



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



Instituto Tecnológico de La Laguna

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**"Diseño de esquemas de control robusto para ciertas
clases de sistemas subactuados"**

POR

M.C. Luis Ricardo Ovalle Gamboa

T E S I S

**PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR
EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Héctor Ríos Barajas

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Miguel Ángel Llama Leal

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (02)-TDCIE - 2019

Torreón, Coahuila. México

Noviembre, 2019



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., **08/Noviembre/2019**

Dependencia: DEPI/CPCIE

Oficio: DEPI/CPCIE/014/2019

Asunto: Autorización de impresión
de tesis.

C. M.C. Luis Ricardo Ovalle Gamboa
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

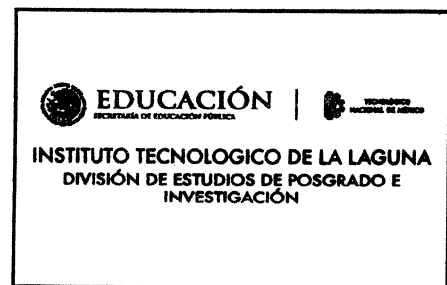
Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Diseño de esquemas de control robusto para ciertas clases de sistemas subactuados"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (02)-TDCIE-2019**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de La Laguna





"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., **01/Noviembre/2018**

DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

" Diseño de esquemas de control robusto para ciertas clases de sistemas subactuados"

Desarrollado por el **C. Luis Ricardo Ovalle Gamboa** , con número de control **D1613001** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

Dr. Héctor Ríos Barajas
Asesor/Director de Tesis

Dr. Miguel Ángel Llama Leal
Coasesor/Codirector

Dr. Francisco Jurado Zamarripa
Comité Tutorial

Dr. Juan Sifuentes Mijares
Comité Tutorial

Dr. Leonid Moiseevich Fridman
Comité Tutorial Externo



Diseño de Esquemas de Control Robusto para Ciertas Clases de Sistemas Subactuados

Tesis Doctoral

M.C. Luis Ricardo Ovalle Gamboa

Noviembre de 2019

Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna División de
Estudios de Posgrado e Investigación

A Silvia: 17 veces 😊

– *Luis Ovalle*

Agradecimientos

A Mis padres, Miguel Ovalle y Rosario Gamboa, por el apoyo incondicional, por sus consejos y regaños

Al Señor José Ascensión Gamboa, mi abuelo. Por estar siempre pendiente de mí y brindarme todo el apoyo posible.

A la señorita Silvia Navarro, por toda la paciencia, comprensión y el amor que me ha brindado.

Al Doctor Héctor Ríos. Por darme la oportunidad de realizar este proyecto. Por mostrarme con el ejemplo la labor de un investigador. Sin su guía este trabajo no habría sido posible.

Al Doctor Miguel Llama. Por todo el apoyo que he recibido a lo largo de estos años. Por toda la confianza que me ha depositado.

Al comité tutorial de este trabajo. Por sus comentarios y sugerencias.

A mis compañeros del Laboratorio de Mecatrónica y Control del I.T.L. Por aguantarme tanto tiempo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Por el apoyo recibido a través de la beca bajo el CVU 591548.

Luis Ovalle

Diseño de Esquemas de Control Robusto para Ciertas Clases de Sistemas Subactuados

Luis Ricardo Ovalle Gamboa

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el diseño de controladores por modos deslizantes continuos para la estabilización de algunas clases de sistemas subactuados. La metodología propuesta aprovecha las propiedades mecánicas de tres diferentes clases de sistemas subactuados, en lugar del uso de transformaciones no lineales. Para el diseño de los controladores se presenta una serie de variables de deslizamiento con grado relativo uno y dos. Las diferencias teóricas entre los esquemas resultantes se discuten y algunos resultados en simulación muestran algunas diferencias en cuestiones de aplicación. La aplicación de los resultados en el contexto de realimentación de salida se discute mediante la aplicación experimental a una de las clases presentadas.

Abstract

This thesis work deals with the design of continuous sliding-mode controllers for the stabilization of some classes of underactuated systems. The proposed method takes advantage of the mechanical properties of three different classes of underactuated systems instead of using nonlinear transformations. In order to design the controllers, some sliding variables with relative degree one and two are introduced. The theoretical differences between these approaches are discussed and some simulation results show their practical differences. Experimental results are presented to validate the proposed control strategy in the context of output-feedback control.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Planteamiento del Problema	5
1.2	Contribución Principal	5
1.3	Producción Científica	6
1.4	Organización del Documento	7
	PRELIMINARES	8
2	Clasificación de Sistemas Subactuados	9
2.1	Clasificación	10
3	Diseño de Controladores Robustos	12
3.1	Conceptos Preliminares	12
3.2	Diseño de SMCs Continuos	13
	Diseño de SMCs Continuos para Sistemas con Grado Relativo Uno . . .	13
	Diseño de SMCs Continuos para Sistemas con Grado Relativo Dos . . .	14
	Discusión	16
3.3	Diseño de Controladores Robustos para Sistemas Mecánicos	17
	RESULTADOS PRINCIPALES	19
4	Control de Sistemas Clase I	20
4.1	Diseño de los Controladores	20
	Caso <i>a</i>), Grado Relativo Uno.	21
	Caso <i>b</i>), Grado Relativo Uno.	21
	Caso <i>a</i>), Grado Relativo Dos.	22
	Caso <i>b</i>), Grado Relativo Dos.	23
4.2	Discusión	24
4.3	Resultados de Simulación	24
5	Control de Sistemas Clase II	27
5.1	Diseño del Controlador	27
5.2	Resultados de Simulación	30
6	Control de Sistemas Clase III	33
6.1	Diseño del Controlador	33
6.2	Discusión	37
6.3	Resultados de Simulación	37
	Sistema Carro-Péndulo	38
	Sistema de Grúa de 4 GDL	40

7	Diseño de Controladores por Realimentación de Salida	44
7.1	Controlador por Realimentación de Salida basado en HOSMO	44
	Diseño del Controlador	46
7.2	Controlador por Realimentación de Salida basado en HO	46
	Diseño del Controlador	47
7.3	Discusión	49
7.4	Resultados Experimentales	49
	Sistema Carro-Péndulo	49
	Sistema de Grúa de 4 GDL	51
	 CONCLUSIONES	 56
8	Conclusiones	57
8.1	Trabajo Futuro	57
	 APÉNDICE	 58
A	Prueba de los Resultados del Capítulo 4	59
A.1	Prueba del Teorema 4.1	59
A.2	Prueba del Teorema 4.2	59
A.3	Prueba del Teorema 4.3	59
A.4	Prueba del Teorema 4.4	60
B	Prueba de los Resultados del Capítulo 5	61
B.1	Prueba del Lema 5.1	61
B.2	Prueba del Teorema 5.1	62
C	Prueba de los Resultados del Capítulo 6	63
C.1	Prueba del Lema 6.1	63
C.2	Prueba del Teorema 6.1	64
	 Bibliografía	 68

Un sistema subactuado se define comúnmente como un mecanismo que tiene menos actuadores que grados de libertad. Sin embargo, dicha definición no es aplicable en todos los contextos. Considere un robot móvil diferencial dotado de dos actuadores, se sabe que el mecanismo es capaz de alcanzar cualquier configuración en el plano (posición y orientación), por lo que el sistema tiene tres grados de libertad. Sin embargo, en la tarea de seguimiento de trayectorias, debido a las restricciones no holónomas del sistema, no se puede tener una velocidad instantánea arbitraria en las variables de posición, sino que las tareas se definen mediante una velocidad lineal y una velocidad angular; *i.e.* tiene dos grados de libertad, por lo que el concepto de subactuación puede no depender solamente de la forma del sistema, sino de la tarea. Así, la definición debe ser modificada para considerar la tarea resultando en que “un sistema subactuado tiene menos variables de actuación que grados de libertad a controlar” [1].

Desde un punto de vista matemático, la definición brindada por [1] resulta un tanto inconveniente, al no brindar una descripción precisa de la estructura del sistema; por lo que se introducirá el concepto de subactuación de la siguiente manera [2]:

Considere un sistema de la forma

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}) + G(x)u,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa las variables de configuración del sistema y $u \in \mathbb{R}^m$ son las entradas al sistema. El sistema se considera subactuado si y sólo si $\text{rank}(G(x)) < \dim(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$.¹

La propiedad de subactuación tiene un gran número de orígenes, por ejemplo: fenómenos inherentes a la dinámica del sistema (*e.g.* en un vehículo acuático), fallas en los actuadores, optimización de masas y costos de producción (*e.g.* en robots móviles de dos ruedas) o para obtener sistemas que permitan estudiar tareas de control más complejas, por nombrar algunas causas. Por lo tanto, la importancia del diseño de esquemas de control para este tipo de sistemas yace en la cantidad de sistemas que poseen la propiedad de subactuación y las aplicaciones prácticas de los mismos.

1: En [2] se menciona que las definiciones adoptadas [2] y [1] están directamente relacionadas.



Figura 1.1: Ejemplos de sistemas subactuados.

La Figura 1.1 muestra algunos ejemplos de sistemas subactuados con distintas naturaleza de la propiedad de subactuación.

La definición adoptada de un sistema subactuado saca a relucir un hecho muy importante al momento de hablar de este tipo de sistemas: estos no pueden ejercer aceleraciones en un sentido arbitrario del espacio de configuración; este hecho, a su vez, implica la existencia de una restricción no holónoma en el comportamiento del sistema.

Debido a la existencia de restricciones en el sistema, la tarea del diseño de controladores robustos para un sistema subactuado es muy desafiante. La mayoría de las técnicas de diseño para controladores no lineales no son directamente aplicables debido a las restricciones que dichas técnicas imponen sobre la forma que debe de tener la representación en el espacio de estados del sistema. Para el diseño de leyes de control no lineales, generalmente se requiere que el sistema sea de una sola entrada y una sola salida (SISO), o que el sistema tenga una forma cuadrada, *i.e.* que el sistema tenga el mismo número de entradas y salidas.

Note que, debido a las cuantiosas diferencias que presentan los sistemas subactuados, es común que el diseño de controladores se realice caso por caso [3].

Debido a estas complicaciones, el concepto de formas normales juega un papel de gran importancia en el diseño de leyes de control para sistemas subactuados. La idea principal de las formas normales es que, después de aplicar una transformación no lineal del vector de estados, la dinámica del sistema tome una forma más manejable [4]. Entonces, una manera natural de clasificar a los sistemas subactuados es basándose en la estructura de su forma normal [3]. Por ejemplo, en la literatura existen reportes de estabilización de sistemas en una forma de realimentación estricta (véase, *e.g.* [5] y [6]) o sistemas en cascada (*e.g.* [7] y [8]). Desde el punto de vista de la teoría de control, tiene sentido utilizar el concepto de formas normales para el diseño de leyes de control, ya que este método clasifica a los sistemas subactuados en grupos donde la estructura de las dinámicas de los sistemas tienen características similares, permitiendo diseñar controladores para clases completas de sistemas subactuados [3].

Sin embargo, la clasificación de sistemas subactuados de esta manera puede no tomar en cuenta sus propiedades mecánicas, *e.g.* los mecanismos conocidos como pendubot y acrobot. Ambos representan la misma estructura básica, es decir, un robot manipulador de 2 GDL con una de sus articulaciones libre de girar sin

un actuador. Aún así, el sistema acrobot tiene una forma normal llamada forma de realimentación estricta en cascada, mientras que la del pendubot tiene una forma no triangular en cascada y cuadrática [3]. La diferencia en las formas normales implica que un controlador diseñado para el pendubot no es aplicable para el acrobot y viceversa. Por lo tanto, se puede concluir que hay una pérdida de información significativa sobre la dinámica del sistema si ésta no se toma en cuenta al momento de diseñar la ley de control. Aunado a lo anterior, el uso de difeomorfismos para encontrar la forma normal de un sistema subactuado implica la propuesta de una señal de salida para cada sistema, por lo que es posible argumentar que el diseño sigue haciéndose, en algún sentido, para un sistema subactuado en particular. Además, el uso de la metodología de linealización por retroalimentación de estados se propuso en [4] para eliminar el efecto de la señal de control sobre algunas de las ecuaciones de la dinámica del sistema [9], lo que implica que algunas señales de posición deben tener un grado relativo² alto con respecto a la perturbación.

Es bien sabido que el concepto de grado relativo juega un papel de vital importancia en el diseño de controladores por modos deslizantes (SMC) [10]. Generalmente, el grado relativo del sistema dicta el orden del modo deslizante, *e.g.* para un sistema con grado relativo tres, se requiere alcanzar un modo deslizante de tercer orden [11]. Además, si el orden del modo deslizante se incrementa, es posible cumplir con la tarea de control por medio de una ley de control continua³, *e.g.* el algoritmo *Super-Twisting* [12], un SMC continuo, es capaz de controlar sistemas con grado relativo uno al alcanzar un modo deslizante de segundo orden.

La mayor desventaja del aumento de orden del modo deslizante es que los términos continuos podrían excitar dinámicas no modeladas, generando otra fuente de *chattering*.⁴ En teoría, la aplicación de SMCs continuos debería aliviar el problema de *chattering* ya que la señal de control es una función del tiempo Lipschitz continua [11]. Sin embargo, las ventajas de los controladores continuos se ven comprometidas cuando la dinámica del actuador es lenta [14]. Además, el precio a pagar por la continuidad del controlador es la modificación de las clases de perturbaciones que dichos controladores pueden manejar⁵.

Para sistemas mecánicos completamente actuados, cuya dinámica se modela como conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, la definición de una función de salida con grado relativo dos es común. Sin embargo, debido a que la propiedad de subactuación puede tener naturalezas distintas

2: Se define como grado relativo de una señal, a , con respecto de otra, b , como el número de veces que se debe derivar a para que aparezca explícitamente b . De no especificarse lo contrario, se hablará del grado relativo de la salida del sistema con respecto a la entrada.

3: Un sistema de grado relativo n se puede controlar por medio de una señal de control continua al alcanzar un modo deslizante de orden $n + 1$.

4: En la literatura de modos deslizantes, se conoce como *chattering* a oscilaciones de alta frecuencia debidas a imperfecciones en la implementación de los controladores. Para una mayor discusión sobre el tema véase, por ejemplo, [13].

5: Mientras que un algoritmo por modos deslizantes de primer orden es insensible ante perturbaciones acotadas, el controlador *Super-Twisting* es capaz de manejar perturbaciones Lipschitz continuas [15].

[16], es de esperarse que las dinámicas de distintos sistemas subactuados posean estructuras diferentes. Lo anterior significa que para diseñar controladores que sean válidos para una clase de sistemas subactuados, es necesario el uso de una variable de deslizamiento. Esto, a su vez, significa que la convergencia en tiempo finito podría no ser alcanzable, dependiendo del diseño de dicha variable.

El diseño de controladores robustos para sistemas subactuados es un un área de investigación bastante activa. En [17], una extensión robusta de un controlador basado en pasividad por interconexión y asignación de amortiguamiento es propuesta para manejar perturbaciones acotadas. En [18], un controlador *backstepping* a bloques se emplea para la estabilización del sistema carro-péndulo. Además, en [19] se propone un controlador robusto para un vehículo acuático basándose en un método de función de Lyapunov constructiva. El diseño de SMCs es muy común para la estabilización robusta de sistemas subactuados. Por ejemplo, un SMC adaptable para el problema de control robusto de formaciones de nano satélites se presenta en [20]. En [21] se muestra el diseño de un controlador basado en teoría de modos deslizantes y un observador de perturbaciones lineal para un sistema de suspensión activa. En [22] se lleva a cabo un estudio comparativo de técnicas por modos deslizantes para el control de un sistema bola-barra. En [8], un SMC de primer orden se diseña para sistemas cuya forma normal tiene una estructura en cascada. En [23], se presentan SMCs acoplados para el sistema carro-péndulo; en dicho trabajo, no se realiza la transformación del sistema a la forma normal. En [24], se presenta un controlador por realimentación de salida robusto para sistemas con una forma normal con estructura de realimentación estricta basado en un observador de alta ganancia junto con un SMC de primer orden. En [25], se diseña un controlador por realimentación de salida para un vehículo acuático basándose en una función de rendimiento predefinido concluyendo un acotamiento semiglobal de las trayectorias del sistema en lazo cerrado. En [26], se presenta un controlador adaptable \mathcal{L}_1 por realimentación de salida para la estabilización de un sistema subactuado linealizado, consiguiendo un acotamiento semiglobal de las trayectorias del sistema. En [27] se muestra la aplicación de un SMC integral junto con un descriptor Takagi-Sugeno estocástico para el sistema carro-péndulo. En [28] se presentan un controlador *Twisting* y un controlador *Super-Twisting* para el sistema de grúa de 5 GDL. En [29], se diseña un controlador de dos relevadores para resolver el problema de seguimiento en un péndulo de rueda inercial.

Basado en la revisión literatura mostrada, es posible concluir que

una gran atención se vuelca al control de sistemas en específico. Por otro lado, cuando los diseños son válidos para clases completas de sistemas, estos están basados en las formas normales de los prototipos, lo que implica un proceso de diseño complejo.

1.1. Planteamiento del Problema

Considere un sistema subactuado de $n + m$ GDL, tal que los primeros n grados de libertad sean subactuados y los últimos m están dotados de un actuador, *i.e.*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g_r(q) = B(\tau + d_x), \quad (1.1)$$

con $q \in \mathbb{R}^{n+m}$, $M(q), C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, $g_r(q) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $B = [0_{n \times m}, I_m]^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$, $0_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una matriz de ceros, $I_m \in \mathbb{R}^m$ es la matriz identidad de dimensión $m \times m$ y $\tau, d_x \in \mathbb{R}^m$. Representan la señal de control y una perturbación externa, respectivamente. El sistema (1.1) puede particionarse como

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & M_{ua} \\ M_{ua}^T & M_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{ua} \\ C_{au} & C_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_v \\ q_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{ru} \\ g_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

donde $q_u = [q_1, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa las variables de posición de la sección subactuada del sistema, $q_a = [q_{n+1}, \dots, q_{n+m}]^T \in \mathbb{R}^m$ indica las variables de posición de la parte actuada, $q_v = \dot{q}_u$ es la velocidad de la parte subactuada y $q_b = \dot{q}_a$ es la velocidad de la sección actuada.

El problema es entonces la caracterización de algunas clases de sistemas cuya estructura permita el diseño de variables de salida pertinentes y el diseño de controladores que logren la estabilización del origen de (1.2), incluso en la presencia de la señal perturbadora d_x .

1.2. Contribución Principal

Motivado por los problemas descritos en el proceso de diseño clásico para sistemas subactuados, este documento detalla el diseño de controladores robustos para la estabilización del origen de tres distintas clases de sistemas subactuados sin utilizar transformaciones no lineales. Debido a esto, los esquemas de control son sistemáticos y directamente aplicables a las clases a

6: La matriz $M(q)$ representa los efectos de masas e inercias en el sistema, el vector $C(q, \dot{q})\dot{q}$ representa las fuerzas de Coriolis y centrifugas, $g_r(q)$ representa las fuerzas debido a la energía potencial del sistema y la matriz B indica la distribución de las fuerzas de control a través del sistema.

proponer. Además, se proponen variables de deslizamiento con grados relativo uno y dos; las diferencias teóricas son analizadas y algunos aspectos referentes a su aplicación son discutidos por medio de simulaciones. Se presentan diseños de realimentación de salida y su aplicación es estudiada mediante pruebas experimentales.

1.3. Producción Científica

Artículos JCR Publicados

1. L. Ovalle, H. Ríos and M. Llama. «Robust Output-Feedback Control for the Cart-Pole System: A Coupled Super-Twisting Sliding-Mode Approach». *IET Control Theory & Applications*, 13.2 (2019), pp. 269–278, 2019.
2. L. Ovalle, H. Ríos, M. Llama, V. Santibáñez and A. Dzul. «Omnidirectional Mobile Robot Robust Tracking: Sliding-Mode Output-based Control Approaches». *Control Engineering Practice*, 85 (2019), pp. 50-58.
3. L. Ovalle, H. Ríos and M. Llama. «Continuous Sliding-Mode Control for Underactuated Systems: Relative Degree One and Two». *Control Engineering Practice*, 90 (2019), pp. 342-357.

Artículos JCR en Revisión

1. L. Ovalle, H. Ríos, M. Llama and L. Fridman. «Continuous Sliding-Mode Output-Feedback Control for Stabilization of a Class of Underactuated Systems». Preprint submitted to *IEEE Transactions on Automatic Control*.

Artículos en Congresos Nacionales

1. L. Ovalle, H. Ríos and M. Llama. «A Robust Output-Feedback Control for the Cart-Pole System: A Super - Twisting Sliding-Mode approach». *Proceedings of the 2017 XIX Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, Nov. 2017, pp. 297–302
2. L. Ovalle, H. Ríos, M. Llama, V. Santibáñez and A. Dzul. «Sliding-Mode Output-based Control for Omnidirectional Mobile Robot Tracking». *Proceedings of the 2018 XX Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*, Oct. 2018, pp. 85-89.

3. L. Ovalle, H. Ríos and M. Llama. «Control por Modos Deslizantes Continuos para Sistemas Subactuados con Grado Relativo Dos». *Proceedings of the 2019 Congreso Nacional de Control Automático*, Oct. 2019, pp 231-236.

Artículos en Congresos Internacionales

1. L. Ovalle H. Ríos and M. Llama. «Continuous Sliding-Mode Control for a Class of Underactuated Systems» *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 2019.

