

BIBLIOTECA CENTRO DE  
GRADUADOS E INVESTIGACION  
A. E. L.

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“ Diseño y Control de un Exoesqueleto de Rodilla ”**

POR

**Ing. Fo-Lyn Yong Primero**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTORES DE TESIS

**Dr. Victor Adrián Santibáñez Dávila**

**Dr. José Alfonso Pámanes García**

ISSN: 0188-9060



**RIITEC: (06)-TMCIE-2014**

Torreón, Coahuila, México  
Junio, 2014

SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR TECNOLÓGICA  
Instituto Tecnológico de la Laguna



2014, Año de Octavio Paz

Torreón, Coah., 16/Junio/2014  
Dependencia: DEPI/CPCIE  
Oficio: DEPI/CPCIE/039/2014  
Asunto: Autorización de  
impresión de tesis.

**C. FO-LYN YONG PRIMERO**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**“Diseño y control de un exoesqueleto de rodilla”**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (06)-TMCIE-2014**, para que proceda a la impresión del mismo.

**ATENTAMENTE**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

**DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA**  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación  
del Instituto Tecnológico de la Laguna

  
RHSR



Bldv. Revolución y Czda. Cuauhtémoc s/n Col. Centro C.P. 27000  
Torreón, Coah. Tel. 7051313. e-mail: wmaster@iflalaguna.edu.mx  
[www.iflalaguna.edu.mx](http://www.iflalaguna.edu.mx)



CACEA



BO 061/2008  
15/07/14 10:00:00 AM

**DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**"Diseño y control de un exoesqueleto de rodilla"**

Desarrollado por el **C. Fo-Lyn Yong Primero**, con número de control **M06131546** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

**Dr. Víctor A. Santibáñez Dávila**  
**Asesor/Director**

**Dr. José A. Pámanes García**  
**Coasesor**

**Dr. Alejandro E. Dzul López**  
**Comité Tutorial**

**Dr. Ricardo E. Campa Cocom**  
**Comité Tutorial**

# Resumen

En este documento se describe el diseño de un exoesqueleto u órtesis activa de rodilla que tiene un mecanismo cuyo objetivo es reproducir el movimiento planar de la rodilla; se presenta también un método de optimización para reproducir el movimiento de un usuario en particular; además, se desarrolla el modelo cinemático y dinámico del mecanismo y se propone un controlador para el caso de interacción humano-robot en asistencia. Los resultados son validados por medio de simulaciones numéricas.

# Abstract

This document describes the design of a knee exoskeleton or active orthosis, that has a mechanism whose objective is to perform the particular user knee planar motion; further more the kinetic and dynamic models are developed. The control for the human-robot interaction is also proposed. The results are validated with a numeric simulation.

# Dedicatoria

Dedicado a la Virgen de Guadalupe, mis abuelas, mis padres, a mi hermana, a mis ascensoras, a mis profesores, amigos, al doctor Victor Moreno y a una mujer que alguna vez me escribió "Dream big and study hard".

# Agradecimientos

Agradezco a mis asesores de tesis Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila y J. Alfonso Pámanes García que siempre me alentaron, apoyaron y enseñaron. Les agradezco la paciencia para explicarme lo que no entendía y también lo generosos que fueron conmigo al compartirme sus conocimientos.

Agradezco al Proyecto Conacyt 134534, a apoyo de la DGEST y a la beca CONACYT, dado que sin estos apoyos no hubiera sido posible concluir el posgrado.

A mis catecráticos: Dr. Ricardo Emmanuel Campa Cocoma, Dr. Alejandro Dzul Lopez, Dr. Jose L. Meza Medina, Dr. Miguel A. Ilama Leal, Dr. Francisco Jurado Zamarripa.

A Roxana Reboloso, Alejandra Mendoza, Berenice Cañavera, Dania Gonzales, Ana Carrillo, Abigail Flores, Hugo Ramos, Brethzaida Marrufo, Jael Ruiz, Sarahi Arizmendi y Mariana Mejía que siempre estuvieron dándome ánimos.

