuente este tipo de padecimientos.

Se estima que en el mundo, cada año, mueren alrededor de 17 millones de personas por enfermedades cardiovasculares [Alma Lyzzet Suarez Garza, 2014]. Desafortunadamente, estas enfermedades afectan en mayor proporción a personas de escasos recursos, por lo que su prevención y control representan un reto en la salud pública del país [Álvarez et al., 2003].

Entre las enfermedades cardiovasculares más frecuentes se encuentran la arteriosclerosis (obstrucción de las arterias), presión arterial alta, arritmias (frecuencias cardíacas anormales), aneurismas (inflamación de la pared arterial) y las valvulopatías. En cada una de ellas es posible realizar investigación para la detección temprana de estos padecimientos, sin embargo el diagnóstico temprano de este tipo de enfermedades requiere de estudios y médicos especializados que son poco accesibles a toda la población. Para mitigar este problema se han propuesto diversas alternativas desde el punto de vista de la ingeniería, como es el caso del modelado matemático del sistema cardiovascular.

Durante las últimas décadas se han realizado modelos matemáticos del sistema cardiovascular, de forma parcial o total, con el objetivo de mejorar su comprensión. El modelado matemático permite comprender el sistema cardiovascular de una forma no invasiva [Phillips, 2011], [Epstein et al., 2015]. Los modelos no lineales permiten representar de manera más precisa los procesos y se consideran una herramienta útil para predicción e investigación de enfermedades cardiovasculares. [Gul, 2016], [Vázquez et al., 2007], los cuales se apoyan en métodos de detección de fallas y monitoreo de variables no medibles basados en observadores.

Una forma de modelado no lineal de sistemas biológicos complejos son los modelos descriptivos o también conocidos como sistemas singulares [Liu et al., 2008], debido a la capacidad que tienen de representar la parte dinámica y la parte estática del sistema. De forma que, el diseño de un observador permite estimar y supervisar las

variables de interés [Gordillo, 2011].

1.1. Planteamiento del problema

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), el estilo de vida se basa en patrones de comportamiento entre las características personales individuales, las interacciones sociales, las condiciones de vida socioeconómicas y padecimientos médicos, entre otros.

Las enfermedades cardiovasculares se consideran como una de las causas más frecuentes de padecimiento médico y tienen como consecuencia el impacto negativo en la vida de una persona. Éstas se manifiestan de varias maneras: la arteriosclerosis (arterias bloqueadas), presión arterial alta, arritmias (ritmos anormales de latidos del corazón), aneurismas (inflamación de la pared arterial con riesgo a romperse), valvulopatías, entre otras.

Las enfermedades cardiovasculares son un campo de conocimiento muy amplio por ello es de gran importancia el estudio y supervisión del comportamiento del corazón basándose en un modelo mediante el cual se lleve a cabo un análisis de mediciones no invasivas que permitan detectar irregularidades en la actividad del corazón.

1.2. Hipótesis

Las enfermedades cardiovasculares tienen como consecuencia un impacto negativo económico y social de una persona. Por ello es necesario un método de detección, tal que sea capaz de detectar irregularidades en las señales cardiovasculares, evitando incurrir en falsas alarmas y sea capaz de localizar todas las enfermedades para las que fue diseñado, por ello la hipótesis de sobre la cual se basa este trabajo es:

La supervisión del funcionamiento del corazón puede ser posible mediante el análisis del comportamiento dinámico del corazón y un adecuado sistema de supervisión basado en un modelo y en el diseño de un observador de estados a través del cual se lleve a cabo el análisis de mediciones no invasivas.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Diseñar un sistema de detección de problemas cardíacos basado en modelo mediante mediciones no invasivas.

1.3.2. Objetivos específicos

- Seleccionar un modelo matemático que pueda ser usado para identificar señales cardiovasculares.
- Diseño de observadores para la estimación de variables no medibles.
- Diseño de un sistema de supervisión del sistema cardiovascular basado en un observador a partir de señales cardíacas no invasivas.
- Simulación del modelo matemático del sistema cardiovascular y el observador diseñado comparándolos con las curvas de presión sanguínea que se encuentran reportadas en la literatura.

1.4. Alcances

En este trabajo se proponen los siguientes alcances:

- Seleccionar un modelo matemático que represente el funcionamiento del sistema cardiovascular para su análisis y simulación.
- Diseñar un observador de orden completo para estimar aquellas variables que no se puede medir por métodos no invasivos.
- Diseñar un observador de orden reducido para estimar aquellas variables que no se puede medir por métodos no invasivos.
- Diseñar un sistema que represente el funcionamiento del sistema cardiovascular basado en observadores que pueda estimar las variables del sistema.

1.5. Aportación

En este trabajo se presenta una nueva alternativa de representación del modelo Windkessel en forma singular, que representa la arteria aorta y la circulación sistémica que comprende las arterias, arteriolas, capilares y venas, utilizando analogías entre el sistema hidráulico cardiovascular y los sistemas eléctricos.

La presión aórtica y el flujo aórtico, son parámetros difíciles de medir en forma no invasiva, por lo que se diseñó un observador de orden completo con el propósito de estimarlas y, posteriormente, supervisar el comportamiento del corazón.

1.6. Originalidad

En este trabajo de tesis se aborda el diseño de una nueva representación en forma singular de los modelos Windkessel de tres y cuatro elementos. Esta nueva forma de representar los modelos Windkessel es considerada una aportación del trabajo debido

a que en la literatura no se encuentra reportado algo igual. También se diseñaron dos tipos de observadores para esta representación de los modelos en forma singular. El primero es un observador de orden completo para sistemas singulares y el segundo es un observador de orden reducido para sistemas singulares.

En este trabajo se propone un sistema de supervisión del sistema cardiovascular basado en observadores de estado y el modelo Windkessel de cuatro elementos.

1.7. Anatomía del sistema cardiovascular

En este apartado se mencionan las principales características del corazón y los principios del comportamiento dinámico.

En medicina suele emplearse el término de sistema para referirse al conjunto de órganos formados predominantemente por el mismo tipo de tejido, lo que justifica que al conjunto de órganos por los que circula la sangre se le denomine sistema cardiovascular, ya que, como se explicará en este capítulo, el corazón y los vasos sanguíneos son distintos.

El sistema cardiovascular puede definirse como un conjunto integrado por el corazón: músculo hueco situado en el tórax dividido por cuatro cavidades; los vasos sanguíneos, que por su estructura y propiedades diferentes se clasifican en venas, arterias, arteriolas y capilares, y la sangre.

Las funciones principales del sistema cardiovascular son suministrar a los tejidos por medio de la sangre los nutrientes necesarios para el metabolismo y eliminar los productos de desperdicio de las células, a través del corazón quien es el encargado de proporcionar la energía necesaria para la circulación de la sangre por medio de los vasos sanguíneos [Tortora and Derrickson, 2013]. El sistema cardiovascular también participa en la regulación arterial, transportando hormonas reguladoras desde las glándulas endocrinas hasta los tejidos efectores, participa en la regulación de la temperatura corporal haciendo los ajustes necesarios cuando se alteran los estados fisiológicos del sistema.

1.7.1. El corazón

El corazón es un órgano muscular que se localiza en el mediastino medio, apoyado sobre el diafragma. Dos tercios del corazón están a la izquierda de la línea media del esternón [Guadalajara, 1997]. El corazón está formado por el miocardio cubierto en su interior por el endocardio y en su exterior por el pericardio, tejido de dos capas que envuelve al corazón como una bolsa. La capa externa del pericardio rodea el nacimiento de los vasos sanguíneos del corazón y está unida a la espina dorsal, al diafragma y a otras partes del cuerpo por medio de ligamentos. La capa interna está unida al músculo cardíaco y una capa de líquido separa las dos capas de membrana que permite al corazón moverse al latir.

El corazón se divide en dos aurículas, dos ventrículos, arteria pulmonar, aorta, vena cava superior e inferior y tabique (ver Figura 1.1). En la práctica clínica se divide en: *i*) corazón derecho que hace referencia a la aurícula y ventrículo derechos, *ii*) corazón izquierdo a la aurícula y ventrículo izquierdos que hace referencia a la aurícula y ventrículo izquierdos. La parte derecha del corazón se encarga de impulsar la sangre venosa a la circulación arterial pulmonar; la parte izquierda del corazón se encarga de impulsar sangre a través de las válvulas hacia la aorta a la circulación arterial sistémica a través de los vasos sanguíneos [Ottesen et al., 2004], [Fuster et al., 2011].

En un corazón normal no existe comunicación sanguínea entre la parte derecha e izquierda del corazón, debido a que el septum interauricular separa a las aurículas y el septum interventricular separa a los ventrículos.

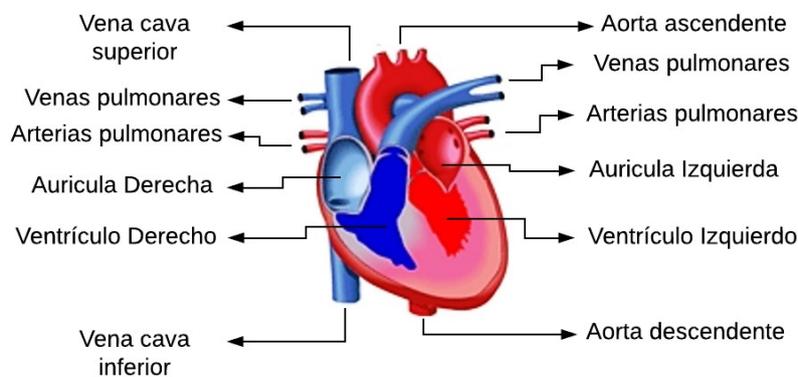


Figura 1.1: Partes del corazón

1.7.2. Válvulas del corazón

El corazón tiene 4 válvulas, dos de éstas son las válvulas auriculares las cuales comunican a las aurículas con sus ventrículos y los dos restantes son las válvulas sigmoideas o semilunares que comunican a los ventrículos derecho e izquierdo con las arterias pulmonar y aórtica (ver Figura 1.2). La función principal de las válvulas es mantener el flujo sanguíneo impuesto por la contracción miocárdica, en un solo sentido (de aurícula a ventrículo y de ventrículo hacia arteria). Las cuatro válvulas del corazón son:

Válvula tricúspide: Es la encargada de controlar el flujo sanguíneo entre la aurícula derecha y el ventrículo derecho. La componen 3 válvulas (septal, anterior y posterior) en cuyo borde se fijan las cuerdas que provienen del músculo papilar del ventrículo derecho.

Válvula mitral: Es la que permite que la sangre oxigenada proveniente de los pul-

mones pase de la aurícula izquierda al ventrículo derecho. La componen dos válvulas en cuyo borde se fijan las cuerdas tendinosas de los músculos papilares anterolateral y posteromedial del ventrículo izquierdo.

Válvula pulmonar: Es la que controla el flujo sanguíneo entre el ventrículo derecho y las arterias pulmonares que transportan la sangre a los pulmones para oxigenarla. Está formada por tres válvulas que semejan los nidos de golondrinas, los extremos tienen forma de U que se anclan a la raíz de su vaso, mientras que los bordes tienen forma de V lo que permite su adaptación durante el cierre valvular evitando que el flujo se regrese al ventrículo.

Válvula aórtica: Permite que la sangre oxigenada pase al ventrículo izquierdo y se dirija a la aorta para transportar la sangre al resto del cuerpo. Se forma por tres válvulas que tienen forma de U y se anclan a la raíz de su vaso, mientras que los bordes tienen forma de V lo que permite su adaptación durante el cierre valvular evitando que el flujo se regrese al ventrículo.

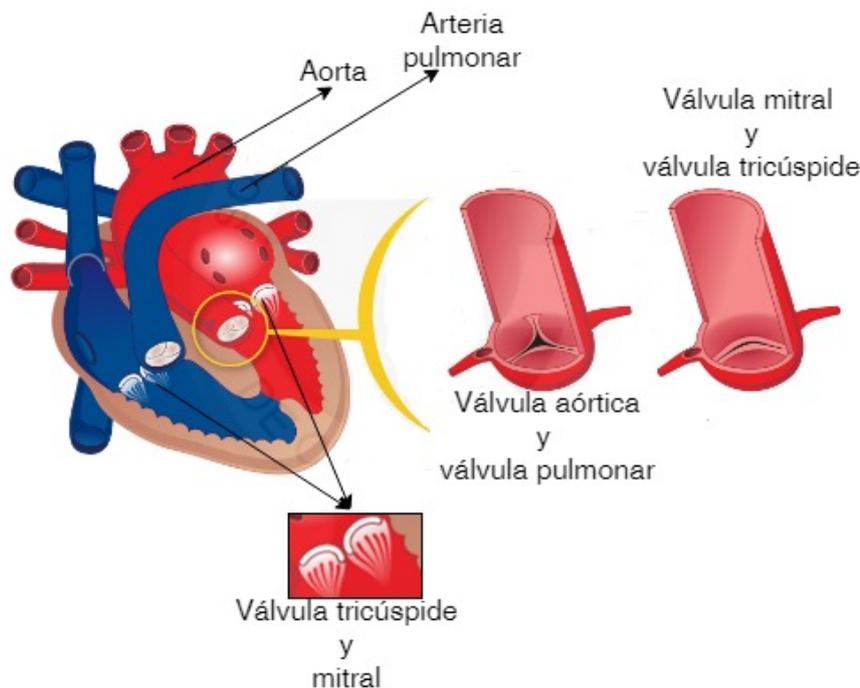


Figura 1.2: Válvulas del corazón

1.7.3. Sangre

La sangre es una sustancia compuesta de plasma y células. El plasma está conformado en casi su totalidad por agua, y el resto por proteínas y otras sustancias. El contenido celular se clasifica en eritrocitos (células sanguíneas rojas necesarias para el suministro de oxígeno a los tejidos), leucocitos (células sanguíneas blancas que actúan como unidades de protección del organismo) y plaquetas (previenen la pérdida de sangre). Su objetivo principal es transportar el oxígeno y los nutrientes hacia los tejidos, conducir las hormonas desde los tejidos que las elaboran hasta los

que las consumen y llevar las sustancias tóxicas y desecho celular hacia los tejidos que las eliminan del organismo.

La sangre se comporta como un flujo no newtoniano (es aquel que cambia su viscosidad dependiendo de la temperatura y tensión que se le aplique), ya que por la forma hidrodinámica que adquiere el eritrocito, reduce la perturbación del flujo. En la microcirculación le permite al eritrocito sobrepasar algún tipo de estrechez cambiando su forma [Bustamante et al., 2003].

Cabe resaltar que el flujo sanguíneo se define como el volumen de sangre que atraviesa la sección transversal de un vaso por unidad de tiempo. A partir del flujo se puede calcular la cantidad de sangre que está circulando. Para medir el flujo sanguíneo se han desarrollado varias técnicas no invasivas basadas en el análisis de dispersión de luz dinámica tales como: espectrometría de conteo de fotones, técnicas Doppler y Laser Speckle Imaging (LSI). Ésta última ha demostrado ser eficiente en la medición de flujo sanguíneo en vasos superficiales, sin embargo, muestra limitaciones al ser utilizado en vasos profundos, para lo que se desarrollaron otras técnicas que requieren de algún agente externo, es decir son invasivas.

Actualmente se están desarrollando nuevas tecnologías para la medición de flujo sanguíneo como es el caso del sensor desarrollado por Kyocera capaz de medir el volumen de flujo sanguíneo en tejido subcutáneo o los parches flexibles que se adhieren a la piel y pueden medir el flujo sanguíneo durante 24 horas.

1.7.4. Vasos sanguíneos

El sistema arterial comienza a la salida del ventrículo izquierdo con una gran arteria (arteria aorta), la que por bifurcaciones sucesivas originan vasos cada vez más delgados como son: las arterias proximales, las arterias distales y las arteriolas como se muestra en la Fig 1.3. Éstas últimas se conectan con los capilares, los cuales originan las vénulas y que a su vez generan las venas.

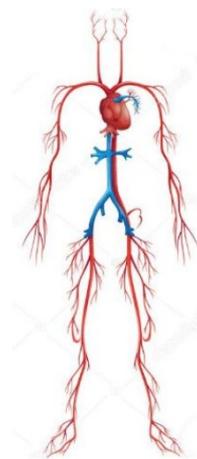


Figura 1.3: Vasos sanguíneos

Los vasos sanguíneos que conforman el sistema cardiovascular son:

- *Las arterias:* Son los principales vasos de distribución entre estos se encuentran la aorta, las arterias carótidas comunes y la subclavia. Están compuestas de tres capas: la capa interna que cubre el vaso, la media compuesta de elastina, colágeno y músculo liso, determina las propiedades elásticas del vaso y la capa externa compuesta por tejido conectivo.

La aorta es la arteria de mayor calibre en la circulación sistémica, se ubica a la salida del ventrículo izquierdo, se considera la principal arteria del cuerpo, no solo por ser la que da origen a todas las arterias del sistema circulatorio, sino porque debido a su capacidad elástica, está adaptada para recibir el impacto de la sístole del ventrículo izquierdo y después de distenderse, regresa a su forma original, con lo cual contribuye a la progresión de la sangre [Espino, 1997]. A partir de la aorta se ramifican las arterias de mediano y pequeño calibre. La función de las arterias es conducir la sangre oxigenada a los órganos [Tortora and Derrickson, 2013].

- *Las arteriolas:* Son de pequeño calibre cuya función es regular el flujo hacia los capilares por medio de un músculo liso llamado esfínter precapilar. Tienen una gran cantidad de fibras musculares en su pared que les permite variar su calibre y en consecuencia el flujo sanguíneo al lecho capilar.
- *Los capilares:* Son vasos microscópicos que comunican las vénulas con las arteriolas. Se localizan entre las células del organismo. Forman redes extensas y ramificadas que facilitan el cambio de sustancias entre la sangre y las células.

Las venas son estructuralmente muy parecidas a las arterias aunque sus capas internas y media son más delgadas. La capa muscular y elástica es mucho más fina que en las arterias, tienen menor cantidad de fibras tanto elásticas como musculares. Las venas de las extremidades inferiores presentan válvulas en su pared que impiden el reflujo de sangre y ayudan a dirigir la sangre hacia el corazón. A medida que la sangre fluye a través de los vasos sanguíneos, la presión disminuye debido al consumo de energía para superar la resistencia friccional (Ver Fig. 1.4).

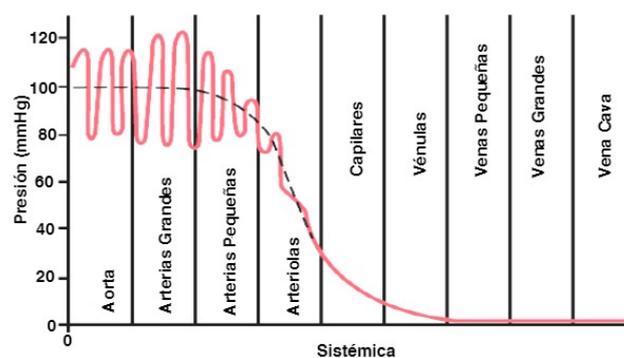


Figura 1.4: Curvas de caída de la presión arterial a lo largo de los vasos sanguíneos.

1.7.5. Fisiología de la circulación sanguínea

La circulación sanguínea se considera como un circuito cerrado, se lleva a cabo mediante tres elementos fundamentales del sistema circulatorio que son: el corazón, el sistema arterial y el sistema venoso.

El corazón realiza una contracción ventricular que impulsa la sangre hacia la arteria aorta y sus ramificaciones (gasto cardíaco) en contra de una resistencia impuesta por las arteriolas (resistencias periféricas). La sangre se mueve a través del sistema arterial hasta los capilares, donde las células de sangre realizan la oxigenación tisular. Ya oxigenados los tejidos, el sistema venoso recoge de los tejidos del cuerpo la sangre desaturada de oxígeno y concentrada de CO_2 (dióxido de carbono). Después de recorrer el lecho capilar, las células de sangre llegan a las venas que la conducen a la aurícula derecha por medio de las vena cava superior e inferior (retorno venoso).

De la aurícula derecha la sangre desoxigenada pasa al ventrículo derecho que a través de una contracción ventricular la sangre es impulsada a la arteria pulmonar y de ahí a los pulmones donde los capilares alveolares pulmonares oxigenan las células de la sangre a través de un proceso conocido como hematosis y se reconduce a la aurícula izquierda por las venas pulmonares. De la aurícula izquierda la célula sanguínea pasa al ventrículo izquierdo terminando así el circuito [Guadalajara, 1997], [Ottesen et al., 2004], [Fuster et al., 2011], (Ver Figura 1.5).

Como se menciona anteriormente, se puede considerar al corazón como corazón derecho y corazón izquierdo: el corazón derecho, impulsa la sangre desoxigenada a los pulmones, el corazón izquierdo, proporciona la sangre oxigenada a los tejidos. Es por esto que se consideran que hay dos tipos de circulación que corresponden a dos trayectorias distintas:

- *La circulación sistémica:* Es la parte de corazón del ventrículo izquierdo con sangre oxigenada que fluye a través de las arterias, arteriolas y capilares para llegar a todos los tejidos, después regresa por la vena cava superior e inferior hasta el corazón entrando por la aurícula derecha.
- *La circulación pulmonar:* Se encarga de eliminar los gases de desechos como el dióxido de carbono de la sangre y la sangre se reoxigena. Parte del ventrículo derecho del corazón y lleva la sangre sin oxígeno a los pulmones, donde se realiza el intercambio de gases enriqueciendo la sangre de oxígeno que regresa al corazón entrando por la aurícula izquierda.

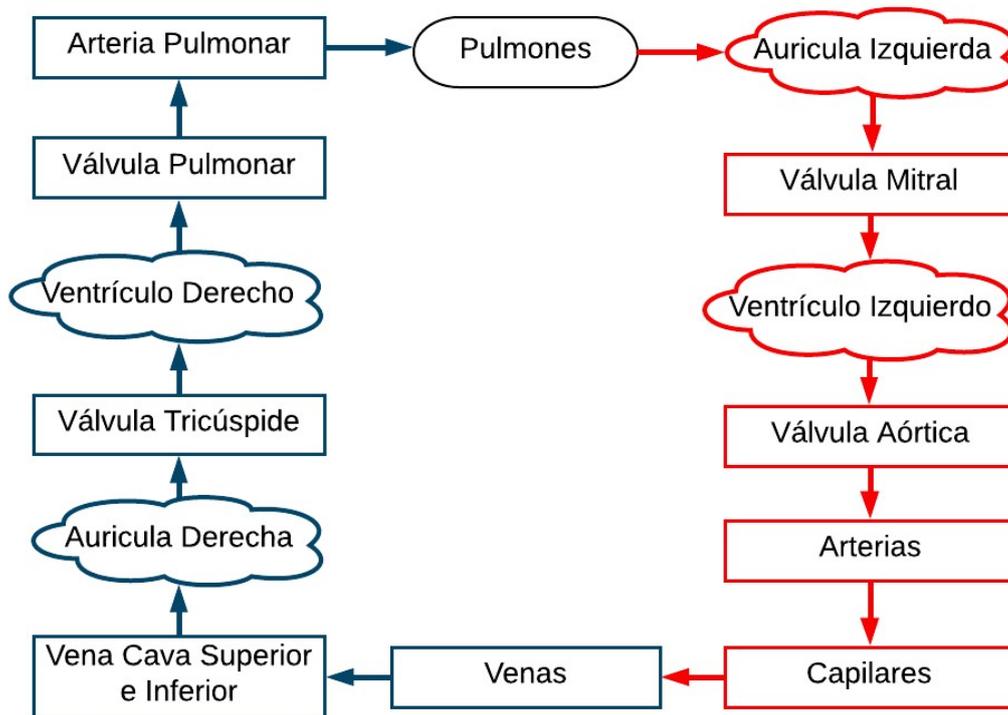


Figura 1.5: Representación de la circulación sistémica y pulmonar formando un circuito cerrado. El color rojo representa la sangre oxigenada y el color azul el flujo de sangre desoxigenada.

1.7.6. Señales biomédicas

Las señales biomédicas son registros especiales temporales, o espacio temporales de eventos tales como el latido del corazón o la contracción de un músculo. La actividad eléctrica, química o mecánica que ocurre durante estos eventos biológicos frecuentemente produce señales que pueden ser medidas y analizadas. Pueden explicar los mecanismos fisiológicos subyacentes de un sistema o evento fisiológico. Algunas señales biomédicas se mencionan a continuación :

- *Señales bioeléctricas:* Son señales generadas por cambios electroquímicos dentro y entre células. Si una célula es estimulada lo suficiente genera un potencial de acción (PA). Éste representa el flujo de iones a través de la membrana celular y puede ser medido utilizando electrodos intracelulares. Los cambios en el potencial extracelulares se pueden medir en la superficie del órgano u organismo con electrodos de superficie. Ejemplo de este fenómeno son el electro cardiograma (ECG), electromiograma (EMG) y el electroencefalograma (EEG).
- *Señales biomagnéticas:* Estas señales generadas por campos magnéticos débiles en comparación con los eléctricos están asociados a una actividad fisiológica

específica, proporcionan información que no se obtiene con señales bioeléctricas como son la actividad interventricular.

- *Señales bioquímicas:* Son señales generadas por componentes químicos y contienen información como los niveles y cambios de los agentes químicos del cuerpo. Por ejemplo la concentración de iones como el calcio, el potasio así como la presión parcial del oxígeno (P_{O_2}) y dióxido de carbono (P_{CO_2}) en la sangre o sistema respiratorio. Estas señales se usan para determinar otros estados como niveles de glucosa, lactosa etc.
- *Señales biomecánicas:* Son señales resultado de funciones mecánicas de un sistema biológico, como el movimiento, desplazamiento, tensión, fuerza, presión y flujo. Por ejemplo, los cambios de la presión sanguínea se consideran señales biomecánicas debido a que se registran como una onda en la cual las crestas representan la contracción de los ventrículos cuando expulsan la sangre del corazón hacia el cuerpo.
- *Señales bioacústicas:* Son parte importante de las señales biomecánicas, en el sentido de vibración o movimiento. El flujo de la sangre en las válvulas cardíacas produce un sonido distintivo. La medición de las señales bioacústicas de las válvulas cardíacas ayudan a determinar el funcionamiento apropiado de éstas. Se pueden medir en la superficie de la piel utilizando transductores acústicos, como micrófonos y acelerómetros.
- *Señales bioópticas:* Se obtienen naturalmente o en algunos casos son inducidas utilizando técnicas biomédicas. Por ejemplo, el estado de salud de un feto puede determinarse midiendo las propiedades fluorescentes del líquido amniótico. Se puede hacer una estimación de gasto cardíaco utilizando el método de dilución de un colorante y que implica el monitoreo continuo de la concentración en el corazón.

1.8. Enfermedades cardiovasculares

Esta sección proporciona un panorama general sobre rasgos generales acerca de las enfermedades cardiovasculares. Las enfermedades cardiovasculares son una de las mayores causas de mortalidad en el mundo, muchas de ellas incrementan la carga de trabajo de corazón o reducen su habilidad para trabajar a velocidad normal. Las enfermedades cardiovasculares son un grupo de desórdenes del corazón y de los vasos sanguíneos, entre los que se incluyen [Salud, 2014]:

Tabla 1.1: Algunas enfermedades cardiovasculares

Tipo	Rasgos Generales
Cardiopatía coronaria	Enfermedad de los vasos sanguíneos que irrigan el músculo cardíaco (miocardio).
Enfermedades cerebro-vasculares	Enfermedades de los vasos sanguíneos que irrigan el cerebro.
Arteriopatías periféricas	Enfermedades de los vasos sanguíneos que irrigan los miembros superiores e inferiores (brazos y piernas).
Cardiopatía reumática	Lesiones del músculo cardíaco y de las válvulas cardíacas debidas a la fiebre reumática, una enfermedad causada por bacterias denominadas estreptococos.
Cardiopatías congénitas	Malformaciones del corazón presentes desde el nacimiento.
Trombosis venosas profundas y embolias pulmonares	Coágulos de sangre (trombos) en las venas de las piernas, que pueden desprenderse (émbolos) y alojarse en los vasos del corazón y los pulmones.
Accidentes cerebro-vasculares	Ocurren por obstrucciones que impiden que la sangre fluya hacia el corazón o el cerebro y por lo tanto, no llega suficiente oxígeno a estos órganos generando la muerte de una parte de ellos.
Insuficiencia cardíaca	Es la disminución de la contractilidad del miocardio debida a disminución en el flujo coronario puede resultar de cualquier alteración funcional o estructural que dañe la capacidad del ventrículo izquierdo a llenarse y eyectar sangre.
Hipertensión e Hipotensión	Es un trastorno en el que los vasos sanguíneos tienen una tensión alta, lo que puede producir lesiones y hasta roturas de vasos sanguíneos y la tensión baja no llega la suficiente cantidad de sangre a todo el organismo.

1.8.1. Hipotensión

La hipotensión es la reducción de la presión arterial debido a un descenso brusco del retorno venoso al corazón al pasar de forma muy rápida de una posición en decúbito (sentado) a una posición ortostática (de pie). Al momento de cambiar de posición bruscamente se siente una sensación de mareo, visión borrosa y hasta pérdida de conciencia debido a que no llega suficiente sangre al cerebro provocando riesgos cerebrales. El diagnóstico se obtiene al medir la presión arterial y conociendo los rangos de presión que se muestran en la Figura 1.6.

1.8.2. Hipertensión

La hipertensión es la presión arterial elevada, normalmente no tiene una causa específica. El diagnóstico se hace por medio de medidas de la presión arterial como se muestra en la Figura 1.6. Tiene tres principales efectos letales:

- 1.- Aumenta la carga de trabajo sobre el corazón lo que conduce al desarrollo prematuro de insuficiencia cardiaca, enfermedades coronarias y lleva a un ataque cardíaco que con frecuencia es mortal.
- 2.- Produce coágulos de sangre en el cerebro a causa del estallo de un vaso sanguíneo importante y puede provocar un infarto cerebral. El nombre clínico que recibe es apoplejía la cual puede causar trastornos cerebrales.
- 3.- Casi siempre ocasiona hemorragias en los riñones que puede producir insuficiencia renal, uremia e incluso la muerte.

Categoría de la presión arterial	Presión Sistólica		Presión Diastólica
Hipotensión	<80mmHg	y	<60mmHg
Normal	<120mmHg	y	<80mmHg
Prehipertensión	<120-139mmHg	y	<80-89mmHg
Presión Arterial Alta (Hipertensión Nivel 1)	<140-159mmHg	y	<90-99mmHg
Presión Arterial Alta (Hipertensión Nivel 2)	<160mmHg	y	<100mmHg
Crisis de Hipertensión	<180mmHg	y	<110mmHg

Figura 1.6: Rangos de presión arterial.

1.9. Principios físicos que rigen a la circulación sanguínea

La función del sistema circulatorio consiste en transportar la sangre, los nutrientes y el oxígeno por el organismo. El sistema cardiovascular así como los sistemas biológicos a menudo contienen propiedades que se pueden caracterizar utilizando expresiones matemáticas [K. Khoo, 2000]. La fisiología arterial se basa en el estudio de la relación que existe entre la física y la medicina así como numerosos factores; la velocidad de flujo sanguíneo en venas y arterias, la resistencia arterial, la energía de un fluido, la presión arterial [Bura-Rivière and Boccalon, 2015]. Este sistema es regulado por mecanismos locales y sistémicos. Sabemos de la física, que los líquidos en reposo transmiten íntegramente y en todas las direcciones las presiones que se les aplican, lo que no sucede así cuando estos se hallan en movimiento a través de un tubo.

Hemodinámica La hemodinámica es la parte de la biofísica que estudia el flujo de sangre en el sistema circulatorio basándose en los principios de la dinámica de fluidos [Belloni, 1999]. Todos los vasos sanguíneos son en mayor o menor grado estructuras elásticas. Esto quiere decir que el diámetro de los vasos no es constante sino que depende de la relación que hay entre la presión dentro del vaso y la tensión de la pared. El término presión se refiere a la fuerza que se ejerce sobre una superficie.

1.9.1. Presión arterial

La sangre se impulsa debido a la diferencia de presiones que ejerce el corazón. Esta diferencia de presiones ocasiona que la sangre se mueva desde el punto de presión máxima hasta el punto de presión mínima, debido a un fenómeno físico conocido como difusión. La presión (P) en el sistema cardiovascular se expresa en milímetros de mercurio ($mmHg$). La presión arterial (PA) no es la misma a través de todo el sistema cardiovascular, la presión arterial se divide en dos:

Presión arterial sistólica (PAS): Es la presión más alta medida durante un ciclo cardíaco. Es la presión en las arterias después de que el ventrículo izquierdo expulsa la sangre (tiempo de sístole). La incisura que se forma en la curva de presión se produce cuando la válvula aórtica cierra.

Presión arterial diastólica (PAD): Es la presión arterial más baja medida durante un ciclo cardíaco y corresponde a la relajación de ventricular (tiempo diastólico).

La presión en la aorta es alta, de aproximadamente 100mmHg, esta presión es el resultado de dos factores importantes: El volumen de sangre bombeada por el ventrículo izquierdo hacia la aorta y la distensibilidad de la pared arterial. A medida que la sangre fluye por los vasos sanguíneos la presión disminuye, puesto que a medida que la resistencia (R) aumenta, la presión (P) debe disminuir para mantener el flujo (Q) constante.

1.9.2. Flujo sanguíneo

El flujo de sangre por unidad de tiempo está determinado por la diferencia de presión entre los dos extremos de un vaso sanguíneo (ΔP) y la resistencia al flujo sanguíneo en el vaso (R), Ec.(1.1). La dirección del flujo de sangre está determinado por el gradiente de presión y siempre va de la presión alta a la presión baja. Puede ser calculada como el flujo volumétrico (Q) que pasa a través de una sección transversal dada por unidad de tiempo, se expresa en mililitros sobre segundo (ml/s).

$$Q = \frac{\Delta P}{R} \quad (1.1)$$

1.9.3. Resistencia vascular

La resistencia vascular es la fuerza que se opone al flujo sanguíneo a través de un vaso sanguíneo.