1.4. Organización del Documento

Parte I: El capítulo 2 tiene como objetivo la presentación de la clasificación propuesta. El capítulo 3 detalla algunos aspectos básicos del diseño de SMCs y su aplicación a sistemas mecánicos.

Parte II: El capítulo 4 detalla la aplicación de la técnica a los sistemas Clase I, el capítulo 5 detalla la aplicación a sistemas Clase II, el capítulo 6 detalla la aplicación a sistemas Clase III y el capítulo 7 detalla, en base a sistemas Clase III, la aplicación de la metodología propuesta en un esquema de realimentación de salida.

Parte III: El capítulo 8 muestra las conclusiones finales del documento.

PRELIMINARES

Clasificación de Sistemas Subactuados

2

Este capítulo tiene como finalidad la presentación de algunas clases de sistemas subactuados. La propuesta de las clases tiene como base la estructura del modelo (1.2), *i.e.* no se consideran transformaciones no lineales. Este hecho tiene como consecuencia que el diseño de controladores basados en las clases propuestas será sistemático para los sistemas que caigan dentro de las mismas.

Como se mencionó anteriormente, la clasificación de sistemas subactuados se realiza comúnmente observando la estructura de la forma normal de su dinámica. Así pues, mediante dicho procedimiento, es posible generar clases que abarquen toda la familia de sistemas con la propiedad de subactuación; este hecho demuestra la gran utilidad de las transformaciones no lineales como técnicas auxiliares al proceso de diseño de controladores para sistemas subactuados.

No obstante, para poder realizar la transformación del sistema a una forma normal, se requiere de la propuesta de una señal de salida adecuada. Ésto no es un proceso sencillo. Además, la necesidad de la propuesta de dicha función de salida para cada sistema a considerar implica que el diseño de los controladores debe hacerse *ad hoc* a cada sistema, resultando en un diseño poco sistemático⁹.

Debido a los problemas asociados con las técnicas basadas en formas normales mencionados en el Capítulo 1, se opta por proponer una clasificación distinta, en la cual se consideren las propiedades estructurales de los sistemas subactuados, con el fin de aliviar los problemas mencionados en el diseño de controladores para clases de sistemas subactuados.

Antes de proceder con la caracterización de las clases propuestas, se recuerda la descripción de la dinámica de los sistemas a considerar¹⁰, *i.e.*

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & M_{ua} \\ M_{ua}^T & M_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{ua} \\ C_{au} & C_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_v \\ q_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{ru} \\ g_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

Además, tome en cuenta la siguiente suposición.

9: Un controlador diseñado específicamente para algún sistema subactuado en particular utiliza la estructura particular del sistema en cuestión, lo que imposibilita la generalización del diseño.

10: Se muestra de nuevo la estructura de los sistemas a considerar debido a que las clases a proponer harán uso de condiciones sobre la estructura del sistema (1.2).

11: Esta suposición es necesaria para poder asegurar que no existen problemas de controlabilidad en el sistema.

Suposición 2.1¹¹ Para el sistema (1.2), la matriz de inercias, $M(q)$, es no singular y tiene una norma acotada para todo $q \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, con $\mathcal{D} := \{q \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \|q\| \leq \gamma\}$, para algún $\gamma > 0$.

2.1. Clasificación

A partir de la estructura de (1.2), se proponen las siguientes definiciones:



Figura 2.1: Un ejemplo de sistema Clase I es el sistema bola-barra.

Definición 2.1 El sistema (1.2) pertenece a la Clase I si satisface las siguientes condiciones:

- i) La matriz de inercias del sistema es diagonal, i.e.
 $M_{ua}(q_u, q_a) = 0$.
- ii) El origen del sistema (1.2) es un punto de equilibrio.
- iii) Al menos uno de los términos $C_{uu}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a)$, $C_{ua}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a)$ o $g_{ru}(q_u, q_a)$ son diferentes de cero y dependen de q_a o \dot{q}_a .
- iv) $q_u = \dot{q}_u = 0$ implica que las variables actuadas convergen a cero asintóticamente.
- v) $\dim(q_u) = \dim(q_a)$



Figura 2.2: Un ejemplo de sistema Clase II es un robot de 2 GDL con una articulación flexible.

Definición 2.2 El sistema (1.2) pertenece a la Clase II si satisface las siguientes condiciones:

- i) El grado relativo de q_u y q_a con respecto a alguna de las señales de control está bien definido y es igual a dos.
- ii) La matriz $C_{ua}(q_u, \dot{q}_u)$ no es una matriz cero.
- iii) El origen del sistema (1.2) es un punto de equilibrio único, al menos localmente.
- iv) La matriz $M(q_u, q_a)$ es no singular para todo $[q_u \ q_a]^T \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ con $\{0\} \in \mathcal{D}$.

Definición 2.3 El sistema (1.2) pertenece a la Clase III si satisface las siguientes condiciones:

- i) Las matrices $M_{aa}(q_u) \in \mathbb{R}$, $M_{ua}(q_u) \in \mathbb{R}^n$, $C_{uu}(q_u, \dot{q}_u)$ y $g_u(q_u) \in \mathbb{R}^n$ son funciones de las variables subactuadas q_u y sus derivadas \dot{q}_u , solamente.
- ii) El grado relativo de q_u y q_a con respecto a alguna de las señales de control está bien definido y es igual a dos.
- iii) La matriz $C_{ua}(q_u, \dot{q}_u)$ es una matriz cero.
- iv) El origen del sistema (1.2) es un punto de equilibrio único, al menos localmente.
- v) La matriz $M(q_u, q_a)$ es no singular para todo $[q_u \ q_a]^T \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ con $\{0\} \in \mathcal{D}$.

Note que la clasificación de sistemas está basada en propiedades estructurales de los mecanismos, lo que permite un mayor rango de acción para diseñar los controladores. La mayor desventaja de la clasificación propuesta es que no se abarca la familia completa de sistemas subactuados. Sin embargo, las clases propuestas son incompatibles entre sí, lo que agranda el rango de aplicación de los resultados. Además, de acuerdo con [9], para sistemas con una señal de control escalar, si algún sistema no pertenece a alguna de las clases propuestas, es posible encontrar un cambio de variables que transforme al sistema (1.2) en un sistema Clase I.

Las diferencias entre restricciones estructurales impuestas para los sistemas Clase I y los sistemas Clase II y III es clara. Los sistemas Clase I tienen partes subactuadas que no se ven directamente afectadas por la señal de control, *i.e.* q_u tiene grado relativo tres o cuatro, mientras que los sistemas Clase II y III tienen un grado relativo de q_u con respecto a τ igual a dos. Además, la condición *iv)* de la Definición 2.1 implica que basta con controlar las variables subactuadas para que el sistema por sí solo sea capaz de asegurar la estabilidad asintótica del origen del sistema (1.2); mientras que la estabilidad de los sistemas Clase II y III no es directamente verificable.

La diferencia entre los sistemas Clase II y III radica en la manera en que las variables subactuadas y actuadas interactúan entre sí. Mientras que los sistemas Clase II requieren de la influencia de las variables actuadas sobre la dinámica de las variables subactuadas, los sistemas Clase III requieren que la dinámica de la parte subactuada sea independiente de las variables actuadas.

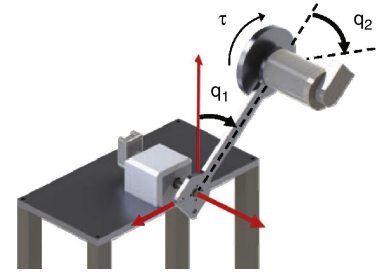


Figura 2.3: Un ejemplo de sistema Clase III es el péndulo de rueda inercial.

Diseño de Controladores Robustos

3

14: A lo largo del documento se considerará como estabilización robusta a la tarea de estabilizar el origen de un sistema incluso en presencia de una señal perturbadora.

Para poder asegurar la estabilización robusta¹⁴ del origen de (1.2), se considerarán algunos algoritmos por modos deslizantes continuos. Este capítulo tiene como objetivo introducir algunos SMCs continuos y la metodología utilizada para el diseño de los controladores robustos a considerar.

3.1. Conceptos Preliminares

Debido a la importancia que toma el tipo de convergencia en el estudio de SMCs, se presentan una serie de conceptos de estabilidad. Para esto, considere una ecuación diferencial no autónoma de la forma:

$$\frac{d}{dt}z(t) = f(t, z(t)), \quad t \geq t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}_{\leq 0}, \quad (3.1)$$

donde $z(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados; $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua con respecto a z y continua a tramos con respecto a t ; se supone que el origen de (3.1) es un punto de equilibrio, i.e. $f(t, 0) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Las soluciones del sistema (3.1), para una condición inicial $z_0 \in \mathbb{R}^n$, en un instante $t_0 \in \mathbb{R}^n$, se describe como $z(t, t_0, z_0)$ y se supone que ésta está definida en un intervalo $[t_0, t_0 + T)$, con $0 < T < \infty$.

Considere un conjunto Ω como una vecindad del origen en \mathbb{R}^n , $0 \in \Omega$.

Definición 3.1 [30], [31]. Se dice que el origen del sistema (3.1), $z = 0$, es:

1. Uniformemente Estable: Si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta(\varepsilon)$ tal que, para cualquier $z_0 \in \Omega$, si $\|z_0\| \leq \delta(\varepsilon)$ entonces $\|z(t, t_0, z_0)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$;
2. Uniforme y Asintóticamente Estable: si es Estable de manera uniforme y atractivo en Ω , i.e. para cualquier $z_0 \in \Omega$, existe una $\delta > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$, para toda $\|z_0\| \leq \delta$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$;
3. Uniforme y Exponencialmente Estable: si es Estable de manera uniforme y exponencialmente convergente en Ω , i.e. para cualquier $z_0 \in \Omega$ existen constantes $k, \sigma > 0$ tales que $\|z(t, t_0, z_0)\| \leq k\|z_0\|e^{-\sigma(t-t_0)}$ para todo $t \geq t_0$ y cualquier

$t_0 \in \mathbb{R}$;

4. Uniformemente Estable en Tiempo Finito: Si es Estable de manera uniforme y convergente en tiempo finito en Ω , i.e. para cualquier $z_0 \in \Omega$ existe un $0 \leq T_{x_0} < +\infty$ tal que $z(t, t_0, z_0) = 0$ para todo $t \geq t_0 + T_{x_0}$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$. La función $T_0(z_0) = \inf\{T_{z_0} \geq 0 : z(t, t_0, z_0) = 0 \forall t_0 \geq t_0 + T_{z_0}\}$ se denomina el tiempo de establecimiento del sistema (3.1).

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces se dice que la estabilidad es global.

La diferencia entre los distintos tipos de estabilidad es clara: la estabilidad uniforme implica un acotamiento de las soluciones del sistema (3.1); la estabilidad asintótica uniforme implica, además de la estabilidad del origen del sistema, que las trayectorias del sistema tienden al origen en el límite conforme $t \rightarrow \infty$; la estabilidad exponencial implica que la velocidad con que las trayectorias se acercan al origen es al menos tan rápida como una señal exponencial decreciente; mientras que la estabilidad en tiempo finito implica que las trayectorias del sistema alcanzan el origen en un tiempo estrictamente menor que infinito. Por lo tanto, se dice que la estabilidad en tiempo finito es una conclusión teórica más dura que la estabilidad exponencial.

3.2. Diseño de SMCs Continuos

A continuación se aborda el proceso de diseño de SMCs continuos tomando en cuenta el grado relativo del sistema. En particular, se discute el proceso para sistemas con grado relativo uno y dos.

Diseño de SMCs Continuos para Sistemas con Grado Relativo Uno

Considere un sistema dinámico de la forma

$$\dot{s} = v + \delta(t), \quad (3.2)$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es la variable a controlar, $v \in \mathbb{R}$ es la señal de control y $\delta(t) \in \mathbb{R}$ representa un término de perturbación.

Antes de abordar el proceso de diseño del SMC se considera la siguiente suposición sobre la perturbación $\delta(t)$ a considerar en el diseño de los controladores:

15: Esta suposición implica que los términos de perturbación son Lipschitz continuos. Dicha restricción es necesaria para poder asegurar que los controladores sean capaces de anular el efecto de la perturbación.

Suposición 3.1¹⁵ Existe una constante $\eta > 0$ tal que

$$\left| \frac{d}{dt} \delta(t) \right| \leq \eta.$$

Para estabilizar la dinámica (3.2) por medio de una ley de control continua, se considera el algoritmo *Super-Twisting* [12]. Este algoritmo tiene la forma

$$\begin{aligned} v &= -k_1 [s]^{1/2} + \bar{v}, \\ \dot{v} &= -k_2 [s]^0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde se considera la notación $[a]^\gamma := |a|^\gamma \text{sign}(a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y constantes positivas k_1 y k_2 apropiadas.

Para probar la estabilidad del sistema (3.2), se considera el siguiente teorema.

16: La demostración de este teorema puede encontrarse en [32].

Teorema 3.1¹⁶ Aplique el controlador (3.3) al sistema (3.2), y considere que la Suposición 3.1 se satisface. Si las ganancias del controlador se diseñan de forma que

$$k_1 = 1.5\eta^{\frac{1}{2}}, \quad k_2 = 1.1\eta,$$

entonces, $s = 0$ es Estable en Tiempo Finito.

Diseño de SMCs Continuos para Sistemas con Grado Relativo Dos

Considere el siguiente sistema dinámico

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta(t) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es la señal de salida a controlar, $v \in \mathbb{R}$ representa la señal de control y $\delta(t) \in \mathbb{R}$ es una perturbación. Para garantizar la estabilidad en tiempo finito del sistema (3.4), se introducen los siguientes algoritmos de SMC:

17: El controlador CST puede ser visto como la unión de un controlador *Super-Twisting*, con respecto de σ , y una variable de deslizamiento, σ , que asegura que el origen del sistema (3.4) sea estable en tiempo finito, una vez que se alcanza el conjunto $\sigma = 0$.

a) SMC Singular Terminal Continuo (CST) [10]¹⁷

$$\begin{aligned} \sigma &= k_\sigma [s]^{2/3} + \dot{s}, \\ v &= -k_1 [\sigma]^{1/2} + \bar{v}, \\ \dot{v} &= -k_2 [\sigma]^0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Una posible selección de ganancias está dada de la siguiente manera:

$$k_\sigma > 0, \quad k_1 = 1.5\eta^{\frac{1}{2}}, \quad k_2 = 1.1\eta.$$

b) SMC Nosingular Terminal Continuo (CNST) [33] ¹⁸

$$\begin{aligned} \sigma &= s + k_\sigma [\dot{s}]^{3/2}, \\ v &= -k_1 [\sigma]^{1/3} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= -k_2 [\sigma]^0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

18: El controlador CNST contiene un término tipo *Super-Twisting*, note la diferencia en la potencia en v , y una superficie de deslizamiento no lineal que asegura la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema (3.4).

De acuerdo a [33], una posible selección de ganancias está dada de la siguiente manera:

$$k_\sigma = 7.7\eta^{-1/2}, \quad k_1 = 7.5\eta^{2/3}, \quad k_2 = 2\eta.$$

c) Algoritmo *Twisting* Continuo (CTA) [34] ¹⁹

$$\begin{aligned} v &= -k_1 [s]^{1/3} - k_2 [\dot{s}]^{1/2} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= -k_3 [s]^0 - k_4 [\dot{s}]^0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

19: En el controlador CTA la estructura de $\dot{\bar{v}}$ es la de un controlador *Twisting*, el cual será integrado, logrando una señal de control continua.

En [34], se da la posible elección de ganancias:

$$k_1 = 7\eta^{2/3}, \quad k_2 = 5\eta^{1/2}, \quad k_3 = 2.3\eta, \quad k_4 = 1.1\eta.$$

d) Controlador Discontinuo Integrado (DIC) [35] ²⁰

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s + k_2 [\dot{s}]^{3/2}, \\ \sigma_2 &= s + k_4 [\dot{s}]^{3/2}, \\ v &= -k_1 [\sigma_1]^{1/3} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= -k_3 [\sigma_2]^0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

20: La estructura de este controlador es similar a la del CNST. Sin embargo, el parámetro k_4 permite más flexibilidad al momento del diseño del controlador.

En [35] se propone el siguiente procedimiento de sintonización

$$k_1 = 2\eta^{\frac{2}{3}}, \quad k_2 = 5\eta^{\frac{-1}{2}}, \quad k_3 = 0.5\eta, \quad k_4 = 0.$$

El siguiente teorema habla de las propiedades de convergencia de los controladores para sistemas con grado relativo dos.

Teorema 3.2 ²¹ *Suponga que el sistema (3.4) es controlado por alguno de los controladores (3.5)–(3.8) y que la suposición 3.1 se satisface; entonces, $s = 0$ es Estable en Tiempo Finito.*

21: La demostración de este teorema, para cada uno de los controladores, puede encontrarse en la referencia correspondiente

Discusión

Todos los controladores presentados pueden ser vistos como controladores homogéneos junto con el término \bar{v} , el cual puede interpretarse como un aproximador de la perturbación. Por lo tanto, todos los controladores presentados en este apartado son robustos ante perturbaciones Lipschitz continuas (LC), proveen un esfuerzo de control continuo y aseguran que las trayectorias del sistema alcancen el hiperplano $(s, \dot{s}) = 0$ en un tiempo finito (TF). La principal diferencia entre los controladores recae en la información requerida para el cálculo de la señal de control, la complejidad de diseño y el orden del modo deslizante obtenido.

El controlador *Super-Twisting* consta solamente de dos parámetros a sintonizar y la ley de control depende solamente de la variable de deslizamiento s , alcanzando un modo deslizante de segundo orden. Por otro lado, los controladores para sistemas con grado relativo dos requieren la variable de deslizamiento y su primer derivada temporal, tienen al menos tres ganancias a elegir y aseguran la existencia de un modo deslizante de tercer orden; un mayor orden del modo deslizante implica una mayor precisión a la salida del sistema.

La diferencia en la información requerida parece implicar que el controlador *Super-Twisting* tiene una ventaja significativa con respecto a los controladores de orden superior. Sin embargo, como se hará evidente en el siguiente apartado, todos los esquemas requieren de la misma información para el cálculo del controlador robusto. Por lo tanto, las diferencias entre los esquemas de control robusto no resultan significativas.

La Tabla 3.1 muestra las propiedades teóricas principales de los esquemas de control.

Propiedad	ST	CST	CNST	CTA	DIC
Ley de control continua	sí	sí	sí	sí	sí
Tipo de perturbaciones	LC	LC	LC	LC	LC
Tipo de convergencia	TF	TF	TF	TF	TF
Información necesaria	s	s, \dot{s}	s, \dot{s}	s, \dot{s}	s, \dot{s}
Número de Parámetros	2	3	3	4	4
Orden del modo deslizante	2	3	3	3	3

Tabla 3.1: Tabla resumen de las propiedades teóricas de los esquemas de control robusto

3.3. Diseño de Controladores Robustos para Sistemas Mecánicos

El proceso de diseño de SMCs continuos requiere que el sistema a controlar sea descrito por ecuaciones dinámicas de la forma (3.2) o (3.4). Por lo tanto, para la aplicación a sistemas mecánicos, es necesario un manejo matemático para describir el problema de control por medio de las ecuaciones mencionadas. Para esto, es posible considerar el siguiente proceso de diseño:

1. Proponer una variable de deslizamiento con un grado relativo adecuado y cuyo desvanecimiento implique la estabilidad del origen de (1.2).
2. Diseñar un controlador nominal que lleve la dinámica de la variable de deslizamiento s a la forma (3.2), si el grado relativo de la variable de deslizamiento es uno, o (3.4), si el grado relativo de la variable de deslizamiento es dos.
3. Implementar alguno de los controladores robustos mencionados para asegurar el desvanecimiento de la variable de deslizamiento en tiempo finito.

La Figura 3.1 muestra los distintos pasos de diseño. En el diagrama presentado se muestra la relación que existe entre los estados de la planta y la variable de deslizamiento. Las ecuaciones para el controlador *Super-Twisting*, (3.3), y los controladores para grado relativo dos, (3.5)–(3.8), muestran que la variable \dot{s} es necesaria sólo para el cálculo de controladores para grado relativo dos. No obstante, la información completa del estado es necesaria para el cálculo de los controladores nominales en todos los casos.

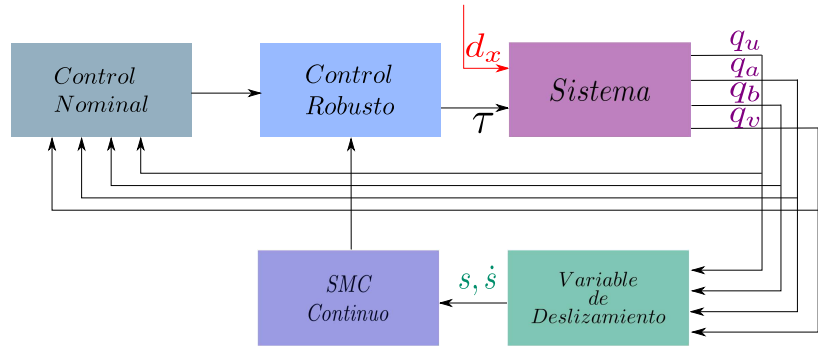


Figura 3.1: Diagrama esquemático del proceso de diseño general

Además, en el caso de la aplicación experimental de los controladores, resulta conveniente considerar el problema de realimentación de salida. Note que, salvo casos excepcionales, los sistemas mecánicos están dotados de sensores de posición, por lo que un esquema capaz de controlar el sistema mecánico a partir de la información disponible resulta beneficioso. En estos casos es conveniente agregar el siguiente paso al proceso de diseño

4. Proponer un esquema de observación para estimar la información no disponible.

No obstante, al tratarse con sistemas no lineales, debe tomarse en cuenta que no existe un principio de separación en el proceso de diseño del controlador y del observador y la estabilidad en lazo cerrado del esquema de control completo debe ser estudiada.