A mis hermanos en ciencias Fernando Hernandez, Alejandro Dena, Pedro Zuñiga, Eduardo Cruz, Itzell Oronoz y Ricardo Ovalle.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Términos anatómicos generales	1
1.1.1. Planos anatómicos	1
1.1.2. Estructura ósea de la pierna	1
1.1.3. Articulaciones de la pierna humana	2
1.2. La rodilla	3
1.2.1. Músculos involucrados en el movimiento de la rodilla	4
1.2.2. Rango de movimiento de la rodilla	5
1.2.3. Los movimientos de flexión y extensión	5
1.2.4. Los movimientos de los cóndilos sobre las glenoides en la flexión-extensión	6
1.2.5. Par de la rodilla	7
1.3. Exoesqueletos	7
1.3.1. Definición	8
1.3.2. Antecedentes de los exoesqueletos	8
1.3.3. Exoesqueletos de rehabilitación	9
1.3.4. Exoesqueleto de asistencia	10
1.3.5. Exoesqueletos de aumento de fuerza	10
1.3.6. Exoesqueleto de rodilla	12
1.3.7. Comentarios	14
1.4. Objetivo y justificación de tesis	16
1.5. Aportaciones	16
1.6. Desarrollo de la tesis	16
<b>2. Modelo cinemático</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción	17
2.2. Descripción del mecanismo	17
2.3. Análisis de posición del mecanismo YONG-1	19
2.4. Análisis de velocidad del mecanismo YONG-1	23
2.5. Análisis de aceleración	26
<b>3. Síntesis del mecanismo</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción	29
3.2. Formulación de una solución al problema de síntesis dimensional	29
3.3. Análisis de posición para la síntesis	31
3.4. Resultados de la síntesis del mecanismo	31

<b>4. Simulación cinemática</b>	<b>33</b>
4.1. Introducción	33
4.2. Simulación de flexión	34
4.3. Simulación de la extensión	35
<b>5. Modelo dinámico</b>	<b>46</b>
5.1. Introducción	46
5.2. Eslabón 2	46
5.3. Eslabón 3	51
5.4. Eslabón 4	55
5.5. Eslabón 7	57
5.6. Eslabón 8	60
5.7. Eslabón 11	64
5.8. Eslabón 12	67
5.9. Sistema de ecuaciones	68
<b>6. Control y simulación</b>	<b>70</b>
6.1. Control basado en voltaje	70
6.2. Simulación	75
6.3. Resultados de la simulación	76
<b>7. Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>A. Ecuaciones de Chace</b>	<b>84</b>
A.1. Ecuaciones de Chace para posición, velocidad y aceleración	84
<b>B. Método de fotogrametría</b>	<b>85</b>
<b>C. Parámetros</b>	<b>87</b>
<b>D. Espacios de funciones</b>	<b>89</b>
D.1. Conceptos básicos [11]	89
D.2. Prueba de que $\mathbf{u}(t)$ pertenece a $L^3_2$ y a $L^3_\infty$	90
<b>E. Código de simulación</b>	<b>92</b>
E.1. qerror	92
E.2. qerrorextensión	92
E.3. Voltaje flexión	93
E.4. Voltaje extensión	93
E.5. Animación cinemática	94
E.6. Modelo dinámico directo	98
E.7. Modelo eléctrico	113