Resistencia periférica total (RPT): Es la resistencia de todo el sistema vascular. La relación entre la resistencia (R), radio (r) y longitud (l) del vaso sanguíneo, y la viscosidad de la sangre (η). Se describe por la ecuación de Poiseulle.

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \quad (1.2)$$

1.9.4. Compliancia

La compliancia (C) es la distensibilidad (propiedad que permite el alargamiento o contracción de los materiales). Se presenta cuando las arterias se estiran, extendiendo su volumen de almacenamiento (V) mientras retornan a su forma original provocada por un cambio de presión (ΔP) o en las cámaras cardíacas es su capacidad de acumular determinado volumen sanguíneo sin provocar aumentos considerables de presión.

La compliancia de un vaso sanguíneo describe el volumen de sangre alojado en el vaso a una presión determinada y las variaciones de presión. Cuando aumenta el volumen de sangre que contiene el compartimiento vascular, aumenta la presión en el interior de éste. La compliancia expresa esta relación entre el cambio de volumen y presión. Se calcula utilizando la Ec. (1.3) que establece que cuando mayor sea la distensibilidad de un vaso, mayor será el volumen.

$$C = \frac{V}{\Delta P} \quad (1.3)$$

1.9.5. Gasto cardíaco

El gasto cardíaco (GC) es el volumen de sangre por minuto que se expulsa del ventrículo izquierdo hacia la aorta durante la sístole (Volumen sistólico (VS)) multi-

plicado por el número de latidos por minuto (Frecuencia cardíaca (FC)).

$$GC = VSxFC \quad (1.4)$$

Cuando existe un cambio en la actividad metabólica de los tejidos, el consumo de oxígeno cambia y por ende el valor del gasto cardíaco, puesto que la regulación del gasto cardíaco depende de factores que modifican al volumen sistólico y la frecuencia cardíaca.

1.10. Analogía con circuitos eléctricos

Es usual hacer una analogía entre el sistema cardiovascular (sistema hidráulico) y los circuitos eléctricos. Por ejemplo el flujo de sangre se compara con el flujo de electrones a través de un conductor. La diferencia de presión que ejerce el corazón debido al flujo de sangre se modela por medio de la diferencia de potencial que es la que ocasiona el movimiento de los electrones en un circuito eléctrico. La resistencia que es la oposición al flujo de la sangre en una vena, arteria, tejido o combinación de elementos en el sistema cardiovascular es equivalente a la resistencia eléctrica. En dinámica de fluidos, la ley de Ohm hace analogía del sistema cardiovascular con los circuitos eléctricos a partir de la ley de Poiseuille. Esta ley establece que el flujo volumétrico de un fluido a través de un tubo es proporcional a la diferencia de presión de los dos extremos del mismo [K. Khoo, 2000].

$$I = \frac{V}{R} \quad (1.5)$$

Donde el flujo sanguíneo hace referencia al flujo de corriente (I) en un circuito eléctrico, la diferencia de presión al voltaje o potencial de conducción (V), y la resistencia (R) local o global de un órgano equivale a la resistencia eléctrica. Es por esto que se obtiene un análogo a la ley de Ohm.

Cabe destacar que el sistema de circulación sanguínea puede tener órganos en paralelo a la circulación (por ejemplo, el circuito pulmonar). Lo cual permite que en caso de que exista alguna falla en la red vasal de dicho órgano no repercuta en el funcionamiento de los demás.

La analogía establecida con la ley de Ohm relaciona los conceptos en serie y paralelo de los tubos vistos como resistores, han permitido aplicar los mismos principios utilizados para las resistencias eléctricas a termodinámica. En aquellos circuitos vasculares donde aparece un sistema de resistencias en serie, la resistencia total es la

suma de las resistencias parciales.

$$R_T = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (1.6)$$

En aquellos órganos donde las resistencias son en paralelo podemos asumir que la suma de los recíprocos de las resistencias parciales es igual al recíproco de la resistencia total. Entonces:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (1.7)$$

Otra propiedad de la analogía es la de almacenamiento en el sistema cardiovascular se considera como la compliancia de un vaso sanguíneo. En sistemas eléctricos esto toma la forma de capacitancia definida como la cantidad de carga eléctrica (q) almacenada en el condensador por el voltaje (V) que existe a través del condensador [K. Khoo, 2000].

$$C = \frac{q}{V} \quad (1.8)$$

Por último la propiedad de la inercia que tiene la sangre a continuar fluyendo aún después de que el impulso que le dio origen al movimiento haya desaparecido. Como la sangre es inerte, se deduce que cuando se aplica una diferencia de presión entre los dos extremos de un vaso largo que está lleno de sangre, la masa de la sangre se resiste relacionando el flujo sanguíneo y la diferencia de presión. En sistemas eléctricos hace referencia a la inercia que permite el almacenamiento de energía cinética definida como el voltaje requerido para producir una tasa de cambio de corriente eléctrica. La inercia se puede calcular al relacionar la densidad de la sangre (ρ) por la longitud de la sección de arteria entre el área de sección transversal del vaso.

$$L = \frac{\rho l}{A} \quad (1.9)$$

En la Tabla 1.2 se resumen las variables más importantes del sistema circulatorio usando la representación en sistemas eléctricos. Dichos parámetros fueron propuestos por primera vez por Otto Frank.

Tabla 1.2: Analogías entre parámetros cardiovasculares y eléctricos

Parámetros Cardiovasculares	Análogo Eléctrico
P = Presión sanguínea($mmHg$)	V = voltaje($volts$)
V = volumen(ml)	q = carga($coulombs$)
$\dot{Q} = \frac{dV}{dt}$ = flujo(ml/s)	$i = \frac{dq}{dt}$ = corriente($amperios$)
$C = \frac{\Delta V}{\Delta P}$ = compliancia($ml/mmHg$)	$C = \frac{q}{V}$ = capacitancia($faradios$)
$R = \frac{\Delta P}{Q}$ resistencia vascular($mmHg * s/ml$)	$R = \frac{\Delta V}{i}$ = resistencia eléctrica($ohmios$)
L = inercia($mmHg * s^2/ml$)	L = inductancia($henrios$)

1.11. Organización del documento

El contenido de este trabajo está dividido en cinco capítulos que se describen a continuación.

En el **Capítulo 1** se presentaron las generalidades de este trabajo de tesis, algunos conceptos básicos del sistema cardiovascular, algunas enfermedades cardiovasculares, además se explicó brevemente la analogía con los circuitos eléctricos.

En el **Capítulo 2** se presentan el estado del arte de modelos matemáticos del sistema cardiovascular y conceptos básicos que definen a los sistemas singulares.

En el **Capítulo 3** se presenta el estado del arte de los tipos de observadores, abarcando los observadores para sistemas singulares. Además se presenta el diseño de los observadores para sistemas singulares de orden completo y de orden reducido con su respectivo análisis de convergencia.

En el **Capítulo 4** se presentan los modelos Windkessel en forma singular, las simulaciones de los observadores para sistemas singulares considerando los modelos Windkessel. Además de la detección de anomalías en el comportamiento de la presión arterial del sistema cardiovascular.

En el **Capítulo 5** se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Modelos del sistema cardiovascular

El propósito de este capítulo es presentar un panorama general de los modelos del sistema cardiovascular (SCV), haciendo referencia a los modelos análogos eléctricos donde se describe el comportamiento del funcionamiento dinámico del SCV. Al mismo tiempo se presenta un estudio de los tipos de modelos Windkessel (modelos análogos eléctricos concentrados, Windkessel significa cámara de aire) que se utilizarán en el desarrollo de este tema de tesis. También se presenta la teoría de los sistemas singulares y una nueva representación de los modelos Windkessel en forma singular.

Este capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En la sección 2.1 se presenta una clasificación de los modelos matemáticos, especialmente los modelos análogos eléctricos concentrados. Este tipo de modelos representan el funcionamiento del sistema cardiovascular por medio de elementos eléctricos tales como resistencias, capacitores, inductores y diodos.

En la sección 2.2 se presentan los tipos de modelos Windkessel y la representación que se usará en este trabajo. También se presenta una comparación de los modelos a través de las curvas de presión arterial de cada modelo.

En la sección 2.3 se presentan algunas definiciones sobre los sistemas singulares y algunas propiedades de este tipo de sistemas. Además, se presentan algunos ejemplos que muestran la manera de obtener una representación en forma singular.

En la sección 2.4 se hace la representación de los modelos Windkessel en forma singular. Cabe resaltar que ésta es una nueva representación de los modelos y se considera una aportación del trabajo de investigación.

Finalmente, en la sección 2.5 se presentan algunas conclusiones parciales del capítulo.

2.1. Modelos matemáticos del sistema cardiovascular

Los modelos matemáticos son simbólicos y representan con un alto nivel de abstracción y en forma compacta, los principios del sistema físico. Los modelos matemáticos y simulaciones numéricas pueden ayudar a la comprensión de los procesos patológicos y fisiológicos, mediante imágenes médicas y medios no invasivos abriendo la posibilidad de un mejor diagnóstico y una planificación quirúrgica más profunda [Formaggia et al., 2010].

Para estudiar los sistemas fisiológicos complejos como el sistema cardiovascular generalmente se divide en sus elementos o subsistemas. Por ejemplo, el sistema cardiovascular se puede descomponer en corazón, vasos sistémicos y pulmonares, sangre y sistemas de control (ver Figura 2.1). Se pueden clasificar en análogos discretos y análogos continuos, y se representan mediante análogos eléctricos y mecánicos (ver Figura 2.3).

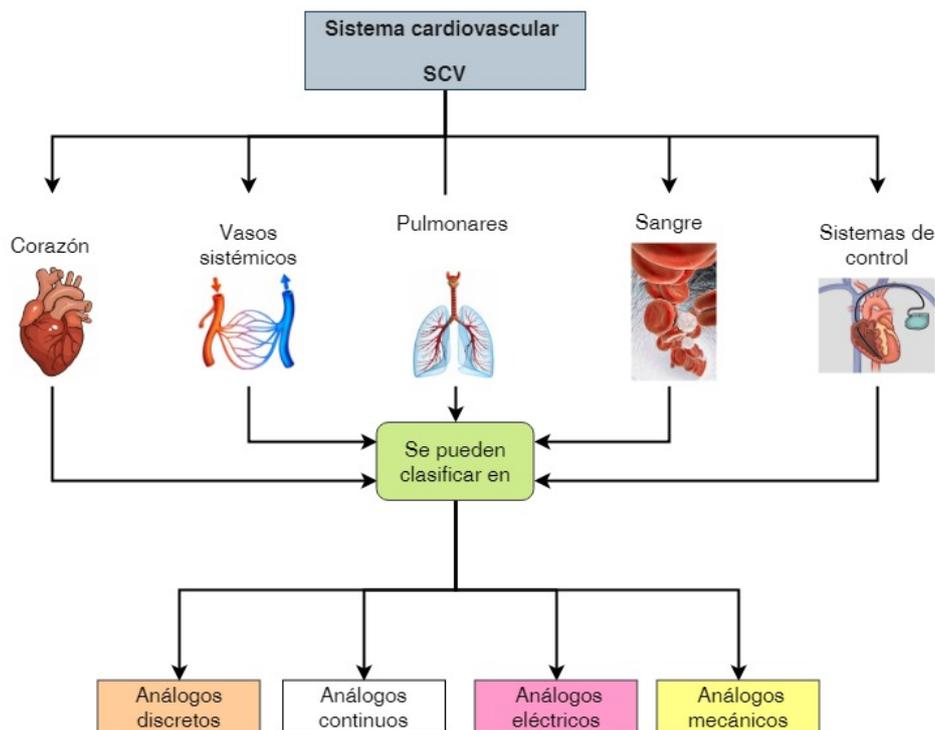


Figura 2.1: Sistema cardiovascular

2.1.1. Modelos análogos mecánicos

Los modelos análogos mecánicos que representan el sistema cardiovascular se han venido construyendo desde hace mucho tiempo. Los modelos más complejos han simulado al corazón, la aorta, la resistencia periférica y las venas como un circuito

cerrado con las válvulas y posibilitan el ajuste de parámetros tal como la resistencia periférica, la compliancia venosa y arterial. También se emplean para el estudio de la actividad de un órgano (como pueden ser los corazones artificiales totales o parciales) cuando se conecta con una réplica del complemento real.

En este tema de tesis no se profundizó en el estudio de modelos mecánicos, sin embargo se presentan unos modelos mecánicos hidráulicos como ejemplos de la representación mecánica del funcionamiento del sistema cardiovascular.

En [Traver et al., 2017] se presenta un modelo que contempla la dinámica de contracción del corazón de acuerdo a la Ley de Frank-Stirling. El modelo contempla a la arteria carótida izquierda, como se muestra en la Figura 2.2. En su trabajo estudian la enfermedad de arterioesclerosis en el vaso sanguíneo. También presentan un esquema de control.

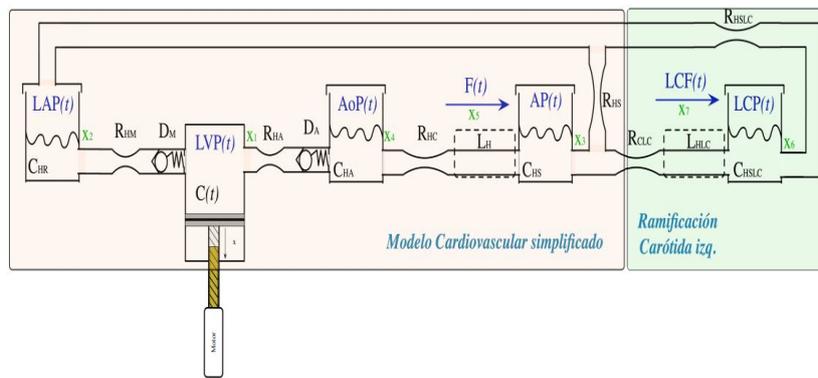


Figura 2.2: Modelo hidráulico del SCV

En [Cervino and Cervino, 2018] se presenta un modelo compuesto de cuatro componentes que simula variaciones de volumen en la aurícula izquierda (AI), ventrículo izquierdo (VI), variaciones de presión en aurículas y ventrículos, flujo a través de las válvula mitral y aórtica.

2.1.2. Modelos análogos eléctricos

Los análogos eléctricos representan los diferentes elementos que construyen el sistema cardiovascular, por medio de elementos eléctricos como resistencias, capacitores, inductores y diodos, [Gómez Pérez, 2006]. Se clasifican en análogos distribuidos y análogos empaquetados. Los análogos distribuidos utilizan parámetros dependientes del espacio y el tiempo, permiten la simulación de la velocidad del pulso y los cambios de flujo sanguíneo que existen en el sistema cardiovascular.

Los análogos concentrados se utilizan para simular en forma global el sistema cardiovascular, incluye ecuaciones diferenciales y relaciones no lineales entre presión sanguínea y el volumen en los vasos sanguíneos y las cámaras del corazón, se puede dividir en segmentos o bloques interconectados. Son buenos para estudiar las relaciones de gasto cardíaco, presión media y resistencia periférica total, [Kokalari et al., 2013].

Los modelos se pueden clasificar como modelos de un solo compartimiento y modelos de múltiples compartimiento.

Hales, el primero en considerar el sistema cardiovascular como un modelo agrupado sugiere que las variaciones de presión están relacionadas con la elastancia de las grandes arterias, [Hales, 1733]. Pero fue Otto Frank quien formuló esta teoría. Describió la hemodinámica de la red arterial en términos de compliancia y resistencia, [Frank, 1899]. El modelo de Otto Frank describe la disminución de la presión en la aorta durante la sístole y se usa para evaluar la capacidad arterial cuando se conoce la presión aórtica y la resistencia periférica total. La desventaja del modelo propuesto por Otto es que ignora las venas lejanas considerándolas como campos de presión cero.

Broemser y Otto proponen la modificación de Windkessel de dos elementos, quien agregó un segundo elemento resistivo entre la bomba y la cámara de aire, simulando así la resistencia al flujo sanguíneo debido a la válvula aórtica o pulmonar, afirmando que el modelo Windkessel de dos elementos se queda corto, especialmente en el rango de altas frecuencias. A su vez desarrolló el modelo Wetkessel [Westerhof et al., 1969], [Broemser and Ranke, 1930]. Este modelo considera una resistencia que representa la resistencia total de la red vascular sistémica. Burattini y Gnudi consideran un término inductivo L colocado en paralelo con la impedancia característica, modificando así el modelo Windkessel de tres elementos a un modelo de cuatro elementos [Kind et al., 2010].

Con el paso del tiempo se desarrollaron otras configuraciones de los modelos, por ejemplo, Buratini describe las características del sistema arterial colocando una resistencia en serie al condensador, de esta manera describe las características de las paredes del vaso elasto-viscosas que difieren de la configuración de Westerhof [Burattini and Natalucci, 1998].

Jager propuso una mejora de los modelos, agrego otros elementos resistivos e inductivos para simular la impedancia del flujo laminar pero estos modelos no fueron tan explorados por su alta complejidad [Jager et al., 1965].

Estos modelos, de un solo compartimiento, describen principalmente las características de flujo y presión en la aorta y las arterias, pero no consideran la parte de la circulación pulmonar y coronaria, que también juegan un papel importante en el sistema circulatorio.

Con el propósito de corregir la incapacidad de los modelos de un solo compartimiento para el cálculo de flujo y presión de los vasos del árbol sistémico se desarrollaron los modelos de múltiples compartimientos. En los modelos de múltiples compartimientos, dividen en varios segmentos la simulación sistémica, cada compartimiento hace una combinación RLC de acuerdo a las características de la secciones de la circulación sistémica. Los compartimientos se unen creando modelos complejos de toda la red arterial.

El modelo Windkessel resulta ser el modelo más citado al representar el sistema cardiovascular debido a que fue el primero en introducir componentes como la elástancia, para simular partes del sistema arterial.

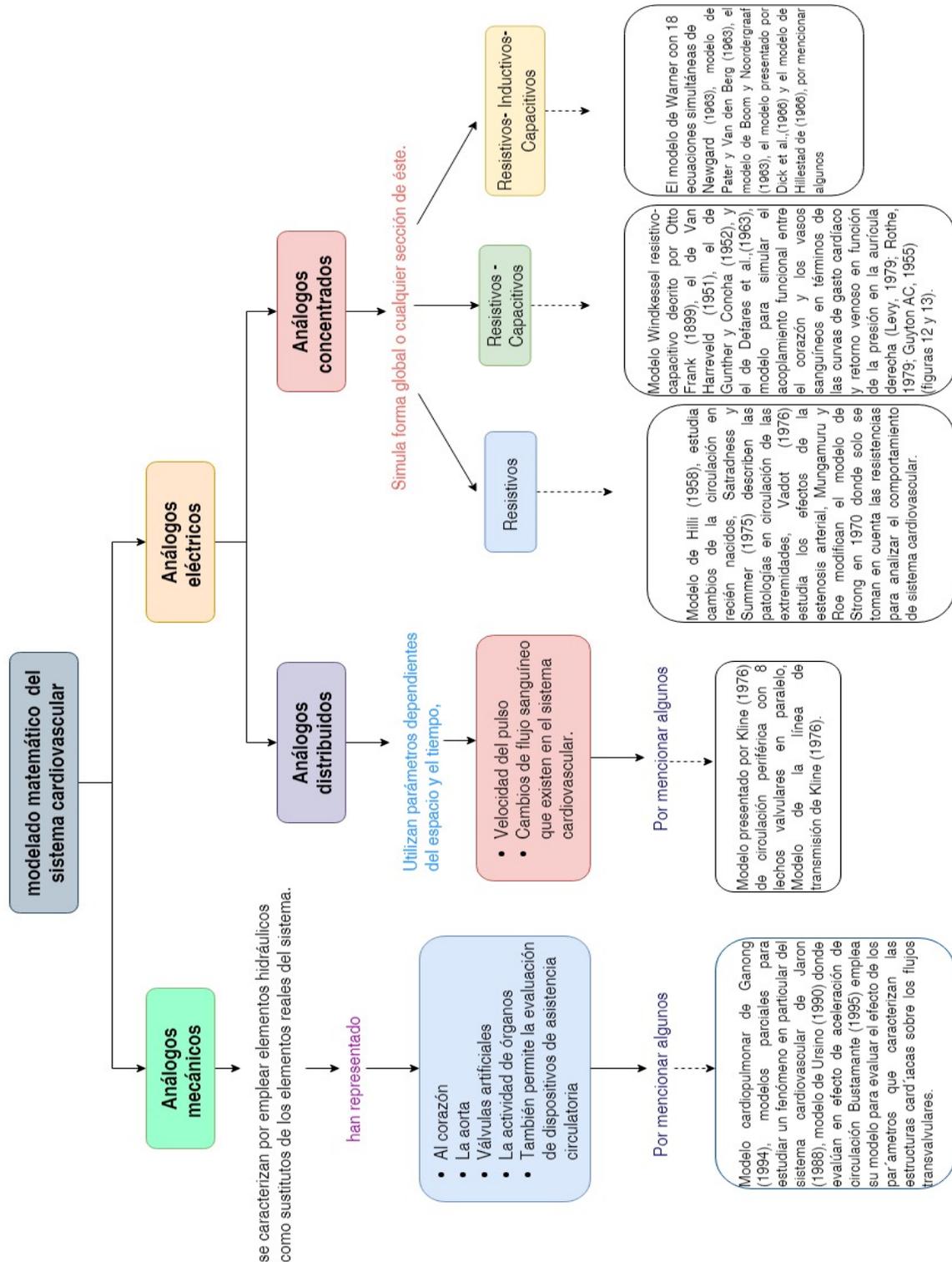


Figura 2.3: Modelos matemáticos del sistema cardiovascular.

2.2. Tipos de modelos Windkessel

Otto Frank (1899) desarrolló por primera vez un modelo matemático para describir la relación que existe entre la presión arterial y el flujo sanguíneo. Formuló el concepto Windkessel que significa cámara de aire y en consecuencia desarrolló el modelo Windkessel de dos elementos, que describe la forma de onda de la presión arterial en términos de la resistencia y la compliancia.

Su modelo se considera de parámetros concentrados donde representa la similitud que existe entre el corazón y el sistema arterial en términos hidráulicos y circuitos eléctricos [Hlaváč and Holčík, 2004], [Westerhof et al., 2009], [Hauser et al., 2012]. El modelo comprende una bomba de agua conectada a una cámara de aire.

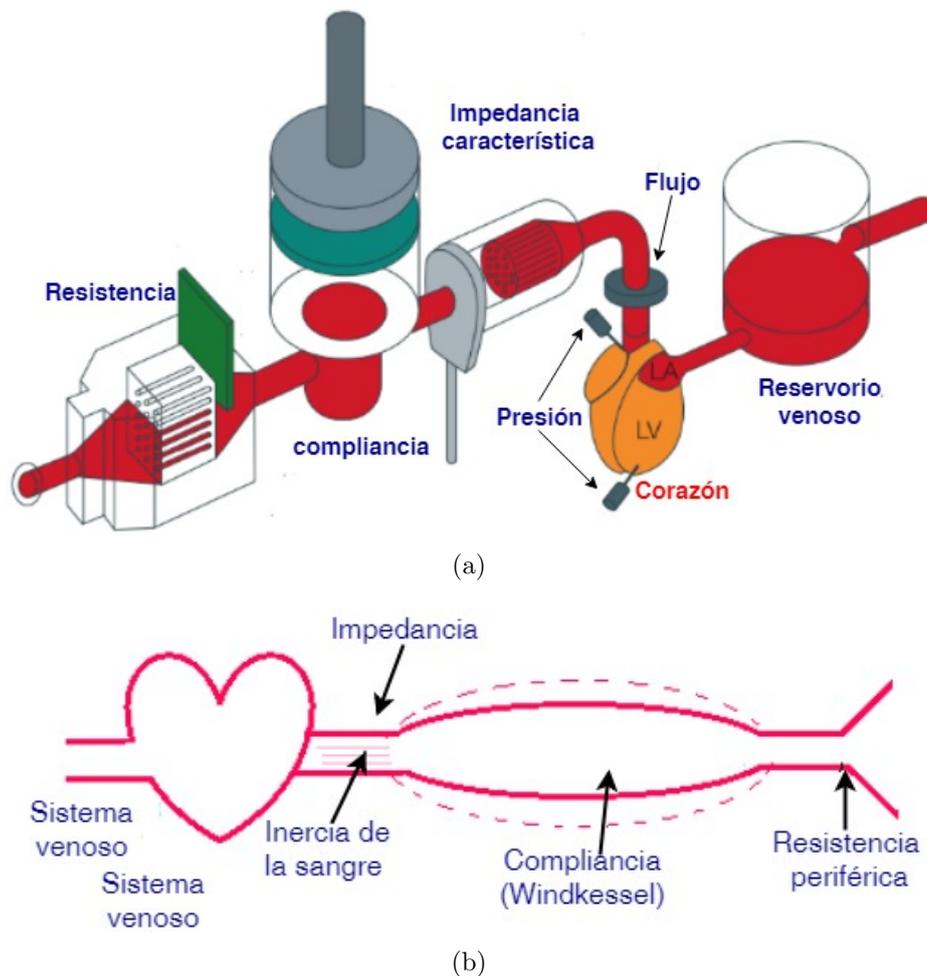


Figura 2.4: La analogía entre el Windkessel y el sistema arterial

El circuito está lleno de agua (es análogo con la sangre) a excepción de la bolsa de aire en la cámara (análogo a los ventrículos). A medida que se bombea agua a la cámara, el agua comprime el aire en la bolsa y empuja el agua fuera de la cámara, de vuelta a la bomba. La compresión del aire en el bolsillo simula la elasticidad y

la extensibilidad de la arteria principal, a medida que se bombea sangre en él por el ventrículo del corazón y fluye de regreso a través del árbol arterial desde las arterias principales, arterias menores, arteriolas y capilares a la bomba, como se muestra en la Figura 2.4 (como se mencionó anteriormente, el nombre del modelo proviene de la palabra alemana que significa cámara de aire).

La formulación matemática de este modelo está basada en la conservación de masa. El cambio de volumen sanguíneo (V) de sangre contenido en el compartimento debe ser igual a la cantidad de sangre que fluye desde el corazón menos la cantidad de sangre que lleva el sistema a la periferia, como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{out} \quad (2.1)$$

Modelos Windkessel de dos elementos

En la Figura 2.5 se muestra el modelo Windkessel de dos elementos, en este modelo se representa la resistencia y compliancia de las arterias sistémicas por medio de una resistencia y un capacitor respectivamente.

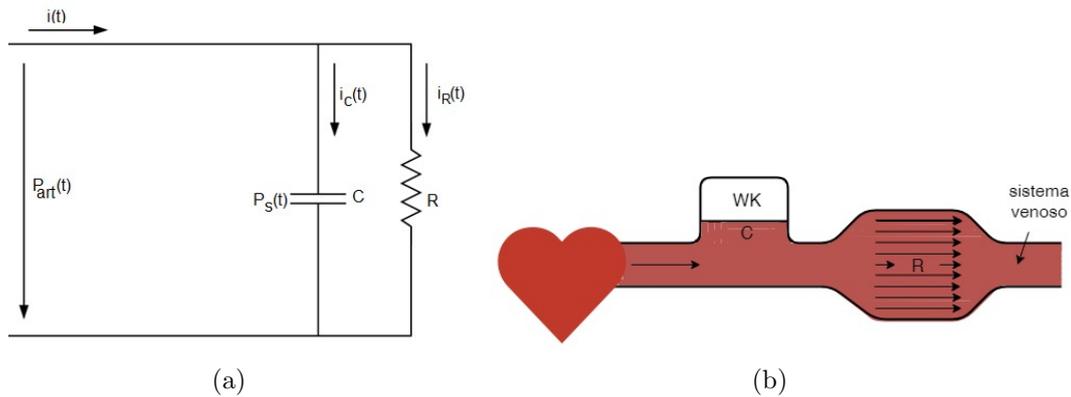


Figura 2.5: Modelo Windkessel de dos elementos

La ecuación que describe al modelo Windkessel de dos elementos es:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}P_s(t) + \frac{1}{C}i(t) \quad (2.2)$$

donde la corriente $i(t)$ representa el flujo sanguíneo, R representa la suma de la resistencia de venas y arterias a la cual se denomina resistencia periférica total; C representa la compliancia de la aorta y $P_s(t)$ representa la presión sistémica.

La representación en función de transferencia de la ecuación diferencial (2.2) se define como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R}{sRC + 1} \quad (2.3)$$

donde $Y(t)$ es la salida del sistema (presión sanguínea) y $U(t)$ es la entrada (flujo sanguíneo).

La señal de flujo sanguíneo $i(t)$ está definida por la función de activación del ventrículo izquierdo, donde t es el tiempo en segundos, T_s es el tiempo que dura la sístole (contracción) en segundos y T es el tiempo que dura la diástole (relajación) en segundos [Bustamante et al., 2003]:

$$i(t) = \begin{cases} I_0 * \sin^2\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) & \tau \in \langle 0, T_s \rangle \\ 0 & \tau \in \langle T_s, T \rangle \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $I_0 = 530\text{ml}$, $T_s = 0.3\text{s}$ y $T = 0.8\text{s}$.

La Figura 2.6 muestra el comportamiento de la activación $i(t)$ que es el flujo sanguíneo expulsado del ventrículo izquierdo. La señal de flujo se divide en dos partes: la primera cuando el ventrículo abre la válvula aórtica y el flujo sanguíneo es de 530 mmHg y la segunda cuando la válvula está cerrada.

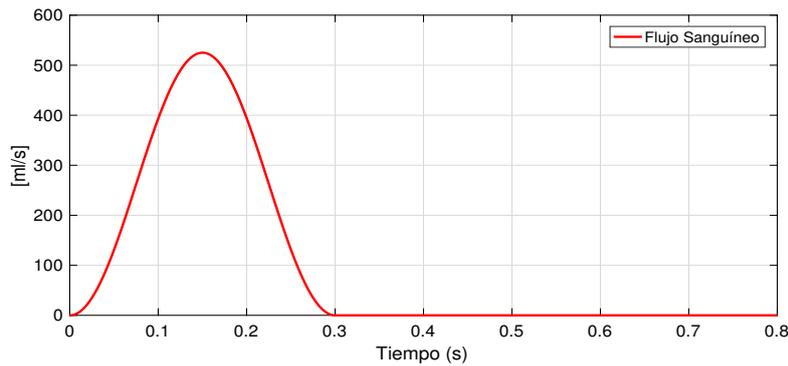


Figura 2.6: Flujo sanguíneo

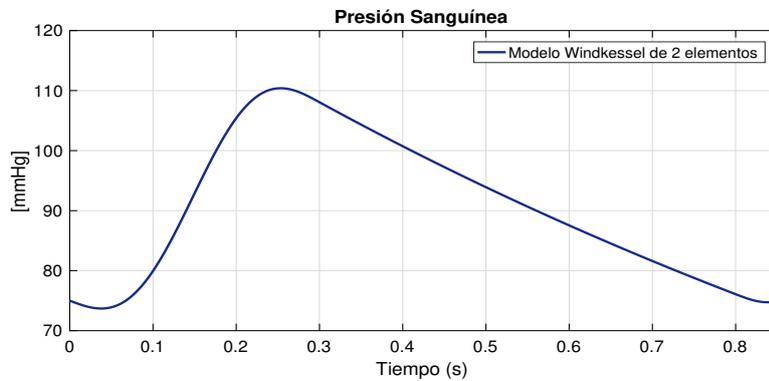


Figura 2.7: Curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de dos elementos

En la Figura 2.7 se muestra la curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de dos elementos, se observa cómo la curva de presión se encuentra entre 110/75mmHg.

Modelos Windkessel de tres elementos

Broemser y Otto proponen la modificación de Windkessel de dos elementos. Se agrega un segundo elemento resistivo entre la bomba y la cámara de aire, simulando así la resistencia al flujo sanguíneo debido a la válvula aórtica o pulmonar. También es conocido como el modelo Windkessel de tres elementos y se suele usar en estudios de características generales del sistema arterial [Broemser and Ranke, 1930], [Hlaváč and Holčík, 2004]. En la Figura 2.8 se muestra el modelo Windkessel de tres elementos donde considera la inercia de la sangre en la aorta con un resistor eléctrico descrito por r .

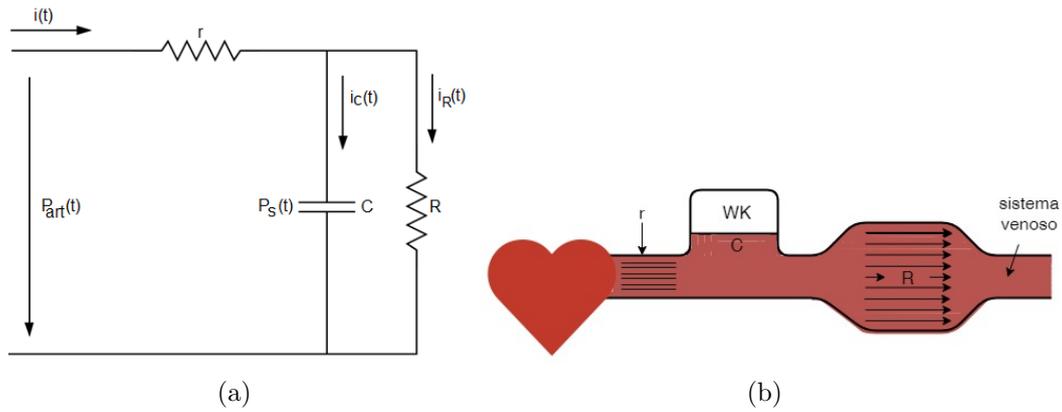


Figura 2.8: Modelo Windkessel de tres elementos

Las ecuaciones que describen modelo Windkessel de tres elementos son:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}P_s(t) + \frac{1}{C}i(t) \quad (2.5)$$

$$P_{art}(t) = i(t)r + P_s(t) \quad (2.6)$$

donde r se refiere a la resistencia que representa la impedancia de entrada de la aorta, $i_r(t)$ es la corriente en la resistencia sistémica, $P_{art}(t)$ que representa la presión aórtica y $P_s(t)$ representa la presión sistémica.