La Figura 3.2 detalla el proceso de diseño en el caso de realimentación de salida. La diferencia principal entre los controladores con información completa del estado y los controladores de realimentación de salida recae en el uso de un esquema de observación para aproximar la información no disponible.

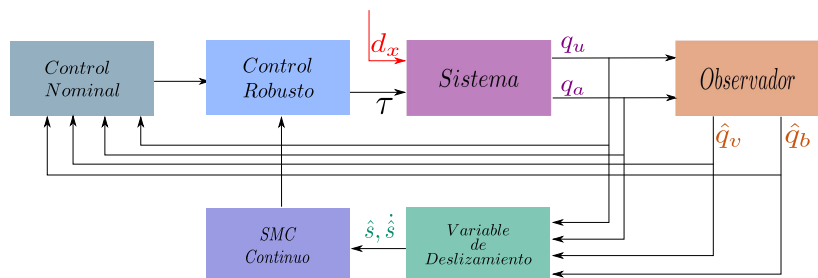


Figura 3.2: Diagrama esquemático del proceso de diseño para el caso de realimentación de salida

RESULTADOS PRINCIPALES

Control de Sistemas Clase I

Este capítulo detalla el proceso de diseño de controladores para sistemas Clase I, caracterizada por la Definición 2.1. Se presentan distintos casos basados en la estructura de un sistema Clase I y se proponen variables de deslizamiento con grado relativo uno y dos para cada caso. La aplicabilidad de los resultados se ejemplifica con un estudio de simulación.

Considere el sistema mecánico subactuado

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & M_{ua} \\ M_{ua}^T & M_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{ua} \\ C_{au} & C_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_v \\ q_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{ru} \\ g_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

y suponga que éste cumple las condiciones de la Definición 2.1, *i.e.* el sistema pertenece a la Clase I. Debido a las condiciones *i)* y *iii)* se sabe que el sistema tiene una descripción en el espacio de estados de la forma²⁴

24: Debido a la estructura de (4.1), la restricción *iv)* de la Definición 2.1, puede ser reescrita como: $f_u(0, x_a, 0, x_b) = 0$ implica que $x_a \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v \\ f_u(x_u, x_v, x_a, x_b) \\ x_b \\ f_a(x_u, x_v, x_a, x_b) + g_a(x_u, x_a)(\tau + d_x) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $x_u = q_u \in \mathbb{R}^n$, $x_a = q_a \in \mathbb{R}$, $x_v = \dot{x}_u$ y $x_b = \dot{x}_a$. Dependiendo de la estructura de f_u , dos casos distintos son considerados:

- a) $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} = 0$ y $\frac{\partial f_u}{\partial x_a} \neq 0$.
- b) $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} \neq 0$.

Comentario 4.1 El cumplimiento de uno de estos casos son una conclusión de la restricción *iii)* de la Definición 2.1.

4.1. Diseño de los Controladores

Ahora se procede a diseñar superficies de deslizamiento con grado relativo uno y dos con respecto a la entrada, para los casos *a)* y *b)*, respectivamente.

Caso a), Grado Relativo Uno.

Considere el caso a), cuando f_u no depende explícitamente de x_b , i.e. $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} = 0$ y $\frac{\partial f_u}{\partial x_a} \neq 0$. Entonces, se considera la siguiente variable de deslizamiento

$$s = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + z_4. \quad (4.2)$$

El siguiente teorema habla de la estabilidad del origen de (4.1) en la superficie de deslizamiento $s = 0$.

Teorema 4.1 *Suponga que f_u en (4.1) no depende explícitamente de x_b , i.e. $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} = 0$ y $\frac{\partial f_u}{\partial x_a} \neq 0$. Si los parámetros c_1 , c_2 y c_3 se diseñan tal que la matriz*

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

sea Hurwitz. Entonces, $[x_u, x_a]^T = 0$ es Asintóticamente Estable.

Por lo tanto, el control nominal

$$\tau = - \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_a} g_a \right)^{-1} \left[c_1 z_2 + c_2 z_3 + c_3 z_4 + \omega(x, t) - v \right], \quad (4.4)$$

con

$$\omega(x, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_u} x_v + \frac{\partial f_u}{\partial x_v} f_u \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_a} \right) x_b + \frac{\partial f_u}{\partial x_a} f_a, \quad (4.5)$$

reduce el sistema en lazo cerrado a

$$\dot{s} = v + \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_a} g_a \right) d_x = v + \delta_x, \quad (4.6)$$

con δ_x como el término de perturbación. Entonces, la salida s tiene grado relativo igual a uno con respecto a la entrada v . Por lo tanto, v puede ser diseñada como un controlador *Super-Twisting*.

Caso b), Grado Relativo Uno.

Para el caso b), donde f_u depende explícitamente de x_b , i.e. $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} \neq 0$, se propone la siguiente variable de deslizamiento

$$s = c_1 z_1 + c_2 z_2 + z_3. \quad (4.7)$$

El siguiente teorema habla de las propiedades de estabilidad del origen de (4.1) en la superficie de deslizamiento.

Teorema 4.2 Suponga que f_u en (4.1) depende explícitamente de x_b , i.e. $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} \neq 0$. Si los parámetros c_1 y c_2 se diseñan tal que la matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

sea Hurwitz. Entonces, $[x_u, x_a]^T = 0$ es Asintóticamente Estable.

Por lo tanto el controlador nominal

$$\tau = - \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_b} g_a \right)^{-1} \left[c_1 z_2 + c_2 z_3 + \bar{\omega}(x) - v \right],$$

con

$$\bar{\omega}(x) = \frac{\partial f_u}{\partial x_u} x_v + \frac{\partial f_u}{\partial x_v} f_u + \frac{\partial f_u}{\partial x_a} x_b + \frac{\partial f_u}{\partial x_b} f_a, \quad (4.9)$$

reduce el sistema en lazo cerrado a

$$\dot{s} = v + \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_b} g_a \right) d_x = v + \delta_x, \quad (4.10)$$

con δ_x como el término de perturbación. Entonces, la salida s tiene grado relativo igual a uno con respecto a la entrada v . Por lo que v puede ser diseñada como un controlador *Super-Twisting*.

Caso a), Grado Relativo Dos.

Para el caso a) $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} = 0$ and $\frac{\partial f_u}{\partial x_a} \neq 0$, se propone la siguiente variable de deslizamiento:

$$s = c_1 z_1 + c_2 z_2 + z_3. \quad (4.11)$$

El siguiente teorema habla de la estabilidad del origen de (4.1) en la superficie de deslizamiento.

Teorema 4.3 Suponga que f_u en (4.1) no depende explícitamente de x_b , i.e. $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} = 0$ y $\frac{\partial f_u}{\partial x_a} \neq 0$. Si los parámetros c_1 y c_2 se diseñan tal que la matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

sea Hurwitz. Entonces, $[x_u, x_a]^T = 0$ es Asintóticamente estable.

Considere el siguiente controlado nominal

$$\tau = - \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_a} g_a \right)^{-1} \left[c_1 z_3 + c_2 z_4 + \omega(x, t) + \frac{\partial f_u}{\partial x_a} f_a - v \right]. \quad (4.13)$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado está descrito por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_a} g_a \right) d_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta_x \end{bmatrix},$$

con δ_x como el término de perturbación. Entonces, la salida s tiene grado relativo igual a dos con respecto a la entrada v , por lo que la señal v puede ser diseñada de acuerdo a alguno de los controladores continuos para sistemas con grado relativo dos.

Caso b), Grado Relativo Dos.

Por otra parte, para el caso b), $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} \neq 0$, considere la variable de deslizamiento

$$s = c_1 z_1 + z_2. \quad (4.14)$$

Se considera el siguiente teorema

Teorema 4.4 *Suponga que f_u en (4.1) depende explícitamente de x_b , i.e. $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} \neq 0$. Si c_1 en (4.14) es positivo; entonces, $[x_u, x_a]^T = 0$ es Asintóticamente Estable.*

Considere la siguiente ley de control nominal

$$\tau = - \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_b} g_a \right)^{-1} \left[c_1 z_3 + \bar{\omega}(x) - v \right].$$

Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado está dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \left(\frac{\partial f_u}{\partial x_b} g_a \right) d_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta_x \end{bmatrix},$$

con δ_x como el término de perturbación. Entonces, la salida s tiene grado relativo igual a uno con respecto a la entrada v , por lo que dicha señal puede ser diseñada de acuerdo a alguno de los controladores continuos para sistemas con grado relativo dos.

4.2. Discusión

La estructura de las variables de deslizamiento implica que la dinámica en modo deslizante para todos los casos es lineal. Por lo tanto, los parámetros c_i pueden elegirse por medio de técnicas clásicas, *e.g.* asignación de polos, para obtener una respuesta deseada. Sin embargo, para obtener una respuesta similar entre algún esquema de grado relativo uno y su contraparte de grado relativo dos, los parámetros del primero deben implicar que existe un polo mucho más alejado del origen. Esto, a su vez, sugiere que se tendrá una respuesta transitoria más activa y que la señal de control tendrá impulsos más considerables al inicio. Además, el cálculo de variables con grado relativo uno requieren una derivada más de x_u .

4.3. Resultados de Simulación

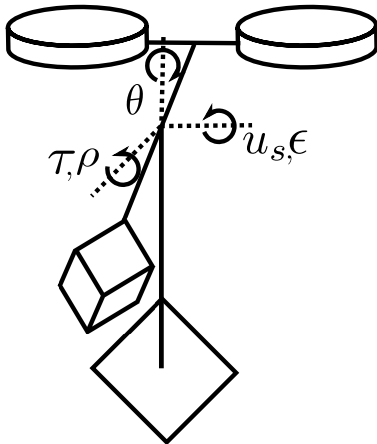


Figura 4.1: Representación esquemática del Helicóptero de 3 GDL.

Considere un sistema tipo helicóptero de tres grados de libertad [36] (véase la Figura 4.1). Este sistema consiste en una articulación esférica anclada al suelo, permitiendo el desplazamiento angular a través de tres ejes y restringiendo el desplazamiento translacional.

La dinámica del sistema está dada por:

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon} &= \phi_1 + \phi_2 u_s, \\ \ddot{\rho} &= \phi_3(\tau + d_x), \\ \ddot{\theta} &= \phi_4 \sin(\rho),\end{aligned}$$

donde ϵ representa el ángulo de elevación a través del eje x , ρ es el ángulo de alabeo medido sobre el eje z , θ es el ángulo de desplazamiento medido sobre el eje y , u_s representa la fuerza vertical aplicada por los rotores, τ es el par aplicado sobre el eje z y ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 y ϕ_4 son constantes positivas que representan a los parámetros del sistema.

Este sistema está compuesto de dos subsistemas: el subsistema de elevación el cual está desacoplado y es completamente actuado, y la dinámica de ρ y θ que puede ser expresada en la forma (1.2) con:

$$M(q) = \text{diag}\left[\frac{1}{\phi_4}, \frac{1}{\phi_3}\right], \quad C(q, \dot{q}) = 0, \quad g(q) = [\sin(q_a) \ 0]^T,$$

donde $q_a = \rho$ y $q_u = \theta$. Este sistema cumple las condiciones de la Suposición 2.1 para todo $q_a \in (-\pi, \pi)$ y la Definición 2.1. Por

lo tanto, éste pertenece a la Clase I; además, como la dinámica de la parte subactuada sólo depende explícitamente de q_a mas no de \dot{q}_a , se considera el caso *b*). Para las simulaciones se consideran los siguientes valores de los parámetros y condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 0.2431, \phi_4 = -0.4975, q_a(0) = 1[\text{rad}], q_u(0) = 0.5[\text{rad}], \\ \dot{q}_a(0) &= \dot{q}_u(0) = 0[\text{rad/s}].\end{aligned}$$

Para el diseño de grado relativo uno se considera el controlador *Super-Twisting* (3.3), junto con el controlador nominal (4.4) y la variable de deslizamiento (4.2). Para el diseño de grado relativo 2 se considera el controlador CTA (3.7), junto con el controlador nominal (4.13) y la variable de deslizamiento (4.11).

Para probar la robustez del controlador se considera una perturbación externa dada por $d_x = \sin(t) + 1$. Las variables de deslizamiento son diseñadas para que A_n tenga todos sus autovalores iguales a -1 . Los parámetros del controlador *Super-Twisting* están dados como: $k_1 = 1.06$ y $k_2 = 0.55$. Para el controlador CTA, se consideran las ganancias: $k_1 = 2.78$, $k_2 = 2.5$, $k_3 = 0.575$ y $k_4 = 0.275$.

La Figura 4.2 muestra la evolución de las variables de posición q_u y q_a , de arriba hacia abajo. La Respuesta del controlador *Super-Twisting* es ligeramente más rápida para la posición de la variable subactuada. Sin embargo, la respuesta de la variable actuada es más rápida para el CTA. Debido a que la simulación se hace con muestreos en instantes discretos de tiempo, es de esperarse que la convergencia exacta no sea alcanzable. Sin embargo, las respuestas del sistema controlado con ambas técnicas de control robusto muestran un resultado aceptable. Además, la ventaja principal del controlador de segundo orden es el incremento en la precisión en la evolución de las variables de control.

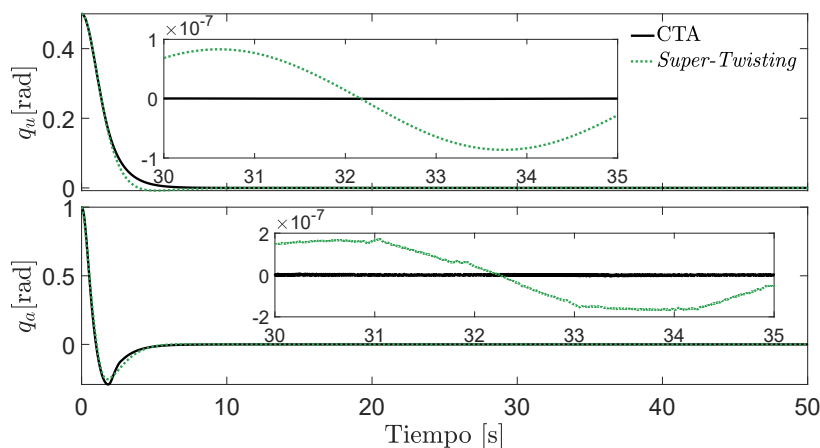


Figura 4.2: Variables de posición para el sistema Clase I

La figura 4.3 muestra la respuesta de la variable de deslizamiento s y el esfuerzo de control. En esta figura se muestra claramente la mayor precisión a la salida del CTA. Sin embargo, por el proceso de selección de las ganancias utilizado, el controlador *Super-Twisting* tiene un tiempo de convergencia menor. Además, debido a que el controlador CTA consta con un término de compensación más complejo al tener una cantidad mayor de posibles valores, las oscilaciones en la señal de control resulta más oscilatoria.

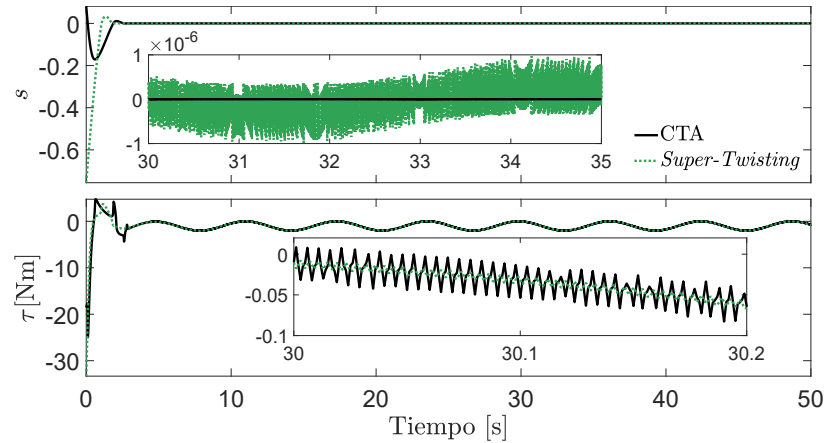


Figura 4.3: Variable de deslizamiento y señal de control para el sistema Clase I

La Figura 4.4 muestra los valores RMS para las variables de posición y la señal de control. Todos los valores alcanzan un nivel similar en el estado estable.

Note que las diferencias entre ambos resultados resultan ser despreciables, por lo que se puede concluir que la tarea de control se realiza satisfactoriamente para ambos casos, obteniendo una mayor precisión con respecto a la salida, y por lo tanto, a las variables de posición para el controlador de grado relativo dos. El precio a pagar por dicho incremento en la precisión es una señal de control más oscilatoria; sin embargo, el nivel de oscilación no resulta ser crítico.

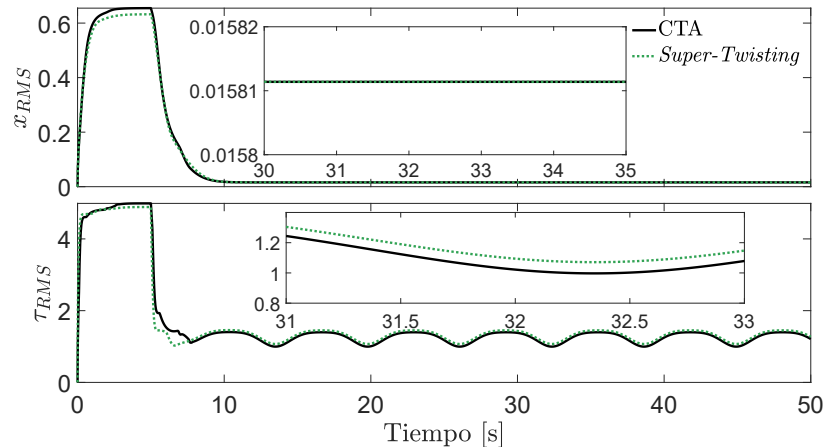


Figura 4.4: Valores RMS para el sistema Clase I considerado

Este capítulo detalla el proceso de diseño de controladores para sistemas Clase II, caracterizada por la Definición 2.2. Se propone una variable de deslizamiento con grado relativo dos para lograr la estabilización del sistema²⁷. Se estudia la estructura del sistema en modo deslizante y su estabilidad es asegurada bajo ciertas condiciones. La aplicabilidad del resultado se ejemplifica por medio de una simulación.

Considere el sistema mecánico subactuado

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & M_{ua} \\ M_{ua}^T & M_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{ua} \\ C_{au} & C_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_v \\ q_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{ru} \\ g_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

y suponga que éste cumple las condiciones de la Definición 2.2, *i.e.* el sistema pertenece a la clase II. Debido a las condiciones i) y iii) se sabe que el sistema tiene una descripción en el espacio de estados de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{x}_v \\ \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v \\ f_u(x) + g_u(x_u, x_a)(\tau + d_x) \\ x_b \\ f_a(x) + g_a(x_u, x_a)(\tau + d_x) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

donde $x_u = q_u \in \mathbb{R}^n$, $x_a = q_a \in \mathbb{R}$, $x_v = \dot{x}_u$, $x_b = \dot{x}_a$, $x = [x_u, x_a, x_v, x_b]^T$ y $x \in \chi$ con $\chi = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n+1}$.

A continuación se describe el proceso de diseño de una variable de deslizamiento y un controlador nominal para esta clase de sistemas.

5.1. Diseño del Controlador

Considere la siguiente variable de deslizamiento

$$s = \lambda_a x_a + \lambda_u^T x_u, \quad (5.2)$$

con $\lambda_a \in \mathbb{R}$ y $\lambda_u \in \mathbb{R}^n$.

Debido a que la variable de deslizamiento depende solamente de las variables de posición, se puede demostrar que ésta tiene

27: Para el caso de sistemas Clase II no se tiene conocimiento de un método para diseñar variables de deslizamiento con grado relativo uno, por lo que el diseño se enfocará solamente en una variable con grado relativo dos.

grado relativo dos con respecto a la señal de control. Para esto, considere las primeras dos derivadas temporales de (5.2), *i.e.*

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \lambda_a x_b + \lambda_u^T x_v, \\ \ddot{s} &= \lambda_a [f_a(x) + g_a(x_u, x_a)(\tau + d_x)] + \lambda_u^T [f_u + g_u(x_u, x_a)(\tau + d_x)].\end{aligned}$$

Sin embargo, la estabilidad del sistema una vez que se alcance el modo deslizante no es sencilla de asegurar. Para asegurar la estabilidad del sistema se introducen los siguientes resultados.