# Índice de figuras

1.1. Planos anatómicos del cuerpo humano [5]	1
1.2. Pierna humana [5]	2
1.3. Estructura ósea de la pierna [5]	2
1.4. Corte sagital articular de la rodilla humana [5]	3
1.5. Articulación de rodilla humana. (a) Vista anterior (la rótula y su ligamento se reflejan hacia abajo). (b) Vista posterior [5]	4
1.6. Movimiento de la rodilla humana. (a) Flexión contrayendo bíceps femoral. (b) Extensión contrayendo cuádriceps femoral [5]	4
1.7. Rango de movimiento de la pierna humana [5]	5
1.8. Movimientos de extensión [1]	6
1.9. Movimientos de flexión [1]	6
1.10. (a) Desplazamiento puro de la rodilla. (b) Cóndilo rodando y resbaldando sobre la glenoide. (c) Flexión para cóndilo interno. (d) Flexión para cóndilo externo [1]	7
1.11. Prótesis egipcia de dedo Hallux [6]	8
1.12. (a),(b) Prótesis del renacimiento, (b) Prótesis de pie "SAFE" [5]	9
1.13. (a) AutoAmbulator, (b) Lokomat [13]	10
1.14. Exoesqueleto Rewalk [13]	11
1.15. (a) Exoesqueleto BLEEX, (b) Sarcos, (c) Exoesqueleto del MIT [8]	11
1.16. (a) Nurse-assist, (b) HAL-5 [8]	12
1.17. (a) Prototipo Roboknee siendo usado para subir escalones, (b) Dibujo del prototipo Roboknee [10]	13
1.18. (a) Diagrama básico del Exoesqueleto. (b) Ángulo mínimo de flexión del exoesqueleto [3]	14
1.19. 1-DOF Exoesqueleto [2]	15
1.20. Prototipo del exoesqueleto al caminar [4]	15
2.1. Esquema cinemático del mecanismo	18
2.2. Esquema del mecanismo de 4 barras	19
2.3. Cadena cinemática 1	20
2.4. Cadena cinemática 2	21
3.1. Modelo CAD del mecanismo	32
4.1. $\theta_2$ del eslabón director en flexión	36
4.2. $\omega_2$ del eslabón director en flexión	36
4.3. $\alpha_2$ del eslabón director en flexión	36
4.4. $\theta_3$ del eslabón acoplador 3 en flexión	37
4.5. $\omega_3$ del eslabón acoplador 3 en flexión	37

4.6.	$\alpha_3$ del eslabón acoplador 3 en flexión	37
4.7.	$\theta_8$ del eslabón acoplador 8 en flexión	38
4.8.	$\omega_8$ del eslabón acoplador 8 en flexión	38
4.9.	$\alpha_8$ del eslabón acoplador 8 en flexión	38
4.10.	$\theta_4$ del eslabón retorno 4 en flexión	39
4.11.	$\omega_4$ del eslabón retorno 4 en flexión	39
4.12.	$\alpha_4$ del eslabón retorno 4 en flexión	39
4.13.	$\theta_7$ del eslabón retorno 7 en flexión	40
4.14.	$\omega_7$ del eslabón retorno 7 en flexión	40
4.15.	$\alpha_7$ del eslabón retorno 7 en flexión	40
4.16.	$\theta_2$ del eslabón director en extensión	41
4.17.	$\omega_2$ del eslabón director en extensión	41
4.18.	$\alpha_2$ del eslabón director en extensión	41
4.19.	$\theta_3$ del eslabón acoplador 3 en extensión	42
4.20.	$\omega_3$ del eslabón acoplador 3 en extensión	42
4.21.	$\alpha_3$ del eslabón acoplador 3 en extensión	42
4.22.	$\theta_8$ del eslabón acoplador 8 en extensión	43
4.23.	$\omega_8$ del eslabón acoplador 8 en extensión	43
4.24.	$\alpha_8$ del eslabón acoplador 8 en extensión	43
4.25.	$\theta_4$ del eslabón retorno 4 en extensión	44
4.26.	$\omega_4$ del eslabón retorno 4 en extensión	44
4.27.	$\alpha_4$ del eslabón retorno 4 en extensión	44
4.28.	$\theta_7$ del eslabón retorno 7 en extensión	45
4.29.	$\omega_7$ del eslabón retorno 7 en extensión	45
4.30.	$\alpha_7$ del eslabón retorno 7 en extensión	45
5.1.	Ensamblaje de los eslabones del mecanismo	48
5.2.	Eslabón 2 (Eslabón director)	49
5.3.	Ángulo que forma el marco 3 respecto del marco 2	50
5.4.	Ángulo que forma el marco 8 respecto del marco 2	50
5.5.	Eslabón 3 (Eslabón acoplador superior)	52
5.6.	Ángulo del marco 3 respecto del marco 1	53
5.7.	Ángulo entre el marco 12 y 3	53
5.8.	Eslabón 4 (Eslabón seguidor superior)	55
5.9.	Ángulo del marco 4 respecto el marco 3	56
5.10.	Eslabón 7 (Eslabón seguidor inferior)	58
5.11.	Marco 8 respecto del marco 7	58
5.12.	Eslabón 8 (Eslabón acoplador inferior)	61
5.13.	Medición del ángulo $\theta_8^*$	61
5.14.	Ángulo del marco 11 respecto del marco 8	62
5.15.	Eslabón 11	65
5.16.	Eslabón 12	67
6.1.	Diagrama de control en lazo cerrado	74
6.2.	Diagrama resumido de simulación	75
6.3.	Trayectoria deseada para el rotor $\theta_{md}(t)$	77
6.4.	Trayectoria de la velocidad deseada para el rotor $\dot{\theta}_{md}(t)$	77
6.5.	Aceleración deseada para el rotor $\ddot{\theta}_{md}(t)$	78
6.6.	Error de seguimiento $e(t)$ en flexión-extensión	78