La representación en función de transferencia de las ecuaciones diferenciales (2.5) y (2.6) se define como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sRCr + r + R}{sRC + 1} \quad (2.7)$$

donde $Y(t)$ es la salida del sistema (presión sanguínea) y $U(t)$ es la entrada (flujo sanguíneo).

En la Figura 2.9 se muestra la curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de tres elementos, se observa cómo la curva de presión se encuentra entre 110/75mmHg.

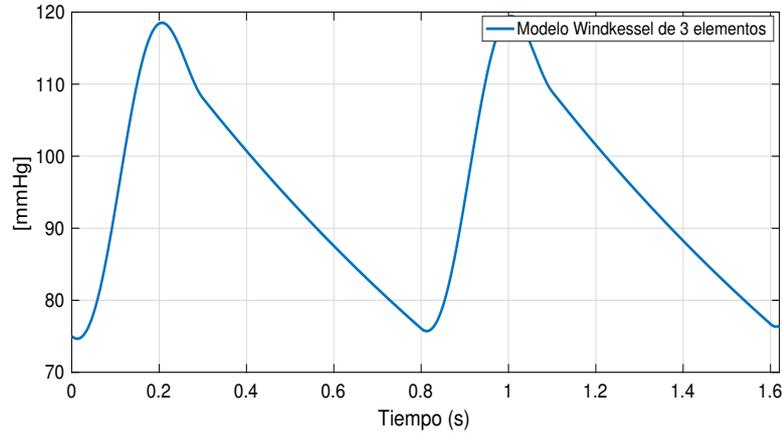


Figura 2.9: Curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de tres elementos

Modelos Windkessel de cuatro elementos

Burattini y Ganudi consideran un elemento inductivo L colocado en paralelo con la impedancia característica, modificando así el modelo Windkessel de tres elementos a un modelo de cuatro elementos [Kind et al., 2010] como se muestra en la Figura 2.10. El elemento inductor considerado representa la inercia que tiene la sangre a continuar fluyendo. También es conocido como el modelo Windkessel de cuatro elementos.

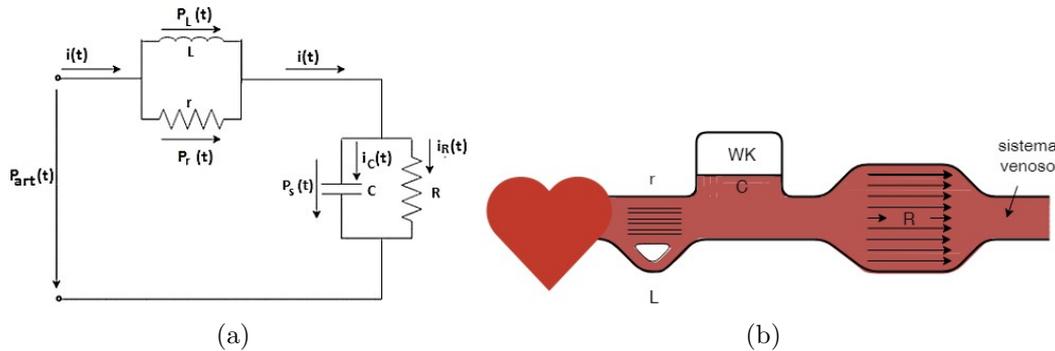


Figura 2.10: Modelo Windkessel de cuatro elementos

Las ecuaciones que describen el modelo Windkessel de cuatro elementos son:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}P_s(t) + \frac{1}{C}i(t) \quad (2.8)$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{L}{r} \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.9)$$

$$P_{art}(t) = P_s(t) + r[i(t) - i_L(t)] \quad (2.10)$$

donde L se refiere a la inercia que tiene la sangre a continuar fluyendo aún después de que el impulso que le dio origen al movimiento ha desaparecido, $P_L(t)$ es el voltaje en el inductor, $P_{art}(t)$ representa la presión aórtica y $P_s(t)$ representa la presión sistémica.

La representación en función de transferencia de las ecuaciones diferenciales (2.8), (2.9) y (2.10) es define como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 RCLr + sLR + Rr}{s^2 RCL + sL + sRCr + r} \quad (2.11)$$

donde $Y(t)$ es la salida del sistema (presión sanguínea) y $U(t)$ es la entrada (flujo sanguíneo).

En la Figura 2.11 se muestra la curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de cuatro elementos, se observa cómo la curva de presión se encuentra entre 110/75mmHg.

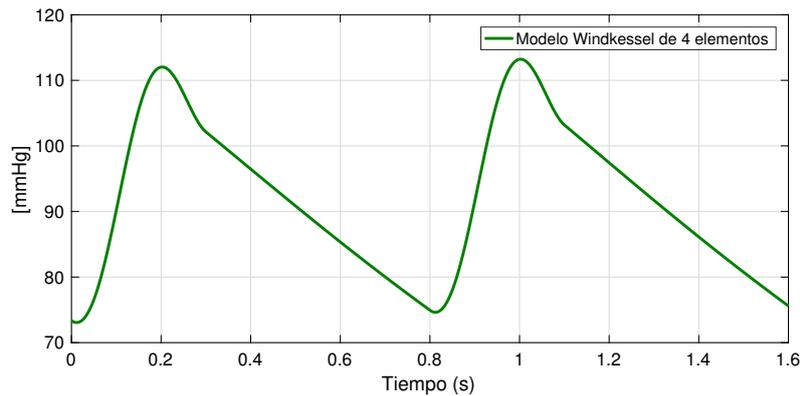


Figura 2.11: Curva de presión del sistema arterial generada por el modelo Windkessel de cuatro elementos

2.2.1. Comparación de los modelos Windkessel de dos, tres y cuatro elementos

En la Figura 2.12 se presentan las curvas de presión sanguínea de los modelos Windkessel de dos (WK2), el modelo Windkessel de tres elementos (WK3) y modelo Windkessel de cuatro elementos (WK4). Las curvas de presión arterial más realistas fueron obtenidos de la simulación de modelo WK4, porque tanto el modelo WK2 y el modelo W3 son muy simples para crear una muesca dicrótica. Además, la amplitud de presión sanguínea que se asemeja a las presiones normales de una persona sana son las del modelo del Windkessel de cuatro elementos.

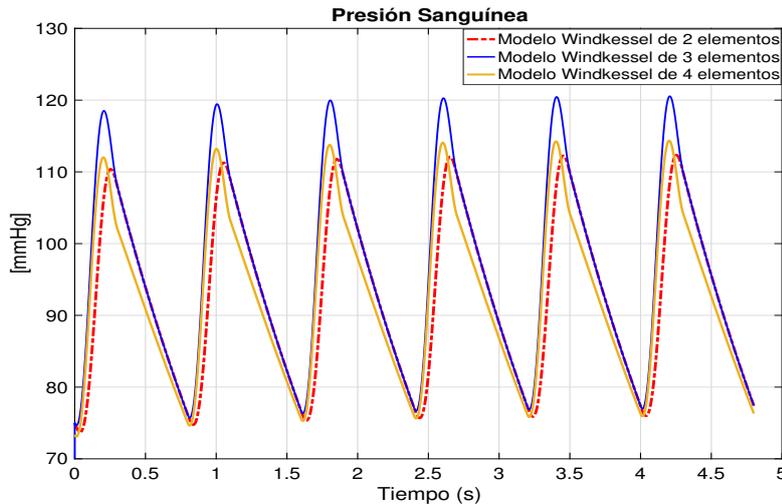


Figura 2.12: Comparación de modelos Windkessel

2.3. Sistemas singulares

Una gran cantidad de sistemas y procesos se modelan usando ecuaciones diferenciales y algebraicas no lineales, donde las ecuaciones diferenciales explícitas surgen de la dinámica proveniente de los balances de masa y energía, mientras que las ecuaciones algebraicas consisten en correlaciones empíricas de las variables del sistema.

Existen sistemas de ingeniería o industriales que son muy sensibles a pequeños cambios en la entrada, a la presencia de perturbaciones o entradas desconocidas difíciles de medir. Los sistemas singulares son una buena herramienta para representar este tipo de sistemas y además facilitan el diseño de observador para sistemas con entradas desconocidas.

Los sistemas singulares también conocidos como álgebra-diferenciales (en inglés: singular systems o descriptor systems) han sido ampliamente estudiados y aplicados a diversos sistemas. [Cobb, 1981], [Dai, 1988], [Luenberger, 1977], [Koenig, 2007], [Gordillo, 2011]. En la literatura se encuentran reportadas diversas representaciones

sobre sistemas singulares, a continuación se describen algunos trabajos:

En el trabajo de Hou se hace la clasificación de tipos de observabilidad definidas para sistemas singulares [Hou and Muller, 1999].

Darouach y Boutayeb presentan una metodología para el diseño de observadores de orden completo y de orden reducido para sistemas singulares en tiempo continuo, el algoritmo presentado en su trabajo se valida mediante datos numéricos [Darouach and Boutayeb, 1995].

En otro trabajo de Darouach se presenta un método para diseñar observadores de orden reducido para sistemas singulares en tiempo continuo, sujeto a entradas desconocidas y perturbaciones. En este trabajo se considera de manera general condiciones menos restrictivas [Darouach et al., 1996].

Por otro lado, en el trabajo de Koenig y Mammar se presenta una metodología para diseño de observadores proporcionales-integrales (PI) de orden completo y orden reducido para sistemas singulares sujeto a variación de los parámetros y considerando entradas desconocidas. Demuestra la existencia de condiciones de estabilidad generalizada y que es posible mantener cierta robustez en la estimación de entradas desconocidas frente a variaciones de los parámetros y no linealidades [Koenig and Mammar, 2002].

En Koenig presenta dos algoritmos de estimación robustos al ruido en el proceso y en los sensores [Koenig, 2006]. El primer algoritmo presentado consiste en un observador de entradas desconocidas, proporciona la estimación de las entradas desconocidas como un estado desacoplado. El segundo algoritmo es un observador PI que minimiza el impacto de las perturbaciones. Considera una distribución de la dinámica del actuador y ruidos del sensor que permite que los observadores se puedan utilizar en diagnóstico de fallas.

El trabajo de Marx presenta un observador Takagi-Sugeno singular para casos continuos y discretos que usan para desarrollar un sistema de diagnóstico por medio de un banco de observadores, donde consideran una falla como entrada desconocida [Marx et al., 2007]. Se basan en la solución de desigualdades matriciales lineales (por sus siglas en inglés: LMI, Linear Matrix Inequality).

2.3.1. Representación de los sistemas singulares

De manera general un sistema singular regular¹ tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.12}$$

¹por regular se entiende que la matriz E y la matriz A son cuadradas

donde $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ son matrices conocidas reales, $x(t)$, $u(t)$ y $y(t)$ son el vector de estados, la entrada y la salida respectivamente. El rango de E , $rank(E) = r$, donde r es un número entero $0 < r \leq n$. Cabe remarcar que al considerar sistemas singulares regulares las matrices del sistema se consideran cuadradas debido a que solo existe una solución y es única para una condición inicial.

Algunas de las propiedades básicas de los sistemas singulares se citan aquí, la observabilidad y estabilidad del sistema singular, la observabilidad es necesaria para el diseño de observadores. El sistema (4.1) es llamado estable si todas las raíces del polinomio $det(sE - A) = 0$ se encuentran dentro de la región estable, es decir en el semiplano izquierdo del plano complejo [Ishihara and Terra, 2002].

El sistema singular (4.1) es llamado de libre-impulso, si $(sE - A)$ es causal, siempre que se cumplan las siguientes condiciones [Gordillo, 2011].

$$deg[det(sE - A)] = rank(E) \quad (2.13)$$

o equivalentemente

$$rank \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + rank(E) \quad (2.14)$$

El sistema singular (4.1) es detectable si se cumple que

$$rank \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad Re(s) \geq 0 \quad (2.15)$$

El sistema singular es observable si:

$$rank \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (2.16)$$

El sistema es impulso observable si la tripleta A, B, C es [Hou and Muller, 1999]:

$$rank \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} = n + rank(E) \quad (2.17)$$

2.3.2. Ejemplo 1 de sistema singular (Sistema eléctrico)

El circuito RLC mostrado en la Figura 2.13 es alimentado por el voltaje $v(t)$. Tiene dos mallas, donde circulan las corrientes i_1 e i_2 a través de dos resistencias R_1 y R_2 . La carga en el capacitor C se denota por $q(t)$ y L es una inductancia.

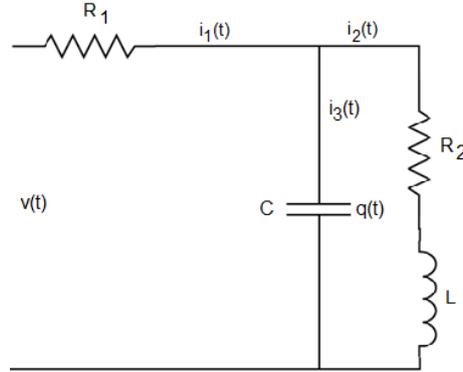


Figura 2.13: Circuito eléctrico

Se eligen como variables de estado $q(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y como entrada el voltaje $v(t)$. Haciendo uso de las leyes de Kirchoff de corriente y voltaje podemos definir las siguientes relaciones:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad (2.18)$$

$$v_c(t) = v_{R2}(t) + v_L(t) \quad (2.19)$$

$$v(t) = v_{R1}(t) + v_c(t) \quad (2.20)$$

$$v_c = \frac{1}{C}q(t) \quad v_L(t) = L\dot{i}_2(t) \quad (2.21)$$

sustituyendo las igualdades (2.21) en la ecuación (2.19), se obtiene:

$$\frac{1}{C}q(t) = i_2(t)R_2 + L\dot{i}_2(t) \quad (2.22)$$

despejando $L\dot{i}_2(t)$

$$L\dot{i}_2(t) = \frac{1}{C}q(t) - i_2(t)R_2 \quad (2.23)$$

ahora sustituyendo (2.21) en la ecuación (2.20)

$$\begin{aligned} v(t) &= i_1(t)R_1 + \frac{1}{C}q(t) \\ v(t) &= R_1[i_2(t) + i_3(t)] + \frac{1}{C}q(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

igualando a cero

$$0 = R_1 i_2(t) + R_1 i_3(t) + \frac{1}{C} q(t) - v(t) \quad (2.25)$$

considerando que

$$\dot{q}(t) = i_3(t) \quad (2.26)$$

Se obtiene la representación en espacio de estados de las ecuaciones (2.26), (2.23), (2.25), donde la última línea refleja la relación algebraica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{C} & -R_2 & 0 \\ \frac{1}{C} & R_1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} v \quad (2.27)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix}$$

donde la matriz E es singular (no invertible) ya que tiene una columna y una fila de ceros, además de que el $\text{rank}(E)=2$ y el vector de estados $x(t) = [q \ i_2 \ i_3]^T \in \mathbb{R}^3$.

2.3.3. Ejemplo 2 de sistema singular (Sistema mecánico)

En la Figura 2.14 se muestra un disco rodando sobre una superficie conectado a una pared fija a través de un resorte y un amortiguador. El resorte tiene dos coeficientes de rigidez K_1 , K_2 , el coeficiente de amortiguamiento está dado por b , el radio del disco r su inercia J y su masa por m .

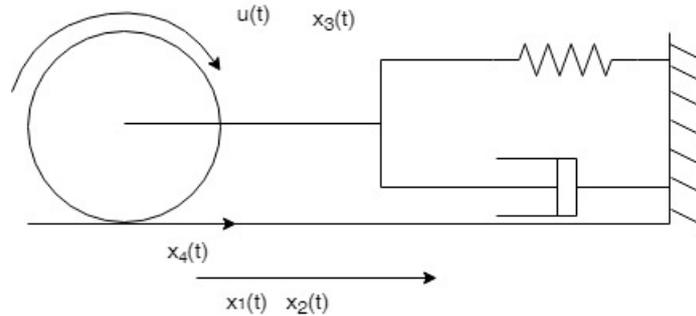


Figura 2.14: Modelo de disco rodando

donde las variables de estado para este modelo se definen como

$x_1(t)$: La posición del centro del disco.

$x_2(t)$: La velocidad de traslación del disco.

$x_3(t)$: La velocidad angular del disco.

$x_4(t)$: La fuerza de contracción entre el disco y la superficie.

Por lo tanto, este proceso puede ser modelado por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (2.28)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{-K_1}{m}x_1(t) - \frac{-K_2}{m}x_1^3(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}x_4(t) \quad (2.29)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{r}{J}x_4(t) + \frac{1}{J}u(t) \quad (2.30)$$

$$0 = x_2(t) - rx_3(t) \quad (2.31)$$

De la ecuación (2.29), (2.30) y (2.31) obtenemos:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (2.32)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{-K_1}{m}x_1(t) - \frac{-K_2}{m}x_1^3(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}x_4(t) \quad (2.33)$$

$$0 = x_2(t) - rx_3(t) \quad (2.34)$$

$$0 = \frac{-K_1}{m}x_1(t) - \frac{-K_2}{m}x_1^3(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \left(\frac{r^2}{J} + \frac{1}{m}\right)x_4(t) - \frac{r}{J}u(t) \quad (2.35)$$

Por lo tanto se obtiene la representación en espacio de estados donde las dos últimas líneas reflejan la relación algebraica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-K_1}{m} - \frac{-K_2}{m}x_1^2\right) & -\frac{b}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ \left(\frac{-K_1}{m} - \frac{-K_2}{m}x_1^2\right) & -\frac{b}{m} & 0 & \left(\frac{r^2}{J} + \frac{1}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{r}{J} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.3.4. Ejemplo 3 de sistema singular (Sistema hidráulico)

Modelo de tres tanques acoplados de agua, con un flujo de entrada en el primer tanque y con el tercer tanque con salida de agua como se muestra en la Figura 2.15. La presión en el fondo de los tanques 1, 2 y 3 se representa como p_1 , p_2 y p_3 , respectivamente. El tubo del tanque 1 se bifurca hacia los tanques 2 y 3. La presión en el tubo se da como P_B .

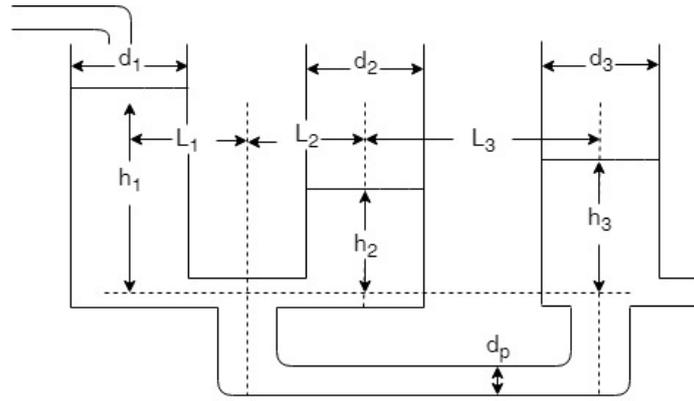


Figura 2.15: Modelo tanques

Al utilizar la ecuación de Hagen-Poiseuille, el caudal entre la rama del tubo del tanque se puede escribir como:

$$F_{1B} = (p_1(t) - p_B(t)) \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_B} \quad (2.38)$$

$$F_{B2} = (p_B(t) - p_2(t)) \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_1} \quad (2.39)$$

$$F_{B3} = (p_B(t) - p_3(t)) \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_2} \quad (2.40)$$

donde η es la viscosidad dinámica, $L_i, \forall i \in [1, 2, B]$ son las longitudes de las tuberías y d_p es el diámetro de la tubería. Todo el fluido que sale del tanque 1 debe entrar en el tanque 2 y el tanque 3. Esto está presente como una restricción.

$$F_{1B} = F_{B2} + F_{B3} \quad (2.41)$$

La presión hidrostática en cada uno está dada por:

$$p_1(t) = \rho g h_1(t) \quad (2.42)$$

$$p_2(t) = \rho g h_2(t) \quad (2.43)$$

$$p_3(t) = \rho g h_3(t) \quad (2.44)$$

donde $h_i, \forall i \in [1, 2, 3]$ es la profundidad en cada tanque, ρ es la densidad del líquido y g es la aceleración de la gravedad. La velocidad a la que el fluido sale o ingresa al tanque es directamente proporcional a la velocidad de cambio de la altura del fluido del tanque. Esta relación viene a través del análisis de la conservación de fluidos incompresibles:

$$a_1 \dot{h}_1(t) = -F_{1B} + F_{in} \quad (2.45)$$

$$a_2 \dot{h}_2(t) = -F_{B2} \quad (2.46)$$

$$a_3 \dot{h}_3(t) = -F_{B3} - \frac{a_3}{10} h_3(t) \quad (2.47)$$

donde a_1 , a_2 y a_3 son las áreas de sección transversal de los tanques 1, 2 y 3, respectivamente. F_{in} es el flujo de entrada en el tanque 1, y el término $\frac{a_3}{10} h_3(t)$ representa la salida en el tanque 3. Las áreas de sección transversal de los tanques 1, 2 y 3 están dadas por:

$$a_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2, \quad a_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2, \quad a_3 = \frac{\pi}{4} d_3^2 \quad (2.48)$$

utilizando las ecuaciones de 2.3.4-2.3.4, la representación en espacio de estado de los tres tanques interconectados se puede construir como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \\ \dot{h}_3(t) \\ \dot{p}_B(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{p}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{10} & k_3 & 0 & 0 & -k_3 \\ -pg & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -pg & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -pg & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & R & k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ p_B(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{in} \quad (2.49)$$

donde $R = -(k_1 + k_2 + k_3)$ y $k_1 = \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_B}$, $k_2 = \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_1}$ y $k_3 = \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_2}$.

2.4. Representación del modelo Windkessel de 3 elementos en forma singular

Considere el modelo Windkessel de tres elementos descrito por las ecuaciones:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} P_s(t) + \frac{1}{C} i(t) \quad (2.50)$$

$$P_{art}(t) = i(t)r + P_s(t) \quad (2.51)$$

donde la corriente $i(t)$ representa el flujo sanguíneo que pasa por la válvula aórtica, mientras que el voltaje $P_{art}(t)$, considerado como la presión arterial; R representa la

resistencia periférica total; C representa la compliancia de la aorta; r se refiere a la resistencia en la válvula aórtica y $P_s(t)$ representa la presión sistémica.

El modelo matemático consta de un ecuación dinámica: ecuación (2.50) y una ecuación algebraica de salida dada por la ecuación (2.51).

La ecuación (2.51) tiene dependencia de la entrada de la forma: $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ donde $y = P_{art}$, $x(t) = [P_s(t)]$, $u(t) = i(t)$, $C = [1]$, $D = [r]$.

Para evitar que la ecuación de la salida del sistema dependa de la entrada, se propone llevar el modelo matemático a una representación en forma singular.

Para ello, además de la variable de estado $x_1 = P_s(t)$, se define una nueva variable de estado $x_2 = P_{art}(t)$. Despejando la ecuación (2.51) queda:

$$0 = P_s(t) + ri(t) - P_{art}(t) \quad (2.52)$$

De esta manera, el sistema puede ser representado de forma singular, con las siguientes ventajas:

Se evita que la ecuación de salida no dependa de la entrada, solo se requiere conocer la presión aórtica.

Esta presión se puede obtener de manera no invasiva a partir de la arteria subclavia izquierda. Utilizando la representación general de un sistema singular, las matrices del sistema nos quedan de la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ r \end{bmatrix}}_B i(t) \quad (2.53)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Considerando la manera condensada, el sistema singular descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde la matriz E es singular (no invertible) ya que tiene una columna y una fila de ceros y el rango de E , $rank(E) = r$, donde $0 < r \leq n$ y n es el número de estados. $E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ y $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$ y $y(t) \in \mathbb{R}^1$. El rango de E , $rank(E) = 2$.

2.5. Representación del modelo Windkessel de 4 elementos en forma singular

Las ecuaciones que describen el sistema son:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}P_s(t) + \frac{1}{C}i(t) \quad (2.55)$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{L}{r} \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.56)$$

$$P_{art}(t) = P_s(t) + r[i(t) - i_L(t)] \quad (2.57)$$

donde la corriente $i(t)$ representa el flujo sanguíneo que pasa por la válvula aórtica, mientras que el voltaje $P_{art}(t)$, considerado como la salida, representa la presión arterial; R representa la suma de la resistencia de venas y arterias a la cual se denomina resistencia periférica total; C representa la compliancia de la aorta; r se refiere a la resistencia que representa la impedancia de entrada de la aorta y L es la inercia que tiene la sangre al continuar fluyendo aún después de que el impulso que le dio origen al movimiento ha desaparecido.

Por otro lado $P_{art}(t)$ representa la presión aórtica y $P_s(t)$ representa la presión sistémica.

Eligiendo como variables de estado a $P_s(t)$, $i_L(t)$ y realizando un cambio de variable en las ecuaciones (2.55), (2.56), entonces queda:

$$x_1(t) = P_s(t) \quad (2.58)$$

$$x_2(t) = i_L(t) \quad (2.59)$$

$$\boxed{\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{RC}x_1(t) + \frac{1}{C}i(t)} \quad (2.60)$$

$$\boxed{\dot{x}_2(t) = -\frac{r}{L}x_2(t) + \frac{r}{L}i(t)} \quad (2.61)$$

$$\boxed{P_{art}(t) = P_s(t) + r(i(t) - i_L(t))} \quad (2.62)$$

La representación de modelo en espacio de estados queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.63)$$

$$y(t) = [1 \quad -r] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + ru(t)$$

Se comienza con la selección de variables para definir la evolución del sistema, preservando los parámetros físicos en las matrices de coeficientes, la parte dinámica y parte estática del sistema. Una vez seleccionadas las variables, las condiciones matemáticas que las relacionan son dictadas por el comportamiento del sistema.

El modelo matemático consta de dos ecuaciones dinámicas: ecuaciones (2.59) y (2.61) y una ecuación algebraica de salida dada por la ecuación (2.62). Esta última ecuación tiene dependencia de la entrada de la forma:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

donde

$$y(t) = P_{art}(t), \quad x(t) = [P_s(t) \quad i_L(t)]^T, \quad u(t) = i(t), \quad C = [1 \quad -r], \quad D = r.$$

Para evitar que la ecuación de la salida del sistema dependa de la entrada, se propone llevar el modelo matemático a una representación en forma singular. Para ello, además de las variables de estado $x_1 = P_s(t)$, $x_2 = i_L(t)$, se define una nueva variable de estado $x_3 = P_{art}(t)$. Despejando la ecuación (2.57) queda:

$$0 = P_s(t) + ri(t) - ri_L(t) - P_{art}(t) \quad (2.64)$$

De esta manera, el sistema puede ser representado en forma singular, con las siguientes ventajas:

La ecuación de salida no depende de la entrada con lo que se evita la necesidad de medir flujos sanguíneos que muy difícilmente se puede obtener de manera no invasiva, solo se requiere conocer la presión aórtica. Esta presión se puede obtener de manera no invasiva a partir de la arteria subclavia izquierda por sistemas o dispositivos comercialmente disponibles.

Utilizando la representación general de un sistema singular descrito en las Ec.(2.63) y Ec.(2.64), la representación del modelo Windkessel de cuatro elementos en su forma singular queda como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -r & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 1 \\ r \end{bmatrix}}_B i(t) \quad (2.65)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde la matriz E es singular (no invertible) ya que tiene una columna y una fila de ceros, $E \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ y $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$ y $y(t) \in \mathbb{R}^1$. El rango de E , $rank(E) = 3$.

2.6. Conclusiones particulares

En este capítulo se presentaron algunos modelos matemáticos del sistema cardiovascular. Con la revisión realizada, la orientación del trabajo de tesis se inclina hacia el uso de modelos análogos eléctricos con enfoque de modelos agrupados. Este tipo de modelos se basan en los principios de la dinámica sanguínea tratando de preservar la interpretación física de los componentes de la circulación sistémica.

Se presentaron los tipos de modelos Windkessel en los cuales se basa el desarrollo de este tema de tesis, por la facilidad de representar al sistema arterial como un circuito eléctrico (RLC). El modelo original incluía solo una resistencia y un condensador en paralelo que representa la resistencia de la sangre y la compliancia de sistema arterial. Más adelante, se agregó un tercer elemento que representa la impedancia característica de la aorta; y posteriormente se agregó un cuarto elemento, un inductor, para representar la inercia del volumen de sangre a través de la aorta ascendente. A partir de esto se generaron debates entre la forma de colocar los elementos de los modelos Windkessel por ejemplo: en un estudio [Westerhof et al., 2009] sostiene que es mejor agregar el inductor en paralelo, mientras que Serfer defiende las ventajas de colocar el elemento en serie.

Se presentaron algunos conceptos básicos de sistemas singulares y tres ejemplos de la representación de un modelo en forma singular probando que esta forma de representar los modelos es obtenida de manera natural.

Por último se realizó la representación de los modelos Windkessel de tres y cuatro elementos en forma singular con la finalidad de evitar que la ecuación de salida de los modelos no dependiera de la entrada, lo cual facilita el diseño de observadores y solo requerir medir la presión para estimar los demás estados del modelo.

Capítulo 3

Observadores para sistemas singulares

El objetivo de este capítulo es presentar el diseño de observadores de estado para sistemas singulares. En un principio se presentan la clasificación de los observadores y algunos conceptos básicos sobre la estructura de diversos observadores reportados en la literatura. El capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 3.1 se presenta una clasificación general de los observadores dividida en dos formas: clasificados por orden y por tipo o estructura.

En la sección 3.2 se presenta la metodología para el diseño de observadores de estado basado en modelo. Se presentan algunas condiciones que deben cumplirse para el diseño de observadores de estado.

En la sección 3.3 se presenta una descripción del diseño de observadores para sistemas singulares. Se presenta el diseño del observador de orden completo y el diseño de observador de orden reducido para sistemas singulares propuesto por Darouach y Boutayeb (1995).

Por último, en la sección 3.4 se presentan algunas conclusiones parciales del capítulo.

Los observadores son sistemas dinámicos cuyo propósito es reconstruir el estado $x(t)$ de un modelo basándose en las entradas medidas $u(t)$ y en las salidas $y(t)$.

Generalmente se utilizan para estimar aquellos estados que no se encuentran disponibles a la salida y sin embargo son necesarios para efectos de diseño de algoritmos de control tales como supervisión, control realimentado, estabilización, entre otros. En la literatura se encuentran diferentes tipos de observadores que estiman los estados, sobre la base de revisión de los observadores recientes presentada por [Ali et al., 2015], podemos diferenciarlos claramente en dos principales clases:

Por el orden del observador (orden completo, orden reducido y orden mínimo) y por el tipo o estructura del observador (observadores tipo Luenberger, dinámico

generalizado, proporcionales, etc.), ver la Figura 3.1.

También podemos tener otras subclasificaciones si se considera el tipo de sistema que estamos trabajando como son: observadores para sistemas lineales y observadores para sistemas no lineales, o bien si consideramos la manera en que se adquiere la información de los datos de salida y entrada del proceso.

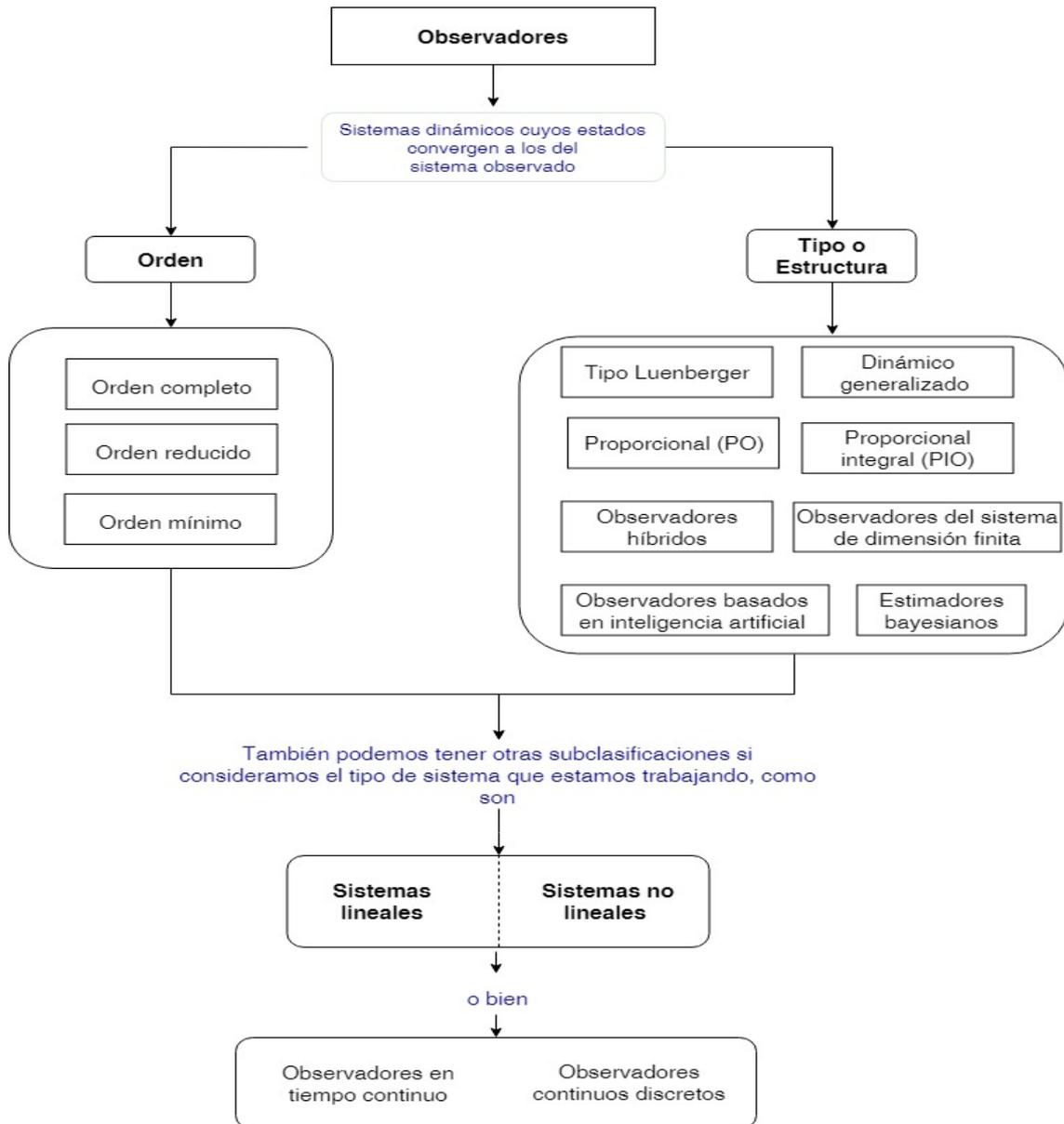


Figura 3.1: Clasificación de observadores

A continuación explicamos brevemente algunas de las características distintivas de los tipos de observadores.