Lema 5.1 *Suponga que los parámetros de la variable de deslizamiento (5.2) se eligen tal que*

$$\lambda_u^T M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^* x_u) \neq \lambda_a, \quad \forall x_u \in \mathcal{D}_u,$$

con $\lambda^* = -\lambda_a^{-1} \lambda^T$ y $\mathcal{D}_u \in \mathbb{R}^n = \{x_u \in \mathbb{R}^n | x \in \chi\}$. Entonces, en $s = 0$, la dinámica (5.1) se reduce a:

$$\dot{x}_v = -C_2(x_u, x_v)x_v - H(x_u), \quad (5.3)$$

con

$$\begin{aligned}C_2(x_u, x_v) &= M_2(x_u)^{-1} [C_{ua}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) \lambda^* \\ &\quad + C_{uu}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v)], \\ H(x_u) &= M_2(x_u)^{-1} g_{ru}(x_u, \lambda^* x_u), \\ M_2(x_u) &= M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) \lambda^* + M_{uu}(x_u, \lambda^* x_u).\end{aligned}$$

La ecuación (5.1) tiene una estructura similar a un sistema mecánico. Además, a partir del resultado del Lema 5.1, se puede ver una conexión entre el resultado propuesto y la metodología de moldeo de energía. El sistema (1.2), en el modo deslizante, se verá reducido al sistema (5.1). Por lo tanto, si el origen es un equilibrio inestable de (1.2), la posible definidad negativa de M_2 permite volver al equilibrio de (5.1) un equilibrio estable.

Para probar la estabilidad del origen de (5.3), se presenta el siguiente teorema.

Teorema 5.1 Suponga que se cumplen las siguientes condiciones

- i) λ_u y λ_a cumplen con las condiciones del Lema 6.1,
- ii) λ_u y λ_a se eligen de tal forma que $C_2(x_u, x_v) > 0$,
- iii) $\text{sign}([g_2(x_u)]_i) = \text{sign}([x_u]_i)$,
- iv) $H_i(x_u)$ es monótonamente creciente con respecto a x_{ui} .

Entonces, $[x_u, x_v]^T = 0$ es Estable. Además, si

$$\lim_{x_u \rightarrow \partial \mathcal{D}_u} \int_0^1 H^T(ax_u)x_u da = \infty,$$

donde la notación $\partial \mathcal{D}_u$ representa la frontera del conjunto \mathcal{D}_u , entonces $[x_u^T, x_v^T]^T = 0$ es Asintóticamente Estable.

Comentario 5.1 Las condiciones i) y ii) del Teorema 5.1 se cumplen por diseño, mientras que las condiciones iii) y iv) representan condiciones estructurales en el sistema. Estas condiciones son necesarias para asegurar que el origen de (6.3) sea un punto de equilibrio estable, lo cuál puede ser verificado por medio del Teorema de Lagrange-Dirichlet [37] considerando una energía potencial dada por $\int_0^1 H^T(\tau x_u)x_u d\tau$.

Comentario 5.2 Note que $H(x_u) = M_2^{-1}(x_u)g_{ru}(x_u)$. Entonces, una condición suficiente para la estabilidad asintótica del origen de (6.3)-(6.4) es que $\lambda_{\text{máx}}(M_2(x_u)) \rightarrow 0$, para $M_2 > 0$, o bien $\lambda_{\text{mín}}(M_2(x_u)) \rightarrow 0$, para $M_2 < 0$, conforme $x_u \rightarrow \partial \mathcal{D}_u$. Además, se puede considerar el hecho contrario: El conjunto \mathcal{D}_u puede ser definido de tal manera que $\lambda_{\text{máx}}(M_2(x_u)) = 0$ para toda $x_u \in \partial \mathcal{D}_u$, para $M_2 > 0$, o $\lambda_{\text{mín}}(M_2(x_u)) = 0$ para toda $x_u \in \partial \mathcal{D}_u$, para $M_2 < 0$.

El proceso de diseño para los parámetros de la variable de deslizamiento está basado en relaciones algebraicas; por lo tanto, en presencia de incertidumbre paramétrica, la variable de deslizamiento puede ser construida considerando el peor de los casos.

Una vez que la estabilidad de la dinámica en el modo deslizante ha sido probada, se propone el siguiente controlador nominal

$$\tau = -[\lambda_a g_a(x_u, x_a) + \lambda^T g_u(x_u, x_a)]^{-1} [\lambda_a f_a(x) + \lambda^T f_u(x) - v].$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado queda descrito por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + [\lambda_a g_a(x_u, x_a) + \lambda^T g_u(x_u, x_a)] dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta_x \end{bmatrix}.$$

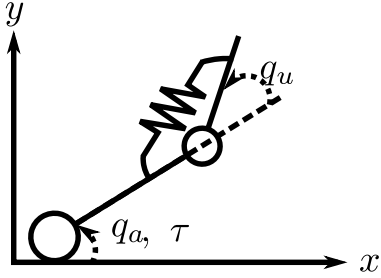


Figura 5.1: Representación esquemática del robot de 2 GDL con articulaciones flexibles.

La salida de este sistema, s , tiene un grado relativo igual a dos, por lo que v puede ser diseñada de acuerdo a alguno de los controladores continuos para sistemas con grado relativos dos.

5.2. Resultados de Simulación

Considere un robot de 2 GDL con una articulación flexible [2] (véase la Figura 5.1).

Este sistema consiste en un eslabón actuado a través de un motor y un segundo eslabón sin actuación y conectado al primero por medio de un resorte. Este sistema puede ser visto como una aproximación a un robot de 1 GDL con un eslabón flexible [2].

La dinámica del sistema está dada por:

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_2 + a_3 \cos(q_u) \\ a_2 + a_3 \cos(q_u) & a_1 + a_2 + 2a_3 \cos(q_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{vu} & a_3 \sin(q_u) \dot{q}_a \\ -a_3 \sin(q_u) \dot{q}_u - a_3 \sin(q_u) \dot{q}_a & -a_3 \sin(q_u) \dot{q}_u + f_{va} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k q_u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix},$$

donde q_a representa la posición angular del eslabón actuado, q_u es la posición del segundo eslabón, τ representa el par aplicado al eslabón actuado y a_1 , a_2 , a_3 , f_{vu} , f_{va} y k son parámetros que dependen de las longitudes e inercias de los eslabones, los parámetros de fricción y la rigidez del resorte.

Este sistema cumple las condiciones de la Suposición 2.1 y la Definición 2.2 para toda q_u . Por lo tanto este sistema pertenece a Clase II. Para las simulaciones se consideran los siguientes parámetros y condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.0799, \quad a_2 = 0.0244, \quad a_3 = 0.0205, \quad k = 1, \quad f_{va} = 0.001, \\ f_{vu} &= 0.005, \quad q_u(0) = 0.3491[\text{rad}], \quad q_a(0) = 0.2618[\text{rad}], \\ \dot{q}_u(0) &= \dot{q}_a(0) = 0[\text{rad/s}]. \end{aligned}$$

Para este sistema se considera el controlador CID (3.8), junto con el control nominal (5.1) y la variable de deslizamiento (5.2). Para comprobar la robustez del controlador se considera la señal de perturbación $d_x = \sin(t) + 1$.

Las ganancias del controlador CID se eligen como $k_1 = 9.75$ y $k_2 = 14.3$, las cuales cumplen con las condiciones de estabilidad del controlador con un valor de $\eta = 9$

Los parámetros para la variable de deslizamiento están dados por:

$$\lambda_a = 7.3607, \lambda = 3.8139,$$

los cuales cumplen las condiciones del Lema 6.1 y el Teorema 6.1.

La Figura 5.2 muestra la evolución de las posiciones q_u y q_a , de arriba hacia abajo. La respuesta de las posiciones tienen un comportamiento oscilatorio, esto puede ser atribuido a la manera en que las trayectorias del sistema en lazo cerrado son influenciadas por el CTA. Sin embargo el objetivo de control es alcanzado.

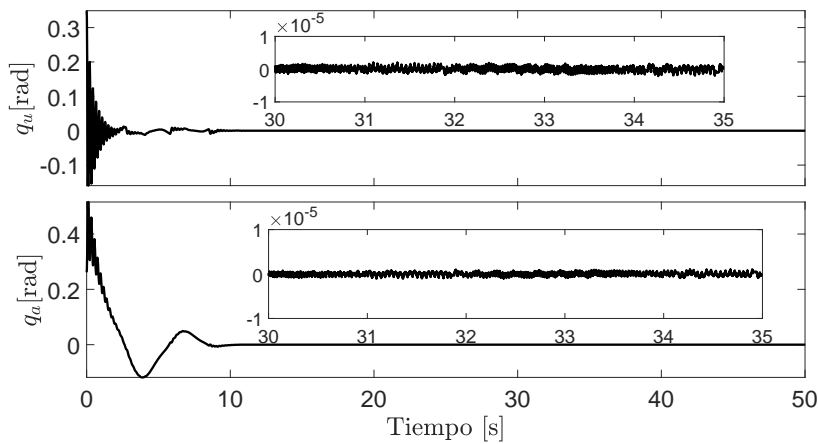


Figura 5.2: Evolución de q_u y q_a del sistema Clase II

La Figura 5.3 muestra la respuesta de s y la entrada de control.

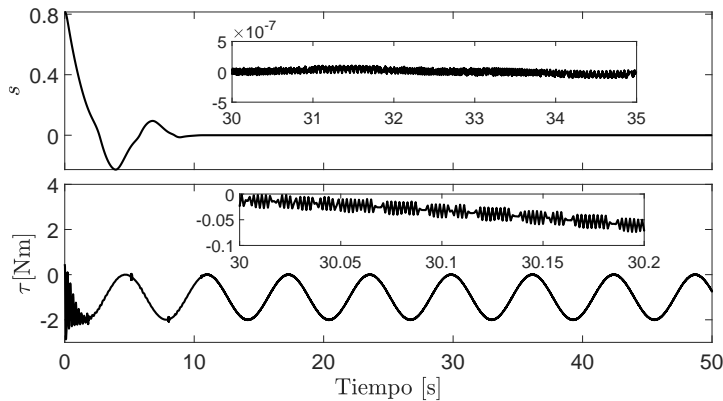


Figura 5.3: Variable de deslizamiento y ley de control para el sistema Clase II

Note que s alcanza el cero en tiempo finito. La principal desventaja del método es la oscilación presente en la señal de control. No obstante las respuestas mostradas son continuas y la amplitud de las oscilaciones no resultan significativas, en el estado estacionario, con respecto a la amplitud de la señal de control. Además, esta desventaja puede ser atenuada al seleccionar un

algoritmo menos agresivo, como es el caso del controlador singular terminal continuo.

La naturaleza de las oscilaciones presentes en el método está relacionada con la manera en que se maneja el amortiguamiento para el mismo. El valor de C_2 dependerá del amortiguamiento propio del sistema, y que el método propuesto no permite la inyección de amortiguamiento al sistema. Esta es la mayor desventaja del método propuesto. Sin embargo, en casos donde el amortiguamiento que posea el sistema sea suficiente, la aplicación de la metodología debería ser suficiente.

Control de Sistemas Clase III

En este capítulo se abordará el proceso de diseño de controladores para sistemas Clase III. Para esta clase de sistemas se presenta un diseño para sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). Para mostrar la efectividad del esquema de control se presentan simulaciones en un sistema SISO, *i.e.* un sistema carro-péndulo; y a un sistema MIMO, *i.e.* una grúa de 4 GDL.

Considere el sistema mecánico subactuado

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & M_{ua} \\ M_{ua}^T & M_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{ua} \\ C_{au} & C_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_v \\ q_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{ru} \\ g_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

y suponga que éste cumple las condiciones de la Definición 2.3, *i.e.* el sistema pertenece a la clase III. Debido a las condiciones *i)–iii)*, se sabe que el sistema tiene una descripción en el espacio de estados de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{x}_v \\ \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v \\ f_u(x) + g_u(x_u, x_a)(\tau + d_x) \\ x_b \\ f_a(x) + g_a(x_u, x_a)(\tau + d_x) \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

donde $x_u = q_u \in \mathbb{R}^n$, $x_a = q_a \in \mathbb{R}^m$, $x_v = \dot{x}_u$, $x_b = \dot{x}_a$, $x = [x_u, x_a, x_v, x_b]^T$ y $x \in \mathcal{X}$ con $\mathcal{X} = \{\mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n+m}\}$.

6.1. Diseño del Controlador

A continuación se muestra el proceso de diseño de variables de deslizamiento con grado relativo uno y dos y un controlador nominal para sistemas Clase III.

Diseño para Grado Relativo Uno

Considere la siguiente variable de deslizamiento:

$$s = \Lambda_u(\Xi_u x_u + x_v) + \Lambda_a(\Xi_a x_a + x_b), \quad (6.2)$$

donde $s \in \mathbb{R}^m$, $\Lambda_u = [\lambda_{u1}, \dots, \lambda_{um}]^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\lambda_{ui} = [\lambda_{ui1}, \dots, \lambda_{uin}] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\Lambda_a = \text{diag}(\lambda_{a1}, \dots, \lambda_{am}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Xi_a = \text{diag}(\sigma_{a1}, \dots, \sigma_{am}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $\Xi_u = \text{diag}(\sigma_{u1}, \dots, \sigma_{un}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para toda $i = \overline{1, m}$ y $j = \overline{1, n}$, los parámetros σ_{uj} , λ_{uij} , σ_{ai} y λ_{ui} son parámetros positivos a diseñar. Además, para toda $i = \overline{1, m}$, es posible reescribir (6.2) como

$$s_i = \lambda_{ui}(\Xi_u x_u + x_v) + \lambda_{ai}(\sigma_{ai} x_{ai} + x_{bi}).$$

Debido a que la variable de deslizamiento depende explícitamente de las velocidades, x_v y x_b , se sabe que s tiene grado relativo vectorial bien definido y al menos uno de sus elementos es uno con respecto a alguna entrada de control.

La estabilidad del sistema, una vez que se alcanza un modo deslizante, no es tan sencilla de comprobar. Para poder hacer el análisis se considera el siguiente Lema

Lema 6.1 *Suponga que los parámetros de la variable de deslizamiento s , dada en (6.2), se eligen tal que la matriz*

$$M_2(x_u) = M_{uu}(x_u) + M_{ua}(x_u)\Psi_1, \quad \forall x \in \mathcal{D}_u,$$

con $\Psi_1 = -\Lambda_a^{-1}\Lambda_u$ y $\mathcal{D}_u \in \mathbb{R}^n = \{x_u \in \mathbb{R}^n | x \in \mathcal{X}\}$, es definida positiva o negativa. Entonces, en $s = 0$, la dinámica de del sistema (6.1) se reduce a:

$$\dot{x}_v = -C_3(x_u, x_v)x_v - H(x_u) - R(x_u)\tilde{y} - h_2(x_u, t), \quad (6.3)$$

$$\dot{\tilde{y}} = -\Xi_a \tilde{y} + \bar{B}x_v, \quad (6.4)$$

con:

$$C_3(x_u, x_v) = M_2^{-1}(x_u)(C_{uu}(x_u, x_v) + M_{ua}(x_u)\Psi_2),$$

$$R(x_u) = M_2^{-1}(x_u)M_{ua}(x_u)\Psi_3,$$

$$h_2(x_u, t) = M_2^{-1}(x_u)M_{ua}(x_u)\Psi_4(t),$$

$$H(x_u) = M_2^{-1}(x_u)g_{ru}(x_u), \bar{B} = -\Lambda_a\Psi_2,$$

$$\Psi_2 = [\psi_{21}, \dots, \psi_{2m}]^T, \psi_{2i} = -\lambda_{ai}^{-1}\lambda_{ui}B_i,$$

$$B_i = \Xi_u - \sigma_{ai}I_n, \Psi_3 = \Lambda_a^{-1}\Xi_a,$$

$$\Psi_4(t) = [\psi_{41}(t), \dots, \psi_{4m}(t)]^T,$$

$$\psi_{4i}(t) = \sigma_{ai}^2(x_{ai}(t_r) + \lambda_{ai}^{-1}\lambda_{ui}x_u(t_r))e^{-\sigma_{ai}(t-t_r)}, \forall i = \overline{1, m}.$$

Existe una relación entre los resultados para sistemas Clase II y III. Note que la estructura de las ecuaciones (5.1) y (6.3) son similares, con la diferencia de los términos $R(x_u)\tilde{y}$ y $h_2(x_u, t)$ en (6.3). En esencia, la ecuación (6.3) puede ser vista como una versión forzada de (5.1). Esto es debido a que (6.2) tiene una

estructura similar a (5.2), considerando filtros pasa bajas de las posiciones en lugar de las variables de posición.

El problema se ha convertido en el estudio de la estabilidad del origen de (6.3). Para analizar la estabilidad, se propone el siguiente teorema:

Teorema 6.1 *Suponga que, para toda $[x_u^T, x_a^T]^T \in \mathcal{D}$, las siguientes condiciones sobre los parámetros de la variable de deslizamiento (6.2) se satisfacen:*

- i) Los parámetros Λ y Λ_a son elegidos de acuerdo al Lema 6.1.
- ii) Los parámetros Ξ y Ξ_a se eligen de tal forma que

$$C_3(x_u, x_v) > 0,$$

$$\lambda_{\min}(C_3(x_u, x_v)) > \frac{\tilde{R}\|\tilde{B}\|}{\bar{\sigma}_a},$$

$$\tilde{R} = \max_{\forall x_u \in \mathcal{D}} \|R(x_u)\|, \quad \bar{\sigma}_a = \min_i (\sigma_{ai}).$$

- iii) El término $H(x_u)$ es tal que $H_i(x_u)$ es monótonamente creciente con respecto de x_{ui} con $H_i(0) = 0$.

Entonces, todas las trayectorias del sistema (6.3)–(6.4) están acotadas. Además, si

$$\lim_{x_u \rightarrow \partial \mathcal{D}_u} \int_0^1 H^T(ax_u)x_u da = \infty,$$

donde la notación $\partial \mathcal{D}_u$ representa la frontera del conjunto \mathcal{D}_u , entonces $[x_u^T, x_v^T]^T = 0$ es Asintóticamente Estable.

Comentario 6.1 Las condiciones i) y ii) del Teorema 6.1 deben ser cumplidas por diseño, mientras que la restricción iii) representa una condición estructural en el sistema. Esta condición es necesaria para asegurar que el origen de (6.3) sea un punto de equilibrio estable, lo cuál puede ser verificado por medio del Teorema de Lagrange-Dirichlet [37] considerando una energía potencial dada por $\int_0^1 H^T(\tau x_u)x_u d\tau$.

Comentario 6.2 Note que $H(x_u) = M_2^{-1}(x_u)g_{ru}(x_u)$. Entonces, una condición suficiente para la estabilidad asintótica del origen de (6.3)–(6.4) es que $\lambda_{\max}(M_2(x_u)) \rightarrow 0$, para $M_2 > 0$, o bien $\lambda_{\min}(M_2(x_u)) \rightarrow 0$, para $M_2 < 0$, conforme $x_u \rightarrow \partial \mathcal{D}_u$. Además, se puede considerar el hecho contrario: El conjunto \mathcal{D}_u puede ser definido de tal manera que $\lambda_{\max}(M_2(x_u)) = 0$ para toda $x_u \in \partial \mathcal{D}_u$, para $M_2 > 0$, o $\lambda_{\min}(M_2(x_u)) = 0$ para toda $x_u \in \partial \mathcal{D}_u$, para $M_2 < 0$.

El proceso de diseño para los parámetros de la variable de deslizamiento está basado en relaciones algebraicas; por lo tanto, en presencia de incertidumbre paramétrica, la variable de deslizamiento puede ser construida considerando el peor de los casos.

Una vez que la estabilidad de la dinámica de modo deslizante se ha probado, se propone el siguiente control nominal

$$\tau = \left[\Lambda g_u + \Lambda_a g_a \right]^{-1} \left[-\Lambda_a (\Xi_a x_b + f_a) - \Lambda (\Xi x_v + f_u) + v \right], \quad (6.5)$$

con el que se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado.

$$\dot{s} = v + \left(\Lambda_a g_a + \Lambda^T g_u \right) d_x = v + \delta_x. \quad (6.6)$$

30: Utilizando argumentos similares a los propuestos en este capítulo es posible generalizar el resultado del Capítulo 5 al caso MIMO. Sin embargo, no se tiene conocimiento hasta el momento de un sistema MIMO que cumpla con las condiciones necesarias.

Tome en cuenta que (6.6) puede ser reescrita como³⁰

$$\dot{s}_i = v_i + \delta_{xi}, \quad (6.7)$$

lo que implica un desacoplamiento de la dinámica para cada variable de deslizamiento. Por lo tanto, es posible realizar el diseño de los controladores robustos sin necesidad de utilizar algoritmos multivariables, como aquellos propuestos en [38] y [39]. Por lo tanto, v_i puede ser diseñada como un controlador *Super-Twisting*.

Grado Relativo Dos

Considere la siguiente variable de deslizamiento

$$s = \Lambda_a \left[\Xi_a \int_0^t x_a(\tau) d\tau + x_a(t) \right] + \Lambda_u \left[\Xi_u \int_0^t x_u(\tau) d\tau + x_u(t) \right], \quad (6.8)$$

y observe que al tomar la primer derivada temporal de (6.8), se obtiene

$$\dot{s} = \Lambda_u (\Xi_u x_u + x_v) + \Lambda_a (\Xi_a x_a + x_b),$$

i.e. la variable de deslizamiento (6.2); por lo que cada elemento de (6.8) tiene grado relativo dos con respecto a algún elemento de τ . Además, si el control robusto asegura un modo deslizante de orden 2, *i.e.* el controlador asegura que tanto (6.8) como su derivada sean llevadas a cero en tiempo finito, la restricción

$$\Lambda_u (\Xi_u x_u + x_v) + \Lambda_a (\Xi_a x_a + x_b) = 0,$$

se cumple después de un tiempo finito.