---

6.7. Trayectoria del rotor del motor $\theta_m(t)$	79
6.8. $T(t)$ par del exoesqueleto y usuario	79
6.9. Curva de voltaje $v(t)$	80
B.1. Lugar de colocación del $M_0$	85
B.2. Fotogrametría de rodilla para los puntos de optimización	86

# Índice de tablas

2.1. Variables del modelo cinemático.	19
3.1. Coordenadas en el marco 0 de los puntos $P_1^*$ y $P_2^*$ del muslo con respecto la pierna, $i = 1$ hasta 5	29
3.2. Variables óptimas de las variables de diseño.	32
4.1. Valores de los parámetros para la simulación cinemática.	34
5.1. Variables del modelo dinámico.	47
C.1. Valor numérico de los parámetros de la simulación.	87
C.2. Valor numérico de las longitudes.	88

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Términos anatómicos generales

#### 1.1.1. Planos anatómicos

Los tres planos del cuerpo humano son: el plano sagital, el plano transversal y el plano coronal (Figura 1.1). La extremidad inferior humana (Figura 1.2), está dividida en tres segmentos principales: la cadera, la pierna y el pie. Estrictamente hablando, la pierna humana es considerada como el segmento comprendido entre la cadera y el tobillo.

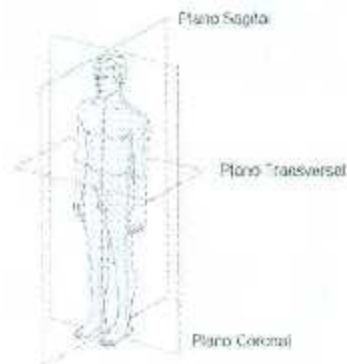


Figura 1.1: Planos anatómicos del cuerpo humano [5]

#### 1.1.2. Estructura ósea de la pierna

En la Figura 1.3 se muestran los cuatro huesos que conforman la pierna; en la sección superior del fémur y la rótula, en la sección inferior la tibia y el peroné. El fémur está localizado en el muslo, es el hueso más largo, fuerte y voluminoso del cuerpo humano. Está unido por medio de una articulación en su extremo superior al hueso coxal que conforma la cadera, y en su extremo inferior, donde se encuentra la tróclea, se une con la tibia en la rodilla por medio de la articulación femorotibial. La rótula o patela es un hueso que protege la parte frontal de la articulación de la rodilla. Su función principal es la extensión de la rodilla aumentando la palanca generada por el tendón en el fémur, aumentando el ángulo en el que éste actúa. La