3.1. Clasificación de Observadores

Clasificación por orden

Considerando el sistema que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde las matrices A , B , C y D son matrices conocidas reales, $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son el vector de estados, la entrada y la salida, respectivamente. Los observadores se clasifican en:

a) **Observador de orden completo:**

Este tipo de observadores estima todas las variables del sistema sin importar si algunas están disponibles para una medición directa. Donde $x(t)$ es el vector de estados definido como $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas y $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados estimados. En resumen, el observador se denomina de orden completo porque los vectores x y \hat{x} tienen la misma dimensión.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

b) **Observador de orden reducido:**

En este caso, el observador estima menos de n variables de estado, en donde n es la dimensión del vector de estados de sistema. En otras palabras, si $x(t)$ es el vector de estados $x \in \mathbb{R}^n$, el vector de estados estimados por el observador es $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n^-}$ donde $n^- < n$.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

c) **Observador de orden mínimo:**

Es un observador de orden reducido con el mínimo de orden posible. Es decir, el observador también estima menos de n variables de estado, en donde n es la dimensión del vector de estados de sistema. En otras palabras, si $x(t)$ es el vector de estados $x \in \mathbb{R}^n$, el vector de estados estimados por el observador es $\hat{x} \in \mathbb{R}^l$ donde $l \leq n - p$ es el orden mínimo posible del observador y p es el número de salidas medidas $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Dentro de cada una de estas familias, podemos a su vez tener otras subclasificaciones si consideramos el tipo de sistema que estamos trabajando, Por ejemplo podemos tener: *observadores para sistemas lineales y observadores para sistemas no lineales.*

Clasificación por tipo o estructura

a) **Observador tipo Luenberger:**

Se basa en la estructura del modelo, se considera un estimador de estados que permite estimar el estado no medible de un sistema a partir de las mediciones de entrada y salida del sistema. El observador considera una matriz L que pondera el error de estimación.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde L es la matriz de ganancia del observador.

b) **Observador dinámico generalizado:**

El diseño de este tipo de observadores proporciona grados de libertad adicionales que pueden aumentar el margen de estabilidad del sistema, mejora la estimación de los estados, la estabilidad y robustez del sistema [Osorio-Gordillo et al., 2014].

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= S\zeta(t) + Lv(t) + My(t) \\ \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde $\dot{\zeta} \in \mathbb{R}^q$ representa el vector de estados del observador, $\dot{v} \in \mathbb{R}^v$ es un vector auxiliar y $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$ es la estimación del vector $x(t)$. Las matrices $N, F, J, H, L, M, S, P, Q$ son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que deben ser calculadas para cada sistema en particular.

c) **Observador proporcional:**

Este tipo de observadores se puede usar para aumentar el margen de estabilidad debido a que adiciona grados de libertad, son sensibles a incertidumbre paramétrica e introducen error estático en la estimación de estados.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde $\dot{\zeta} \in \mathbb{R}^q$ representa el vector de estados del observador, y $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$ es la estimación del vector $x(t)$. Las matrices N, F, J, P, Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas. Una de las desventajas de usar el observador proporcional es que puede existir un error de estimación estático.

d) **Observador proporcional integral:**

Este observador, a diferencia del proporcional tiene una ganancia H que pondera la integral del error de salida $v(t)$ tiene una ganancia integral adicional del error de salida que le permite ser más sensible a incertidumbres paramétricas aumentando la precisión del estado estable. Esto permite al observador ser más sensible a incertidumbres paramétricas aumentando la precisión del estado estable. Las ecuaciones de un observador proporcional integral están dadas en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= y(t) - C\hat{x}(t) + Du(t) \\ \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)\end{aligned}\tag{3.8}$$

donde $\dot{\zeta} \in \mathbb{R}^q$ representa la dinámica del vector de estados del observador, $\dot{v} \in \mathbb{R}^v$ es un vector auxiliar y $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$ es la estimación del vector $x(t)$. Las matrices N, H, F, J, P, Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

e) **Observador del sistema de dimensión finita:**

Para el diseño de este observador no es necesario el conocimiento de la cinética del proceso, es de fácil implementación y formulación simple. El factor de convergencia depende fuertemente de la condición de operación.

$$\frac{\varepsilon}{dt} = F\varepsilon + Gx_1 - LU_1 + LU_2\tag{3.9}$$

f) **Observador de estimadores bayesianos:**

Basado en la probabilidad distribución inferencia matemática del sistema. La estimación es rápida basada en predicción y corrección. La complejidad de su

método a veces es inviable para sistemas de alta dimensión.

$$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + R_V \quad (3.10)$$

g) **Observadores basados en inteligencia artificial:**

De acuerdo con los elementos de inteligencia artificial (AI), ejemplo utilizando lógica difusa donde la regla IF-THEN es:

Si e es negativo pequeño y δ_e es cero entonces $\hat{x}_{estimada} = x_{actual}$. Combinación de observadores con IA elementos. Su ventaja es que supera las limitaciones de solo observador y es adecuado para sistemas con modelos incompletos.

h) **Observadores híbridos:**

Este tipo de observadores es la combinación de dos o más observadores. Entre sus ventajas es que supera las limitaciones de un solo observador y es adecuado para sistemas donde un solo tipo de observador no es exacto o suficiente. Si desventaja es que la elección de la combinación adecuada puede ser tediosa.

$$\frac{dZ(t)}{dt} = D(t)Z(t) + A_1u_1(t) + A_2u_2(t) \quad (3.11)$$

Dentro de estas familias, también podemos tener otras subclasificaciones si consideramos el tipo de sistema que estamos trabajando, como son *observadores para sistemas lineales* y *observadores para sistemas no lineales*.

3.2. Metodología para el diseño de observadores

El diseño de observadores normalmente se basa en un modelo matemático, que típicamente incorpora al balance de masa y energía de los sistemas. Los primeros diseños de observadores fueron con base en sistemas lineales y se usaban para estimar estados y/o parámetros desconocidos del sistema. Posteriormente se diseñaron los observadores no lineales debido a que el comportamiento de la mayoría de los sistemas es altamente no lineal.

La mayoría de los diseños de observadores se basada en el modelo matemático del sistema con la excepción de los observadores basados en la (IA) [Dochain et al., 2009].

El primer paso antes de diseñar un observador es verificar que se cumpla la siguiente condición de observabilidad:

A) **Observabilidad:** es la condición en la que todos los estados iniciales del sistema son observables y se dice que un sistema es observable siempre que dada una entrada u para cualquier condición inicial $x(0)$, sus estados internos pueden inferirse mediante la historia de observación de $y(t)$ dentro del intervalo $[0, t_1]$.

Una vez que se cumple la condición de observabilidad se pueden diseñar observadores para estimar las variables de estado. En este sentido, se selecciona un observador de acuerdo a la clasificación antes mencionada [Ali et al., 2015].

La condición de observabilidad

Considere el sistema lineal que tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para que el sistema definido en la Ec.(3.12) sea observable se debe cumplir que el rango de una matriz de observabilidad σ sea $\text{rank}(\sigma) = n$, donde

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Es importante remarcar que para sistemas lineales de la forma (3.12), la observabilidad no depende de las entradas del sistema. La condición anterior es suficiente para la observabilidad de un sistema.

Estructura de un observador

En la Tabla (3.1) se muestran las partes básicas que se tienen que considerar al hablar del diseño de observadores.

Tabla 3.1: Estructura de un observador

	Definición
Variables estimadas	Las variables estimadas son aquellas que por diversas causas su medición no esta disponible y se pretenden estimar utilizando observadores.
Ecuaciones del observador	Las ecuaciones del observador son desarrolladas para determinar su estructura basado en el conocimiento dinámico de un sistema e incorporando con la ganancia del observador y las ecuaciones dinámicas del error. Normalmente, para describir las ecuaciones de un observador basado en modelo se hace uso de la representación en espacio de estados y la ecuación de medición (salida del sistema). El número de variables medidas afecta la sensibilidad de la estimación.
Ganancias del observador	La estructura de un observador requiere de ganancias apropiadas, y se eligen en función de la estabilidad de la dinámica del error del sistema y la convergencia del observador. Eligiendo apropiadamente las ganancias del observador, se pueden ajustar para que los estados estimados converjan asintóticamente a los estados del sistema. En una estructura de lazo cerrado es mucho mejor debido a que se realimenta el error de salida para corregir la estimación del observador.
Ecuación dinámica de error	La ecuación dinámica del error es necesaria para garantizar que la estructura del observador esté limitada al error de modelado. Se debe diseñar de tal manera que su respuesta sea asintóticamente o exponencialmente estable. En sistemas donde la información proporcionada es limitada y debido a la gran incertidumbre es difícil establecer los límites de error.

La metodología para diseñar un observador se muestra en la Figura 3.2. Se comienza con revisar la condición de observabilidad, si el sistema es observable entonces se definen los estados a estimar y a partir de la información del sistema se elige un tipo de observador adecuado según la clasificación explicada previamente. Una vez elegido el tipo de observador se desarrollan sus ecuaciones y se calculan las ganancias del observador. Se desarrolla la ecuación dinámica del error y se realizan pruebas en simulación para evaluar el desempeño de estimación del observador.

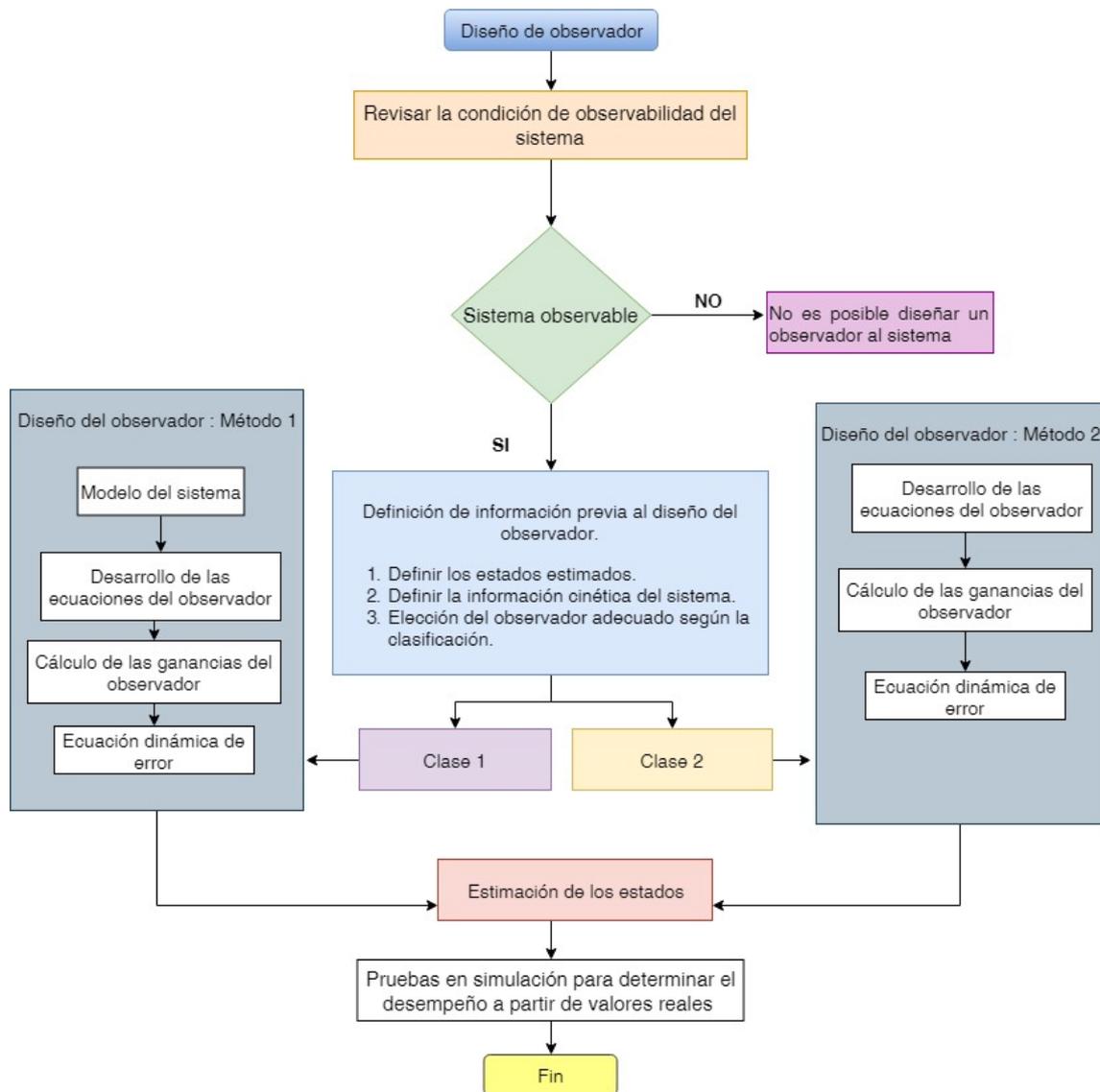


Figura 3.2: Metodología general para el diseño de observadores

Evaluación del observador

Generalmente se prueba el desempeño del observador en simulación, seguido de la implementación. Antes de la implementación en línea normalmente se evalúa el desempeño del observador introduciendo algunos errores razonables en el modelo simulado por ejemplo perturbaciones y ruido en la medición.

3.3. Observadores para sistemas singulares

El objetivo de esta sección es realizar una descripción del diseño de observadores de estado para sistemas singulares.

Se dice que para un sistema LTI (por sus siglas en ingles Linear Time Invariant), existe un observador capaz de estimar los estados del sistema si y solo si el sistema es observable. Los observadores para sistemas singulares o descriptor han sido ampliamente investigados en la literatura, por ejemplo, [Darouach and Boutayeb, 1995], [Gordillo, 2011], [Astorga-Zaragoza et al., 2011].

El problema de diseñar observadores para sistemas singulares ha recibido considerable atención en las últimas décadas. Existen diferentes enfoques para diseñar observadores para sistemas singulares, como son observadores de orden completo o de orden reducido [Darouach and Boutayeb, 1995].

3.3.1. Observador de orden completo para sistemas singulares

En esta sección se presenta el diseño de un observador de orden completo para sistemas singulares propuesto por Darouach y Boutayeb (1995).

Considere el sistema singular lineal de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son matrices conocidas, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son el vector de estados, la entrada y la salida respectivamente. Se asume que $\text{rank}(E)=r < n$ y si perder generalidad el $\text{rank}(C) = p$.

Por lo tanto, se asume que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \tag{3.15}$$

o equivalente

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \tag{3.16}$$

Además, considerando las condiciones presentadas en [Darouach and Boutayeb, 1995]:

(A1) El rango de la matriz E es menor que el número de estados n , es decir:

$$\text{rank}(E) = r < n.$$

$$\text{(A2)} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$$

Considerando que la suposición **A2** se cumple existe una matriz no singular Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tal que:

$$\begin{aligned} aE + bC &= I_n \\ cE + dC &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde a, b, c y d son matrices de dimensiones apropiadas tal que pueden ser obtenidas usando la descomposición de valores singulares (S.V.D)¹ de la matriz $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$.

Observación 1: si $\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$, entonces existen dos matrices ortogonales U y V tal que:

$$U \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma V \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

$$\sigma > 0 (i = 1, \dots, n)$$

entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^T \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & I_{m+p-n} \end{bmatrix} U$$

El objetivo es diseñar un observador de orden n de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Nz(t) + L_1 y(t) + L_2 \dot{y}(t) + Gu(t) \\ \hat{x} &= z + by(t) + K \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

¹La S.V.D es una factorización de la matriz donde los elementos de $\Sigma, \sigma_i = \Sigma_{ii}$ son además positivos.

donde N , L_1 , L_2 , G y K son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que deben determinarse de modo que $\hat{x}(t)$ converja asintóticamente a $x(t)$. La entrada del observador es la salida del sistema $y(t)$ y la matriz $z(t)$ representa el estado del observador. Por simplicidad en adelante se omitirá el término que representa al tiempo (t).

El error de estimación se puede definir a partir de:

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \\ e &= x - z - bCx - KdCx \end{aligned} \quad (3.19)$$

reemplazando bC y dC de la ecuación (3.17) en la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} e &= x - x - bCx - KdCx \\ e &= (a + Kc)Ex - z \end{aligned} \quad (3.20)$$

la dinámica del error de estimación está dada por la ecuación:

$$\dot{e} = (a + Kc)E\dot{x} - \dot{z} \quad (3.21)$$

sustituyendo $E\dot{x}$ y \dot{z} de la ecuación (3.18) en la ecuación (3.21), obtenemos:

$$\dot{e} = (a + Kc)(Ax + Bu + \Delta x) - (Nz + L_1y + G_1u + L_2y) \quad (3.22)$$

de modo que se satisface la ecuación:

$$\dot{e} = Ne + [(a + Kc)A - N(a + Kc)E - L_1C - L_2C]x + [(a + Kc)B - G]u \quad (3.23)$$

Siempre que las matrices L_1 , L_2 , G y K y N satisfagan las siguientes condiciones:

$$G = (a + Kc)B \quad (3.24)$$

$$(a + Kc)A - N(a + Kc)E - L_1C - L_2C = 0 \quad (3.25)$$

La ecuación (3.23) se reduce a la ecuación homogénea:

$$\dot{e} = Ne \quad (3.26)$$

entonces \hat{x} convergerá asintóticamente a x si y solo si N es una matriz de estabilidad.

El problema de diseñar un observador de orden completo para sistemas singulares se reduce a encontrar las matrices L_1 , L_2 y K y obtener una matriz estable N tal que las ecuaciones (3.24) y (3.25) se satisfacen. Usando (3.17) y (3.25) se puede escribir:

$$(a + Kc)A - N(I_n - bc - KdC) - L_1C - L_2C = 0 \quad (3.27)$$

o

$$N = (a + Kc)A - L_2C + [N(b + Kd) - L_1]C \quad (3.28)$$

Considerando que la siguiente suposición asegura que el segundo término de lado derecho de (3.28) sea cero:

$$L_1 = N(b + Kd) \quad (3.29)$$

entonces la ecuación (3.28) se puede reescribir como:

$$N = aA + KcA - L_2C = aA + [K - L_2] \begin{bmatrix} cA \\ C \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

En resumen el problema de diseñar un observador de orden completo para sistemas singulares se reduce a calcular las matrices desconocidas K , L_1 , L_2 , G y N .

Estabilidad del observador

Con el fin de asegurar la estabilidad del error de estimación (3.26), se considera el siguiente teorema [Astorga-Zaragoza et al., 2011].

Teorema1. El sistema (3.18) es un observador para el sistema (3.14) si existen matrices apropiadas P , Q y R , tales que:

$$e^T(A^T a^T P + PaA + A^T c^T Q^T + QcA - C^T R^T - RC)e < 0 \quad (3.31)$$

lo que se asegura que \hat{x} convergerá asintóticamente a x .

Demostración. Podemos considerar la siguiente función candidata de Lyapunov para asegurar la estabilidad del error de estimación $V(e) = e^T P e$ con

$$P^T = P > 0 \quad (3.32)$$

La derivada de la función candidata de Lyapunov está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T N^T P + P N e \end{aligned} \quad (3.33)$$

por lo tanto la estabilidad cuadrática es garantizada si $\dot{V} < 0 \forall e \neq 0$. Esta condición se satisface si:

$$N^T P + P N < 0 \quad (3.34)$$

Si existe una matriz simétrica P , adecuada para lograr que $N^T P + P N < 0$. N se deduce de (3.28) y se define como

$$N = KcA + aA - L_2C \quad (3.35)$$

Remplazando N de (3.35) en (3.34) nos quedan las siguientes BMI (por sus siglas en inglés *bilinear matrix inequality*)

$$A^T a^T P + P a A + A^T C^T K^T P + P K c A - C^T L_2^T P - P L_2 C < 0 \quad (3.36)$$

Las BMI de la ecuación (3.36) pueden transformarse en LMI (por sus siglas en inglés *linear matrix inequality*) tomando en cuenta que [VanAntwerp and Braatz, 2000], [Junca Peláez et al., 2005]:

$$Q = P K \quad (3.37)$$

$$R = P L_2 \quad (3.38)$$

Por lo tanto $Q^T = K^T P$ Y $R^T = L_2^T P^T$. La ecuación (3.36) se convierte en

$$A^T a^T P + P a A + A^T c^T Q^T + Q A - C^T R^T - R C < 0 \quad (3.39)$$

Finalmente, si existen matrices apropiadas P , Q y R , entonces se cumple (3.39) y, por lo tanto, el sistema (3.26) es estable. Despejando de (Q) y (R) obtenemos

$$K = P^{-1}Q \quad (3.40)$$

$$L_2 = P^{-1}R \quad (3.41)$$

Diseño de algoritmo de un observador de orden completo

- (1) Se verifica que las condiciones para aplicar el observador de orden completo se cumplen:

(A) $\text{rank}(E) = r > n$

(B) $\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$

- (2) Obtener las matrices a , b , c y d que satisfacen (3.17), mediante la descomposición de valores singulares de $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$.
- (3) Se solucionan las siguientes LMIs:

$$P^T = P > 0$$

$$A^T a^T P + P a A + A^T c^T Q^T + Q A - C^T R^T - R C < 0$$

- (4) Se da solución a las LMI's (3.32), (3.39), (3.37) (3.59).
- (5) Obtener la matriz $N = KcA + aA - L_2C$ mediante la cual se asegura la estabilidad del observador. Es decir que determinando $\dot{e} = Ne$ sea estable.
- (6) Obtener el resto de ganancias del observador a partir de las ecuaciones (3.24), (3.29), (3.40) y (3.41).

3.3.2. Observador de orden reducido para sistemas singulares

En esta sección se presenta el diseño de un observador de orden reducido para sistemas singulares propuesto por [Darouach and Boutayeb, 1995].

Diseño del Observador

Considere el sistema singular lineal e invariante en el tiempo de la forma:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ son matrices conocidas obtenidas a través de la transformación del sistema singular y $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ y $y(t) \in \mathbb{R}^m$ son el vector de estados, la entrada y la salida, respectivamente. La matriz E es singular (no invertible) ya que tiene una columna y una fila de ceros. Se asume que $\text{rank}(E) = r < n$ y sin perder generalidad $\text{rank}C = p$. De ahora en adelante se omitirá el término (t) para simplificar la notación.

Por lo tanto, se asume que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \quad (3.43)$$

o equivalentemente

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \quad (3.44)$$

El objetivo es diseñar un observador de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \Pi\omega + Ly + Hu \\ \hat{x} &= M\omega + Fy \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^{n-q}$

El problema de diseño del observador se limita a encontrar las matrices Π , L , H , M y F tal que la estimación \hat{x} converja asintóticamente a x . Asuma que $T \in \mathbb{R}^{(n-q) \times r}$ es una matriz tal que

$$TA - \Pi TE = LC \quad (3.46)$$

donde

$$\det \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} \neq 0.$$

Entonces para

$$H = TB \quad (3.47)$$

y

$$\begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

tenemos que $\hat{x} - x = Me^{\Pi t}[w(0) - TE_0x(0)]$.

La convergencia del observador de orden reducido se obtiene cuando la matriz Π es estable.

A continuación se presenta el método para encontrar la matriz T . Se parte de la definición de la siguiente matriz no singular:

$$\begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-q} & K \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix}$$

donde $K \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$ es una matriz arbitraria y $R \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ es una matriz arbitraria tal que los valores propios de la matriz Π sean estables y cuyo rango es igual al número de filas.

Entonces, tenemos

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = R \quad (3.49)$$

Dado que $\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$, la ecuación (3.49) tiene la siguiente solución:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^+ + Z \left(I_{m+p} - \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^+ \right) \quad (3.50)$$

donde $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^+ = \Delta[E^T C^T]$, $\Delta = (E^T E + C^T C)^{-1}$ y Z es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas²

A partir de la ecuación (3.50) se tiene:

$$T = R\Delta E^T + Z \begin{bmatrix} I_r - E\Delta E^T \\ -C\Delta E^T \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

y de la ecuación (3.46) se tiene:

$$\Pi = TAM \quad (3.52)$$

$$L = TAF \quad (3.53)$$

El problema se limita ahora a encontrar una matriz T tal que Π sea una matriz estable. Sustituyendo la ecuación (3.50) en la ecuación (3.52)

$$\Pi = T\Gamma + Z\Omega \quad (3.54)$$

donde

$$\Gamma = R\Delta E^T AM \quad (3.55)$$

y

$$\Omega = \begin{bmatrix} (I_r - E\Delta E^T)AM \\ -C\Delta E^T AM \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Si la dupla (Γ, Ω) es detectable, se puede diseñar un observador de orden reducido con la forma descrita en la ecuación (3.45) y podemos encontrar una matriz Z tal que el observador sea asintóticamente estable. Las siguientes relaciones se obtienen del libro y del artículo [K. Khoo, 2000], [Darouach and Boutayeb, 1995].

$$\begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & E \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FE \\ C \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

²La expresión $[.]^+$ hace referencia a la pseudoinversa de una matriz

Entonces, la matriz M puede ser obtenida de la ecuación (3.48) y (3.49), tiene la forma:

$$M = \begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

La matriz F puede ser obtenida de la ecuación (3.48) y tiene la forma:

$$F = \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Diseño de algoritmo de un observador de orden reducido

- (1) Elegir una matriz $R \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ tal que $\begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix}$ sea no singular.
- (2) Obtener una matriz de la ecuación de la ecuación (3.48) y (3.49).
- (3) Obtener (Γ, Ω) de las ecuaciones (3.55) y (3.56), podemos encontrar una matriz Z tal que el observador sea asintóticamente estable.
- (4) Obtener la matriz F a partir de la ecuación (3.59).
- (5) Obtener las matrices $H = FB_0$, $\Pi = TA_0M$ $L = TA_0F$.

3.4. Conclusiones parciales de capítulo

En este capítulo se presentó el estado del arte en cuanto a observadores de estado, la clasificación general de tipos de observadores de estado basado en modelo, también se presentaron algunos conceptos básicos para el diseño de observadores y las características que debe cumplir un sistema como son: observabilidad y detectabilidad.

Por último se presentaron dos tipos de observadores que estiman solo los estados no disponibles a la salida para sistemas singulares propuestos por Darouach, partiendo del observador de orden completo en el cual mediante la descomposición de valores singulares y el uso de LMI's se logra la convergencia del observador.

Capítulo 4

Diseño de observadores para la supervisión de las dinámicas del corazón

En este capítulo, presentamos la metodología de aplicación de los observadores diseñados a los modelos Windkessel de tres y cuatro elementos en forma singular presentados en la sección 2.4.

Es necesario resaltar que estos modelos fueron elegidos debido a que existe una estrecha correspondencia entre el sistema cardiovascular y los circuitos eléctricos, por ejemplo, el flujo de electrones a través de un conductor eléctrico.

La diferencia de presión que ejerce el corazón debido al flujo de sangre se modela por medio de la diferencia de potencial que es la que ocasiona el movimiento de los electrones en un circuito eléctrico. La resistencia que es la oposición al flujo de la sangre en una vena, arteria, tejido o combinación de elementos en el sistema cardiovascular es equivalente a la resistencia eléctrica. En dinámica de fluidos la ley de Ohm hace analogía del sistema cardiovascular con los circuitos eléctricos a partir de la ley de Poiseuille, que establece que el flujo volumétrico de un fluido a través de un tubo es proporcional a la diferencia de presión de los dos extremos del mismo [K. Khoo, 2000]. Para el modelado se eligieron los modelos Windkessel de tres y Windkessel de cuatro elementos, ya que representan adecuadamente las dinámicas de interés.

Los observadores para sistemas singulares desarrollados se comparan con un observador tipo Luenberger con el fin de resaltar las ventajas de llevar el modelo a su forma singular.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 4.1 se presenta el diseño del observador de orden completo para el sistema Windkessel de tres elementos y sus resultados. En la sección 4.2 se presenta el diseño del observador de orden completo para el sistema Windkessel de cuatro elementos y sus resultados.

En la sección 4.3 se presenta el observador de orden reducido diseñado para el modelo Windkessel de 4 elementos y sus resultados en simulación.

En la sección 4.4 se presenta la detección de anomalías en el comportamiento de la presión del sistema cardiovascular basada en el diseño del observador de orden completo para sistemas singulares propuesto por [Darouach and Boutayeb, 1995] y sus resultados en simulación.

En la sección 4.5 se presenta un esquema de tres sistemas conmutados con sus respectivos observadores, considerando el primer modelo como el caso de una persona en estado normal. El segundo modelo considera una persona realizando actividad física la cual implica un aumento en su presión sanguínea y el tercer modelo considera cuando la persona está en estado de reposo.

En la sección 4.6 se presentan las conclusiones particulares del capítulo.

4.1. Observador de orden completo para el modelo singular Windkessel de 3 elementos

Se retoma el modelo Windkessel de tres elementos descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_s \\ \dot{P}_{art} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} P_s \\ P_{art} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ r \end{bmatrix}}_B i(t) \quad (4.2)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} P_s \\ P_{art} \end{bmatrix}$$

donde la matriz E es singular (no invertible), $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son matrices conocidas obtenidas a través de la transformación del sistema singular y $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ y $y(t) \in \mathbb{R}^m$ son el vector de estados, la entrada y la salida respectivamente. El rango de E , $rank(E) = r$, donde $0 < r \leq n$ y n es el número de estados. Las variables del sistema representan: $x_1 = P_s$ y $x_2 = P_{art}$.

Las matrices del sistema están definidas por:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -0.7018 & 0 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ 0.0330 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Considere el modelo Windkessel descrito en la ecuación (4.2) donde los parámetros utilizados para realizar la simulación, se muestran en la Tabla 4.1. Se consideran valores de una persona en estado normal [Hlaváč and Holčík, 2004].

Tabla 4.1: Parámetros cardiovasculares¹

Parámetros	Normal	Unidades
R	0.79	$mmHg.s/ml$
C	1.222	$ml/mmHg$
r	0.056	$mmHg.s/ml$

El observador de orden completo para sistemas singulares tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Nz + L_1y + L_2y + Gu \\ \hat{x} &= z + by + Kdy \end{aligned} \quad (4.4)$$

A continuación se verifica que las condiciones para aplicar el observador de orden completo se cumplen:

$$(A1) \text{ rank}(E) = r < n \rightarrow \text{rank}(E) = 1 < 2$$

$$(A2) \text{ rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 2$$

Una vez que se cumple la condición **A2** se calculan las matrices a, b, c y d que satisfacen (3.17). Se utilizó Matlab R2016, mediante la descomposición de valores singulares de $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ obteniendo así las siguientes matrices ²:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

De acuerdo con lo planteado en el capítulo anterior, para obtener las ganancias del observador, es necesario solucionar las siguientes LMIs:

$$P^T = P > 0 \quad (4.6)$$

$$A^T a^T P + PaA + A^T c^T Q^T + QA - C^T R^T - RC < 0 \quad (4.7)$$

donde

$$Q = PK \quad (4.8)$$

$$R = PL_2 \quad (4.9)$$

²Los archivos correspondientes a esta simulación se encuentran ubicados en el directorio: D:MATLAB/OBSWK3COM del disco adjunto.

Utilizando la herramienta de cómputo YALMIP se solucionaron las LMIs (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9), y se obtuvieron las matrices que se muestran a continuación:

$$P = \begin{bmatrix} 4.281 & 0.000 \\ 0.000 & 4.281 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -8.638 \\ -7.136 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -0.1502 \\ 1.4273 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La estabilidad del observador se puede asegurar si la ecuación del error $\dot{e} = Ne$ es estable. Considerado $N = KcA + aA - L_2C$ se obtiene la siguiente matriz:

$$N = \begin{bmatrix} -0.500 & -0.166 \\ -0.166 & -0.500 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

con lo que se puede asegurar la estabilidad del sistema ya que los valores propios del observador, obtenidos a partir de N son estables, siendo estos: $\lambda_1 = -0.5000$, $\lambda_2 = -0.5000$.

El resto de las ganancias del observador se muestran a continuación y se obtuvieron siguiendo el procedimiento que se mostró en la sección 3.3.1, a partir de las ecuaciones (3.24), (3.29), (3.40) y (3.41) :

$$K = \begin{bmatrix} -0.2018 \\ -0.1667 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.6733 \\ 0.0055 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} -0.1667 \\ -0.5000 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -0.0351 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.1.1. Simulación 1. Observador de orden completo para el modelo Windkessel de 3 elementos

Objetivo. El objetivo de esta simulación es verificar la correcta estimación de los estados del sistema singular (4.2), utilizando el observador de orden completo (4.4) y que el desempeño del observador sea el adecuado cumpliendo con la convergencia del error a cero. Se verifica que el comportamiento del sistema cardiovascular sea el adecuado analizando los valores normales o ideales considerados para una persona sana (los valores de presión deben estar en el rango de: presión sistólica entre 80 y 120 mmHg y presión diastólica entre 60 y 80 mmHg).

Esta simulación se realizó de acuerdo al diagrama que se muestra en la Figura 4.1³.