Note que las conclusiones del Lema 6.1 y el Teorema 6.1 hablan sobre la convergencia del sistema bajo esta condición. Por lo tanto, la dinámica del sistema se reducirá a (6.3)–(6.4) y la selección de parámetros descrita por el Lema 6.1 y el Teorema 6.1 asegura la estabilidad del origen de (6.1) en el modo deslizante.

Entonces, si el control nominal (6.5) se aplica al sistema (6.1), se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + [\Lambda_a g_a + \Lambda^T g_u] d_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta_x \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Note que, en (6.9), el grado relativo de s es igual a dos; por lo que v puede ser diseñada de acuerdo a alguno de los controladores continuos para sistemas con grado relativos dos.

6.2. Discusión

Para los sistemas Clase III, a diferencia de los sistemas Clase I, se utiliza el mismo control nominal y se tiene la misma dinámica en el modo deslizante, tanto para grado relativo uno, como para grado relativo dos. Este hecho permite comparar los controladores de una manera más sistemática.

Además, si se consigue la estabilidad asintótica de x_u y x_v , de (6.8), es posible ver que el esquema para grado relativo dos impone la siguiente restricción integral sobre el sistema:

$$\Lambda_a \Xi_a \int_0^t x_a(\tau) d\tau = -\Lambda_u^T \Xi_u \int_0^t x_u(\tau) d\tau.$$

Note que el método propuesto para grado relativo dos requiere la extensión de la dinámica del sistema. Sin embargo, a diferencia de los esquemas Lipschitz continuos, donde la extensión se hace considerando la derivada de la señal de control (véase, *e.g.* [40]), en el método propuesto, el orden se aumenta considerando la integral de las posiciones del sistema, lo que elimina la necesidad del conocimiento de las perturbaciones.

6.3. Resultados de Simulación

En este apartado se muestran resultados en simulación para probar la aplicabilidad de la metodología en sistemas Clase

III.

Con el fin de mostrar la efectividad del esquema propuesto, se mostrarán simulaciones en el sistema carro-péndulo para los esquemas de grado relativo uno y dos.

Para mostrar la aplicabilidad de la técnica en sistemas MIMO, se muestran simulaciones en el sistema de grúa de 4 GDL.

Sistema Carro-Péndulo

Considere la dinámica de un sistema carro-péndulo (véase la Figura 6.1). Este sistema consiste de un péndulo libre de rotar montado en un carro cuyo movimiento se restringe a un eje. La dinámica de este sistema está descrita por:

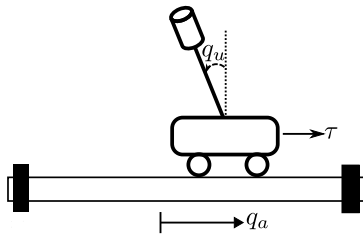


Figura 6.1: Representación esquemática del sistema carro-péndulo

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \cos(q_u) \\ \beta \cos(q_u) & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{v\theta} \dot{q}_u - \eta \sin(q_u) \\ f_{vx} \dot{q}_a - \beta \sin(q_u) \dot{q}_u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix},$$

donde q_a representa el desplazamiento del carro, q_u es la posición angular del péndulo, τ representa la fuerza aplicada al carro y $\alpha, \beta, \gamma, \eta, f_{v\theta}$ y f_{vx} son los parámetros del sistema.

Este sistema cumple la Suposición 2.1 para todo $q_u \in (-\pi, \pi)$, por lo que el sistema pertenece a Clase III. Los parámetros considerados en los experimentos son:

$$\alpha = 0.052, \beta = 0.111, \gamma = 2.608, \eta = 1.094, f_{v\theta} = 0.03, f_{vx} = 6.33.$$

Para el diseño de grado relativo uno se considera el controlador *Super-Twisting* (3.3), junto con el controlador nominal (6.5) y la variable de deslizamiento (6.2). Para el diseño de grado relativo dos se considera el controlador CST (3.5), junto con el control nominal (6.5) y la variable de deslizamiento (6.8).

Los parámetros de la variable de deslizamiento están dados por:

$$\lambda = 1, \lambda_a = 0.7363, \sigma_a = 2.6877, \Xi = 5.3753.$$

La señal de perturbación considerada está dada por: $d_x(t) = 5.25 \sin(3\pi t) + 1$. El parámetro k_σ del controlador CST se considera unitario, mientras que los parámetros k_1 y k_2 para ambos controladores se consideran iguales y están dados por:

La Figura 6.2 muestra las variables de posición para cada experimento. El controlador CST muestra un mayor sobreimpulso comparado con el controlador *Super-Twisting*. No obstante, el aumento de la precisión en el control a la salida resulta aparente.

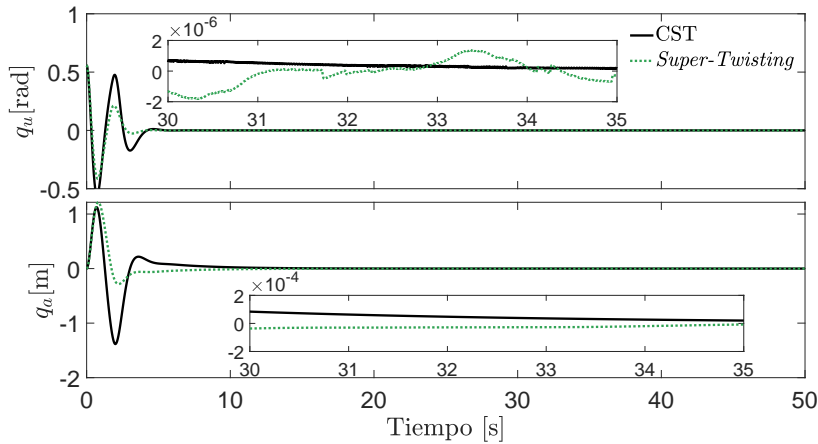


Figura 6.2: Variables de posición para el sistema Clase III SISO

La Figura 6.3 muestra la respuesta de la variable de deslizamiento s y la señal de control. En esta figura se puede observar una mayor precisión del controlador CST con respecto al controlador *Super-Twisting*; sin embargo, note que el tiempo de convergencia del controlador *Super-Twisting* es menor con respecto al controlador CST. La diferencia en tiempos de convergencia es la razón de la diferencia en el comportamiento de las variables de posición. Con respecto a la señal de control, las respuestas parecen ser casi idénticas debido a la similitud de las estructuras de los controladores.

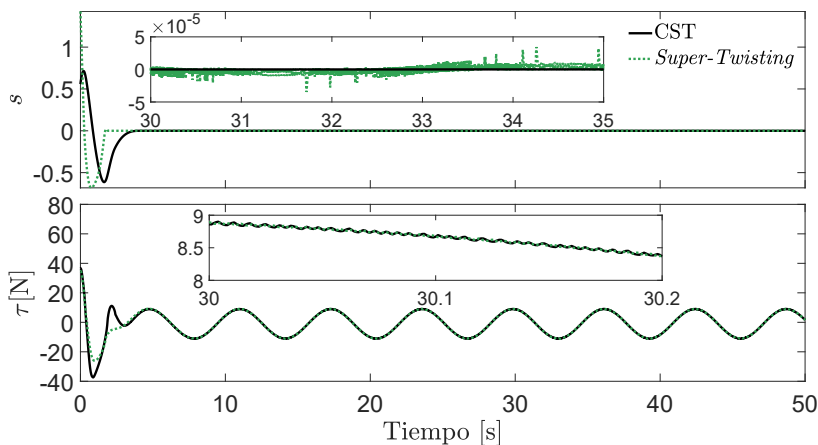


Figura 6.3: Variable de deslizamiento y señal de control para el sistema Clase III SISO.

La Figura 6.4 muestra los valores RMS para las variables de posición y la señal de control. En esta figura, como es de esperarse, se aprecia una ventaja del controlador *Super-Twisting* con respecto al controlador CST en la respuesta transitoria. Sin embargo, en el estado estable, es posible apreciar que las respuestas para ambos controladores es casi idéntica.

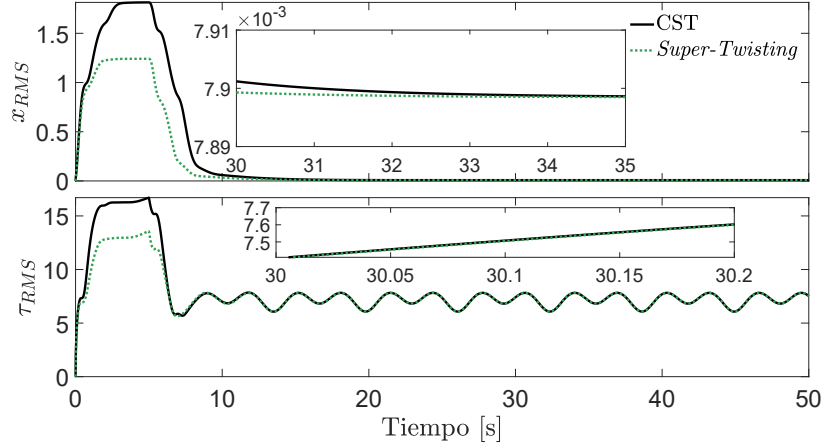


Figura 6.4: Variables de posición para el sistema Clase III SISO

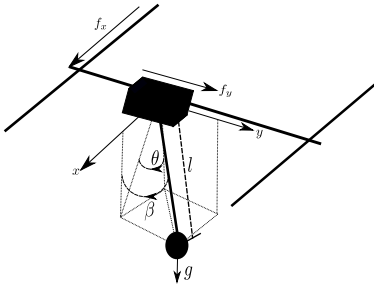


Figura 6.5: Representación esquemática del sistema de grúa considerado

Sistema de Grúa de 4 GDL

Considere un sistema de grúa de 4 GDL (véase la Figura 6.5). Este sistema consiste en una carga suspendida por un cable movida a través de un carro montado, sobre dos rieles, capaz de moverse a través de los ejes x y y .

El objetivo de control consiste en llevar el carro a una posición deseada minimizando las oscilaciones presentes en la carga. La dinámica del sistema puede ser descrita como (1.2) considerando las siguientes definiciones [28]:

$$\begin{aligned}
 q_a &:= [x \ y]^T, \quad q_u := [\theta \ \beta]^T, \\
 M_{aa} &:= \text{diag}(m_x, m_y), \quad M_{uu} := \text{diag}(\gamma c^2(\beta), \gamma), \\
 M_{ua} &:= \begin{bmatrix} \alpha(c(\theta)c(\beta) & -s(\theta)s(\beta)) \\ 0 & \alpha c(\beta) \end{bmatrix}, \\
 C_{uu} &:= \begin{bmatrix} 0 & -2\gamma c(\beta)s(\beta)\dot{\theta} \\ \gamma c(\beta)s(\beta)\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \\
 C_{au} &:= \begin{bmatrix} c_{au1} & c_{au2} \\ 0 & -\alpha s(\beta)\dot{\beta} \end{bmatrix}, \quad C_{aa} := \text{diag}(0, 0), \\
 g_{ra}(q_u) &:= [0, 0]^T \quad g_{ru}(q_u) := [\alpha g s(\theta)c(\beta), \alpha g s(\beta)c(\theta)]^T, \\
 \tau &= [f_x, f_y]^T,
 \end{aligned}$$

donde se utiliza la notación $s(\cdot) = \sin(\cdot)$ y $c(\cdot) = \cos(\cdot)$, con $c_{au1} = -\alpha(s(\theta)c(\beta)\dot{\theta} + c(\theta)s(\beta)\dot{\beta})$ y $c_{au2} = -\alpha(s(\theta)c(\beta)\dot{\beta} + c(\theta)s(\beta)\dot{\theta})$; x representa el movimiento sobre el eje x , y es la posición en el eje y , θ es el ángulo de la carga medido con respecto al eje x , β es el ángulo de la carga sobre el eje y , $\alpha = m_p l$ y $\gamma = m_p l^2$ son parámetros de la carga, m_x representa la masa de la carga, el riel sobre el eje x y el riel sobre el eje y , m_y representa a la masa de la carga y el riel sobre el eje y , m_p es la masa de la carga y l representa la longitud del cable. Los parámetros considerados

para las simulaciones se muestran en la Tabla 6.1.

La matriz de inercias es singular cuando $|\beta| = \frac{\pi}{2}$ o $|\theta| = \frac{\pi}{2}$ y el único punto de equilibrio, para $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ y $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ es el origen. El grado relativo de las variables subactuadas está bien definido, siempre y cuando la matriz de inercias sea no singular debido a que la matriz

$$\Delta \begin{bmatrix} M_1^* & \alpha^3(c(\beta))^2 c(\theta) s(\theta) s(\beta) \\ \gamma(c(\beta))^2 \alpha s(\theta) s(\beta) & M_2^* \end{bmatrix},$$

con Δ como el determinante de la matriz de inercias completa, $M_1^* = \alpha(\alpha^2(c(\beta))^2 - m_y \gamma) c(\theta) c(\beta)$ y $M_2^* = \alpha(c(\beta))^3 (-m_x \gamma + \alpha^2(c(\theta))^2)$, no contiene una columna de ceros con $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ y $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ y las matrices M_{ua} , C_{ua} y g_{ru} dependen solamente de las variables subactuadas. Por lo que las condiciones de la Definición 2.3 son cumplidas para toda $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ y $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

Los valores de las ganancias del controlador *Super-Twisting* se dan en la Tabla 6.2. Los parámetros para la variable de deslizamiento, los cuales cumplen con el Teorema 6.1, se dan en la Tabla 6.3.

Debido a que los puntos de equilibrio del sistema son independientes de q_a , es posible llevar el el problema de diseño al contexto de regulación en las variables actuadas al considerar la señal de error $e = x - x_d$, con $x_d = [0, 0, x_{3d}, x_{4d}]^T$ y considerando las derivadas de la señal de referencia, \dot{x}_d , iguales a cero. Por lo tanto, la dinámica del sistema no se ve afectada, sólo se trasladan los puntos de equilibrio.

Para comprobar la robustez de la estrategia de control, la señal perturbadora $d_x(t) = d_y(t) = 0.1 \sin(0.2\pi t) + 1$ es considerada.

La Figura 6.6 muestra la posición del carro para los ejes x y y . Es posible ver que dichas señales tienden asintóticamente al valor deseado. La posición en el eje x presenta un ligero sobreimpulso, sin embargo, ambas señales alcanzan la posición deseada.

La Figura 6.7 muestra la respuesta de los ángulos de la carga sobre el eje x y y , de arriba hacia abajo. La respuesta de θ presenta oscilaciones que tienden a decrecer, mientras que la respuesta de β muestra una respuesta mucho más rápida. Además, la amplitud de dichas oscilaciones puede ser modificada por medio de la selección de los parámetros σ_{ai} y σ_{i} , aunque las oscilaciones no desaparecerán del todo.

La evolución temporal de las variables de deslizamiento se muestra en la Figura 6.8. Resulta evidente que el controlador propues-

Tabla 6.1: parámetros del sistema de grúa.

m_x	m_y	m_p	l
2.6	1.6	1	0.35
kg	kg	kg	m

Tabla 6.2: Parámetros del controlador *Super-Twisting*.

k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}
1.88	1.73	1.1	0.59

Tabla 6.3: Parámetros de la variable de deslizamiento.

λ_{11}	λ_{12}	λ_{21}	λ_{22}	λ_{a1}
0.122	0	0	0.26	0.85
λ_{a2}	σ_{11}	σ_{22}	σ_{a1}	σ_{a2}
0.85	0.6	0.6	4.86	1.35

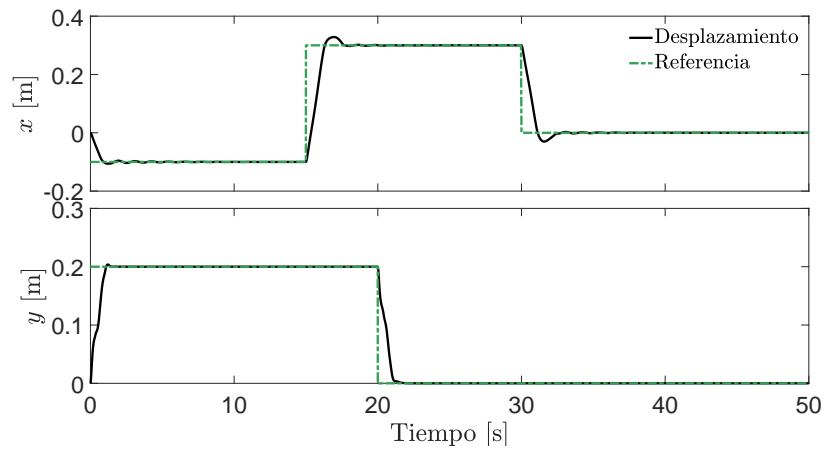


Figura 6.6: Desplazamiento del carro

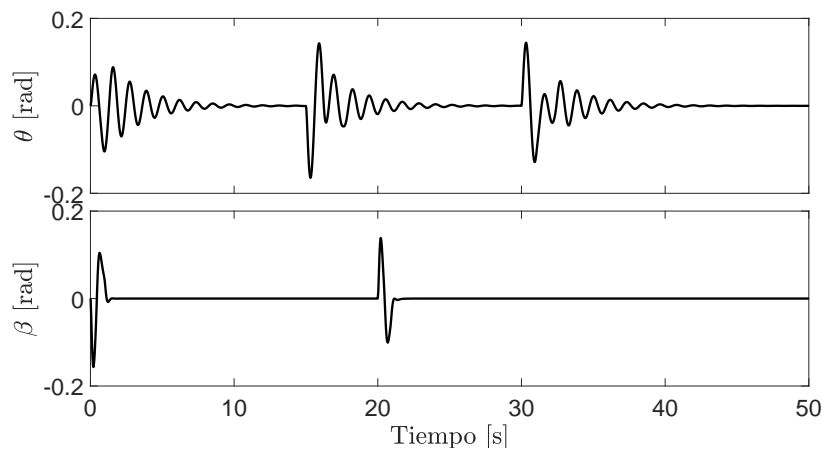


Figura 6.7: Desplazamiento angular de la carga

to es capaz de llevar las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento incluso en la presencia de la señal perturbadora.

Los esfuerzos de control se muestran en la Figura 6.9. Es importante notar que los esfuerzos son continuos y que las oscilaciones presentes no son significativas.

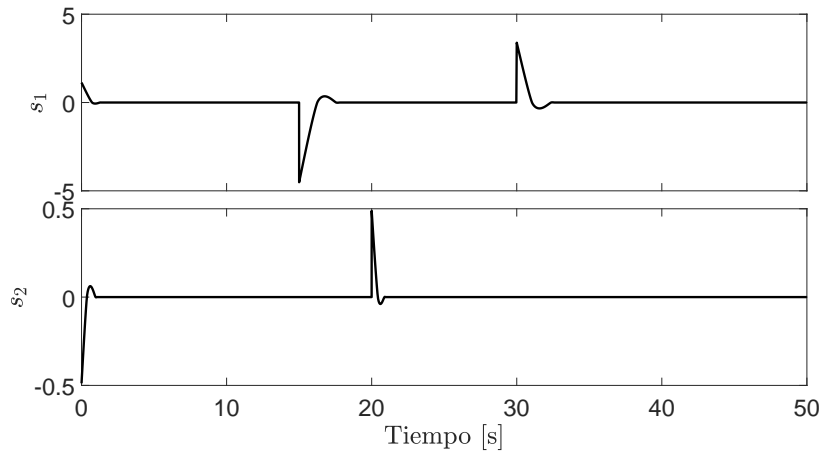


Figura 6.8: Variables de deslizamiento para el sistema de grúa

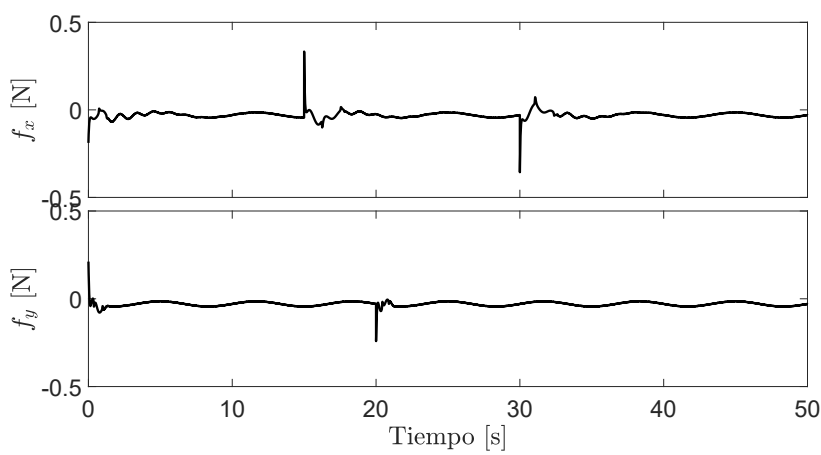


Figura 6.9: Señales de control para el sistema de grúa

Diseño de Controladores por Realimentación de Salida

33: Note que el esquema puede ser usado también para el diseño de controladores para sistemas Clase I y II utilizando argumentos similares a los presentados en este capítulo.

34: *e.g.* encoders incrementales, GPSs y sistemas de visión.

35: El esquema HOSMO se basa en el derivador de Levant [11], mientras que el HO está basado en un esquema de derivación homogéneo propuesto en [41].

En este capítulo se detalla la aplicación de los controladores en un esquema de realimentación de salida tomando como base el diseño de los controladores para sistemas Clase III³³.