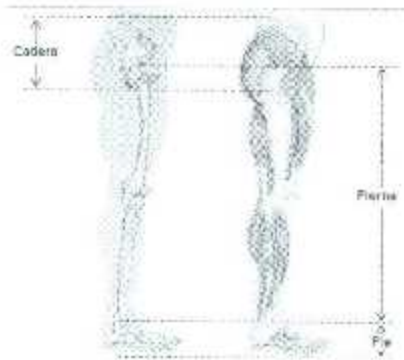


Figura 1.2: Pierna humana [5]

tibia está articulada en su parte superior con el fémur y la rótula, lateralmente con el peroné y en su parte inferior con el tobillo. El peroné o fibula está localizada al lado de la tibia con la cual esté conectado por su parte superior e inferior. Su pequeño extremo superior está situado hacia la parte trasera y por debajo de la cabeza de la tibia, excluida de la articulación de la rodilla. El extremo inferior se inclina un poco hacia delante proyectándose por debajo de la tibia y formando la parte lateral de la articulación del tobillo.

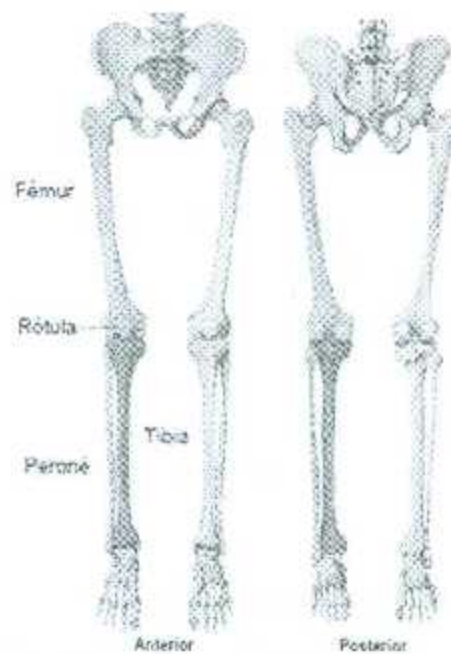


Figura 1.3: Estructura ósea de la pierna [5]

### 1.1.3. Articulaciones de la pierna humana

Las articulaciones son zonas de unión entre los huesos o entre los cartílagos del esqueleto. Tienen la función de permitir doblar las distintas extremidades del cuerpo.



Si no existieran, el cuerpo sería una estructura totalmente rígida y no se podrían realizar movimientos. Las articulaciones de la pierna son la cadera, la rodilla y el talón. En este trabajo sólo se describirá la articulación de la rodilla que es la parte del cuerpo que se involucra en el objeto de estudio.

## 1.2. La rodilla

La rodilla (Figura 1.4) es la articulación más grande del cuerpo humano. Es una articulación compuesta, formada por la acción conjunta del fémur, tibia, rótula y dos discos fibrocartilagosos. Consiste en la articulación entre el cóndilo femoral y la tibia, y la articulación entre la superficie rotular del fémur y la rótula. Los dos meniscos adaptan la superficie articular del fémur y la tibia entre ellas para incrementar la superficie de transmisión de fuerza.

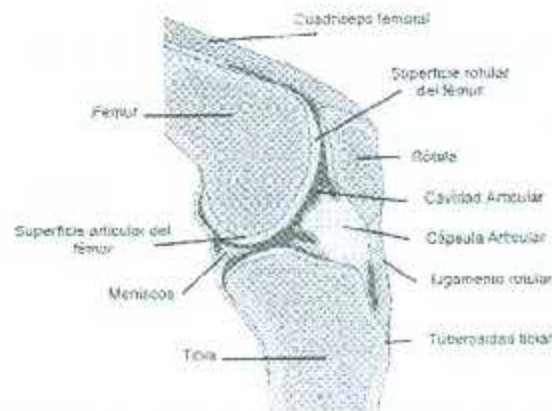


Figura 1.4: Corte sagital articular de la rodilla humana [5]

Los movimientos de la rodilla son guiados y restringidos por dos grupos de ligamentos (Figura 1.5) [5]:

- Ligamentos colaterales: Medial y lateral.
- Ligamentos cruzados: Anterior y posterior.