³Los archivos correspondientes a esta simulación se encuentran ubicados en el directorio: D:MATLAB/OBSWK3COM del disco adjunto.

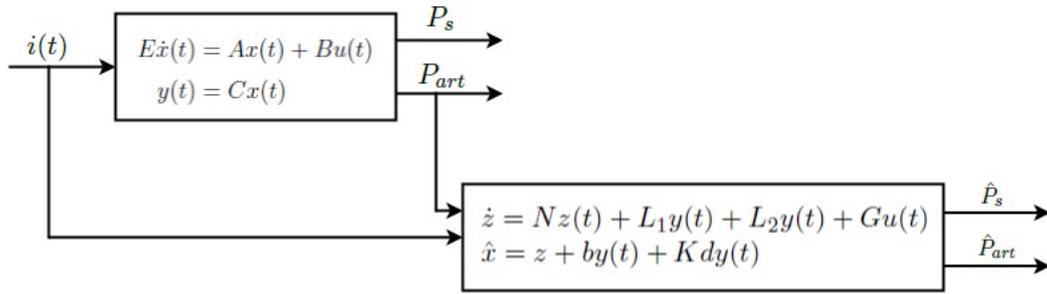


Figura 4.1: Diagrama a bloques de modelo con observador de orden completo

Las ganancias del observador se muestran en las ecuaciones (4.10), (4.11), (4.12). Se utilizó la herramienta de software MATLAB desarrollando un algoritmo programado en un archivo de texto en MATLAB (archivo.m). El método de integración para resolver las ecuaciones del observador fue el método de Euler de primer orden con un paso de integración de 0.0001 segundos. Cabe mencionar que las condiciones anteriores se consideran para todas las simulaciones.

Es importante recordar que las variables del sistema están representadas por: $x_1 = P_s$ y $x_2 = P_{art}$, mientras que $\hat{x}_1 = \hat{P}_s$ y $\hat{x}_2 = \hat{P}_{art}$ son los estados estimados por el observador.

Las condiciones iniciales del sistema fueron $x_1(0) = 80$ mmHg y $x_2(0) = 80$ mmHg, mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron $\hat{x}_1(0) = 60$ mmHg y $\hat{x}_2(0) = 70$ mmHg.

La señal de entrada que se utilizó está definida por la señal de flujo sanguíneo $i(t)$. Donde t es el tiempo en segundos, T_s es el tiempo que dura la sístole (contracción) en segundos y T es el tiempo que dura la diástole (relajación) en segundos [Bustamante et al., 2003]:

$$i(t) = \begin{cases} I_0 \sin^2\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) & \tau \in \langle 0, T_s \rangle \\ 0 & \tau \in \langle T_s, T \rangle \end{cases} \quad (4.13)$$

donde $I_0 = 530$ ml, $T_s = 0.3$ s y $T = 0.8$ s.

La Figura 4.2 muestra el comportamiento de la señal de entrada $i(t)$ que es el flujo sanguíneo expulsado del ventrículo izquierdo. La señal de flujo se divide en dos partes: la primera cuando el ventrículo abre la válvula aórtica y el flujo sanguíneo es de 530 mmHg y la segunda cuando la válvula está cerrada.

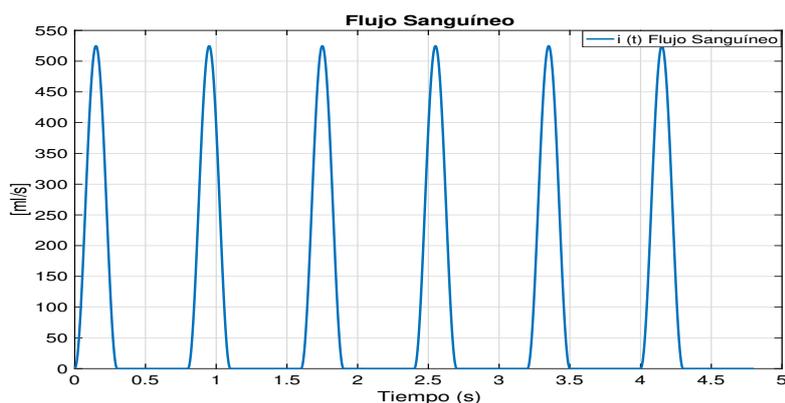


Figura 4.2: Flujo sanguíneo

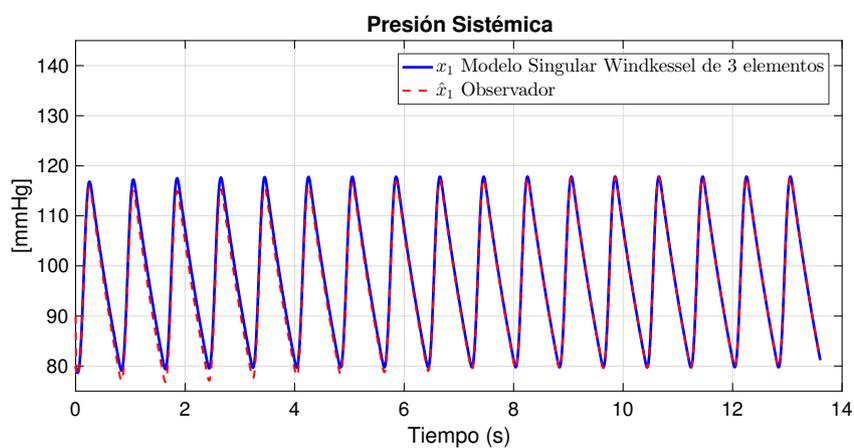


Figura 4.3: Gráfica de presión sistémica de una persona normotensa

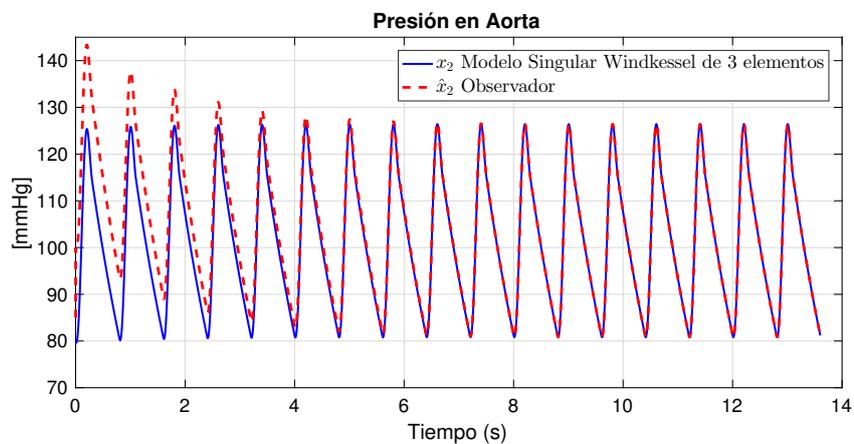
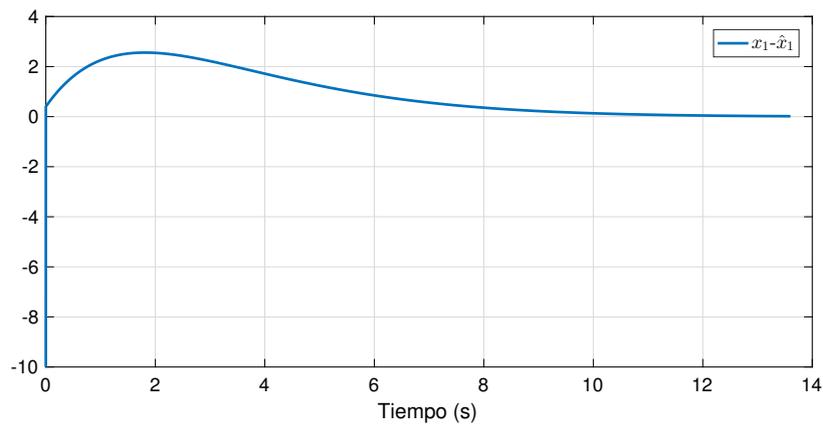
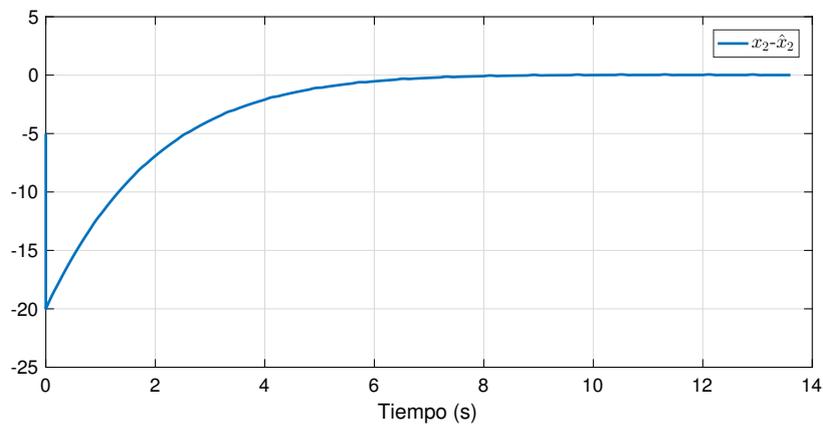


Figura 4.4: Gráfica de presión aórtica de una persona normotensa



(a)



(b)

Figura 4.5: Gráficas de error de convergencia del observador de orden completo

En la Figura 4.3 se muestra la presión sistémica para una persona sana con una frecuencia cardíaca de 75 pulsos por minuto. Se observa que la presión sistémica durante la sístole (contracción ventricular) es de 115 mmHg y durante la diástole (relajación ventricular) la presión es de 80 mmHg. Se muestra la convergencia del observador al sistema durante el primer ciclo.

En la Figura 4.4 se muestra la presión aórtica. Se observa que durante la contracción ventricular se alcanza una presión de 125 mmHg y durante la relajación del ventrículo izquierdo la presión sistólica es de 80 mmHg debido a que se abre la válvula aórtica.

En la Figura 4.5 se muestra el error de convergencia entre los estados del modelo singular Windkessel de tres elementos y los estados estimados por el observador de orden completo. De manera general, la estimación de los estados x_1 y x_2 presentan una convergencia asintóticamente a cero, los valores estimados por el observador tienden rápidamente a cero lo cual indica que el observador fue diseñado de manera adecuada. Se puede apreciar que

los valores máximos de error se presentan durante la convergencia del observador.

Es importante resaltar que una desventaja que se observa en el modelo Windkessel de tres elementos es que no se produce una muesca en la rama descendente de la curva de presión aórtica, conocida con el nombre de incisura dícrota. Esta muesca tiene gran importancia en el análisis de presiones porque marca el cierre de la válvula aórtica.

4.2. Observador de orden completo para el modelo singular Windkessel de 4 elementos

Las ecuaciones que describen el modelo Windkessel de cuatro elementos en su forma singular son:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_s \\ \dot{i}_L \\ \dot{P}_{art} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -r & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} P_s \\ i_L \\ P_{art} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 1 \\ r \end{bmatrix}}_{B} i(t) \quad (4.15)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} P_s \\ i_L \\ P_{art} \end{bmatrix}$$

donde la matriz E es singular (no invertible) ya que tiene una columna y una fila de ceros, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son matrices conocidas obtenidas a través de la transformación del sistema singular y $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ y $y(t) \in \mathbb{R}^m$ son el vector de estados, la entrada y la salida, respectivamente. El rango de E , $\text{rank}(E) = r$, donde $0 < r \leq n$ y n es el número de estados. Las variables del sistema representan: $x_1 = P_s$, $x_2 = i_L$ y $x_3 = P_{art}$.

Los parámetros utilizados para realizar la simulación, se muestran en la Tabla 4.2. Se consideran valores de una persona en estado normal.

Tabla 4.2: Parámetros cardiovasculares modelo de cuatro elementos.

Parámetros	Normal	Unidades
R	0.79	$mmHg.s/ml$
L	0.0051	$mmHg.s^2/ml$
C	1.222	$ml/mmHg$
r	0.056	$mmHg.s/ml$

Las matrices del sistema están definidas por:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -0.7018 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -0.0330 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ 1.0000 \\ 0.0330 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación se verifica que las condiciones para aplicar el observador de orden completo se cumplen:

$$(A1) \text{ rank}(E) = r > n \rightarrow \text{rank}(E) = 2 < 3$$

$$(A2) \text{ rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 3$$

Una vez que se cumplen las condiciones anteriores se verifica entonces que existe una matriz no singular Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

tal que

$$\begin{aligned} aE + bC &= I_n \\ cE + dC &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Entonces para los cálculos de las matrices a, b, c y d que satisfacen (4.18), se utilizó Matlab R2016, mediante la descomposición de valores singulares de $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ resultando así las siguientes matrices ⁴:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

El observador de orden completo para el sistema (4.15) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Nz + L_1y + L_2y + Gu \\ \hat{x} &= z + by + Kdy \end{aligned} \quad (4.20)$$

⁴Los archivos correspondientes a esta simulación se encuentran ubicados en el directorio: D:\MATLAB\Codigos Modelo Windkessel/Mod-Wink-4Elementos.m del disco adjunto.

De acuerdo con lo planteado en el capítulo anterior, para obtener las ganancias del observador, es necesario solucionar las siguientes LMI's:

$$P^T = P > 0 \quad (4.21)$$

$$A^T a^T P + PaA + A^T c^T Q^T + QA - C^T R^T - RC < 0 \quad (4.22)$$

donde

$$Q = PK \quad (4.23)$$

$$R = PL_2 \quad (4.24)$$

Utilizando la herramienta de software YALMILP se solucionaron las LMI's (4.21), (4.22), (4.23) y (4.24), y se obtuvieron las matrices que se muestran a continuación:

$$P = \begin{bmatrix} 1.0664 & -0.0301 & 0.0000 \\ -0.0301 & 0.0524 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0666 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -0.1572 \\ 0.3435 \\ -76.0649 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 75.9077 \\ -3.9162 \\ -75.5316 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La estabilidad del observador se puede asegurar determinando que la ecuación del error $\dot{e} = Ne$ sea estable. Calculando la matriz N a partir de la siguiente ecuación $N = KcA + aA - L_2C$ se obtiene:

$$N = \begin{bmatrix} -0.6855 & 0.0021 & -70.1704 \\ -6.5734 & -10.6123 & 41.0016 \\ 71.3141 & -3.9936 & -0.5000 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

con lo que se puede asegurar la estabilidad del sistema ya que los valores propios del observador, obtenidos a partir de N son estables, siendo estos: $\lambda_1 = -0.5728$, $\lambda_2 = -0.5728$, $\lambda_3 = -10.6522$.

El resto de las ganancias del observador se muestran a continuación y se obtuvieron siguiendo el procedimiento que se mostró en la sección 3.3.1, a partir de las ecuaciones (3.24), (3.29), (3.40) y (3.41):

$$K = \begin{bmatrix} 0.0380 \\ 6.5734 \\ -71.3141 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.8175 \\ 10.6123 \\ 3.9936 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} -70.1704 \\ 41.0016 \\ -0.5000 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 70.2084 \\ -34.4282 \\ -70.8141 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

4.2.1. Simulación 2. Observador de orden completo para el modelo singular Windkessel de cuatro elementos

Objetivo. El objetivo de esta simulación es verificar la correcta estimación de los estados del sistema singular y que el desempeño del observador sea el adecuado cumpliendo con la convergencia del error a cero.

Esta simulación se realizó de acuerdo al diagrama que se muestra en la Figura 4.6.

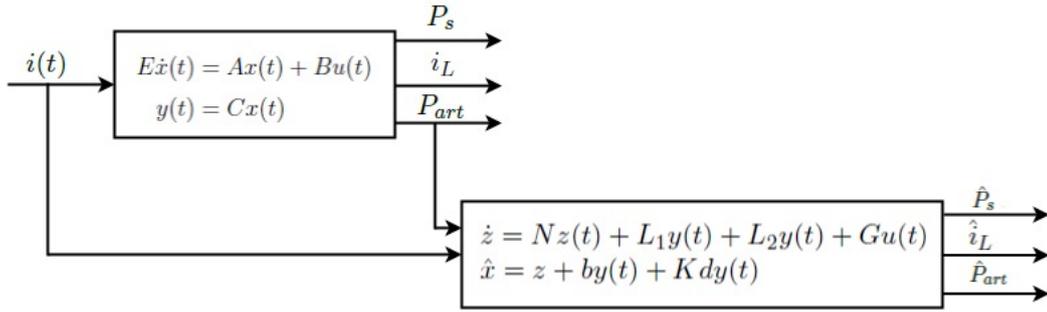


Figura 4.6: Diagrama a bloques del modelo con observador de orden completo

Para realizar la simulación se utilizó el modelo descrito en la Ec.(4.15) y el observador definido en la Ec.(4.20). Las ganancias del observador están definidas en las ecuaciones (4.25), (4.26), (4.27). Las condiciones iniciales del sistema fueron $x_1(0) = 80$ mmHg, $x_2(0) = 50$ ml/s y $x_3(0) = 80$ mmHg, mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron $\hat{x}_1(0) = 60$ mmHg, $\hat{x}_2(0) = 75$ ml/s y $\hat{x}_3(0) = 70$ mmHg.

La señal de entrada que se utilizó está definida por la misma señal de flujo sanguíneo $i(t)$ en la Ec. (4.13).

Los resultados de la simulación se muestran en las siguientes Figuras:

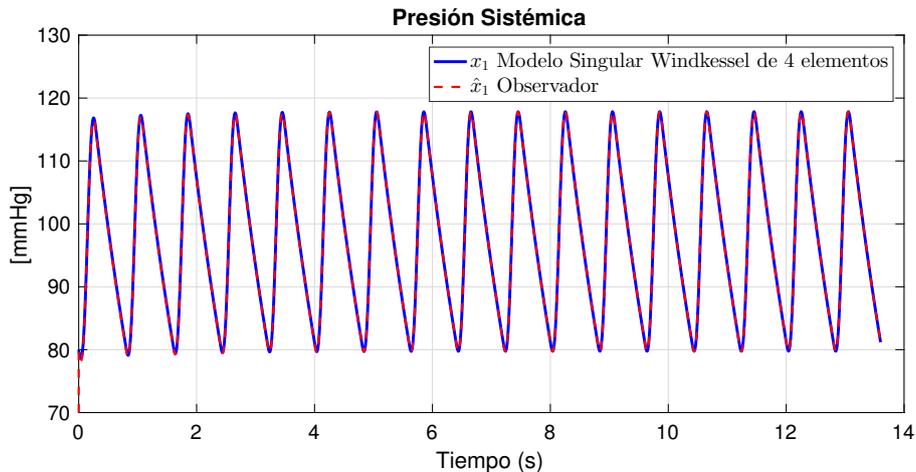


Figura 4.7: Gráfica de la presión sistémica del modelo Windkessel de 4 elementos

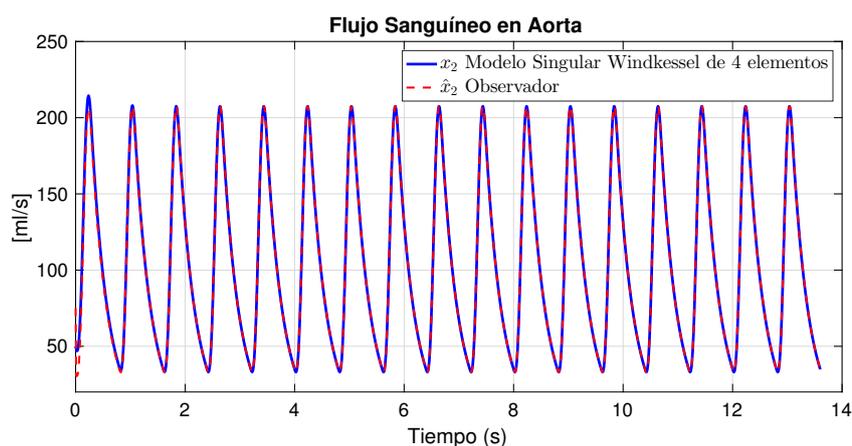
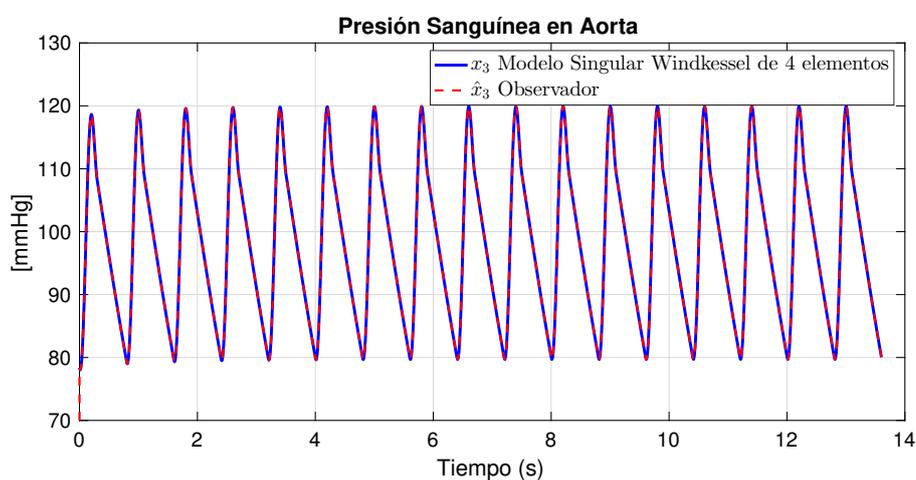


Figura 4.8: Gráficas de flujo sanguíneo en aorta



(a)

Figura 4.9: Gráficas de presión aórtica

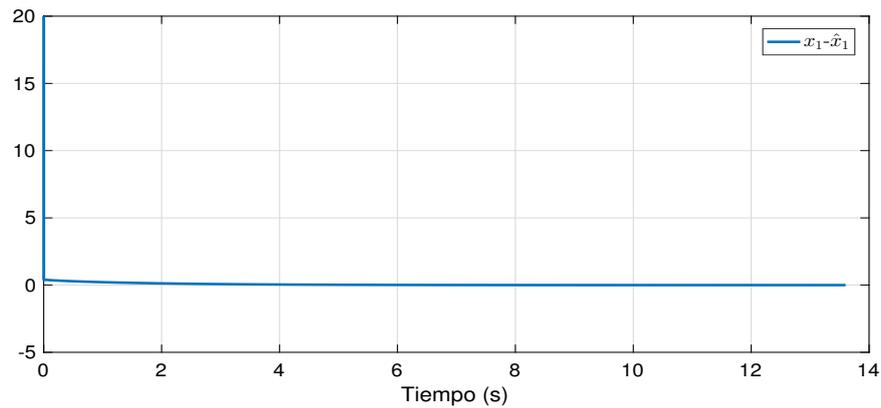
En la Figura 4.7 se muestra la dinámica de la presión sistémica (línea continua) para una persona sana con una frecuencia cardíaca de 75 pulsos por minuto, la presión sistémica está definida por la presión en los vasos sanguíneos (arterias y arteriolas). Se observa que la presión sistémica durante la sístole (contracción ventricular) es de 118 mmHg y durante la diástole (relajación ventricular) la presión es de 80 mmHg. Se aprecia que el observador (línea roja) muestra la convergencia del observador al sistema en un tiempo aproximado de 2 segundos.

En la Figura 4.8 se muestra el flujo aórtico que pasa a través de la válvula aórtica, se observa que durante la contracción ventricular alcanza los 200 ml y durante la relajación del ventrículo izquierdo el flujo es de 20 ml.

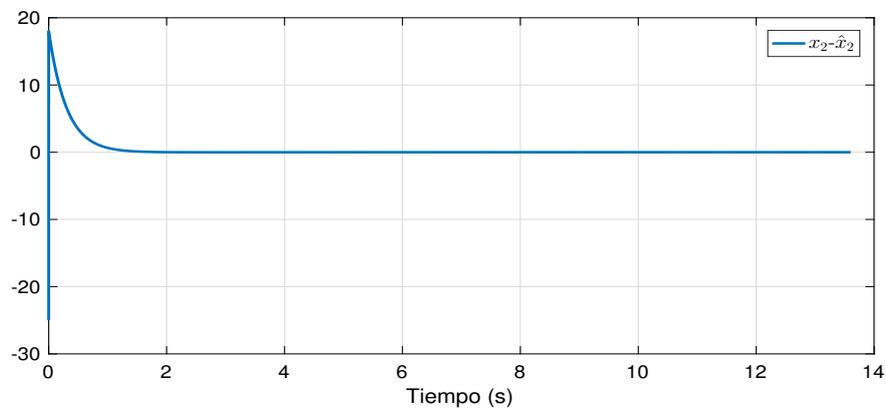
En la Figura 4.9 se muestra la presión aórtica. Se observa que durante la contracción ventricular alcanza una presión de 120 mmHg y durante la relajación del ventrículo izquier-

do es de 80 mmHg debido a que se abre la válvula aórtica. A mitad de la contracción y debido al cierre de la válvula aórtica, se produce una muesca en la rama descendente de la curva de presión aórtica, conocida con el nombre de incisura dicrota y marca el cierre de la válvula aórtica.

El error de convergencia entre los estados del modelo singular Windkessel y los estados estimados por el observador de orden completo se muestran en la Figura 4.10. Los errores de convergencia muestran que el error máximo se presenta durante la convergencia del observador a partir de las condiciones iniciales de cada uno de los estados a los estados del sistema. Los valores estimados por el observador tienden rápidamente a cero.



(a)



(b)

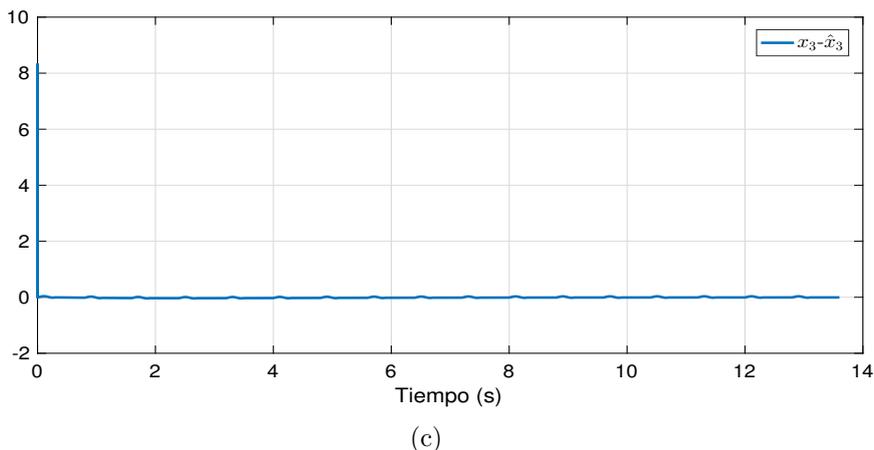


Figura 4.10: Error de convergencia del observador de orden completo

4.2.2. Simulación 3. Observador de orden completo con perturbación para modelo Windkessel de cuatro elementos

Objetivo. El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto funcionamiento del observador de orden completo para sistemas singulares aun cuando exista una perturbación en el sistema.

Esta simulación se realizó de acuerdo al diagrama que se muestra en la Fig.4.1. En esta simulación se consideró una perturbación en el estado $x_1 = P_s$ (presión sistémica). Esta perturbación en la presión podría presentarse momentánea o permanentemente. Ocurre una perturbación momentánea cuando la persona consume algún tipo de alimento o bebida que causa un aumento de presión (bebidas energéticas, excesos de sal, chocolate, entre otros); también ocurre un incremento momentáneo de presión cuando una persona sufre un fuerte apretón en el cuello (estrangulación), esto provoca que el bombeo de sangre sea mayor para compensar la falta de oxigenación en la parte superior del cuerpo (cabeza). El incremento permanente de presión puede deberse a un estrechamiento de la aorta (coartación de la aorta), causado por enfermedades de los riñones que involucran estrechamiento de la arteria renal (estenosis), o por trastornos endocrinológicos.

Para realizar la simulación se utilizó el modelo descrito en la Ec.(4.15) y el observador definido en la Ec.(4.20). Las condiciones iniciales del sistema fueron $x_1(0) = 80mmHg$, $x_2(0) = 50ml/s$ y $x_3(0) = 80mmHg$, mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron $\hat{x}_1(0) = 60mmHg$, $\hat{x}_2(0) = 75ml/s$ y $\hat{x}_3(0) = 70mmHg$.

La perturbación que se consideró en el estado $x_1 = P_s$ (presión sistémica) se presenta del segundo 4 al 10, con la finalidad de observar el comportamiento del observador. Esta simulación se realizó de acuerdo al diagrama que se muestra en la Figura 4.11 donde w es la perturbación.

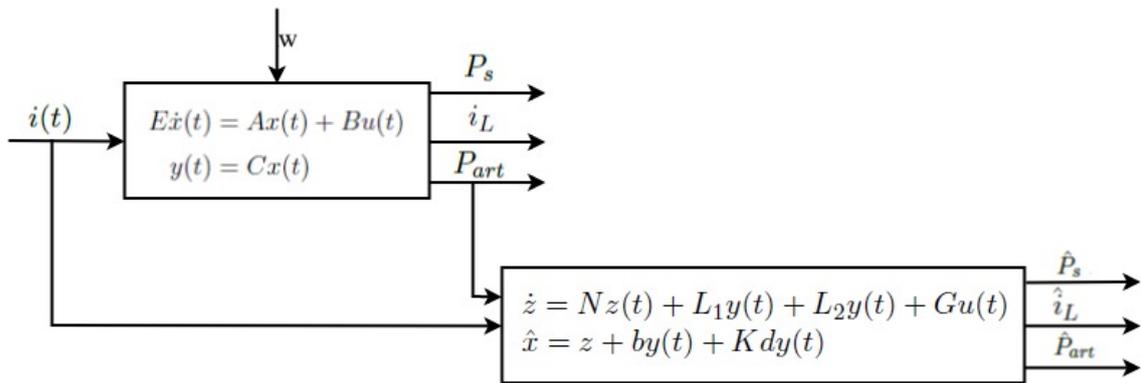
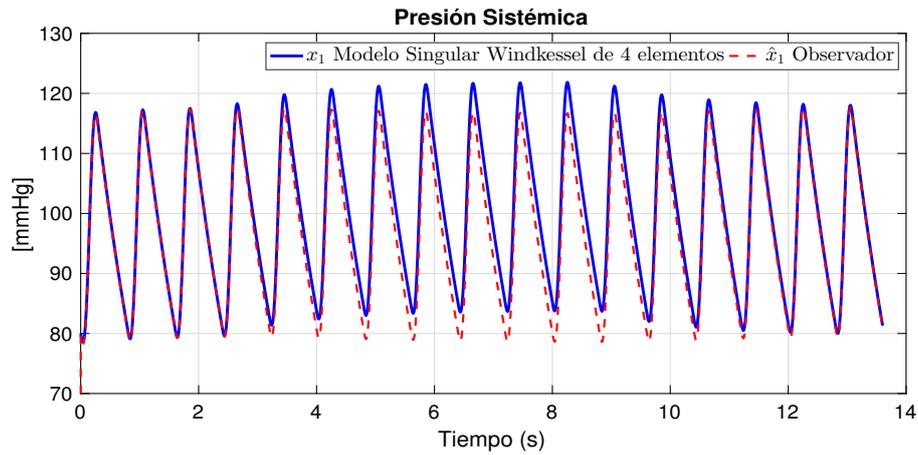
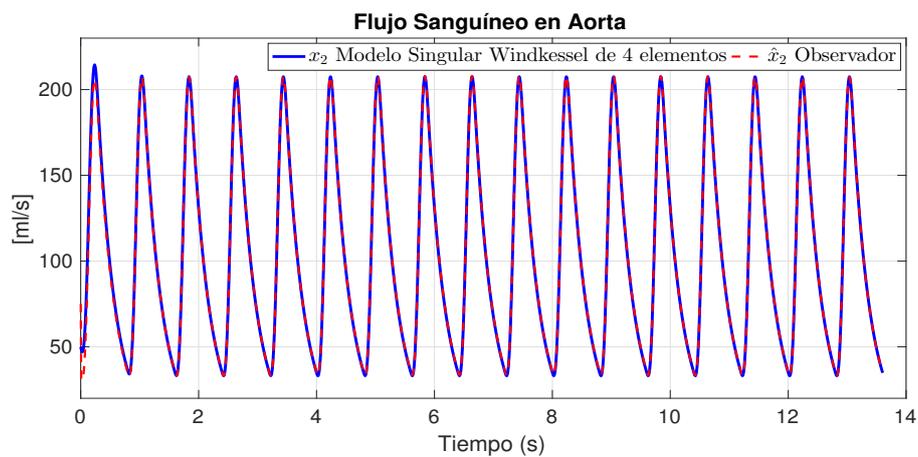


Figura 4.11: Diagrama a bloques de modelo con observador de orden completo

La señal de entrada que se utilizó es la misma definida en las simulaciones anteriores. Los resultados de la simulación se muestran en las siguientes Figuras:



(a)



(b)

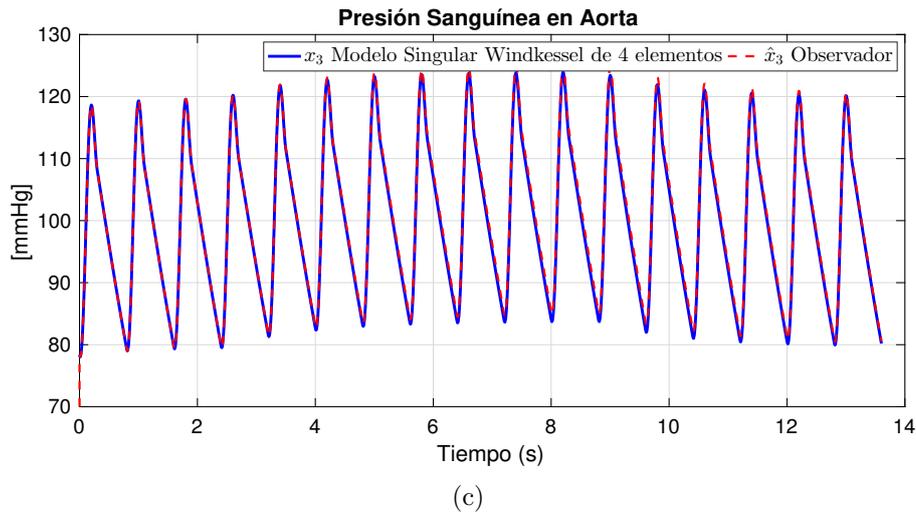
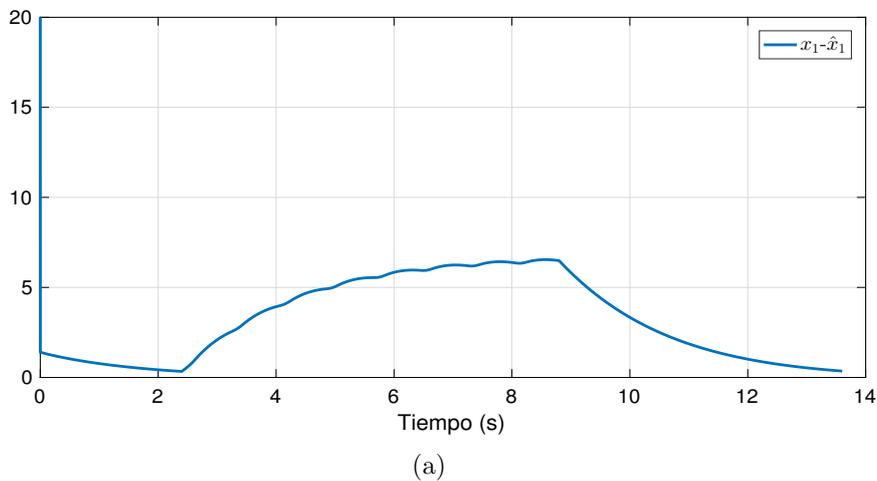


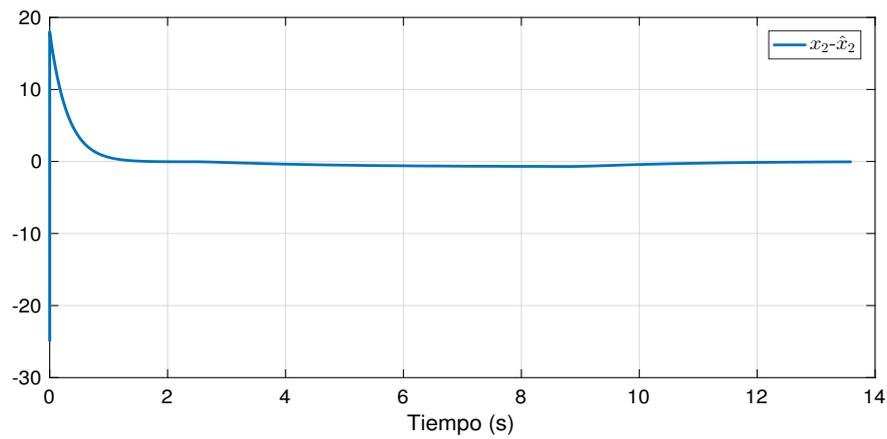
Figura 4.12: Gráfica de presiones del sistema cardiovascular de una persona normotensa con perturbación.