La aplicación de controladores por realimentación de salida es muy atractiva en el contexto de control de sistemas mecánicos. Esto se debe a que, por lo general, dichos sistemas están dotados de sensores para medir posición,³⁴. Por lo tanto, la estimación de las velocidades es una de las tareas a cumplir. El enfoque más común para la estimación de las velocidades es la aplicación de filtros lineales, suponiendo que la salida del filtro representa una estimación de la velocidad. La mayor desventaja de esta metodología es que los filtros, al ser sistemas dinámicos, introducen dinámicas adicionales a la dinámica del sistema, las cuales deben ser consideradas en el análisis de estabilidad. Esta es una tarea complicada.

Por esta razón, se detalla el proceso de aplicación de dos esquemas de observación basados en conceptos de modos deslizantes. El primer esquema es denominado observador por modos deslizantes de alto orden (HOSMO) mientras que el segundo esquema es denominado observador homogéneo (HO)³⁵. Las diferencias teóricas entre los esquemas de observación son cuantiosas. Como se discutirá a continuación, la clase de perturbaciones y los resultados de estabilidad de los controladores basados en esquemas de observación difieren drásticamente. Esto implica que los contextos en los que cada esquema resulta beneficioso son distintos.

7.1. Controlador por Realimentación de Salida basado en HOSMO

Considere el siguiente sistema

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(y, x) + g(y)(\tau + d_x) \end{bmatrix}, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (7.1)$$

donde $y \in \mathbb{R}$ representa la salida del sistema, $x := [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ representa el estado del sistema, $\tau \in \mathbb{R}$ representa una entrada

al sistema, la que se considera conocida y d_x es una entrada desconocida. Para estimar la información no disponible del sistema (7.1), se considera el siguiente observador [11]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 + k_1[e_1]^{\frac{2}{3}} \\ \zeta + k_2[e_1]^{\frac{1}{3}} + f(y, \hat{x}) + g(y)\tau \\ k_\zeta[e_{2i-1}]^0 \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

con $e_i := x_i - \hat{x}_i$ para toda $i = \overline{1,2}$. La variable \hat{x}_1 representa un estimado de la posición, mientras que \hat{x}_2 representa un estimado de la velocidad. El término ζ es una variable auxiliar y las constantes k_1 , k_2 y k_ζ son las ganancias del observador a diseñar.

Se introduce la siguiente suposición:

Suposición 7.1 Existe una constante $\xi > 0$ tal que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\left| \frac{d}{dt} \bar{\delta} \right| \leq \xi,$$

donde $\bar{\delta} := \tilde{f} + \tilde{d}$, con $\tilde{d} := g(y)d_x$, y $\tilde{f} := f(y, x) - f(y, \hat{x})$.

Comentario 7.1 La suposición 7.1 implica que, tanto las aceleraciones del sistema, como las velocidades, están acotadas. Esta restricción siempre se satisface en sistemas físicos, ya que los actuadores no pueden proveer aceleraciones ni velocidades desacotadas. Para sistemas mecánicos, esta restricción puede ser violada cuando la velocidad cambia de signo, debido al efecto de la fricción de Coulomb. Sin embargo, esto es cierto sólo en instantes de tiempo aislados.

Considere $e := [e_1, e_2, e_\zeta]^T$ con $e_\zeta := \bar{\delta} - \zeta$. Entonces, el siguiente teorema describe las propiedades de convergencia del observador.

Teorema 7.1³⁶ *Suponga que el observador (7.2) se aplica al sistema (7.1) y que la Suposición 7.1 se satisface. Si las ganancias del observador se eligen de acuerdo a:*

$$k_1 = 2\xi^{\frac{1}{3}}, \quad k_2 = 1.5\xi^{\frac{1}{2}}, \quad k_\zeta = 1.1\xi, \quad (7.3)$$

entonces, el error de estimación, $e = 0$, es Estable en Tiempo Finito.

36: La demostración de este teorema puede encontrarse en [11].

Comentario 7.2 El Teorema 7.1 implica que las señales \hat{x}_1 , \hat{x}_2 y ζ convergen en tiempo finito, y de manera exacta, a x_1 , x_2 y $\bar{\delta}$, respectivamente.

Diseño del Controlador

Para considerar solamente información de salida en el diseño del controlador, se propone la siguiente variable de deslizamiento:

$$\hat{s} = \Lambda_u (\Xi_u x_u + \hat{x}_v) + \Lambda_a (\Xi_a x_a + \hat{x}_b), \quad (7.4)$$

con $\hat{x}_v = [\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{2n}]^T$ y $\hat{x}_b = [\hat{x}_{2n+2}, \dots, \hat{x}_{2(n+m)}]^T$. De acuerdo al Teorema 7.1 se tiene que $\hat{s}(t) = s(t)$, para todo $t \geq T$. También, de la misma manera que se comentó en el capítulo 6, la variable de deslizamiento puede reescribirse como

$$\hat{s}_i = \lambda_{ui} (\Xi_u x_u + \hat{x}_v) + \lambda_{ai} (\sigma_{ai} x_{ai} + \hat{x}_{bi}), \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Se considera la siguiente ley de control

$$\tau = \left(\Lambda_u g_u(y) + \Lambda_a g_a(y) \right)^{-1} \left(\hat{\tau}_{nom} + v \right), \quad (7.5)$$

con $\hat{\tau}_{nom}$ dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{nom} = & -\Lambda_a (\Xi_a \hat{x}_b + K_{2a} [e_a]^{\frac{1}{3}} + f_a(y, \hat{x})) \\ & - \Lambda_u (\Xi_u \hat{x}_v + K_{2u} [e_u]^{\frac{1}{3}} + f_u(y, \hat{x})), \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde $K_{2a} = \text{diag}(k_{2(n+1)}, \dots, k_{2(n+m)})$ y $K_{2u} = \text{diag}(k_2, \dots, k_{2n})$.

La dinámica de \hat{s} está dada por:

$$\dot{\hat{s}} = \Lambda_a (\zeta_a + \Xi_a e_b) + \Lambda_u (\zeta_u + \Xi_u e_v) + v = v + \bar{\delta}, \quad (7.7)$$

con $\zeta_u = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T$, $\zeta_a = [\zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+m}]^T$ y $\bar{\delta} = [\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_m]^T$. Por lo tanto, v puede ser diseñada como un controlador *Super-Twisting*.

7.2. Controlador por Realimentación de Salida basado en HO

Para el sistema (7.1), se considera el siguiente observador homogéneo [41]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 + k_1 [e_1]^{\frac{1}{1+\mu}} \\ k_2 [e_1]^{\frac{1-\mu}{1+\mu}} + f(y, \hat{x}) + g(y)\tau \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

donde $e_1 := x_1 - \hat{x}_1$, \hat{x}_1 y \hat{x}_2 como estimaciones de posición y velocidad, respectivamente; las constantes k_i son las ganancias

del observador a diseñar, $i = \overline{1, 2}$ y $\mu \in (0, 1)$. Para cualquier $\mu \in (0, 1)$ la dinámica de observación (7.8) es no lineal y continua.

Se introduce la siguiente suposición.

Suposición 7.2 Existe una constante $\xi > 0$ tal que la siguiente desigualdad se satisface:

$$|\bar{\delta}| \leq \xi, \quad (7.9)$$

con $\bar{\delta} := \tilde{f} + \tilde{d}$, $\tilde{d} := g(y)d_x$ y $\tilde{f} := f(y, x) - f_x(y, \hat{x})$.

Comentario 7.3 La suposición 7.2 implica el acotamiento de las velocidades del sistema. Además, la Suposición 7.2 difiere de la Suposición 7.1 al requerir el acotamiento de los términos de perturbación del observador, a diferencia de la Suposición 7.1, donde se supone que dichos términos son Lipschitz continuos.

Se define $e := [e_1, e_2]^T$. Entonces, el siguiente teorema habla de las propiedades de convergencia del observador.

Teorema 7.2³⁷ *Suponga que el observador (7.2) se aplica al sistema (7.1) y que la suposición 7.2 es satisfecha. Si las ganancias se eligen de acuerdo a:*

$$k_1 = 1.5\xi^{\frac{1}{2}}, \quad k_2 = 1.1\xi, \quad (7.10)$$

y $\mu \in (0, 1)$; entonces, el error de estimación, e , es Entrada-Estado Estable con respecto a $\bar{\delta}$.

37: La demostración de este teorema puede encontrarse en [11] y [41]

Comentario 7.4 A diferencia del HOSMO, que provee convergencia exacta y en tiempo finito del error de observación, el HO provee estabilidad entrada estado. Esto significa que la magnitud del error de observación estará en función de la cota máxima de la señal de perturbación. Si se eligiera el valor de $\mu = 1$, el HO tomaría la forma de un observador basado en un derivador *Super-Twisting*, pudiendo concluir estabilidad en tiempo finito del error de observación. Sin embargo, como se verá a continuación, esta elección volvería la ley de control resultante en una señal discontinua.

Diseño del Controlador

Se considera la siguiente variable de deslizamiento

$$\hat{s} = \Lambda_u (\Xi_u x_u + \hat{x}_v) + \Lambda_a (\Xi_a x_a + \hat{x}_v), \quad (7.11)$$

con $\hat{x}_v = [\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{2n}]^T$ y $\hat{x}_b = [\hat{x}_{2n+2}, \dots, \hat{x}_{2(n+m)}]^T$. Note que la variable de deslizamiento puede reescribirse como

$$\hat{s}_i = \lambda_{ui} (\Xi_u x_u + \hat{x}_v) + \lambda_{ai} (\sigma_{ai} x_{ai} + \hat{x}_{bi}), \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Por lo tanto, la ley de control

$$\tau = \left(\Lambda_u g_u(y) + \Lambda_a g_a(y) \right)^{-1} \left(\hat{\tau}_{nom} + v \right), \quad (7.12)$$

con $\hat{\tau}_{nom}$ dada por

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{nom} = & -\Lambda_a (\Xi_a \hat{x}_b + K_{2a} [e_a]^{\frac{1-\mu}{1+\mu}} + f_a(y, \hat{x})) \\ & - \Lambda_u (\Xi_u \hat{x}_v + K_{2u} [e_u]^{\frac{1-\mu}{1+\mu}} + f_u(y, \hat{x})), \end{aligned} \quad (7.13)$$

38: Note que en el caso en que $\mu = 1$, los términos $[e_a]^{\frac{1-\mu}{1+\mu}}$ y $[e_u]^{\frac{1-\mu}{1+\mu}}$ serían discontinuos. Esto implicaría la discontinuidad de la señal de control.

y $K_{2a} = \text{diag}(k_{2(n+1)}, \dots, k_{2(n+m)})$ y $K_{2u} = \text{diag}(k_2, \dots, k_{2n})$ ³⁸.

La dinámica de \hat{s} está dada por:

$$\dot{\hat{s}} = \Lambda_a (\Xi_a e_b + \delta_a) + \Lambda_u (\Xi_u e_v + \delta_u) + v = v + \bar{\delta}, \quad (7.14)$$

con $\delta_u = [\delta_1, \dots, \delta_n]^T$, $\delta_a = [\delta_{n+1}, \dots, \delta_{n+m}]^T$ y $\bar{\delta} = [\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_m]^T$. Por lo tanto, v puede ser diseñada como un controlador *Super-Twisting*.

Comentario 7.5 La aplicación del controlador diseñado asegura que se alcanza el conjunto $\hat{s} = 0$ en tiempo finito. Es posible comprobar, mediante la definición del error de observación, que $s = \hat{s} + \Lambda_a e_b + \Lambda_u e_v$; por lo tanto, el alcanzar un modo deslizante en la superficie $\hat{s} = 0$, significa que $s = \lambda e_2 + e_4$; debido a que la estabilidad en $s = 0$ ha sido probada anteriormente, y al hecho de que el HO es Entrada-Estado Estable con respecto a las perturbaciones, se comprueba, mediante argumentos clásicos, que las trayectorias del sistema están acotadas.

Comentario 7.6 Para la aplicación de controladores para grado relativo dos, es posible considerar la variable de deslizamiento como la integral con respecto del tiempo de (7.11), como fue comentado en el capítulo 6.

Note que para ambos casos, los términos de perturbación para el controlador no sólo están directamente relacionados con la variable d_x , sino que dependen del error de observación, *i.e.* las ganancias del controlador dependen de la selección de las ganancias del observador. Esto implica que no se utiliza un principio de separación en el proceso de diseño.

7.3. Discusión

Note que la clase de perturbaciones considerada para cada observador es distinta. Mientras que el HOSMO requiere que la señal δ sea Lipschitz continua, el HO requiere que dicha señal esté acotada.

Para la aplicación de los observadores en sistemas mecánicos, esta diferencia es considerable. Si el sistema a considerar tiene efectos discontinuos considerables, *e.g.* fricción de Coulomb, las ganancias que estabilizan al error de observación del HOSMO deben ser muy grandes para poder aproximar de una manera adecuada el comportamiento del fenómeno, lo que podría resultar en aproximados muy ruidosos, o incluso, en aproximaciones que no permitan la aplicación de la técnica. Por otro lado, al requerir solamente el acotamiento de la señal δ , el HO permite la reducción de las ganancias del observador con respecto al HOSMO en este contexto.

Sin embargo, debe notarse que, de manera teórica, el HOSMO es capaz de aproximar la perturbación de manera exacta, mientras que el HO es entrada-estado-estable con respecto a la perturbación.

7.4. Resultados Experimentales

Con el fin de mostrar la aplicación de la técnica detallada en este capítulo, se muestran experimentos para sistemas Clase III en realimentación de salida.

Sistema Carro-Péndulo

Considere un sistema carro-péndulo (véase la Figura 7.1).

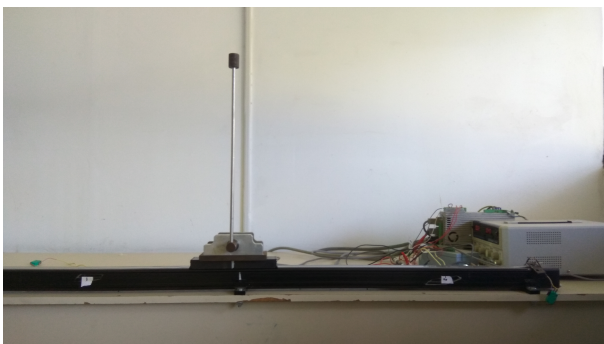


Figura 7.1: Sistema carro-péndulo experimental

Los parámetros de este sistema considerados en los experimentos son:

$$\alpha = 0.052, \beta = 0.11, \gamma = 2.6, \eta = 1.1, f_{v\theta} = 0.03, f_{vx} = 6.33.$$

Para el diseño de grado relativo uno se considera el controlador *Super-Twisting* (3.3), junto con el controlador nominal (7.12) y la variable de deslizamiento (7.11). Para el diseño de grado relativo dos se considera el controlador CST (3.5), junto con el control nominal (7.12) mediante el proceso descrito en el Comentario 7.6.

Los parámetros de la variable de deslizamiento están dados por:

$$\lambda = 1, \lambda_a = 0.7363, \sigma_a = 2.6877, \Xi = 5.3753.$$

Note que, para sistemas con coeficientes de fricción de Coulomb altos la aplicación de observador por modos deslizantes es complicada, por lo que se utilizará el HO para la estimación de las velocidades. La señal de perturbación considerada está dada por: $d_x(t) = 5.25 \sin(3\pi t) + 1$ y se considera una variación de k_σ como $k_\sigma = \{0, 0.1, 1, 4\}$.

La Figura 7.2 muestra las variables de posición para cada experimento. El controlador CST muestra un mayor sobreimpulso comparado con el controlador *Super-Twisting*. No obstante, las oscilaciones son amortiguadas considerablemente. Esto significa que una estrategia de control más agresiva es utilizada y que se obtiene un comportamiento más rápido.

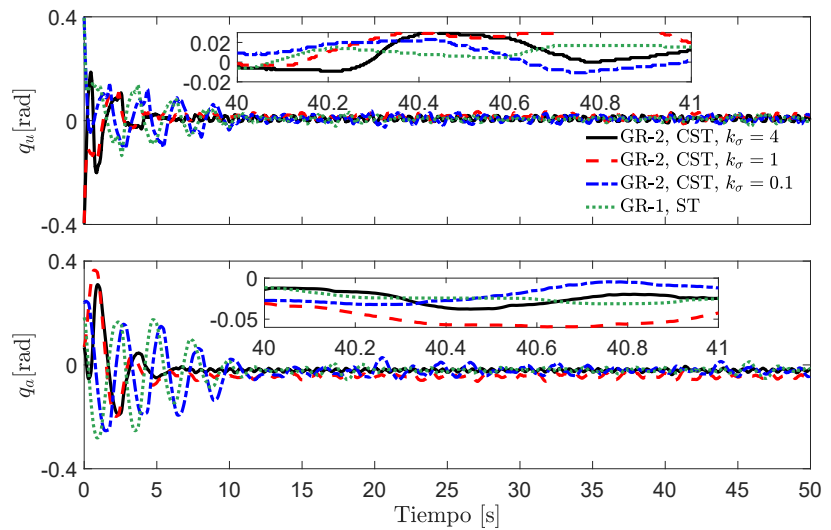


Figura 7.2: Variables de posición para el sistema Clase III SISO

La Figura 7.3 muestra la respuesta de la variable de deslizamiento s y la señal de control. En esta figura se puede observar una mayor precisión del controlador *Super-Twisting* con respecto al

controlador CST; este resultado parece contraintuitivo, sin embargo, debido a que el CST es más agresivo que el *Super-Twisting* se espera un mayor nivel de oscilaciones una vez que se alcance el modo deslizante real. Además, la señal de control del CST se vuelve más oscilatoria conforme se incrementa el valor de k_σ .

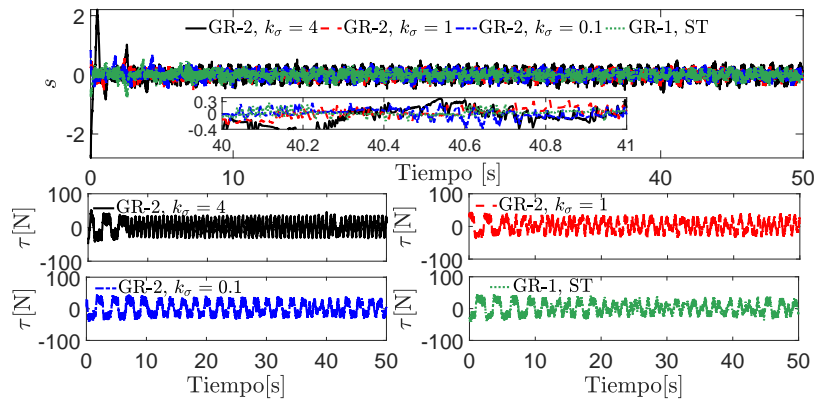


Figura 7.3: Variable de deslizamiento y señal de control para el sistema Clase III SISO.

La Figura 7.4 muestra los valores RMS para las variables de posición y la señal de control. Aunque pareciera que el algoritmo *Super-Twisting* tiene una respuesta similar al CST en estado estable, el CST tiene una respuesta mucho mejor en el transitorio para valores suficientemente grandes de k_σ . Las diferencias en los valores RMS para la señal de control muestran que el control de segundo orden cancela de manera más rápida la perturbación. Para el caso con $k_\sigma = 1$, la respuesta del CST parece empeorar. Esto se debe, principalmente a que el carro no es capaz de alcanzar el cero debido al alto coeficiente de fricción seca; no obstante, como se aprecia en la Figura 6.2, este error es menor a 3[cm], lo que no es muy significativo.

La Tabla 7.1 muestra los resultados del análisis cuantitativo de los valores RMS. Estos resultados muestran que un valor mayor de k_σ produce un mejor comportamiento en general. Sin embargo, como se aprecia en la Figura 6.3, esta mejora implica un mayor nivel de oscilaciones en la señal de control y, por ende, la elección de k_σ es crítica en el contexto de aplicaciones experimentales para un buen desempeño. Si este parámetro es pequeño, el CST no proveerá un buen desempeño para igualar al *Super-Twisting*; y conforme dicho parámetro se aumenta, las dinámicas parásitas pueden causar un nivel considerable de oscilaciones.

Sistema de Grúa de 4 GDL

El esquema de control ha sido implementado en tiempo real por medio de la plataforma experimental detallada en [28] (Véase la

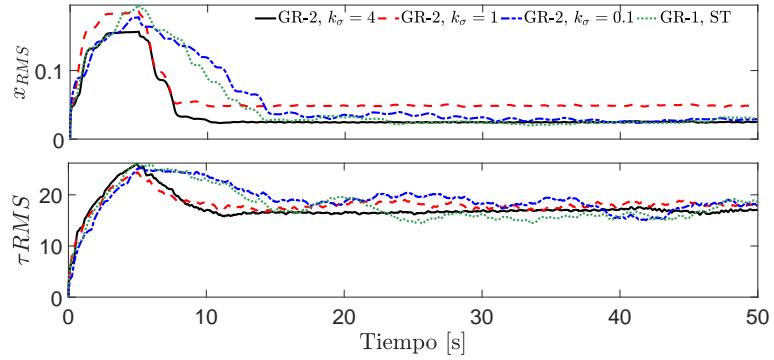


Figura 7.4: Valores RMS para el sistema Clase III SISO

Tabla 7.1: Análisis cuantitativo de los resultados experimentales para el sistema Clase III SISO

	máx(x_{RMS})	mín(x_{RMS})	x_{RMS} Promedio
GR-2, $k_\sigma = 4$	0.156	0.023	0.039
GR-2, $k_\sigma = 1$	0.186	0.046	0.063
GR-2, $k_\sigma = 0.1$	0.178	0.023	0.056
GR-1, ST	0.195	0.019	0.051
	máx(τ_{RMS})	mín(τ_{RMS})	τ_{RMS} Promedio
GR-2, $k_\sigma = 4$	26.025	15.759	17.353
GR-2, $k_\sigma = 1$	24.435	16.624	18.156
GR-2, $k_\sigma = 0.1$	25.372	15.0125	19.039
GR-1, ST	26.204	14.355	17.82

Figura 7.5).