La rodilla es una articulación intermedia del miembro inferior dotada de un sólo grado de libertad de movimiento –la flexión y extensión–, que le permite acercar o alejar, más o menos, el extremo del miembro a su raíz o, lo que es lo mismo, regular la distancia que separa el cuerpo del suelo. En esencia, la rodilla trabaja comprimida por el peso que soporta. De manera accesoria, la articulación de la rodilla posee un segundo grado de libertad: la rotación sobre el eje longitudinal de la pierna, que sólo aparece cuando la rodilla está en flexión. Considerada desde el punto de vista mecánico, la articulación de la rodilla constituye un caso sorprendente: debe conciliar dos imperativos contradictorios:

- Poseer una gran estabilidad en extensión completa, posición en la que la rodilla soporta presiones importantes, debidas al peso del cuerpo y a la longitud de los brazos de palanca.

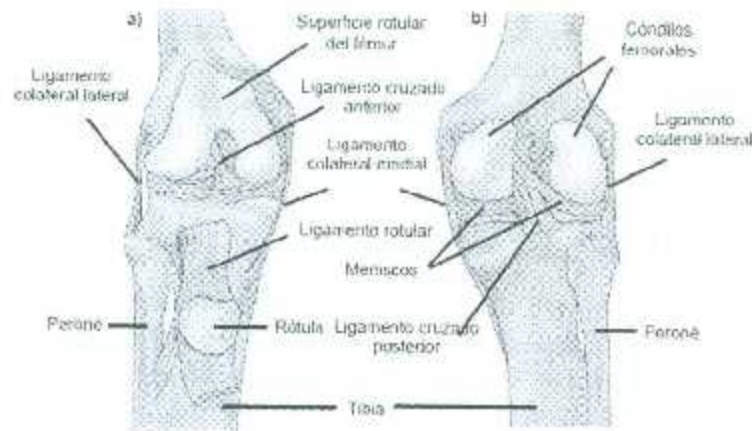


Figura 1.5: Articulación de rodilla humana. (a) Vista anterior (la rótula y su ligamento se reflejan hacia abajo). (b) Vista posterior [5]

- Alcanzar una gran movilidad a partir de cierto ángulo de flexión, movilidad necesaria en la carrera y para la orientación óptima del pie en relación con las irregularidades del terreno.

La rodilla resuelve estas contradicciones merced a dispositivos mecánicos ingeniosos en extremo; sin embargo, la debilidad del acoplamiento de las superficies, condición necesaria para una buena movilidad, expone esta articulación a los esguinces y a las luxaciones [1].

### 1.2.1. Músculos involucrados en el movimiento de la rodilla

El músculo principal para la flexión es el bíceps femoral (Figura 1.6(a)). El músculo principal para la extensión es el cuádriceps (Figura 1.6(b)) [5].

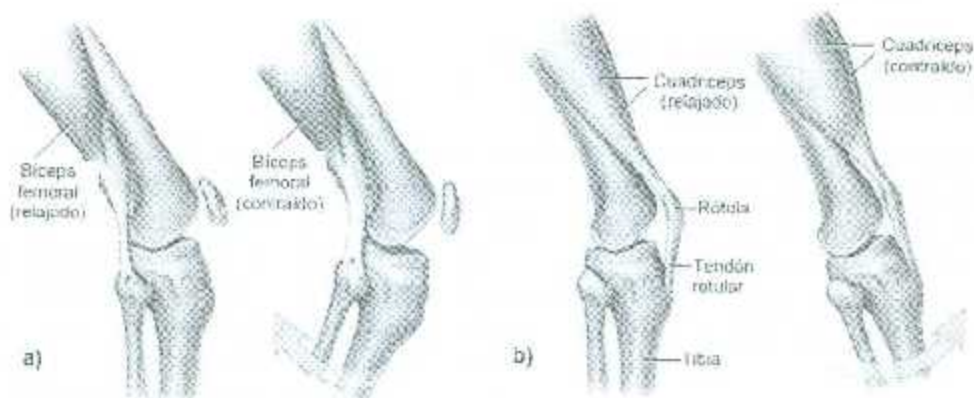


Figura 1.6: Movimiento de la rodilla humana. (a) Flexión contrayendo bíceps femoral. (b) Extensión contrayendo cuádriceps femoral [5]