En la Figura 4.12(a) se observa el aumento en la presión sistémica debido a la perturbación, durante la sístole. La presión es de 118 mmHg y durante la diástole la presión es de 80 mmHg.

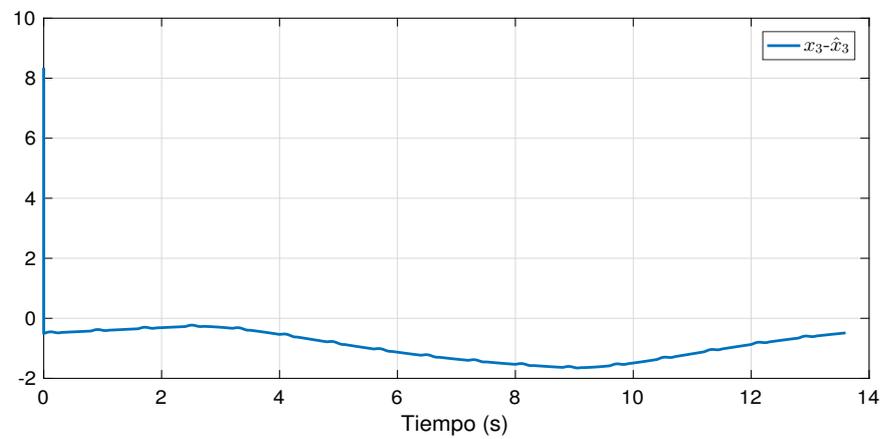
En la Figura 4.12(b) se observa un decremento en el flujo aórtico de 3ml durante la sístole ante la presencia de la perturbación. En la Figura 4.12(c) también se observa como consecuencia el aumento de la presión aórtica. Durante la sístole la presión es de 125 mmHg y durante la diástole, la presión es de 84.9 mmHg.

El error de convergencia entre los estados del modelo singular Windkessel y los estados estimados por el observador de orden completo cuando se presenta una perturbación se muestran en la Figura 4.13. Se observa que cuando se presenta la perturbación, la presión sanguínea en la arteria aorta y la presión sistémica aumenta mientras que el flujo sanguíneo no sufre alteración debido a que el sistema circulatorio trata de mantener el flujo sanguíneo a pesar de un aumento de presiones.





(b)



(c)

Figura 4.13: Error de convergencia del observador de orden completo con perturbación.

4.3. Observador de orden reducido para el modelo singular Windkessel de cuatro elementos

En esta sección se presenta el diseño de un observador de orden reducido para el sistema singular Windkessel de cuatro elementos. Considere el modelo descrito en la ecuación (4.15).

De acuerdo con lo expuesto en la sección 3.3.2 el observador de orden reducido para el modelo Windkessel tiene la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \Pi\omega + Ly + Hu \\ \hat{x} &= M\omega + Fy \end{aligned} \tag{4.28}$$

A continuación se verifica que las condiciones para aplicar el observador de orden reducido se cumplen ⁵:

$$(A1) \text{ rank}(E) = r < n \rightarrow \text{rank}(E) = 1 < 3$$

$$(A2) \text{ rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 3$$

dado que estas condiciones se cumplen al ser $n = 3$, no es necesario transformar el sistema.

Para poder aplicar el observador de orden reducido es necesario verificar las siguientes condiciones de acuerdo al procedimiento planteado en la sección 3.3.2.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = 5$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = 2$$

Una vez que el sistema satisface las condiciones anteriores se obtienen las ganancias del observador.

El orden del observador μ está determinado por $\mu = n - \text{rank}(C)$, siendo en nuestro caso $\mu = 1$ lo que indica que el observador solo estimará 1 estado del sistema Windkessel.

El problema es ahora calcular las ganancias del observador Π , L , H , M y F , que garanticen la convergencia del observador (4.28).

Utilizando los parámetros de la Tabla 4.2 se calculan las matrices del observador singular de orden reducido [Kind et al., 2010].

A continuación se parte de la definición de la matriz $R \in \mathbb{R}^{n-q \times n}$ que es una matriz arbitraria tal que los valores propios de la matriz Π sean estables y cuyo rango es igual al número de filas y Z es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas para encontrar la matriz T .

Entonces, tenemos que

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⁵Los archivos correspondientes a esta simulación se encuentran ubicados en el directorio: D:MATLAB/OBSWK4COM del disco adjunto.

La estabilidad del observador se determina asegurando que Π sea estable, siendo $\Pi = TA_0M$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\Pi = \begin{bmatrix} -1.7018 & 0.0165 \\ 0 & -6.6000 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

con lo que se puede asegurar la convergencia del observador de orden reducido, ya que los valores propios de Π obtenidos se ubican en el semiplano izquierdo, siendo estos: $\lambda_1 = -1.7018$ y $\lambda_2 = -6.6000$.

Al resolver la ecuación (3.50) se pueden solucionar las ecuaciones (3.47), (3.52), (3.53), (3.58) y (3.59) con lo que se obtienen las siguientes matrices:

$$T = \begin{bmatrix} -1.000 & 0 & 1.000 \\ 0 & -13.200 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -0.6337 \\ -13.2000 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0 \\ 0 & -0.5000 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} -1.7018 & 0.0165 \\ 0 & -6.6000 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

4.3.1. Simulación 4. Observador de orden reducido para modelo Windkessel de cuatro elementos

Objetivo. El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto desempeño de la estimación de los estados del sistema singular descrito en la ecuación (4.2), utilizando el observador de orden reducido de la ecuación (4.28) diseñado con el modelo singular Windkessel.

Esta simulación se realizó de acuerdo al diagrama que se muestra en la Fig.4.14.

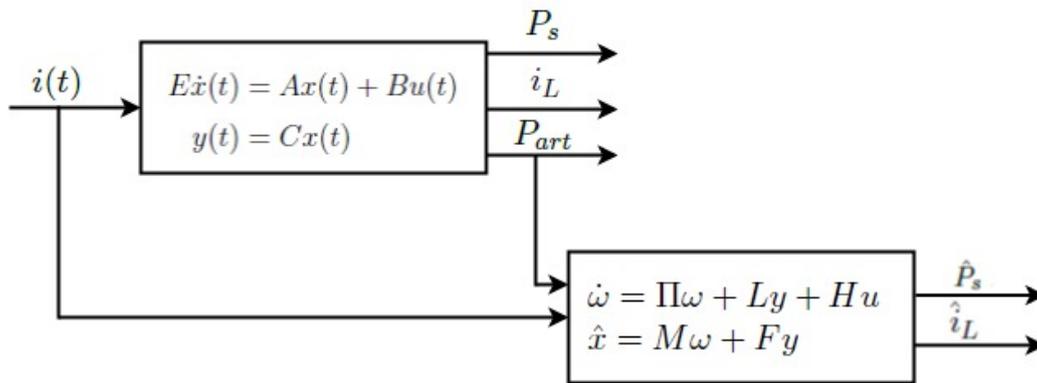
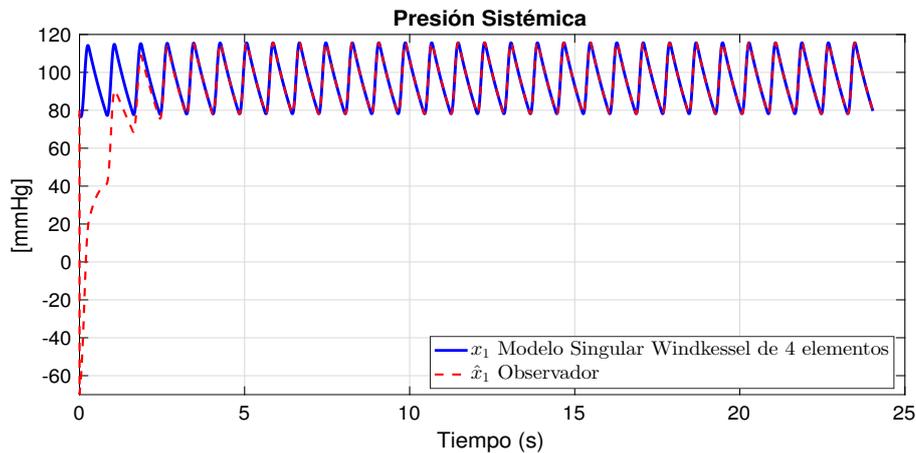


Figura 4.14: Diagrama a bloques de modelo Windkessel de 4 elementos y observador de orden reducido

Para realizar la simulación se utilizó el modelo descrito en la Ec.(4.2) y el observador definido en la Ec.(4.28). Las ganancias del observador están definidas en las ecuaciones (4.30) y (4.31). Se utilizó la herramienta de software MATLAB desarrollando un algoritmo programado en un archivo de script (archivo.m).

Las condiciones iniciales del sistema singular fueron; $x_1(0) = 78mmHg$, $x_2(0) = 30ml/s$ y $x_3 = 77.01mmHg$, mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron: $\hat{x}_1(0) = 80mmHg$ y $\hat{x}_2(0) = 80ml/s$. Donde las variables del sistema representan: $x_1 = P_s(t)$, $x_2 = i_L(t)$, y $x_3 = P_{art}(t)$.

La señal de entrada $i(t)$ es la misma utilizada en la simulaciones anteriores.



(a)

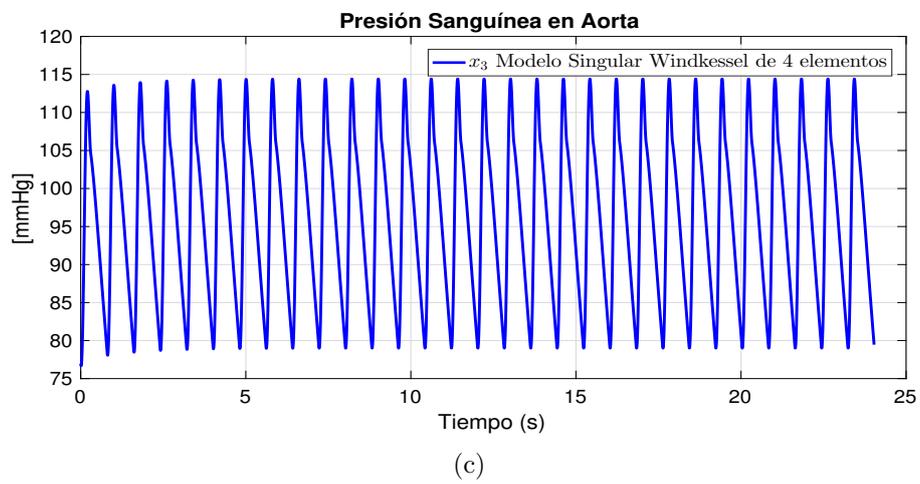
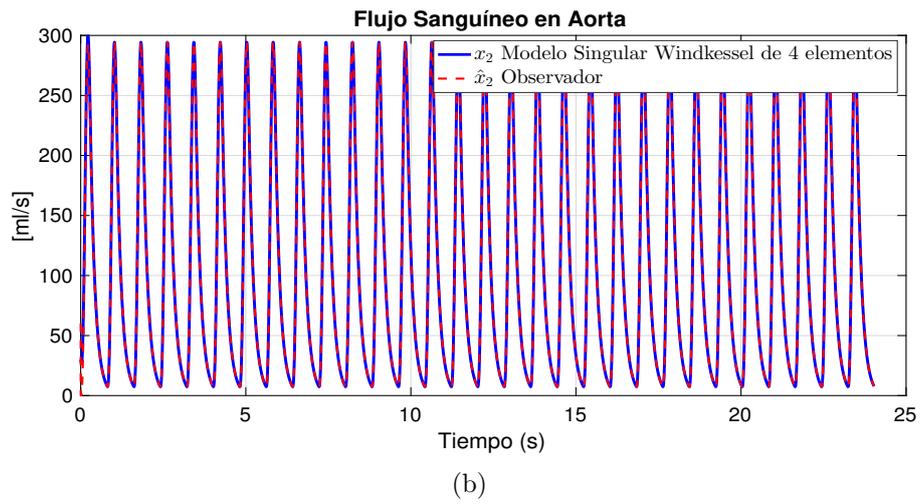
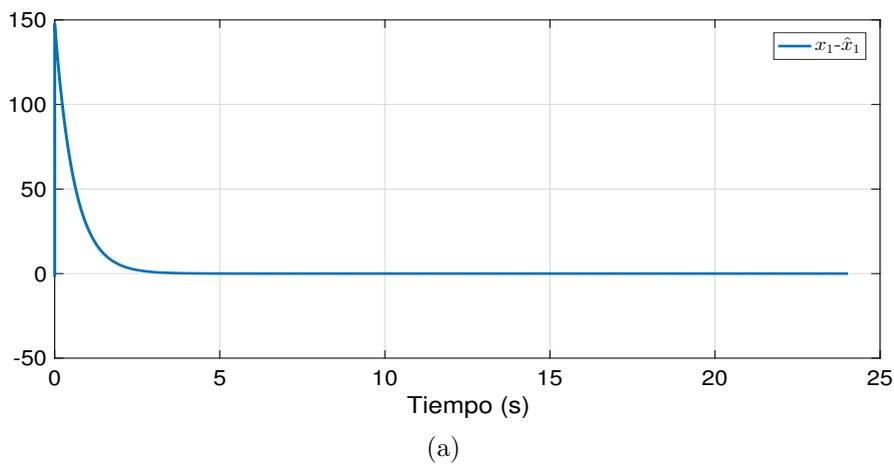


Figura 4.15: Gráfica de presiones del modelo y el observador de orden reducido.



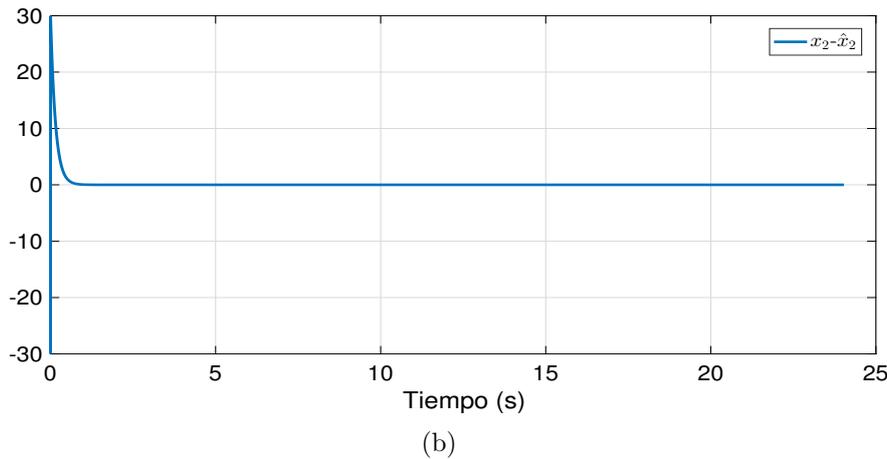


Figura 4.16: Error de convergencia del observador de orden reducido.

En las gráficas de la Figura 4.15(a) y 4.15(b) se comparan los estados del sistema singular Windkessel y los estados estimados por el observador. Dado que es un observador de orden reducido, solamente se estiman los estados no disponibles a la salida, siendo estos x_1 y x_2 . De manera general los estados del observador \hat{x}_1 y \hat{x}_2 presentan una buena estimación, convergiendo adecuadamente al valor de los estados del modelo Windkessel.

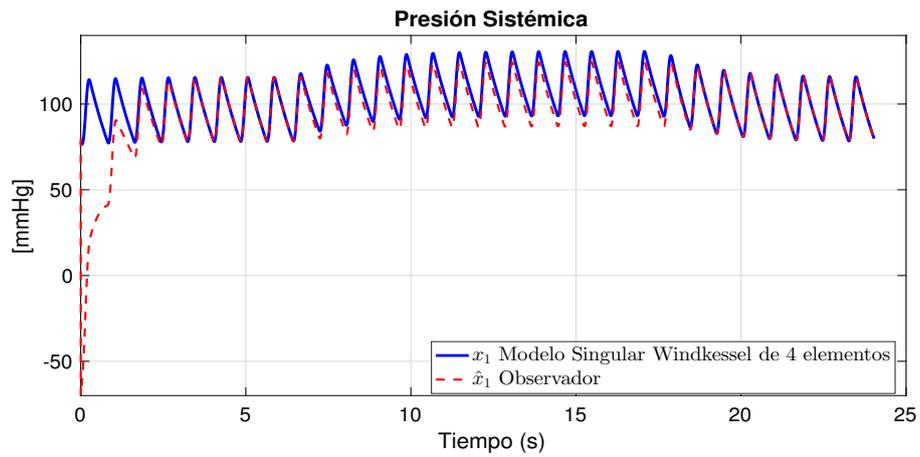
En la Figura 4.16 se muestran los errores de estimación. Las diferencias de error entre los valores del modelo Windkessel y los valores estimados por el observador tienden rápidamente a cero durante los cuatro primeros ciclos cardíacos para x_1 y en el primer ciclo cardíaco para x_2 , lo cual indica que el observador diseñado funciona de manera adecuada.

4.3.2. Simulación 5. Observador de orden reducido para el modelo singular Windkessel con perturbación

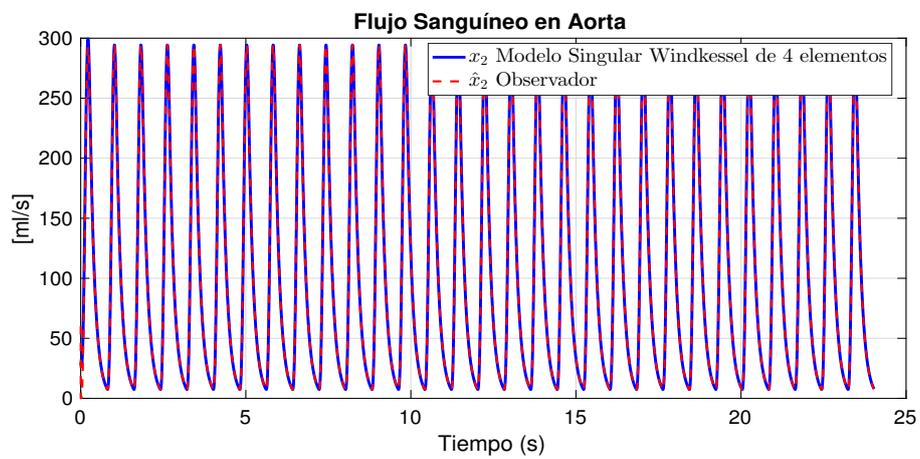
Objetivo. El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto desempeño de la estimación de los estados del sistema singular descrito en la ecuación (4.2), utilizando el observador de orden reducido de la ecuación (4.28) diseñado con el modelo singular Windkessel cuando existe la presencia de una perturbación en el sistema.

Para realizar la simulación se utilizó el modelo descrito en la Ec.(4.2) y el observador definido en la Ec.(4.28). Las ganancias del observador están definidas en las ecuaciones (4.30) y (4.31).

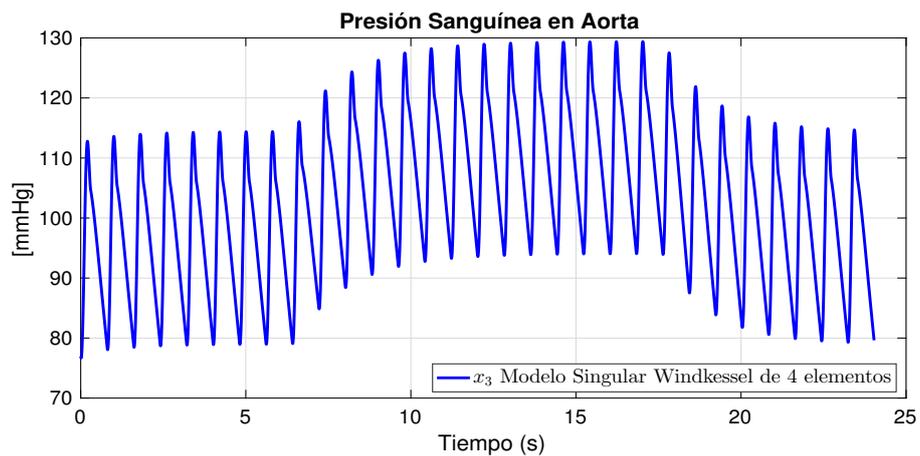
Las condiciones iniciales del sistema singular fueron; $x_1(0) = 78$ mmHg, $x_2(0) = 30$ ml/s y $x_3 = 77.01$ mmHg, mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron: $\hat{x}_1(0) = 80$ mmHg y $\hat{x}_2(0) = 80$ ml/s.



(a)

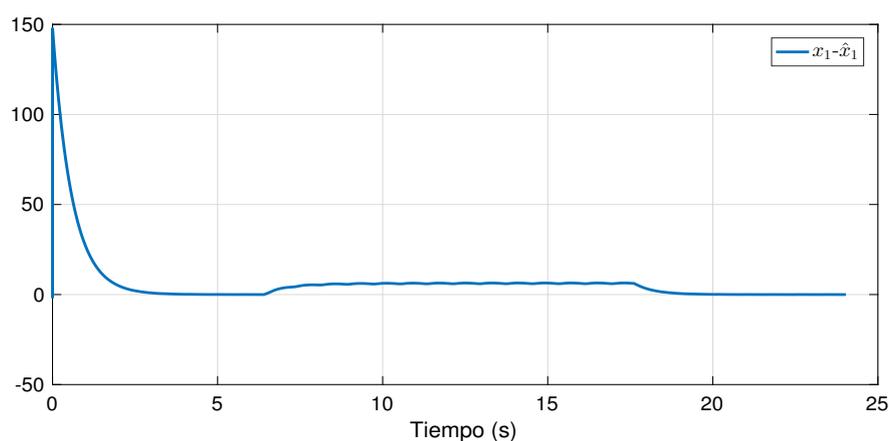


(b)

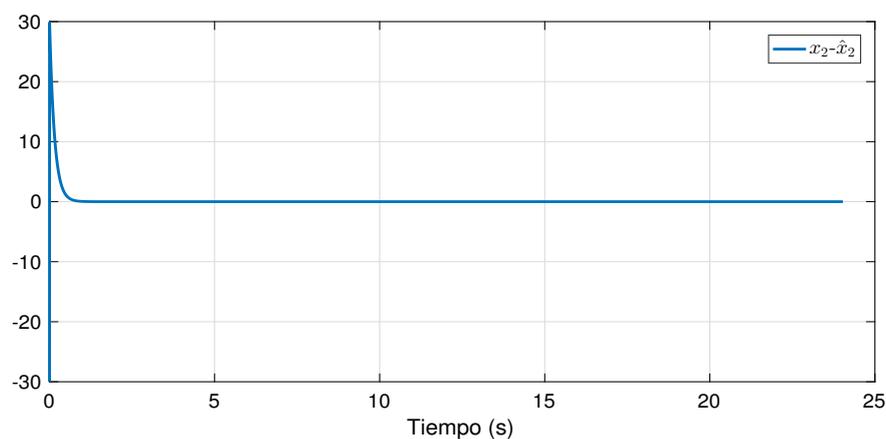


(c)

Figura 4.17: Gráfica de presiones del sistema cardiovascular de una persona normotensa con perturbación provocada por estrangulación en la arteria carótida.



(a)



(b)

Figura 4.18: Error de estimación del observador de orden reducido con perturbación.

En la Figura 4.18 se muestra el error de convergencia de los estados estimados por el observador considerando una perturbación en la arteria carótida. Las diferencias de error entre los valores del modelo Windkessel y los valores estimados por el observador tienden rápidamente a cero. Del ciclo 8 al ciclo 24 que se presenta la perturbación, el error de estimación es notorio, pero la convergencia del observador es rápida, lo que indica que el observador diseñado funciona de manera adecuada.

4.4. Detección de anomalías en el comportamiento del sistema cardiovascular

Existen varios factores que aumentan el riesgo de desarrollar alguna enfermedad cardiovascular, muchos de los cuales son modificables (aquellos que se pueden prevenir, eliminar

o controlar). Entre los cuales se encuentran: niveles elevados de colesterol y triglicéridos en la sangre, la presión elevada, entre otras.

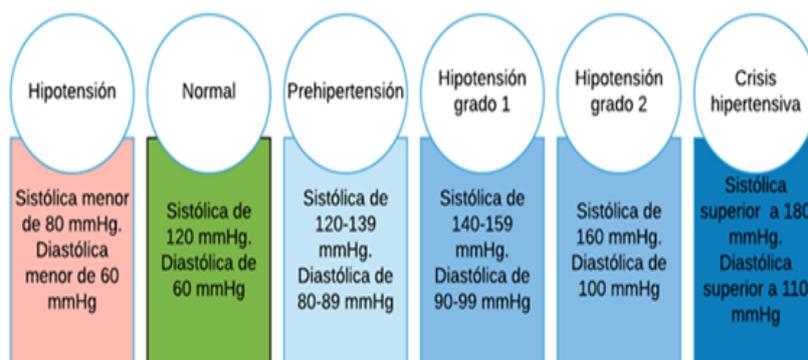


Figura 4.19: Rangos de presión arterial.

En las siguientes simulaciones se pretende ilustrar el uso de los observadores diseñados anteriormente (en particular, el observador de orden completo) para la detección de anomalías del sistema cardiovascular.

4.4.1. Simulación 6. Detección de presión arterial alta (Hipertensión Tipo 1)

Objetivo. El objetivo de esta simulación es analizar el comportamiento de sistema cardiovascular a partir del análisis de presión y con ello poder estimar cuando una persona presenta algún comportamiento anormal en el sistema. Los parámetros a utilizar para estas pruebas se muestran en la Tabla 4.3, [Hlaváč and Holčík, 2004], [Kind et al., 2010], [Hou and Muller, 1999].

Tabla 4.3: Parámetros de modelos Windkessel con diferentes estados de presión

Parámetro	Normal	Hipotensa	Hipertensiva	Unidades
R	0.95	0.6	0.02	$mmHg.s/ml$
L	0.01	0.005	1.4	$ml/mmHg$
C	1.5	2	0.07	$mmHg.s/ml$
r	0.033	0.02	0.05	$mmHg.s^2/ml$

Esta simulación se realizó de acuerdo al diagrama que se muestra en la Figura 4.20.

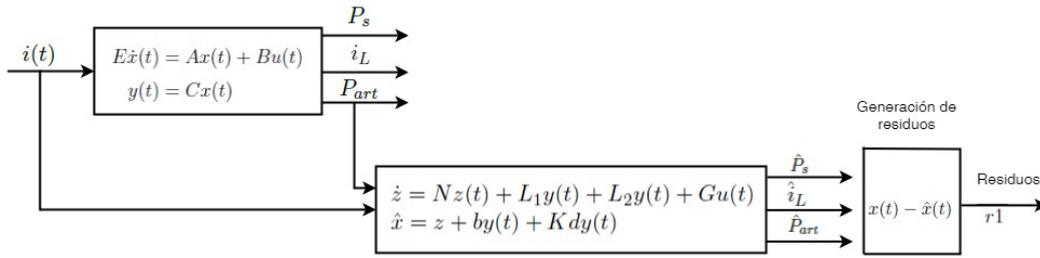


Figura 4.20: Diagrama a bloques del modelo con observador de orden completo

Diseño del residuo

Se deben considerar el número de anomalías a ser analizadas y el número de puntos de operación para el diseño de un banco de residuos. Se usan rangos de operación con valores entre 80 mmHg para la presión diastólica y 120 mmHg para la presión sistólica, estos son los rangos normales en los que se encuentra la presión sanguínea de una persona sana como se muestra en la Figura 4.19.

Para simular la anomalía se consideró un aumento en la resistencia periférica total y una disminución en la compliancia arterial después del segundo 15.

Con la finalidad de mostrar el procedimiento propuesto, se estableció un escenario en donde inicialmente se consideró una condición normal (caso 1 – sistema sin anomalía) y posteriormente se consideró un incremento de presión arterial (caso 2). Tal como se mencionó anteriormente, los rangos de presión de una persona sana se consideran como $P_{diast} \leq 80$ mmHg y $P_{sis} \geq 120$ mmHg, para las presiones diastólica y sistólica, respectivamente. En la Tabla 4.4 se presentan los escenarios de prueba.

Tabla 4.4: Escenario de prueba

Escenario	Descripción		Respuesta
Caso 1	Sistema sin anomalía	$P_{diast} \leq P_{art} \leq P_{sis}$	$r1 = x_3 - \hat{x}_3 = 0 \rightarrow r1 = 0$
Caso 2	Aumento de presión arterial	$P_{diast} \leq P_{sis} \leq P_{art}$	$r1 = x_3 - \hat{x}_3 \neq 0 \rightarrow r1 < -1$

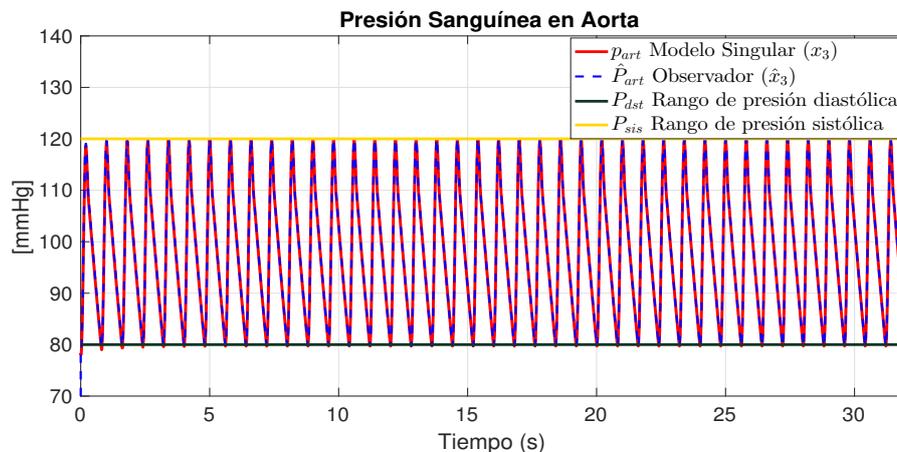
La matriz de incidencias de anomalías que muestra los resultados del residuo se representa en la tabla 4.5. Donde F1 representa la anomalía en la presión de la persona, y será \checkmark cuando el residuo sea insensible a la anomalía correspondiente (presión normal), mientras que el símbolo \emptyset indica sensibilidad a la anomalía en la presión sanguínea (aumento de presión).