Los parámetros considerados en los resultados experimentales están dados en la Tabla 7.2. Los valores para las ganancias del controlador *Super-Twisting* se dan en la Tabla 7.3. Las ganancias de los observadores se calculan de acuerdo a (7.10), con los valores de ξ_i dados en la Tabla 7.4. Los parámetros para la superficie de deslizamiento están dados en la Tabla 7.5, los cuales cumplen con el Teorema 6.1.

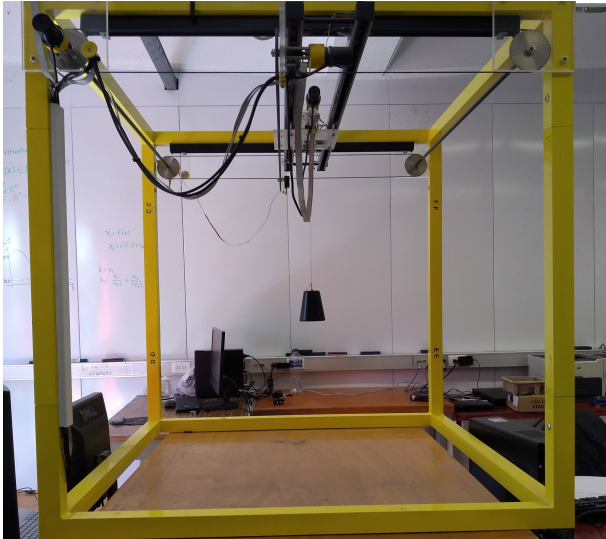


Figura 7.5: Sistema de grúa considerado

Se lleva el esquema de control al contexto de regulación al definir una señal de error $e = x - x_d$, con $x_d = [0, 0, x_{3d}, x_{4d}]^T$ y considerando que las derivadas de la señal de referencia, \dot{x}_d , son cero. Por lo tanto, la dinámica del sistema no se ve afectada y sólo se modifica el origen de la parte actuada.

Para probar la robustez del controlador, las funciones $f_i(x) = [M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q))]_i$, con $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ and $g(q)$ como las matrices del sistema completo, se supondrán desconocidas y se considera un segundo caso en el que se considera la señal de perturbación $d_x(t) = d_y(t) = 0.1 \sin(0.2\pi t) + 0.05$.

Las Figuras 7.6 y 7.7 muestran la evolución temporal para las variables de posición lineal y angular para el sistema, respectivamente. El comportamiento del carro muestra muy poco sobreimpulso y el efecto de la señal de perturbación parece afectar solamente la respuesta transitoria del sistema. La respuesta para las posiciones angulares presentan algunas oscilaciones que tienden a decrecer. Esto es de esperarse debido a la forma de la dinámica residual, la cual tiene la estructura de una ecuación de Liénard, la cual es una generalización del oscilador de Van Der Pol. Como es de esperarse, el término de perturbación incrementa la amplitud de las oscilaciones. Sin embargo, para ningún caso estas oscilaciones son mayores a 0.05 [rad].

Los esfuerzos de control y las variables de deslizamiento se muestran en las Figuras 7.8 y 7.9. El efecto de *chattering* es pequeño y las señales de control son continuas. El controlador presenta oscilaciones de mayor amplitud ante la perturbación externa, esto es una consecuencia de la compensación que debe realizar el controlador. Para las variables de deslizamiento se observa que estas no alcanzan el cero exactamente, sino que se llega a

Tabla 7.2: Parámetros del sistema de grúa.

m_x	m_y	m_p	l
2.6	1.6	1	0.35
kg	kg	kg	m

Tabla 7.3: Parámetros del controlador.

\bar{k}_{11}	\bar{k}_{12}	\bar{k}_{21}	\bar{k}_{22}
0.19	0.017	0.335	0.055

Tabla 7.4: Parámetros del observador

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
30	50	7	4

Tabla 7.5: Parámetros de las variables de deslizamiento

λ_{11}	λ_{12}	λ_{21}	λ_{22}	λ_{a1}
0.735	0	0	0.118	0.9
λ_{a2}	σ_{11}	σ_{22}	σ_{a1}	σ_{a2}
0.9	0.1	0.1	189	29

Figura 7.6: Variables de posición del carro para el sistema Clase III MI-MO

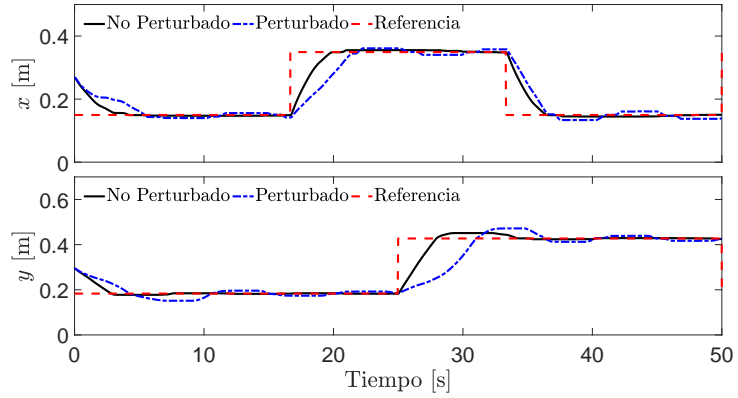
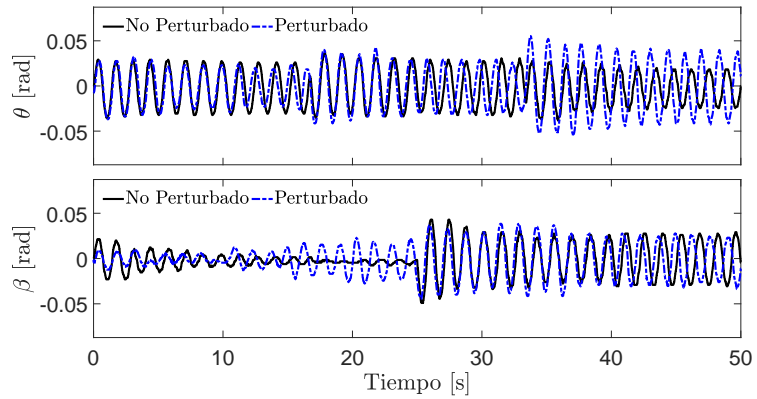


Figura 7.7: Variables de posición angular para el sistema Clase III MI-MO



un conjunto cercano. Esto se debe a efectos de discretización y ruidos en las mediciones. Aún así, incluso en presencia de una perturbación no desvaneciente, las variables de deslizamiento son llevadas a una región relativamente cercana al cero.

Los valores RMS de las variables de posición en los ejes x , es decir (x, θ) , y y , (y, β) , así como de las señales de control se muestran en las Figuras 7.10 y 7.11. Para el caso perturbado los valores RMS de las señales de control es, en general, más grande. Esto es una consecuencia de la compensación activa de la perturbación. Para los estados existe una diferencia en la respuesta transitoria pero las trayectorias tienen un valor RMS muy similar en estado estable. Esto demuestra la robustez del controlador.

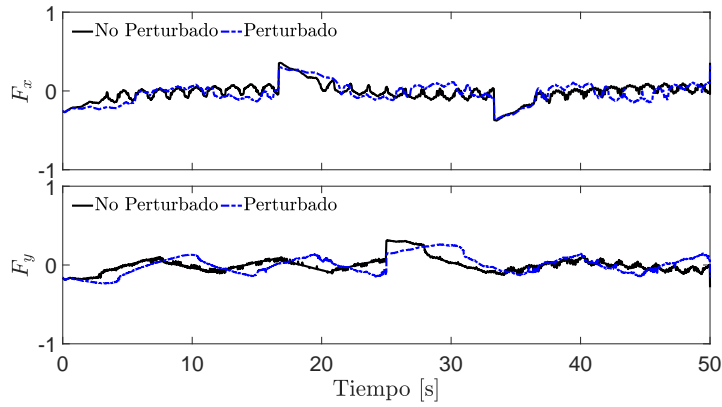


Figura 7.8: Variables de deslizamiento para el sistema Clase III MIMO

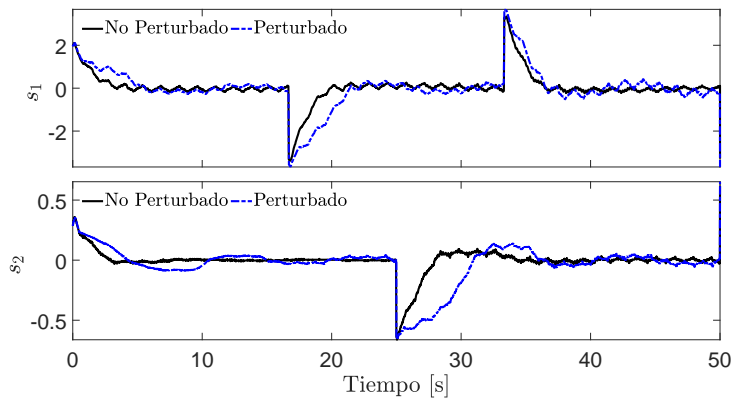


Figura 7.9: Señales de control para el sistema Clase III MIMO

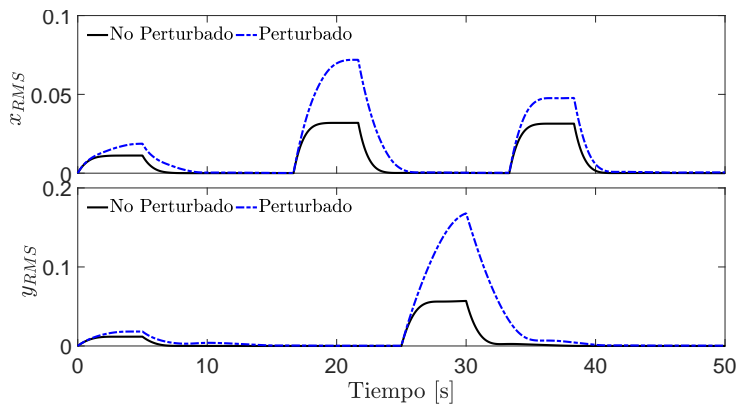


Figura 7.10: Valores RMS de las variables de posición para el sistema Clase III MIMO

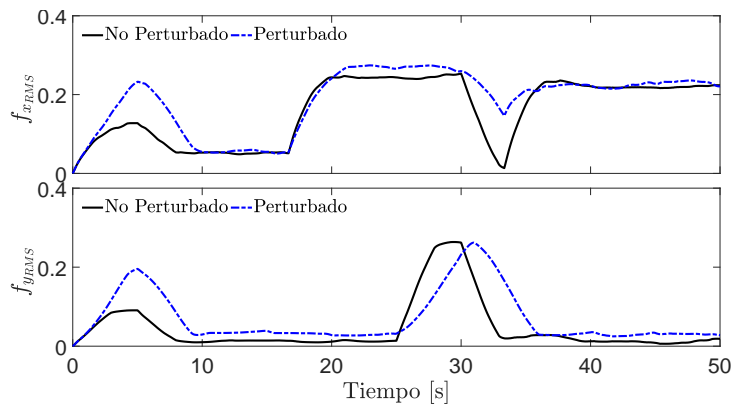


Figura 7.11: Valores RMS de las señales de control para el sistema Clase III MIMO

CONCLUSIONES

En este documento se aborda el diseño, análisis y evaluación de técnicas de control robusto para la estabilización de sistemas subactuados. Las técnicas propuestas aseguran la estabilidad del sistema en lazo cerrado en presencia de perturbaciones Lipschitz continuas.

Durante el proyecto de tesis se han alcanzado los siguientes resultados:

- ▶ La caracterización de tres clases de sistemas subactuados que permite el diseño de leyes de control sin utilizar transformaciones no lineales.
- ▶ El diseño de leyes de control continuas basadas en conceptos de modos deslizantes.
- ▶ El análisis de estabilidad de los métodos propuestos.
- ▶ La aplicación de las técnicas en simulación.
- ▶ La implementación experimental de los resultados en el contexto de realimentación de salida a partir de observadores homogéneos y por modos deslizantes de alto orden.

Como resultados académicos se han obtenido los siguientes productos a lo largo del proyecto de tesis:

- ▶ La participación en tres congresos nacionales y uno internacional.
- ▶ La publicación de tres artículos en revistas JCR y la sumisión de uno más, también en revista JCR.

8.1. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro es posible considerar la aplicación experimental de los controladores para sistemas Clase I y II, así como la propuestas de clases distintas a las mostradas en el documento para agrandar el rango de aplicación de los resultados mostrados. Además, sería beneficioso estudiar la generalización del problema al caso de seguimiento de trayectorias.

APÉNDICE

Prueba de los Resultados del Capítulo 4

A

A.1. Prueba del Teorema 4.1

Si se alcanza un modo deslizante, (4.2) implica que la dinámica (4.1) se restringe a

$$z_4 = -c_1 z_1 - c_2 z_2 - c_3 z_3.$$

Esta ecuación representa una dinámica lineal, la que puede ser reescrita como $\dot{z} = A_n z$ with $z = [z_1, z_2, z_3]^T$ con la definición de A_n dada en (4.3). Por lo tanto, si A_n es Hurwitz, de la definición de z_1 , z_2 y z_3 , se tiene que $x_u = 0$ es exponencialmente estable. Debido a la restricción *iv)* de la Definición 2.1, se concluye la estabilidad asintótica de $x_a = 0$. Con esto se concluye la prueba.

A.2. Prueba del Teorema 4.2

Si un modo deslizante es alcanzado, (4.7) impone una restricción sobre la dinámica (4.1), la cual implica que las trayectorias del sistema se desarrollen de acuerdo a la dinámica

$$z_3 = -c_1 z_1 - c_2 z_2.$$

Esta ecuación representa una dinámica lineal, la cual puede ser reescrita como $\dot{z} = A_n z$, con $z = [z_1, z_2, z_3]^T$ y con la definición de A_n dada por (4.8). Por lo tanto, si A_n es Hurwitz, de la definición de z_1 y z_2 se tiene que $x_u = 0$ es exponencialmente estable. Además, debido a la restricción *iv)* de la Definición 2.1 se concluye la estabilidad asintótica de $x_a = 0$. Con esto se concluye la prueba.

A.3. Prueba del Teorema 4.3

Suponiendo que las trayectorias del sistema alcanzan un modo deslizante se tiene que, debido a (4.11), la dinámica de (4.1) se colapsa a

$$z_3 = -c_1 z_1 - c_2 z_2.$$

Esta ecuación representa una dinámica lineal, la cual puede ser reescrita como $\dot{z} = A_n z$, con $z = [z_1, z_2, z_3]^T$ y con la definición de A_n dada en (4.12). Por lo tanto, si A_n es Hurwitz, de la definición de z_1 y z_2 se sabe que $x_u = 0$ es exponencialmente estable. Además, debido a la restricción *iv)* de la Definición 2.1 se concluye la estabilidad asintótica de $x_a = 0$. Con esto se concluye la prueba.

A.4. Prueba del Teorema 4.4

Suponiendo que las trayectorias del sistema alcanzan un modo deslizante se tiene que, debido a (4.14), la dinámica de (4.1) se colapsa a

$$z_2 = -c_1 z_1.$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden. Por lo tanto, si $c_1 > 0$, se tiene que $x_u \rightarrow 0$ exponencialmente. Además, debido a la restricción *iv)* de la Definición 2.1 Se concluye la estabilidad asintótica de $x_a = 0$. Con esto se concluye la prueba.

Prueba de los Resultados del Capítulo 5

B

B.1. Prueba del Lema 5.1

Se asume que un modo deslizante de tercer orden se alcanza en la superficie $s = 0$, *i.e.* $s(t) = \dot{s}(t) = \ddot{s}(t) = 0$, para todo $t \geq t_r > 0$. Esto implica que la siguiente relación es cumplida en tiempo finito

$$x_a = \lambda^* x_u, \quad x_b = \lambda^* x_v, \quad \dot{x}_b = \lambda^* \dot{x}_v.$$

Entonces, la primera ecuación de (1.2) puede ser reescrita como

$$M_{uu}(x_u, \lambda^* x_u) \dot{x}_v + M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) \lambda^* \dot{x}_v + C_{uu}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) x_v \\ + C_{ua}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) \lambda^* x_v + g_{ru}(x_u, \lambda^* x_u) = 0.$$

Por la definición de $M_2(x_u)$, se tiene que

$$M_2(x_u) \dot{x}_v + C_{uu}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) x_v + g_{ru}(x_u, \lambda^* x_u) \\ + C_{ua}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) \lambda^* x_v = 0,$$

La cual puede ser expresada como (5.3). Debido a que $M_2 = M_{uu}(x_u, \lambda^* x_u) + M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) \lambda^*$, si su inversa existe, ésta puede ser expresada por medio de la formula de Sherman–Morrison [42], *i.e.*

$$M_2^{-1}(x_u) = - \frac{M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^* x_u) M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) \lambda^* M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^* x_u)}{1 + \lambda^* M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^* x_u) M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u)} \\ + M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^* x_u),$$

la cual es no singular si la relación

$$\lambda_u^T M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^* x_u) \neq \lambda_a$$

es cumplida. Con esto se concluye la prueba.

B.2. Prueba del Teorema 5.1

La ecuación (5.3) es una ecuación de Lié vectorial. Entonces, se considera la siguiente Función de Lyapunov

$$V(x_u, x_v) = \frac{1}{2} x_v^T x_v + \int_0^1 H(\tau x_u)^T x_u d\tau. \quad (\text{B.1})$$

Debido a que $\text{sign}(H_i(\tau x_u)) = \text{sign}(H_i(x_u)) = \text{sign}(x_{ui})$ para toda $\tau > 0$, y $H_i(0) < H_i(x_u)$, para toda $x_u \in \mathcal{D}_u = \{x_u | [x_u^T, x_u^T]^T \in \mathcal{D}\}$, se tiene que el integrando del segundo término es positivo con respecto a $x_u \in \mathcal{D}_u$. La integral se desvanece solamente para $x_u = 0$ y ésta se incrementa con respecto a x_u y τ . Por lo tanto, (B.1) es positiva definida para todo $[x_u^T, x_v^T]^T \in \mathcal{D}_u \times \mathbb{R}^n$.

La derivada de V está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [M_2^{-1} g_u(x_u)]^T x_v - x_v^T (C_2(x_u, x_v) x_v + M_2^{-1} g_u(x_u)), \\ &= -x_v^T C_3(x_u, x_v) x_v. \end{aligned}$$

Debido a que la matriz C_3 es definida positiva, la derivada de la función de Lyapunov es semidefinida negativa. El conjunto para el cuál la derivada de la función de Lyapunov se desvanece está dado por $x_v = 0$. Esto implica, por medio del principio de invarianza [30], que $x_v \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, por lo que las trayectorias del sistema convergen a un punto de equilibrio del sistema en lazo abierto.

Además, debido a que la derivada de la función de Lyapunov es negativa semidefinida, se sabe que (B.1) está acotada. Si se cumple la condición $\int_0^1 H^T(\theta x_u) x_u d\theta \rightarrow \infty$, conforme $x_u \rightarrow \partial \mathcal{D}_u$, esto implica que toda trayectoria que empiece dentro de \mathcal{D}_u debe permanecer en dicho conjunto; debido a que el origen es el único punto de equilibrio de (5.1) dentro de \mathcal{D}_u , esto implica que las trayectorias del sistema serán asintóticamente estables.

Prueba de los Resultados del Capítulo 6

C

C.1. Prueba del Lema 6.1

Suponiendo que se alcanza un modo deslizante en la i -ésima superficie de deslizamiento, $s_i = 0$, *i.e.* $s_i(t) = \dot{s}_i(t) = 0$, para todo $t \geq t_r > 0$ e $i = \overline{1, m}$. Esto implica que

$$x_{bi} = -\sigma_{ai}x_{ai} - \lambda_{ai}^{-1}\lambda_{ui}(\Xi_u x_u + x_v), \quad (C.1)$$

y por lo tanto

$$\dot{x}_{bi} = -\sigma_{ai}x_{bi} - \lambda_{ai}^{-1}\lambda_{ui}(\Xi_u x_v + \dot{x}_v). \quad (C.2)$$

Sustituyendo (C.1) en (C.2), se obtiene

$$\dot{x}_{bi} = \sigma_{ai}^2 x_{ai} + \frac{\sigma_{ai}}{\lambda_{ai}} \lambda_{ui} \Xi_u x_u - \frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}} B_i x_v - \frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}} \dot{x}_v. \quad (C.3)$$

La ecuación (C.1) representa un sistema lineal de primer orden con x_a como salida y x_u como una entrada filtrada. Entonces, tomando la transformada de Laplace de (C.1), se tiene que

$$x_{ai}(p) = -\frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}} x_u - \frac{\lambda_{ui} B_i x_u + c(t_r)}{\lambda_{ai}(\sigma_{ai} + p)}, \quad (C.4)$$

con p como el operador diferencial en el dominio de la frecuencia, $c(t_r) = x_{ai}(t_r) + \lambda_{ui}x_u(t_r)$ y t_r como el tiempo de convergencia del algoritmo de modos deslizantes. Entonces, se define y_i como la solución a la ecuación diferencial

$$\dot{y}_i = -\sigma_{ai}y_i + \lambda_{ui}B_i x_u. \quad (C.5)$$

Tomando la transformada de Laplace de (C.5), sustituyendo en (C.4) y calculando la transformada inversa, se tiene que

$$x_{ai}(t) = c(t_r)e^{-\sigma_{ai}(t-t_r)} - \frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}}x_u(t) + \frac{1}{\lambda_{ai}}y_i.$$

Por lo tanto, al sustituir x_{ai} en (C.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_{bi} = & \sigma_{ai}^2 e^{-\sigma_{ai}(t-t_r)} c(t_r) + \frac{\sigma_{ai}^2}{\lambda_{ai}} y_i \\ & + \sigma_{ai} \frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}} B_i x_u - \frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}} B_i x_v - \frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}} \dot{x}_v. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Se define $\tilde{y}_i = \sigma_{ai} y_i + \frac{\lambda_{ui}}{\lambda_{ai}} B_i x_u$, por lo que (C.6) puede ser reescrita como $\dot{x}_{bi} = \psi_{4i}(t) + \psi_{3i} \tilde{y}_i + \psi_{3i} x_v + \psi_{1i} \dot{x}_v$, con $\dot{\tilde{y}}_i = -\sigma_{ai} \tilde{y}_i + \lambda_i B_i x_v = -\sigma_{ai} \tilde{y}_i - \lambda_{ai} \psi_{2i} x_v$.