Las características del generador de residuos diseñado se presenta en la siguiente tabla:

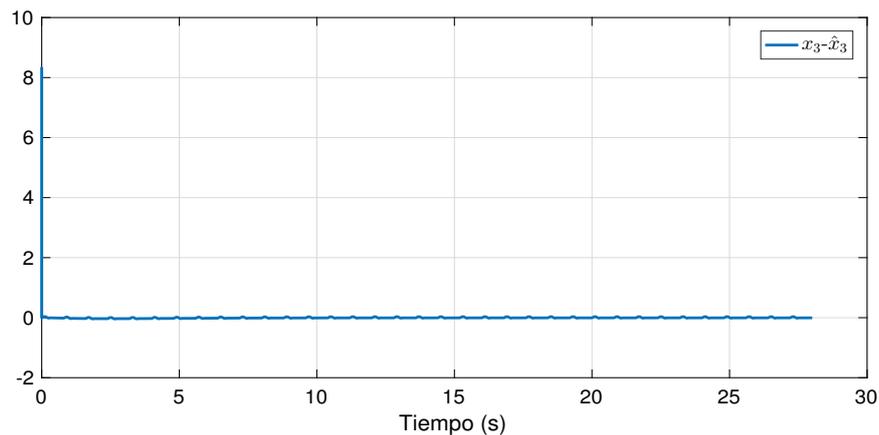
Tabla 4.5: Matriz de incidencia de fallas para una persona con aumento de presión.

Residuo r_1	Falla F_1
0	✓
< -1	∅

Los resultados del caso 1, considerado el caso con ausencia de anomalías, se muestran en la siguiente simulación. La Figura 4.21(a) muestra el comportamiento de la presión aórtica de una persona sin problemas en la presión sanguínea. Como se observa, la presión se encuentra dentro del rango de presión normal, 120 mmHg y 80 mmHg. La Figura 4.21(b) muestra el residuo r_1 , y como debería ser en este caso, se mantiene en cero.



(a) Respuesta de la presión aórtica sin anomalía

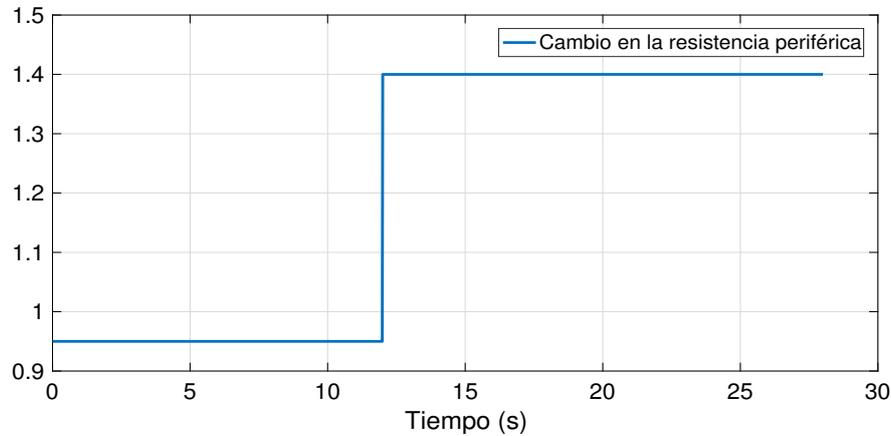


(b) Respuesta del Residuo 1

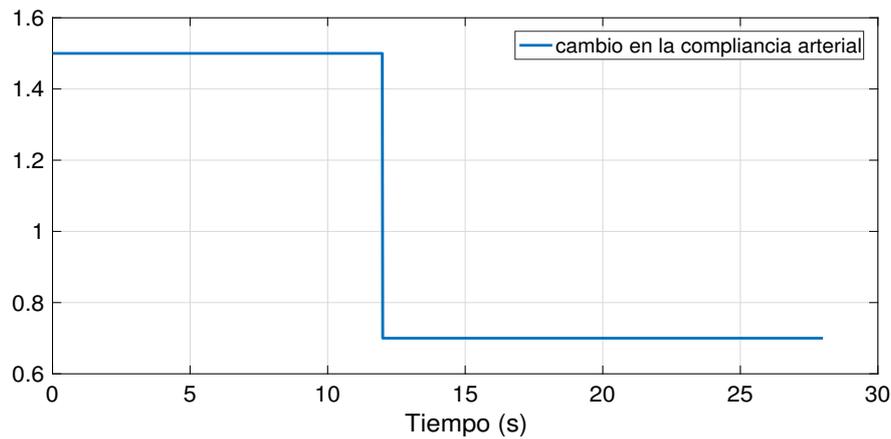
Figura 4.21: Residuo 1 sin anomalía

La siguiente simulación presenta el caso 2, considerando una presencia de anomalía; para ello se asume un cambio en la resistencia periférica total y compliancia arterial (ver

Figura 4.22), situaciones que provocan un aumento de presión.



(a) cambio en la resistencia periférica total

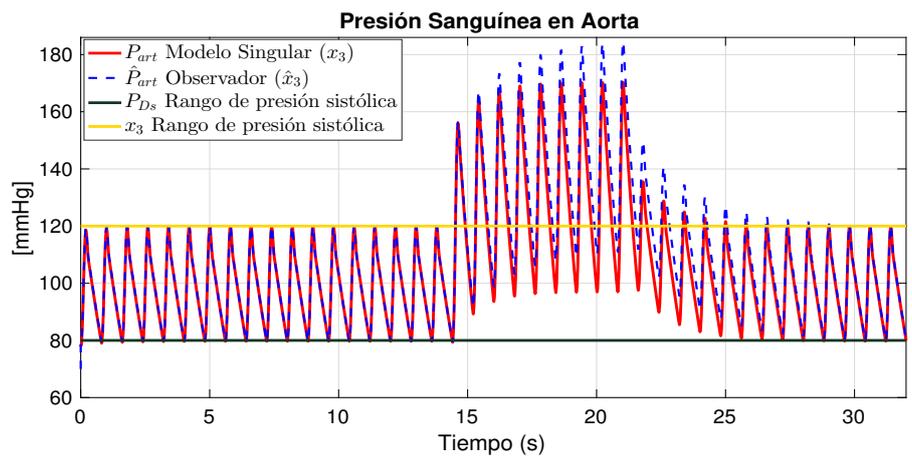


(b) cambio en la compliancia arterial

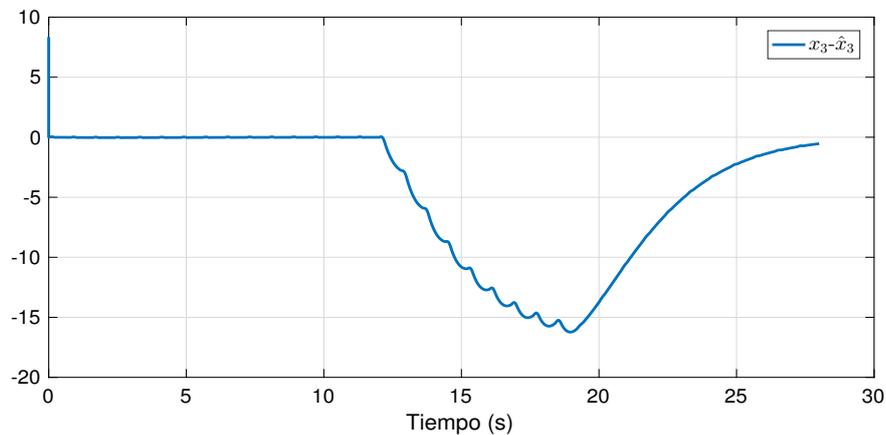
Figura 4.22: Gráficas de cambio en la resistencia periférica total y compliancia arterial

En la Figura 4.23(a) se observa el comportamiento del flujo sanguíneo al presentarse un cambio de resistencia periférica total y compliancia arterial. La causa de este cambio puede ocurrir cuando se acumula placa en las venas o arterias que está compuesta por grasas, colesterol, calcio y otras sustancias que se encuentran en la sangre. Con el tiempo, la placa se endurece y se estrechan las arterias (padecimiento conocido como arteriosclerosis). Se muestra como al cambiar la resistencia periférica total y la compliancia la presión aórtica aumenta.

En la Figura 4.23(b) se observa que el residuo presenta una variación con respecto a cero ocasionada por el aumento de la presión sanguínea. Es claro que la presencia de una anomalía en el comportamiento del sistema cardiovascular podría ser detectada a partir del estudio de los residuos entre el sistema real y el observador diseñado.



(a) Respuesta de la presión aórtica con anomalía



(b) Respuesta del Residuo 1 en el caso 1 con anomalía

Figura 4.23: Residuo 1 con anomalía

4.4.2. Simulación 7. Detección de Presión arterial baja (Hipotensión)

La compliancia es una de las propiedades más importantes de la pared arterial, es el cambio de volumen de los vasos sanguíneos. La alteración de la compliancia está asociada a la hipotensión, debido a que la eyección cardíaca es amortiguada principalmente en la aorta, donde rige más del 60% de la compliancia arterial. En la siguiente simulación se presenta el cambio en la compliancia arterial y la disminución de la resistencia periférica total.

Objetivo. El objetivo de esta simulación es analizar el comportamiento del sistema cardiovascular a partir del análisis de la presión arterial y con ello poder estimar cuando una persona presenta algún comportamiento anormal en el sistema.

Esta simulación se realizó de acuerdo al diagrama que se muestra en la Figura 4.24.

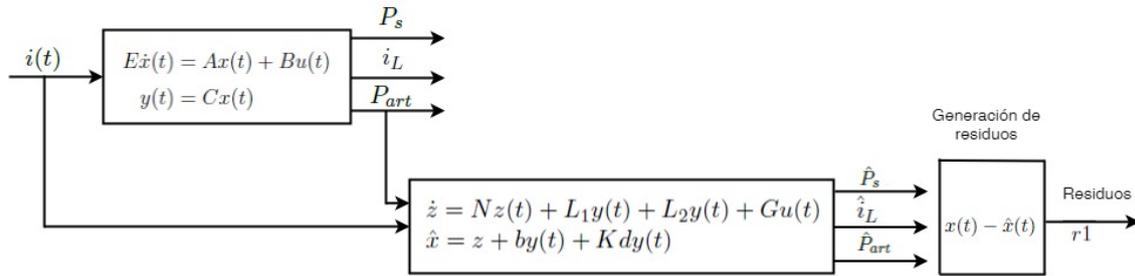


Figura 4.24: Diagrama a bloques del modelo con observador de orden completo

Diseño del residuo

Con la finalidad de mostrar el procedimiento propuesto, se estableció un escenario en donde inicialmente se consideró condición normal (caso 1 – sistema sin anomalía) y posteriormente se consideró una disminución de presión arterial (caso 2). Para el escenario, los rangos de presión de una persona sana se consideran como $P_{diast} \geq 80$ mmHg y $P_{sis} \leq 120$ mmHg, para las presiones diastólica y sistólica, respectivamente. En la Tabla 4.6 se presentan el escenario de prueba con los casos de estudio.

Tabla 4.6: Escenario de prueba

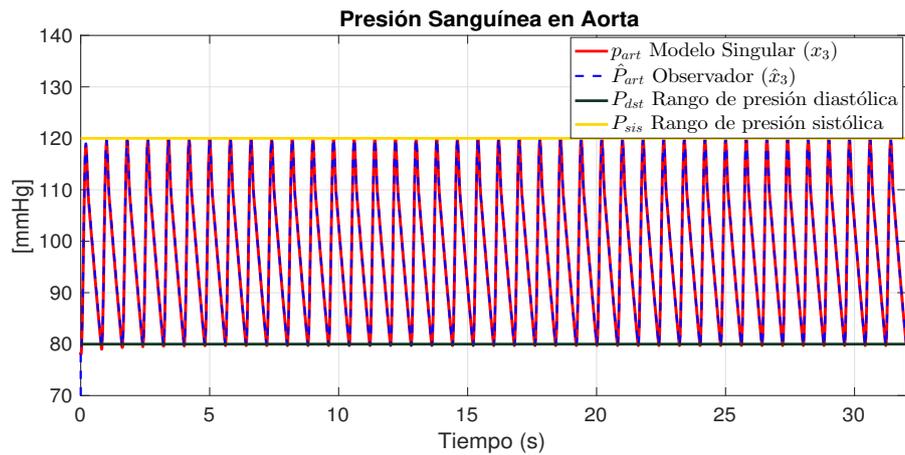
Escenario	Descripción		Respuesta
Caso 1	Sistema sin anomalía	$P_{diast} \leq P_{art} \leq P_{sis}$	$r1 = x_3 - \hat{x}_3 = 0 \rightarrow r1 = 0$
Caso 2	baja de presión arterial	$P_{sis} \geq P_{diast} \geq P_{art}$	$r1 = x_3 - \hat{x}_3 > -1 \rightarrow r1 \geq 1$

La matriz de incidencias de anomalías que muestra los resultados de los residuos diseñados se muestran en la tabla 4.5. F1 representa la anomalía en la presión de la persona, y será \checkmark cuando el residuo sea insensible a la anomalía correspondiente (presión normal), mientras que el símbolo \emptyset indica sensibilidad a la anomalía en la presión sanguínea (disminución de presión). Las características del generador de residuos diseñado, se presenta en la siguiente Tabla:

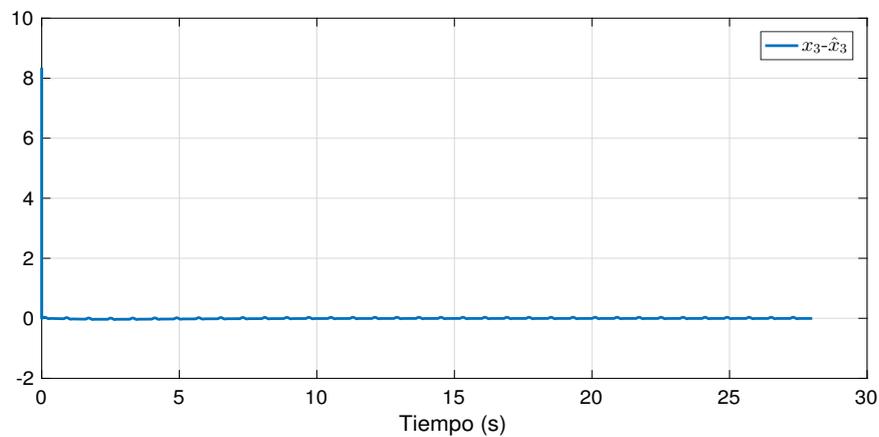
Tabla 4.7: Matriz de incidencia de fallas

Residuo r1	Falla F_1
0	\checkmark
≥ 1	\emptyset

Los resultados del caso 1, considerado como el caso con ausencia de anomalías, se muestran en la siguiente simulación:



(a) Respuesta de la presión aórtica con anomalía

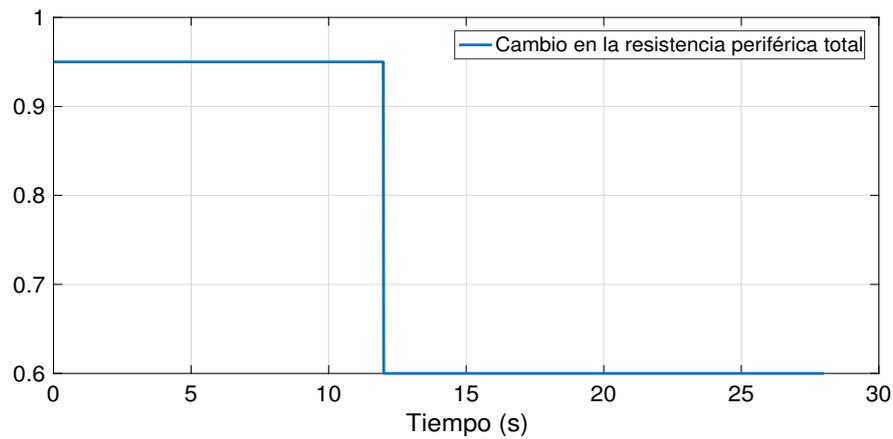


(b) Respuesta del Residuo 1 en el caso 1 sin anomalía

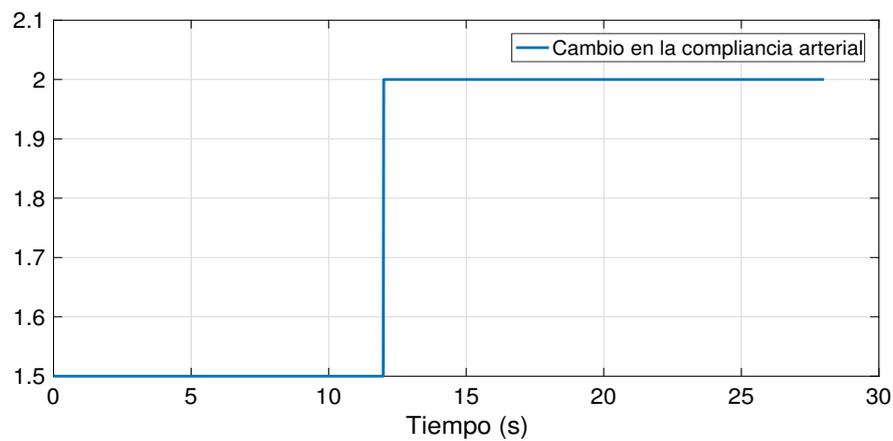
Figura 4.25: Residuo 1 sin anomalía

En la Figura 4.25 se muestra el comportamiento del residuo cuando la presión aórtica de una persona sana está en un rango entre 80 mmHg y 120 mmHg. Como se puede apreciar, la magnitud del residuo es cercana de cero.

Los resultados del caso 2, con presencia de anomalía, considera cambios en la resistencia periférica total y la compliancia arterial (ver Figura ??). Esto provoca una disminución de la presión arterial. El resultado se muestra en la Figura 4.27, en donde se muestra el patrón típico asociado a la hipotensión arterial.



(a) cambio en la resistencia periférica total



(b) cambio en la compliancia arterial

Figura 4.26: Gráficas de cambio en la resistencia periférica total y compliancia arterial

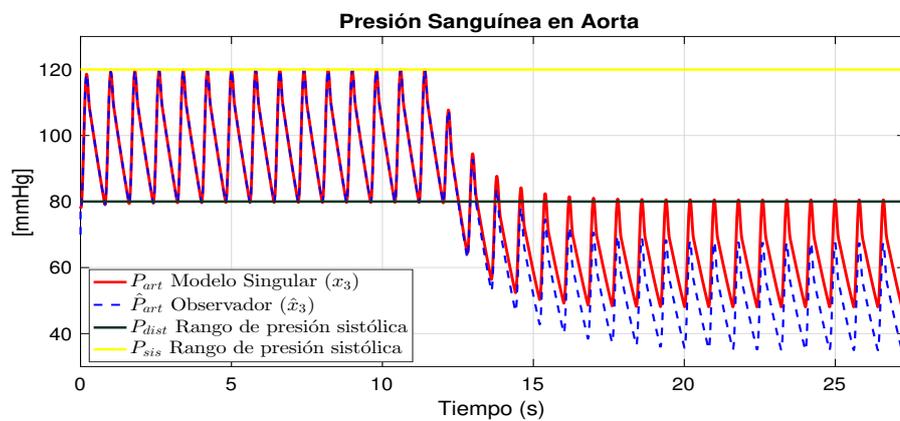


Figura 4.27: Respuesta de presión

La Figura 4.28 muestra el residuo que se obtiene para el caso de hipotensión. Al pre-

sentarse una alteración en el comportamiento del sistema cardiovascular (disminución de presión sanguínea), ésta puede ser detectada. El impacto de la hipotensión en el residuo es muy notorio – variación respecto a cero.

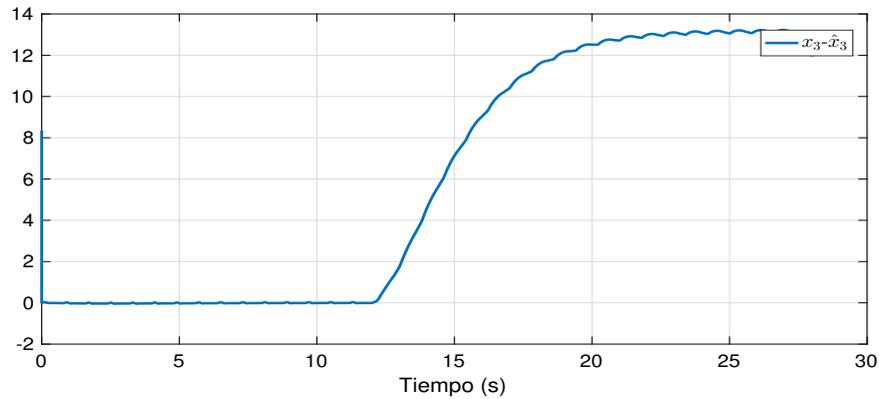


Figura 4.28: Residuo 1 caso 2 con anomalía

4.5. Simulación de los modelos Windkessel conmutados

Se diseñó un esquema de conmutación compuesto por 3 subsistemas y considerando un criterio de conmutación. El criterio de conmutación tiene la función de determinar cuál es el modelo activo.

Se considera que el primer modelo representa una persona en estado normal sin ninguna alteración en su sistema, el segundo modelo representa a una persona haciendo algún tipo de actividad física y el tercer modelo se utiliza cuando la persona está en estado de reposo o durante el sueño. Se consideraron estos tres modelos debido a que la frecuencia cardíaca y los parámetros de las personas cambian durante estos tres estados. La señal de conmutación depende de la frecuencia que tiene la persona.

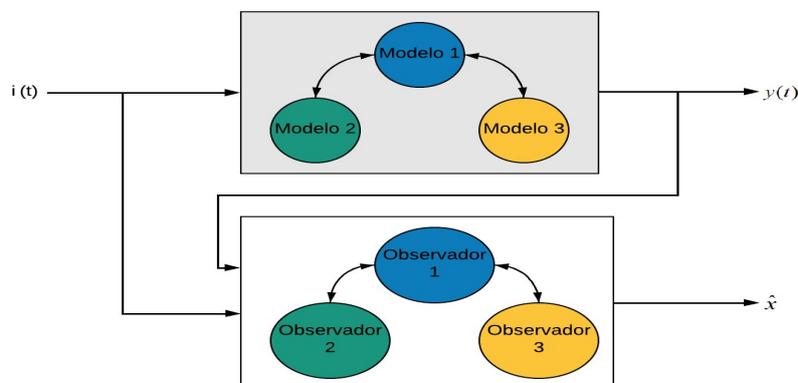


Figura 4.29: Esquema de conmutación

4.5.1. Simulación de conmutación entre el modelo 1 y el modelo 2

Objetivo. El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto desempeño de la conmutación entre los modelos uno y dos. También muestra el comportamiento de las presiones arteriales durante la actividad física. Considerando que el modelo uno representa la dinámica normal de una persona sana y el modelo 2 el cambio en el comportamiento dinámico en el sistema cardiovascular durante algún tipo de actividad física.

Estas pruebas se realizaron tomando en cuenta que la presión arterial sistólica normal es de 90 a 120mmHg , la presión arterial diastólica es de 60 a 80mmHg y que durante el ejercicio físico aumenta la presión arterial de forma natural. Se consideran los rangos reportados en la literatura para una persona con una frecuencia cardíaca de 110 latidos por minuto. El valor de la presión sistólica puede llegar a 240mmHg .

En la Figura 4.30 se muestra el cambio de frecuencia cardíaca, se considera que durante el ejercicio físico la frecuencia cardíaca aumenta de manera gradual. Hemos elegido los valores de la frecuencia cardíaca como la señal de conmutación entre los modelos uno y dos.

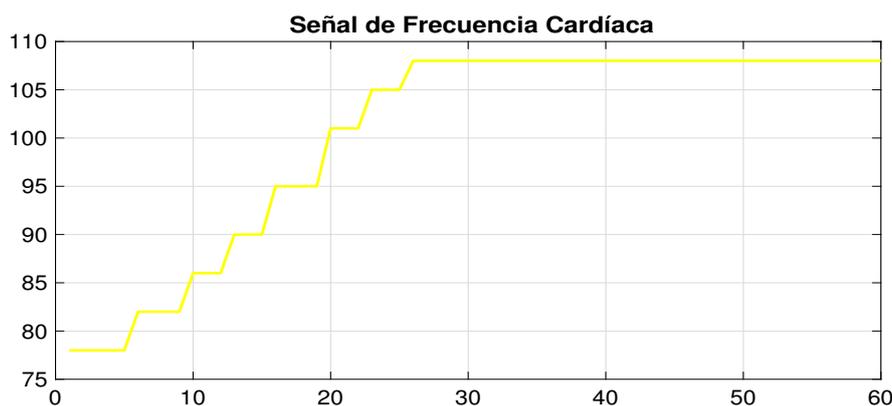
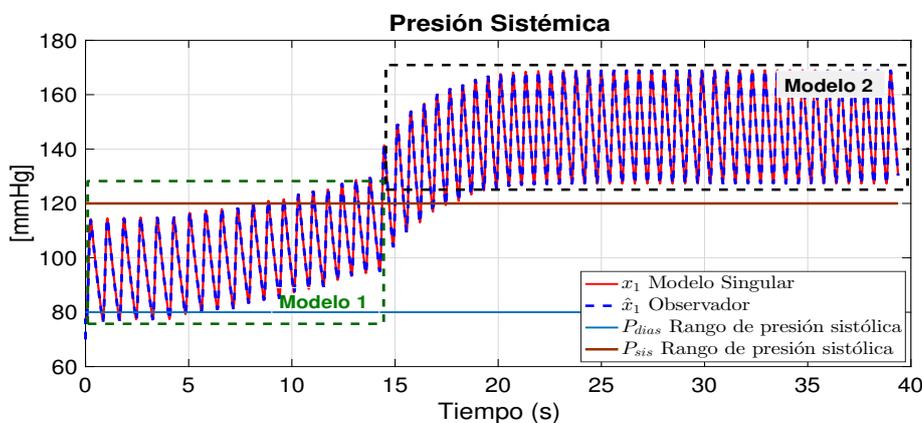
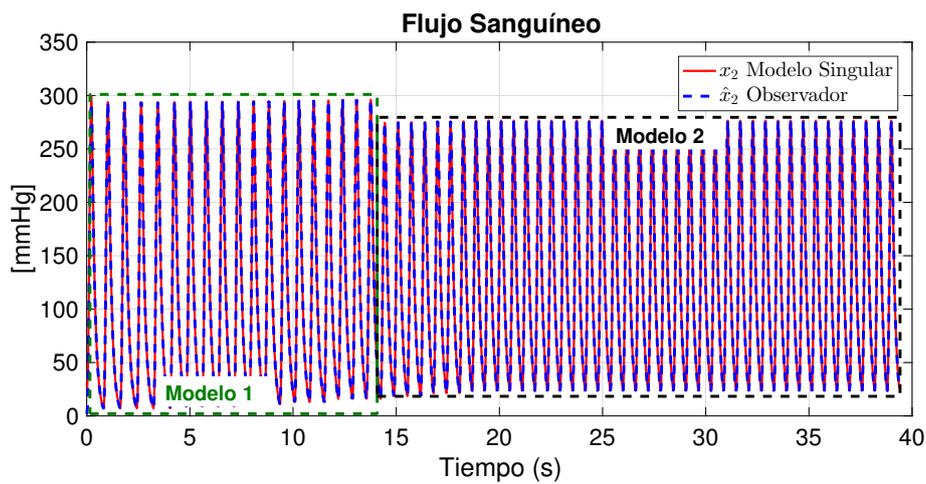


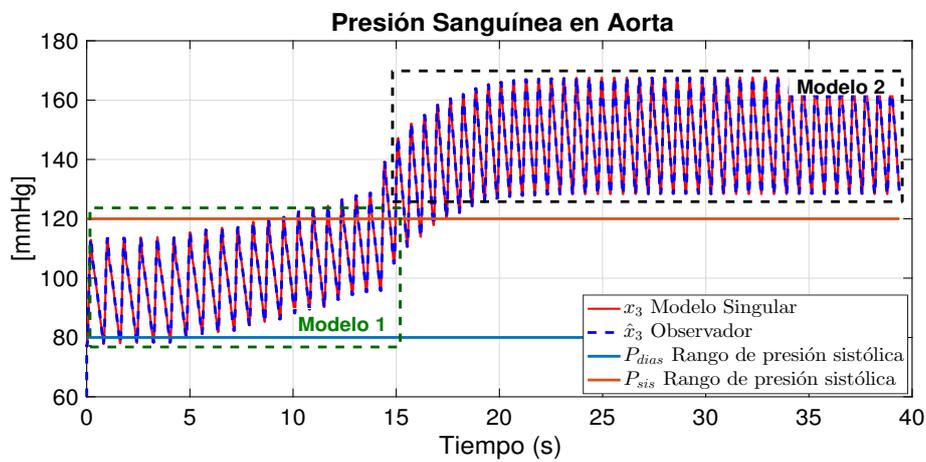
Figura 4.30: Gráfica de frecuencia cardíaca durante ejercicio físico



(a)



(b)



(c)

Figura 4.31: Gráfica de sistemas conmutados modelo 1 y modelo 2

En la Figura 4.31(a) se muestra la conmutación del modelo 1 al modelo 2. El cambio se efectúa en el segundo 15, cuando la frecuencia cardíaca del sujeto es de 69 pulsos por minuto. Se observa que la presión sistémica durante la sístole (contracción ventricular) es de 100 mmHg y durante la diástole (relajación ventricular) la presión es de 79.8 mmHg. Por otro lado se aprecia que el observador (línea azul) muestra la convergencia de los estados estimados al sistema simulado durante el primer ciclo.

En la Figura 4.31(b) se muestra el comportamiento del flujo sanguíneo que pasa a través de la válvula aórtica que va del tiempo 0s a los 15s para el modelo uno. Se observa que la conmutación al modelo dos se realiza a partir del tiempo 15s.

En la Figura 4.31(c) se observa el comportamiento de la presión aórtica en estado de vigilia (modelo 1), los rangos en los que debe oscilar esta presión son 120/80 mmHg. La conmutación al modelo 2 se efectúa en el segundo 15 cuando la frecuencia cardíaca del sujeto es de 69 pulsos por minuto. Cuando el modelo 2 se está ejecutando hace referencia a un aumento de presión ocasionado por el esfuerzo que realiza el corazón para mandar

sangre rica en oxígeno a los diferentes órganos del cuerpo en menor tiempo que el estado normal.

4.5.2. Simulación de conmutación entre el modelo 1 y el modelo 3

En la siguiente simulación se muestra la conmutación entre el modelo 1, considerado como el estado de una persona en estado de vigilia, y el modelo 3, considerado cuando la persona se encuentra en un estado de reposo o durante el sueño. Durante el estado de reposo o durante el sueño, el comportamiento de presión arterial disminuye considerablemente debido a que el corazón baja su frecuencia cardíaca para realizar un menor esfuerzo al enviar sangre oxigenada al sistema cardiovascular.

Objetivo. El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto desempeño de la conmutación entre los modelos uno y tres. También muestra el comportamiento de las presiones arteriales durante el estado de reposo. Considerando que el modelo uno representa la dinámica normal de una persona sana y el modelo 3 el cambio en el comportamiento dinámico en el sistema cardiovascular durante el reposo.

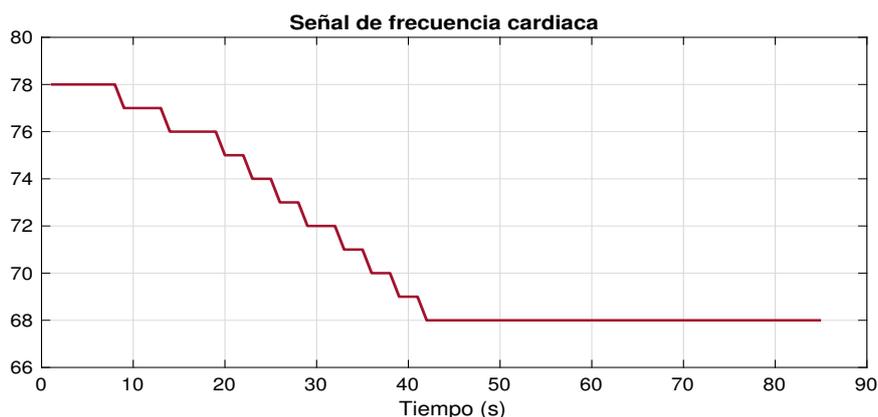
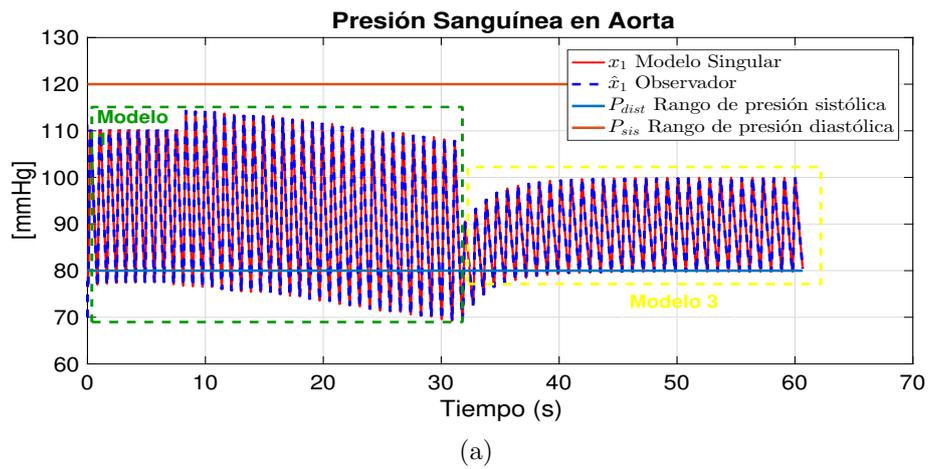
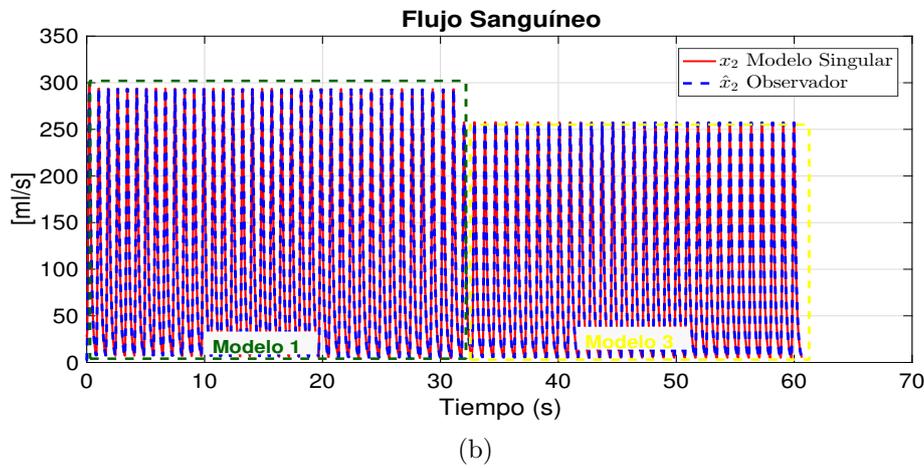


Figura 4.32: Gráfica de la frecuencia cardíaca para modelo 1 y 3

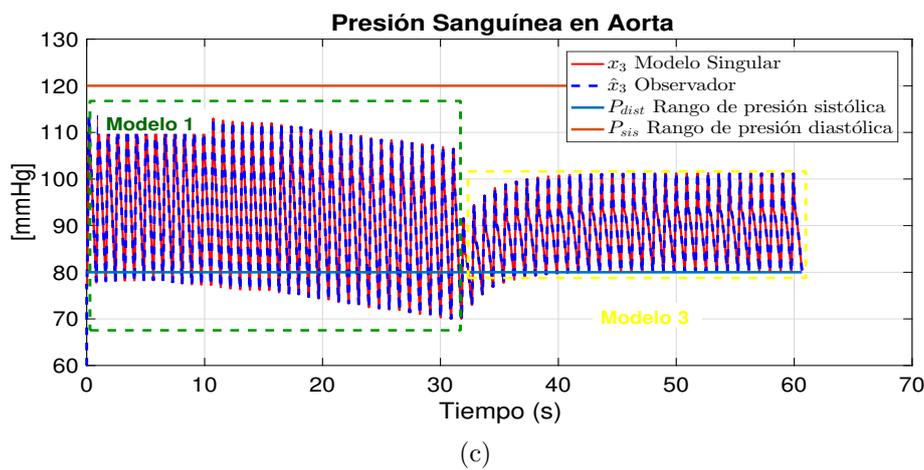
En la Figura 4.32 se muestra el cambio de la frecuencia cardíaca. Se considera que durante el estado de reposo la frecuencia disminuye de manera gradual. Hemos elegido los valores de la frecuencia cardíaca como la señal de conmutación entre los modelos uno y tres.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.33: Sistemas conmutados. Modelo 1 y modelo 3

En la Figura 4.33(a) se muestra la dinámica de la presión sistémica durante la diástole, cuando se realiza la conmutación del modelo 1 al modelo 3. La conmutación al modelo 3 se efectúa en el segundo 30 cuando la frecuencia cardíaca del sujeto es de 68 pulsos por minuto.

En la Figura 4.33(b) se muestra el comportamiento del flujo aórtico que pasa a través de la válvula aórtica que va del tiempo 0 a los 30 segundos para el modelo 1 mientras que del segundo 31 a los 60 segundos se observa el modelo 3. Se observa que cuando el modelo 1 está activo, el flujo sanguíneo alcanza los 300 ml/s, y durante la relajación del ventrículo izquierdo, el flujo es nulo debido a que la válvula aórtica se encuentra cerrada. Por otro lado, durante el estado de reposo (modelo 3) el flujo sanguíneo es de 280 ml/s.

En la Figura 4.33(c) se observa la presión aórtica. Durante el periodo de tiempo de 0 a 30 segundos, cuando funciona el modelo 1, la presión oscila entre los 120/80 mmHg. A partir del tiempo 30 segundos, se realiza la conmutación al modelo 3, donde la frecuencia cardíaca ha disminuido y en consecuencia la demanda de sangre oxigenada es menor, alcanzando una presión sanguínea que está oscilando entre los rangos de 100/80mmHg.

4.6. Conclusiones particulares del capítulo

En la sección 4.1 se implementó el observador de orden completo presentado en la sección del capítulo 3 propuesto por Daroach (1995) mediante una simulación en la que se variaron los parámetros de resistencia periférica total y compliancia.

En la sección 4.2 se implementó el observador de orden completo presentado en el capítulo 3; este observador fue aplicado al modelo Winkessel de cuatro elementos. Para evaluar su desempeño se realizaron pruebas de perturbación. Las ganancias del observador fueron calculadas usando un modelo singular que representa el comportamiento del sistema cardiovascular a partir del ventrículo izquierdo.

En la sección 4.3 se muestra el desarrollo del observador de orden reducido aplicado al modelo Windkessel de cuatro elementos. Este observador solo estima presión sistémica y flujo sanguíneo a partir de la medición de presión aórtica.

En la sección 4.4 se muestra el diseño de esquemas de anomalías (fallas) en el comportamiento del sistema cardiovascular considerando como primer caso una persona normotensa y como segundo caso a una persona con presión arterial alta (Hipertensión) como se muestra en la sección 4.4.1. También se muestra el caso 3 que es considerando la presencia de anomalías, como una persona con baja presión o una persona con hipotensión.

Por último en la sección 4.5 se mostró un esquema de tres sistemas conmutados con sus respectivos observadores, considerando el primer modelo como el caso de una persona en estado normal. El segundo modelo considera una persona realizando algún tipo de actividad física la cual implica un aumento en su presión sanguínea y el tercer modelo considera cuando la persona está en estado de reposo.

Capítulo 5

Conclusiones y comentarios finales

En este capítulo se presentan las conclusiones y comentarios finales del presente tema de investigación. En un comienzo se mencionan las contribuciones y los trabajos que se proponen para realizar a futuro para dar continuidad a este tema de investigación y se termina con las conclusiones del tema de investigación.

5.1. Contribuciones

A continuación se enlistan las principales aportaciones de este tema de investigación:

- La representación de los modelos Windkessel en forma singular, es una nueva contribución en la forma de representar los modelos matemáticos Windkessel, debido a que en la literatura no se encontró ningún modelo con esta representación. Con esta nueva representación solo es necesario poder medir la presión sanguínea para poder estimar los estados no medibles. Estos modelos representan la arteria aorta y la circulación sistémica que comprende las arterias, arteriolas, capilares y venas, utilizando analogías entre el sistema hidráulico cardiovascular y los sistemas eléctricos. Por lo tanto la representación singular de estos modelos se considera una contribución.
- Se diseñaron dos observadores para sistemas singulares, el primer observador es de orden completo y el segundo de orden reducido para los modelos Windkessel de 3 y 4 elementos con los cuales podemos estimar la presión aórtica, presión sistémica y el flujo sanguíneo en la arteria aorta.
- El diseño del observador de orden completo para el modelo Windkessel de 4 elementos dio como resultado una publicación en el Congreso Nacional de Control Automático 2018 (CNCA) que se muestra en el Anexo A.
- Se diseñó un sistema para la detección de potenciales eléctricos del sistema cardiovascular, con el cual se obtienen los intervalos entre RR y las ondas Q, R, S y T. Asimismo se desarrolló un sistema de adquisición de los pulsos cardíacos con el cual obtenemos una derivación del electrocardiograma y podemos obtener la señal de frecuencia cardíaca.

5.2. Conclusiones

Las conclusiones que se obtiene del tema de investigación son las siguientes:

En este tema de tesis se diseñó una nueva representación singular de los modelos Windkessel de tres y cuatro elementos que permiten representar la aorta y la parte de circulación sistémica del sistema cardiovascular. La ventaja de esta nueva representación (singular) es que se evita la dependencia de la entrada en la ecuación de salida del sistema en la representación de estado de estados. Esto facilita el diseño del observador. Se compara el desempeño del modelo mediante las curvas de la presión sistémica, presión aórtica y flujo aórtico, las cuales corresponden a los datos clínicos reportados en la literatura para una persona adulta sana.

Se diseñó el observador singular de orden completo y de orden reducido para el modelo Windkessel que permite estimar la presión sistémica, la presión aórtica y el flujo aórtico del corazón. Se realizaron pruebas para ver el comportamiento que tienen los observadores introduciendo una perturbación. Se corrobora que los observadores diseñados específicamente para sistemas singulares, se aproximan al modelo con un error que tiende asintóticamente a cero.

En esta tesis se presentó un primer acercamiento a la aplicación de observadores como medio para estudiar del comportamiento de sistema cardiovascular utilizando los modelos Windkessel. Estos modelos y observadores fueron la base para dar cuenta de posibles variaciones en los valores nominales de los parámetros de cada modelo así como el mal funcionamiento asociándolo a posibles padecimientos médicos.

Se diseñó un esquema de conmutación compuesto por 3 subsistemas (estado de vigilia, estado de actividad física, estado de reposo o durante el sueño), considerando un criterio de conmutación que debe determinar cuál es el modelo activo. La señal de conmutación depende de la frecuencia que tiene la persona. Se consideraron estos tres modelos debido a que la frecuencia y los parámetros de las personas cambian durante estos tres estados.

Se diseñó un sistema que detecta los potenciales eléctricos del sistema cardiovascular y los pulsos cardíacos con el cual obtenemos una derivación del electrocardiograma y podemos obtener la señal de frecuencia cardíaca.

Finalmente, se concluye que la hipótesis planteada en la sección 1.2 se confirmó al lograr obtener por medio del diseño de observadores la presión aórtica y el flujo aórtico que son parámetros difíciles de medir en forma no invasiva y a partir de datos y las curvas de presión que se encuentran reportadas en la literatura se puede encontrar anomalías en el comportamiento del corazón.

5.3. Trabajos Futuros

Se propone como trabajos futuros:

A partir de los modelos Winkessel que aquí se presentan se pueden integrar más elementos como pueden ser los diodos que simulan las válvulas mitral, aortica, pulmonar y tricúspide y simular el comportamiento de la parte derecha e izquierda del corazón. Con el diseño de los observadores se podrían estimar otras variables del corazón difíciles de medir.

Otro trabajo futuro es proporcionar flujos sanguíneos reales como señal de entrada. En este punto es necesario aclarar que durante el desarrollo de este trabajo se diseñó un primer acercamiento a la implementación de un flujo real pero no se lograron calcular las presiones sanguíneas reales.

Finalmente, se podría mejorar el esquema de conmutación entre los estados de vigilia, reposo y el desarrollo de una actividad física. Estos tres escenarios son los más comunes en la actividad diaria de una persona.

Bibliografía

- [Ali et al., 2015] Ali, J. M., Hoang, N. H., Hussain, M. A., and Dochain, D. (2015). Review and classification of recent observers applied in chemical process systems. *Computers & Chemical Engineering*, 76:27–41.
- [Alma Lyzzet Suarez Garza, 2014] Alma Lyzzet Suarez Garza, M. A. P. G. (2014). Estimación Frecuencial en señales biológicas mediante modulación en frecuencia. *Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA*, pages 130–135.
- [Álvarez et al., 2003] Álvarez, F. V., Banegas, J. B., Campos, J. d. M. D., and Artalejo, F. R. (2003). Las enfermedades cardiovasculares y sus factores de riesgo en España: hechos y cifras. *Madrid, España: SEA*.
- [Astorga-Zaragoza et al., 2011] Astorga-Zaragoza, C.-M., Theilliol, D., Ponsart, J.-C., and Rodrigues, M. (2011). Observer synthesis for a class of descriptor LPV systems. In *American Control Conference (ACC), 2011*, pages 722–726. IEEE.
- [Belloni, 1999] Belloni, F. L. (1999). Teaching the principles of hemodynamics. *Advances in Physiology Education*, 277(6):S187.
- [Broemser and Ranke, 1930] Broemser, P. and Ranke, O. F. (1930). *Ueber die Messung des Schlagvolumens des Herzens auf unblutigem Weg*. Lehmann.
- [Bura-Rivière and Boccalon, 2015] Bura-Rivière, A. and Boccalon, H. (2015). Fisiología y exploración de la circulación arterial. *EMC-Podología*, 17(1):1–22.
- [Burattini and Natalucci, 1998] Burattini, R. and Natalucci, S. (1998). Complex and frequency-dependent compliance of viscoelastic windkessel resolves contradictions in elastic windkessels. *Medical engineering & physics*, 20(7):502–514.
- [Bustamante et al., 2003] Bustamante, J., Valbuena, J., and Cardiocirculatoria, B. (2003). análisis y modelado cardiovascular. *Revista Colombiana de Cardiología*, 10(5):229–239.
- [Cervino and Cervino, 2018] Cervino, C. and Cervino, C. (2018). Simulación del corazón izquierdo para aplicaciones en docencia e investigación. *TE & ET*.
- [Cobb, 1981] Cobb, D. (1981). Feedback and pole placement in descriptor variable systems. *International Journal of Control*, 33(6):1135–1146.
- [Dai, 1988] Dai, L. (1988). Observers for discrete singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(2):187–191.

-
- [Darouach and Boutayeb, 1995] Darouach, M. and Boutayeb, M. (1995). Design of observers for descriptor systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 40(7):1323–1327.
- [Darouach et al., 1996] Darouach, M., Zasadzinski, M., and Hayar, M. (1996). Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE transactions on automatic control*, 41(7):1068–1072.
- [Dochain et al., 2009] Dochain, D., Couenne, F., and Jallut, C. (2009). Enthalpy based modelling and design of asymptotic observers for chemical reactors. *International Journal of Control*, 82(8):1389–1403.
- [Epstein et al., 2015] Epstein, S., Willemet, M., Chowienczyk, P. J., and Alastruey, J. (2015). Reducing the number of parameters in 1d arterial blood flow modeling: less is more for patient-specific simulations. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 309(1):H222–H234.
- [Espino, 1997] Espino, V. (1997). Introducción a la cardiología. *Editorial El Manual Moderno. México DF*, pages 1–21.
- [Formaggia et al., 2010] Formaggia, L., Quarteroni, A., and Veneziani, A. (2010). *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- [Frank, 1899] Frank, O. (1899). Die grundform des arteriellen pulses [basic shape of the arterial pulse], *zeitschriftfür biologische*, vol. 37.
- [Fuster et al., 2011] Fuster, V., Walsh, R., and Harrington, R. A. (2011). *Hurst's the Heart: One Volume*. McGraw Hill Professional.
- [Gómez Pérez, 2006] Gómez Pérez, Katerina, A. M. A. (2006). Modelos de sistemas fisiológicos: Sistema cardiovascular. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*, 21(3):145–159.
- [Gordillo, 2011] Gordillo, G. L. O. (2011). Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica. *Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Departamento de Ingeniería Electrónica*.
- [Guadalajara, 1997] Guadalajara, J. (1997). Cardiología. *Méndez Editores. México*.
- [Gul, 2016] Gul, R. (2016). *Mathematical Modeling and Sensitivity Analysis of Lumped-Parameter Model of the Human Cardiovascular System*. PhD thesis, Freie Universität Berlin.
- [Hales, 1733] Hales, S. (1733). Statistical essays: concerning haemastatics; or, an account of some hydraulick and hydrostatical experiments made on the blood and blood-vessels of animals. *London: W. Innys and R. Manby*, 1733.
- [Hauser et al., 2012] Hauser, J., Parak, J., Lozek, M., and Havlik, J. (2012). System analyze of the windkessel models. *space*, 100:5.
- [Hlaváč and Holčík, 2004] Hlaváč, M. and Holčík, J. (2004). Windkessel model analysis in matlab. In *Proceedings of 10th conference STUDENT EEICT*, volume 3, pages 5–10.
- [Hou and Muller, 1999] Hou, M. and Muller, P. (1999). Causal observability of descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):158–163.

-
- [Ishihara and Terra, 2002] Ishihara, J. Y. and Terra, M. H. (2002). On the Lyapunov Theorem for Singular Systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 47(11):1926–1930.
- [Jager et al., 1965] Jager, G. N., Westerhof, N., and Noordergraaf, A. (1965). Oscillatory flow impedance in electrical analog of arterial system:: Representation of sleeve effect and non-newtonian properties of blood. *Circulation research*, 16(2):121–133.
- [Junca Peláez et al., 2005] Junca Peláez, M., Grisales Palacio, V. H., and Gauthier Sellier, A. (2005). Introducción a las Desigualdades Lineales Matriciales y su Aplicación en Control Automático. *Ingeniería*, 10(2).
- [K. Khoo, 2000] K. Khoo, M. C. (2000). Physiological control systems (analysis, simulation, and estimation). *IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Sponsor*.
- [Kind et al., 2010] Kind, T., Faes, T. J., Lankhaar, J.-W., Vonk-Noordergraaf, A., and Verhaegen, M. (2010). Estimation of three-and four-element windkessel parameters using subspace model identification. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 57(7):1531–1538.
- [Koenig, 2006] Koenig, D. (2006). Observers design for unknown input nonlinear descriptor systems via convex optimization. *IEEE Transactions on Automatic control*, (06):1047–1052.
- [Koenig, 2007] Koenig, D. (2007). *Analyse et observation des systèmes singuliers*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- [Koenig and Mammar, 2002] Koenig, D. and Mammar, S. (2002). Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE transactions on automatic control*, 47(12):2057–2062.
- [Kokalari et al., 2013] Kokalari, I., Karaja, T., and Guerrisi, M. (2013). Review on lumped parameter method for modeling the blood flow in systemic arteries. *Journal of Biomedical Science and Engineering*, 6(01):92.
- [Liu et al., 2008] Liu, P., Zhang, Q., Yang, X., and Yang, L. (2008). Passivity and optimal control of descriptor biological complex systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(Special Issue):122–125.
- [Luenberger, 1977] Luenberger, D. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(3):312–321.
- [Marx et al., 2007] Marx, B., Koenig, D., and Ragot, J. (2007). Design of observers for takagi–sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis. *IET Control Theory & Applications*, 1(5):1487–1495.
- [Osorio-Gordillo et al., 2014] Osorio-Gordillo, G.-L., Darouach, M., Boutat-Baddas, L., and Astorga-Zaragoza, C.-M. (2014). H dynamical observer-based control for descriptor systems. In *Control Conference (ECC), 2014 European*, pages 2963–2968. IEEE.
- [Ottesen et al., 2004] Ottesen, J. T., Olufsen, M. S., and Larsen, J. K. (2004). *Applied mathematical models in human physiology*. SIAM.
- [Phillips, 2011] Phillips, C. M. L. (2011). *A simple lumped parameter model of the cardiovascular system*. PhD thesis, Colorado State University. Libraries.

- [Salud, 2014] Salud, O. (2014). Organización mundial de la salud. *Obtenido de la*.
- [Tortora and Derrickson, 2013] Tortora, G. J. and Derrickson, B. (2013). *Principios de anatomía y fisiología*. Médica Panamericana,.
- [Traver et al., 2017] Traver, J. E., Ortega Morán, J. F., Tejado, I., Pagador, J. B., Sun, F., Pérez-Aloe, R., Vinagre, B. M., and Sánchez Margallo, F. M. (2017). Simulador cardiovascular para ensayo de robots de navegación autónoma. *Actas de las XXXVIII Jornadas de Automática*.
- [VanAntwerp and Braatz, 2000] VanAntwerp, J. G. and Braatz, R. D. (2000). A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities. *Journal of Process Control*, 10(4):363–385.
- [Vázquez et al., 2007] Vázquez, T. d. J. D., Mirón, A. O., and Luna, J. S. (2007). Detección de fallas usando observadores no lineales: El proceso de cristalización.
- [Westerhof et al., 1969] Westerhof, N., Bosman, F., De Vries, C. J., and Noordergraaf, A. (1969). Analog studies of the human systemic arterial tree. *Journal of biomechanics*, 2(2):121–143.
- [Westerhof et al., 2009] Westerhof, N., Lankhaar, and Jan-Willem, B. E. (2009). The arterial windkessel. *Medical & biological engineering & computing*, 47(2):131–141.

Capítulo 6

Anexos

6.1. Anexo A. Publicación de artículo en el Congreso Nacional de Control Automático 2018 (AMCA)



Memorias del Congreso Nacional de Control Automático

Estimación de variables del sistema cardiovascular mediante un observador para sistemas singulares

Dulce-A. Serrano-Cruz * Carlos-M. Astorga-Zaragoza *
Gerardo-V. Guerrero-Ramírez * Carlos-D. García-Beltrán *
Gloria-L. Osorio-Gordillo * Estela Ortiz-Rangel *

* *Tecnológico Nacional de México/ Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior Internado Palmira s/n, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, México*
(e-mail: {alejandra.serrano17ee, astorga, gerardog, cgarcia, gloriaosorio, estela_or}@cenidet.edu.mx).

Resumen

En el presente trabajo se diseña un observador singular de orden completo con el propósito de estimar la presión sistémica, la presión aórtica y el flujo aórtico del corazón. Se utiliza el modelo Windkessel de cuatro elementos en su representación de espacio de estados que describe la dinámica del corazón. Así mismo, se comparan los resultados obtenidos con las curvas de presión sistémica y aórtica de una persona sana, reportados en estudios clínicos.

Keywords: Sistema cardiovascular, observador, modelo singular Windkessel, presión sanguínea.

Figura 6.1: Artículo publicado en congreso CNCA

6.2. Sistema de adquisición y tratamiento de señales electrocardiográficas

El electrocardiograma (ECG o EKG) es un registro gráfico de los potenciales eléctricos generados por el corazón durante el ciclo cardiaco. Consiste en una línea base y varias deflexiones y ondas que entregan información muy útil acerca del funcionamiento de corazón. Esta información se obtiene a través de la colocación de electrodos en diversas posiciones del cuerpo conectados a su vez a un aparato electrocardiográfico, donde se registran las variaciones de potencial eléctrico cardíaco. La posición específica de los electrodos recibe el nombre de derivación. Las derivaciones más importantes reciben el nombre de Bipolares, Aumentadas y Precordiales Unipolares. En este trabajo se utilizó solo la derivación bipolar.

6.2.1. Ondas de señal electrocardiográfica

Existen dos enfoques que permiten obtener información en diferentes dominio; el dominio del tiempo (análisis de la señal contra el tiempo) y dominio de la frecuencia (análisis de las componentes frecuenciales de una señal). Con respecto del tiempo en un electrocardiograma se identifican las formas de onda que se producen por la polarización y despolarización del corazón.

La forma de onda de un ECG consiste en cinco ondas básicas, P, Q, R, S y T como se muestra en la Figura 6.2. La onda P representa la despolarización auricular, la onda Q, R y S se conocen comúnmente como complejos QRS que representan la despolarización ventricular y la onda T representa la repolarización del ventrículo.

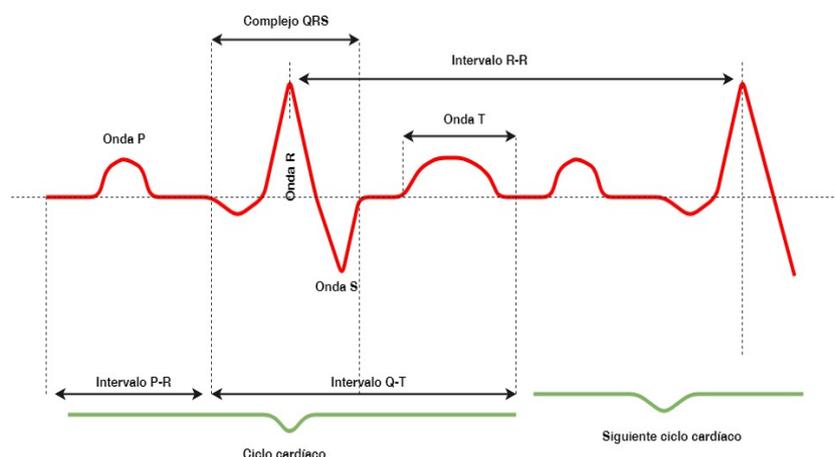


Figura 6.2: Formas de onda de un ECG

6.2.2. Materiales y métodos

En el presente trabajo se desarrolló un sistema capaz de detectar los potenciales eléctricos del corazón por medio de un Atmega2560 (se utilizó este tipo de tarjeta de adquisición

con la finalidad de posteriormente agregar más elementos al equipo, teniendo entradas disponibles para más sensores). El esquema que se muestra en la Figura 6.3 muestra el diagrama a bloques de la forma de funcionamiento del sistema diseñado.

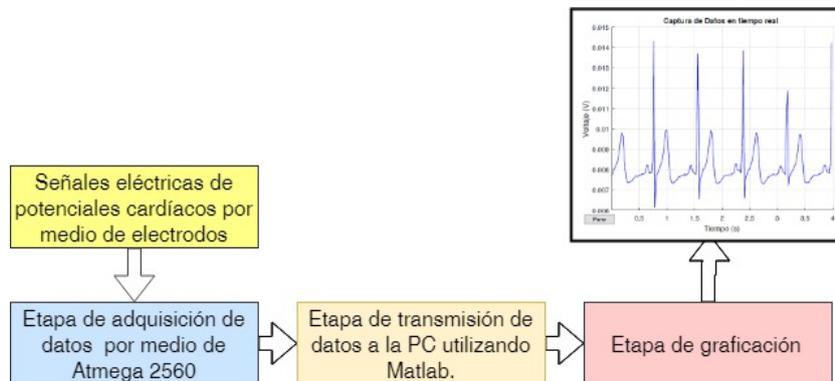
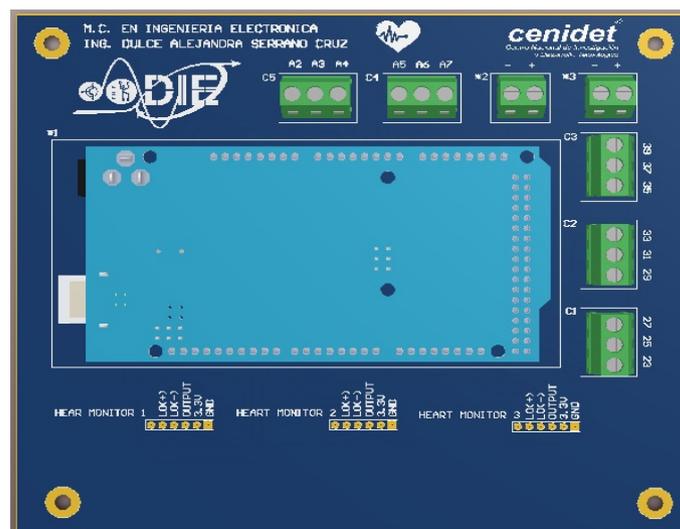


Figura 6.3: Esquema a bloques del ECG

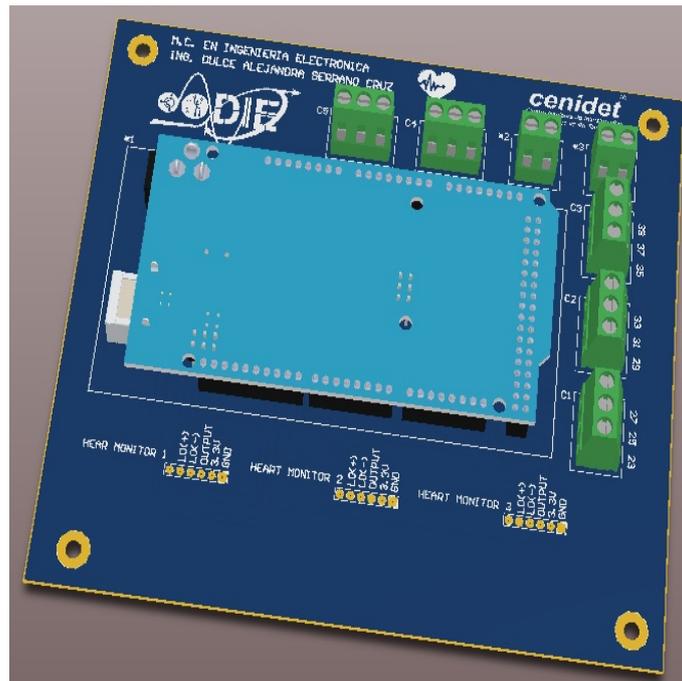
6.2.3. Diseño de prototipo

Se elaboró un sistema que capta las señales eléctricas del corazón mediante 3 electrodos, representando en una gráfica la actividad eléctrica del corazón, es decir, los potenciales de acción de las fibras miocárdicas. La señal del sistema se utiliza para identificar la frecuencia cardíaca de una persona. La ventaja es que es una forma muy sencilla como método no invasivo para medir frecuencia cardíaca.

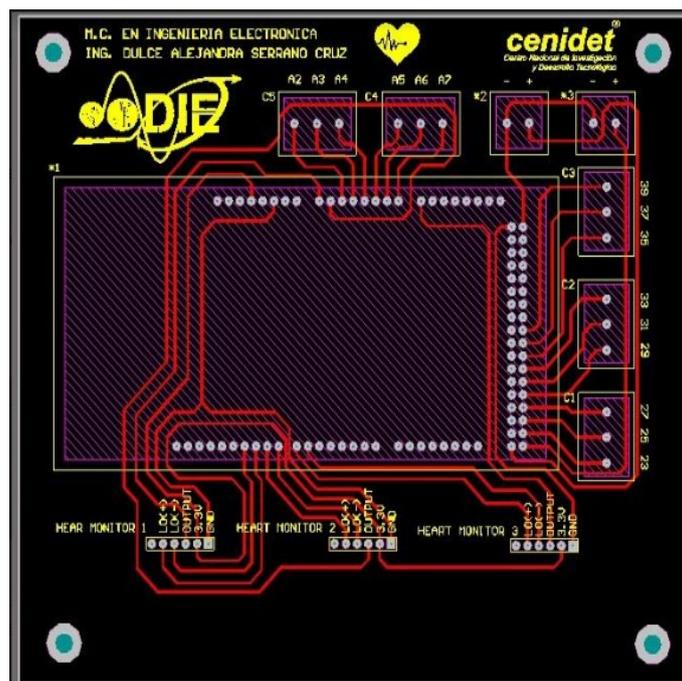
En la Figura 6.4 se aprecia la cara superior del PCB realizado en Altium, el objetivo de la placa es la adquisición de las bioseñales del sujeto y transmitir las a Atmega2560.



(a) PCB vista superior



(b) PCB vista 3D



(c) PCB pistas

Figura 6.4: PCB en Altium Designer

En la Figura se aprecia el prototipo de adquisición de las bioseñales.

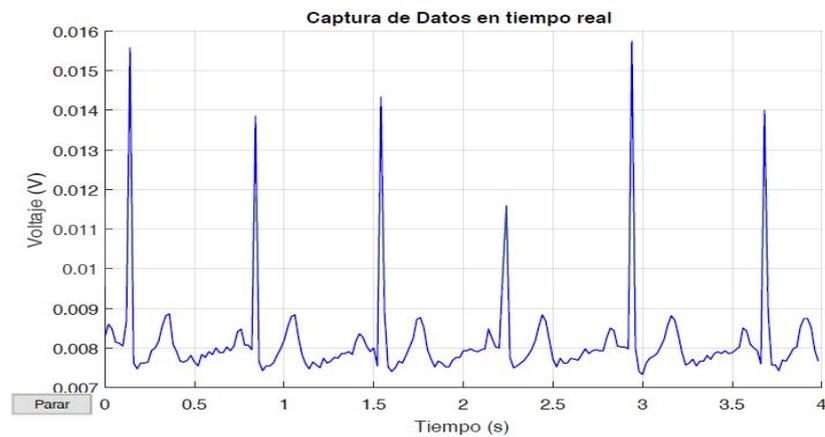


Figura 6.5: Implementación del sistema de adquisición de señales eléctricas

El sistema trabaja con derivaciones bipolares aquellas en las que se mide la diferencia de potencial entre dos electrodos activos, se pueden obtener tres derivaciones bipolares (DI, DII, DIII), estas registran la diferencia de potencial entre dos electrodos ubicados en extremidades diferentes uno en el brazo derecho (RA, por Right Arm.), uno en el brazo izquierdo (LA, por Left Arm) y otro en la pierna izquierda (LL, por Left Leg)

- **D1:**Diferencia de potencial entre brazo derecho y brazo izquierdo. Su vector está en dirección a 0°
- **D2:**Diferencia de potencial entre brazo derecho y pierna izquierda. Su vector está en dirección a 60° .
- **D3:**Diferencia de potencial entre brazo izquierdo y pierna izquierda. Su vector está en dirección a 120° .

En la Figura se muestra los resultados de un prueba realizada con el dispositivo a una persona en posición supino y sentada en un tiempo de 4 segundos.



(a) Persona en posición supino.



(b) Persona en posición sentada.

Figura 6.6: Resultados de ECG a una persona en posición supino y sentada

Lista de materiales

En la Tabla 6.1 se describen parte de los materiales para el diseño de PCB y el prototipo de adquisición de las bioseñales (ECG).

Tabla 6.1: Tabla de Materiales

Materiales	
Dispositivo	Descripción
Electrodos	El electrodo es un elemento entre en cuerpo humano y el equipo de medición conocido como electrocardiógrafo, por los electrodos circula una pequeña corriente que convierte una señal eléctrica en $I_{eléctrica}$ las corrientes en $I_{iónica}$ generada por el cuerpo.
Sensor AD8232	Es una tarjeta de costo bajo usado para medir la actividad eléctrica del corazón
cable para electrocardiografía	Este es un cable para sensor con tres extremos donde se encuentra el área para un electrodo. Estos cables tienen una longitud de 24" de largo y cuentan con un conector de audio jack de 3.5mm en el extremo opuesto con el estilo de referencia receptáculos para paneles sensores biomédicos. Cada cable viene en un conjunto rojo/azul/negro.
Clema de 2 terminales o bornerar 2T	Conectores componibles para circuito impreso con tornillo y lámina de protección
Cable USB	Establece una comunicación ideal entre la PC y tu Atmega2560.
Arduino Mega 2560	Es una placa electrónica basada en el microprocesador Atmega2560, cuenta con 54 pines digitales de entrada/salida de los cuales 14 se pueden utilizar como salidas PWM, 16 entradas analógicas, 4 UARTs (puertas seriales), un oscilador de 16MHz, una conexión USB, un conector de alimentación, una cabecera ICSP, y un botón de reinicio.
Tira de pines hembra	Tira de pines.
Placa de circuito impreso	Es la superficie constituida por caminos, pistas o buses de material conductor laminadas sobre una base no conductora.