Se considera la función

$$\eta(x) := \dot{x}_b = \Psi_1 \dot{x}_v + \Psi_2 x_v + \Psi_3 \tilde{y} + \Psi_4(t), \quad (\text{C.7})$$

y sustituyendo (C.7) en (1.2), la ecuación para \dot{q}_u arroja

$$\begin{aligned} M_2(x_u) \dot{x}_v + C_2(x_u, x_v) x_v + R_1(x_u) \tilde{y} \\ + g_{ru}(x_u, t) + h_1(x_u, t) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

con $M_2(x_u) = M_{uu}(x_u) + M_{ua}(x_u) \Psi_1$, $C_2(x_u, x_v) = C_{uu}(x_u, x_v) + M_{ua}(x_u) \Psi_2$, $R_1(x_u) = M_{ua}(x_u) \Psi_3$ y $h_1(x_u, t) = M_{ua} \Psi_4(t)$.

Una condición suficiente para que M_2 sea definida de signo es que $\lambda_{\min}(M_{uu}) > \sigma_{\max}(M_{ua} \Psi_1)$ o que $\lambda_{\max}(M_{uu}) < \sigma_{\min}(M_{ua} \Psi_1)$ [43]. Debido a la suposición 2.1, Se sabe que los autovalores de M_{uu} son positivos y acotados. Para el caso en que $\dim(x_u) < \dim(x_a)$, el producto $M_{ua}^T M_{ua} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es semidefinido positivo y su rango es n ; además, debido a que Ψ_1 es de rango n , $\sigma_{\min}(M_{ua} \Psi_1) = 0$, lo que significa que Λ_u y Λ_a deben cumplir con la primer condición. Por otra parte, cuando $\dim(x_u) > \dim(x_a)$ el producto $M_{ua}^T M_{ua} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es definido positivo, ya que el rango de éste es m ; además, debido a que el rango de Ψ_1 es m , se tiene que $\sigma_{\min}(M_{ua} \Psi_1) > 0$, entonces es posible elegir Λ_u y Λ_a de tal forma que cualquiera de las dos condiciones sea cumplida. Por lo tanto, es posible escribir la dinámica de x_u de acuerdo a (6.3) y (6.4). Con esto se concluye la prueba.

C.2. Prueba del Teorema 6.1

La dinámica (6.3)–(6.4) puede ser vista como un par de sistemas interconectados. Por lo tanto, se debe comenzar analizando comportamiento de cada sistema sin interconexiones. Es decir,

el comportamiento de

$$\begin{aligned}\dot{x}_v &= -C_3(x_u, x_v)x_v - H(x_u) - h_2(x_u, t), \\ \dot{\tilde{y}} &= -\Xi_a \tilde{y}.\end{aligned}$$

La estabilidad de la segunda ecuación es estudiada por medio de la función de Lyapunov $V_1(y) = \tilde{y}^T \bar{P} \tilde{y}$, con $\bar{P}^T = \bar{P} > 0$ como la solución a la ecuación de Lyapunov $A^T \bar{P} + \bar{P} A = -Q$, para alguna $Q^T = Q > 0$ y $A = -\Xi_a$. Entonces, la derivada de la función de Lyapunov está dada por $\dot{V}_1 = -\tilde{y}^T Q \tilde{y} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\tilde{y}\|^2$.

Para estudiar la estabilidad de la primera ecuación, se debe notar que ésta tiene la forma de una ecuación de Liénard vectorial, noautónoma y forzada por el término $h_2(x_u, t)$ [44]. Por lo tanto, basándose en [23] y [44], la siguiente función de tipo Lyapunov será considerada

$$\begin{aligned}V(t, x_u, x_v) &= e^{-\int_{t_r}^t \chi(\tau) d\tau} \tilde{V}(x_u, x_v), \\ \tilde{V}(x_u, x_v) &= \frac{1}{2} x_v^T x_v + \int_0^1 H^T(\theta x_u) x_u d\theta + 1, \\ \chi(t) &= \mu \nu e^{-\bar{\sigma}_a t},\end{aligned}$$

con $\chi(t) \geq \|h_2(x_u, t)\|$, para toda $x_u \in \mathcal{D}_u$ y $t \geq t_r$. Entonces, una posible selección de μ y ν está dada por

$$\mu = \max_{x_u \in \mathcal{D}_u} \|M_2^{-1}(x_u) M_{ua}(x_u)\|,$$

y

$$\nu = m \sigma_a^{*2} (x_a^*(t_r) + \bar{\lambda}_a^{-1} \lambda^* x_u(t_r)),$$

donde $\sigma_a^* = \max_i \sigma_{ai}$, $x_a^*(t_r) = \max_i x_{ai}(t_r)$, $\bar{\lambda}_a = \min_i \lambda_{ai}$, $\lambda^* x_u(t_r) \geq \lambda_{ui} x_u(0)$, para toda $i = \overline{1, m}$, y la equivalencia entre las normas $\|a\| \leq m \|a\|_\infty$, para toda $a \in \mathbb{R}^m$, ha sido utilizada.

La existencia de μ sigue de la Suposición 2.1 y ν depende solamente de parámetros de diseño y condiciones iniciales.

La función V es estrictamente positiva e inferiormente acotada para todo x_u, x_v y t . Esto es una consecuencia del hecho que H_i es monótonamente creciente con respecto de x_{ui} y $H_i(0) = 0$. Además, $\text{sign}(H_i(\tau x_u)) = \text{sign}([H_i(x_u)]) = \text{sign}(x_{ui})$, para toda $\tau > 0$, y $H^T(\tau x_u) x_u < H^T(x_u) x_u$, para toda $x_u \in \mathcal{D}_u = \{x_u \in \mathbb{R}^n \mid [x_u^T, x_a^T]^T \in \mathcal{D}\}$ y $\tau \in (0, 1]$. Por lo tanto, el integrando del segundo término es definido positivo con respecto a $x_u \in \mathcal{D}_u$. La integral se desvanece para $x_u = 0$ y ésta incrementa para x_u y τ .

Se define $\bar{\chi}(t) = e^{-\int_{t_r}^t \chi(\tau) d\tau} = e^{\frac{\mu\nu}{\bar{\sigma}a}(e^{-\bar{\sigma}at_r} - e^{-\bar{\sigma}at})}$. Entonces, la derivada de V está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \bar{\chi}(t)(\dot{\tilde{V}} - \chi(t)\tilde{V}). \\ \dot{V} &= \bar{\chi}(t) \left[-x_v^T C_3(x_u, x_v)x_v - x_v^T h_2(x_u, t) \right. \\ &\quad \left. - \chi(t) \left(\frac{1}{2} x_v^T x_v + \int_0^1 H^T(\theta x_u) x_u d\theta + 1 \right) \right], \\ &\leq -\bar{\chi}(t) \left[\chi(t) \left(\frac{1}{2} \|x_v\|^2 - \|x_v\| + 1 \right) + \lambda_{\min}(C_3) \|x_v\|^2 \right], \\ &\leq -\bar{\chi}(t) \left[\lambda_{\min}(C_3) \|x_v\|^2 + \chi(t) \left(\frac{\|x_v\|}{2} - 1 \right)^2 \right], \\ &\leq -\bar{\chi}(t) \left[\lambda_{\min}(C_3) \|x_v\| \right], \\ &\leq -e^{\frac{\mu\nu}{\bar{\sigma}a}(e^{-\bar{\sigma}at_r} - e^{-\bar{\sigma}at})} \lambda_{\min}(C_3) \|x_v\|, \\ &\leq -\lambda_{\min}(C_3) \|x_v\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debido a que V es positiva y acotada por debajo y \dot{V} es no positiva para todo $t \geq t_r$, V es no creciente. Entoces, V y, como consecuencia, \tilde{V} están acotadas. Por lo tanto, las trayectorias del sistema están acotadas y, ya que x_v es absolutamente continua, se puede aplicar el lema de Barbalat para mostrar que $x_v \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Debido a que $x_v \rightarrow 0$, conforme $t \rightarrow \infty$, x_u debe alcanzar un punto de equilibrio del sistema en lazo abierto.

Además, debido al acotamiento de \tilde{V} , si se cumple la condición $\int_0^1 H^T(\theta x_u) x_u d\theta \rightarrow \infty$, conforme $x_u \rightarrow \partial \mathcal{D}_u$, esto implica que toda trayectoria que empiece dentro de \mathcal{D}_u debe permanecer en dicho conjunto; debido a que el origen es el único punto de equilibrio de (5.1) dentro de \mathcal{D}_u , esto implica que las trayectorias del sistema serán asintóticamente estables.

Una vez que se ha establecido la estabilidad del sistema sin interconexiones, se considera la función de tipo Lyapunov:

$$V_2 = \bar{\chi}(t) [\tilde{V}(t, x_u, x_v) + \tilde{y}^T \bar{P} \tilde{y}],$$

cuya derivada está dada por

$$\dot{V}_2 = \bar{\chi}(t) \left[-\chi(t)(\tilde{V} + \tilde{y}^T P \tilde{y}) + (\dot{\tilde{V}} + \dot{\tilde{y}}^T \bar{P} \tilde{y} + \tilde{y}^T \bar{P} \dot{\tilde{y}}) \right].$$

Evaluando a través de las trayectorias de (6.3)–(6.4), se tiene

que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \bar{\chi}(t) & \left[-x_v^T C_3(x_u, x_v) x_v - x_v^T h_2(x_u, t) - x_v^T R(x_u) \tilde{y} \right. \\ & \left. - \tilde{y}^T Q \tilde{y} - x_v^T \bar{B}^T \bar{P} \tilde{y} - \tilde{y}^T \bar{P} \bar{B} x_v - \chi(t) (\tilde{V} + \tilde{y}^T \bar{P} \tilde{y}) \right]. \end{aligned}$$

Si Q se elige como $Q = cI_m$, para alguna $c > 0$, entonces $\bar{P} = \frac{c}{2} \Xi_a^{-1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq -\bar{\chi}(t) & \left[\lambda_{\min}(C_3) \|x_v\|^2 + c \|\tilde{y}\|^2 \right. \\ & \left. - (\|R\| + c \|\bar{B}\| \|\Xi_a^{-1}\|) \|x_v\| \|\tilde{y}\| \right]. \end{aligned}$$

Eligiendo $c = \frac{\bar{\sigma}_a \bar{R}}{\|\bar{B}\|}$, se sabe que

$$\dot{V}_2 \leq -\bar{\chi}(t) \left[\lambda_{\min}(C_3) \|x_v\|^2 - 2\bar{R} \|x_v\| \|\tilde{y}\| + \frac{\bar{\sigma}_a \bar{R}}{\|\bar{B}\|} \|\tilde{y}\|^2 \right].$$

Entonces, si $\lambda_{\min}(C_3) > \frac{\bar{R} \|\bar{B}\|}{\bar{\sigma}_a}$, existe una $\epsilon > 0$ tal que $\lambda_{\min}(C_3) = \frac{\bar{R} \|\bar{B}\|}{\bar{\sigma}_a} + \epsilon$. Así, se tiene que \dot{V}_2 puede ser acotada inferiormente como

$$\dot{V}_2 \leq \bar{\chi}(t) \left(-\bar{R} \left(a \|x_v\| - \frac{1}{a} \|\tilde{y}\| \right)^2 - \epsilon \|x_v\|^2 \right),$$

con $a = \sqrt{\frac{\|\bar{B}\|}{\bar{\sigma}_a}}$. Por lo tanto $\dot{V}_2 \leq -\epsilon \bar{\chi}(t) \|x_v\|^2$. Finalmente, usando argumentos similares al caso sin interconexiones, se asegura el acotamiento de las trayectorias del sistema interconectado. Además, si $\int_0^1 H^T(\theta x_u) x_u \rightarrow \infty$, entonces el origen es asintóticamente estable.

Bibliografía

- [1] G. Oriolo and Y. Nakamura. «Control of mechanical systems with second-order non-holonomic constraints: underactuated manipulators». [1991] *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Dec. 1991, 2398–2403 vol.3 (cited on page 1).
- [2] I. Fantoni and R. Lozano. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2002 (cited on pages 1, 30).
- [3] A. Choukcou-Braham, B. Cherki, and M. Djemai. *Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer, 2014 (cited on pages 2, 3).
- [4] R. Olfati-Saber. «Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry». *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.2 (2002), pp. 305–308 (cited on pages 2, 3).
- [5] C. C. Cheng and Y. C. Chiang. «Design of non-singular adaptive terminal backstepping controllers with perturbation estimation for non-linear systems in semi-strict feedback form». *IET Control Theory Applications* 11.10 (2017), pp. 1589–1595 (cited on page 2).
- [6] Z. Peng, D. Wang, and J. Wang. «Predictor-Based Neural Dynamic Surface Control for Uncertain Nonlinear Systems in Strict-Feedback Form». *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 28.9 (2017), pp. 2156–2167 (cited on page 2).
- [7] M. Yue, C. An, L. Ding, and Y. Zhou. «MPC motion planning-based sliding mode control for underactuated WPS vehicle via Olfati transformation». *IET Control Theory Applications* 12.4 (2018), pp. 495–503 (cited on page 2).
- [8] R. Xu and Ü. Özgüner. «Sliding mode control of a class of underactuated systems». *Automatica* 44.1 (2008), pp. 233–241 (cited on pages 2, 4).
- [9] R. Olfati-Saber. «Cascade normal forms for underactuated mechanical systems». *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. 2000, pp. 2162–2167 (cited on pages 3, 11).
- [10] L. Fridman, J. A. Moreno, B. Bandyopadhyay, S. Kamal, and A. Chalanga. «Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers». *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*. Springer, 2015, pp. 5–35 (cited on pages 3, 14).
- [11] A. Levant. «Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control». *International journal of Control* 76.9-10 (2003), pp. 924–941 (cited on pages 3, 44, 45, 47).
- [12] A. Levant. «Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control». *International Journal of Control* 58.6 (1993), pp. 1247–1263 (cited on pages 3, 14).
- [13] V. Utkin. «Discussion Aspects of High-Order Sliding Mode Control». *IEEE Transactions on Automatic Control* 61.3 (2016), pp. 829–833 (cited on page 3).
- [14] U. Pérez-Ventura and L. Fridman. «When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? Frequency domain criteria». *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 29.3 (2019), pp. 810–828 (cited on page 3).

- [15] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, 2014 (cited on page 3).
- [16] J. Moreno-Valenzuela and C. Aguilar-Avelar. *Motion Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer, 2018 (cited on page 4).
- [17] A. Donaire, J. Romero, R. Ortega, B. Siciliano, and M. Crespo. «Robust IDA-PBC for underactuated mechanical systems subject to matched disturbances». *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 27.6 (2017), pp. 1000–1016 (cited on page 4).
- [18] S. Rudra, R. K. Barai, and M. Maitra. «Nonlinear state feedback controller design for underactuated mechanical system: A modified block backstepping approach». *ISA Transactions* 53.2 (2014), pp. 317–326 (cited on page 4).
- [19] B. S. Park. «A simple output-feedback control for trajectory tracking of underactuated surface vessels». *Ocean Engineering* 143 (2017), pp. 133–139 (cited on page 4).
- [20] R. Haghghi and C. K. Pang. «Robust Concurrent Attitude-Position Control of a Swarm of Underactuated Nanosatellites». *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 26.1 (2018), pp. 77–88 (cited on page 4).
- [21] U. S. Pusadkar, S. D. Chaudhari, P. Shendge, and S. Phadke. «Linear disturbance observer based sliding mode control for active suspension systems with non-ideal actuator». *Journal of Sound and Vibration* 442 (2019), pp. 428–444 (cited on page 4).
- [22] S. U. Din, Q. Khan, F. U. Rehman, and R. Akmeiliawanti. «A Comparative Experimental Study of Robust Sliding Mode Control Strategies for Underactuated Systems». *IEEE Access* 6 (2018), pp. 1927–1939 (cited on page 4).
- [23] M. Park and D. Chwa. «Swing-Up and Stabilization Control of Inverted-Pendulum Systems via Coupled Sliding-Mode Control Method». *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 56.9 (2009), pp. 3541–3555 (cited on pages 4, 65).
- [24] N. Khalid and A. Y. Memon. «Output Feedback Control of a Class of Under-Actuated Nonlinear Systems Using Extended High Gain Observer». *Arabian Journal for Science and Engineering* 41.9 (2016), pp. 3531–3542 (cited on page 4).
- [25] B. S. Park. «A simple output-feedback control for trajectory tracking of underactuated surface vessels». *Ocean Engineering* 143 (2017), pp. 133–139 (cited on page 4).
- [26] H. Lee, V. Cichella, and N. Hovakimyan. «L1 adaptive output feedback control for underactuated MIMO systems». *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017). 20th IFAC World Congress, pp. 5510–5515 (cited on page 4).
- [27] J. Li, Q. Zhang, X. Yan, and S. K. Spurgeon. «Robust stabilization of T-S fuzzy stochastic descriptor systems via integral sliding modes». *IEEE transactions on cybernetics* 48.9 (2018), pp. 2736–2749 (cited on page 4).
- [28] C. Vázquez, L. Fridman, J. Collado, and I. Castillo. «Second-order sliding mode control of a perturbed-crane». *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 137.8 (2015), pp. 1–7 (cited on pages 4, 40, 51).
- [29] L. Aguilar, R. Iriarte, and L. Fridman. «Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum». *Journal of the Franklin Institute* 350.1 (2013), pp. 92–106 (cited on page 4).
- [30] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 1996 (cited on pages 12, 62).

- [31] A. Polyakov. «Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems». *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.8 (Aug. 2012), pp. 2106–2110 (cited on page 12).
- [32] R. Seeber and M. Horn. «Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting». *Automatica* 84 (2017), pp. 241–243 (cited on page 14).
- [33] S. Kamal, J. A. Moreno, A. Chalanga, B. Bandyopadhyay, and L. M. Fridman. «Continuous terminal sliding-mode controller». *Automatica* 69 (2016), pp. 308–314 (cited on page 15).
- [34] V. Torres-González, T. Sanchez, L. Fridman, and J. A. Moreno. «Design of Continuous Twisting Algorithm». *Automatica* 80 (2017), pp. 119–126 (cited on page 15).
- [35] J. A. Moreno. «Discontinuous integral control for systems with relative degree two». *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory*. Springer, 2018, pp. 187–218 (cited on page 15).
- [36] U. Pérez, E. Capello, E. Punta, J. Perea, and L. Fridman. «Fault Detection and Isolation for a 3-DOF Helicopter with Sliding Mode Strategies». *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. 2018, pp. 279–284 (cited on page 24).
- [37] D. Merkin. *Introduction to the Theory of Stability*. Vol. 24. Springer Science & Business Media, 2012 (cited on pages 29, 35).
- [38] I. Nagesh and C. Edwards. «A multivariable super-twisting sliding mode approach». *Automatica* 50.3 (2014), pp. 984–988 (cited on page 36).
- [39] F. López-Caamal and J. Moreno. «Generalised multivariable supertwisting algorithm». *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (2016) (cited on page 36).
- [40] B. Lu, Y. Fang, and N. Sun. «Continuous Sliding Mode Control Strategy for a Class of Nonlinear Underactuated Systems». *IEEE Transactions on Automatic Control* 63.10 (2018), pp. 3471–3478 (cited on page 37).
- [41] E. Cruz-Zavala and J. Moreno. «Lyapunov Functions for Continuous and Discontinuous Differentiators». *IFAC-PapersOnLine* 49.18 (2016), pp. 660–665 (cited on pages 44, 46, 47).
- [42] J. Sherman and W. J. Morrison. «Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix». *The Annals of Mathematical Statistics* 21.1 (1950), pp. 124–127 (cited on page 61).
- [43] C. Li and R. Mathias. «The determinant of the sum of two matrices». *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 52.3 (1995), pp. 425–429 (cited on page 64).
- [44] C. Tunç. «Stability to vector Liénard equation with constant deviating argument». *Nonlinear Dynamics* 73.3 (2013), pp. 1245–1251 (cited on page 65).