### 1.2.2. Rango de movimiento de la rodilla

Al flexionar la rodilla, se genera un ángulo entre el fémur y la tibia (Figura 1.7); este ángulo varía dependiendo de la flexibilidad de las personas. Este ángulo va desde 0 grados cuando la pierna está totalmente extendida creando una línea recta el fémur con la tibia, hasta 155 grados cuando la pierna está totalmente flexionada, tocando el glúteo con el talón. Si se fuerzan un poco los cuádriceps, se puede tener una hiperextensión de hasta  $-10$  grados tomando como referencia la pierna en posición recta en un ángulo de 0 grados [5].

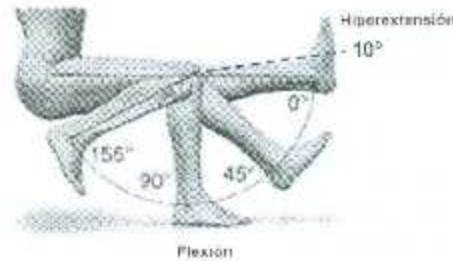


Figura 1.7: Rango de movimiento de la pierna humana [5]

### 1.2.3. Los movimientos de flexión y extensión

La flexión - extensión es el movimiento principal de la rodilla. Su amplitud se mide a partir de la posición de referencia, que se define como sigue: El eje de la pierna está situado en la prolongación de eje del muslo (Figura 1.8(a), pierna izq.). De perfil, el eje del fémur se continua, sin ninguna angulación, con el eje del esqueleto de la pierna. En la posición de referencia, el miembro inferior posee su longitud máxima.

La extensión se define como el movimiento que aleja la cara posterior de la pierna de la cara posterior del muslo. No existe, a decir verdad, una extensión absoluta, puesto que en la posición de referencia el miembro está ya en situación de alargamiento máximo. No obstante, es posible efectuar, sobre todo de forma pasiva, un movimiento de extensión de unos 5 grados a 10 grados, a partir de la posición de referencia (Figura 1.7); este movimiento recibe el nombre de "hiperextensión". En ciertos sujetos, esta hiperextensión puede estar exagerada por motivos patológicos; que se denominan *genu recurvatum*.

La extensión activa rara vez sobrepasa la posición de referencia (Figura 1.8 (a)) y, cuando lo hace es en muy escasa medida; esta posibilidad depende esencialmente de la posición de la cadera; en efecto, la eficacia del recto anterior como extensor de la rodilla aumenta con la extensión de la cadera, es decir que la extensión previa de la cadera (Figura 1.8(b), pierna derecha), prepara la extensión de la rodilla.

La extensión relativa es el movimiento que completa la extensión de la rodilla, a partir de cualquier posición de flexión; es el movimiento normal que se efectúa durante la marcha, cuando el miembro que oscila, se adelanta para tomar contacto con el suelo.

La flexión es el movimiento que acerca la cara posterior de la pierna a la cara posterior del muslo. Existen movimientos de flexión absoluta, a partir de la posición

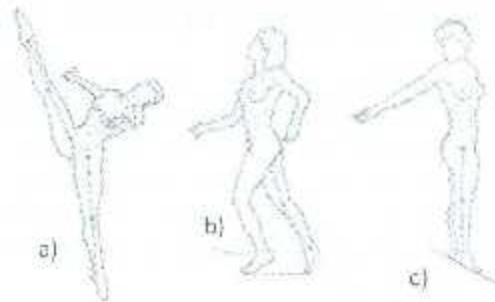


Figura 1.8: Movimientos de extensión [1]

de referencia, y movimientos de flexión relativa, a partir de todas las posiciones de flexión.

La amplitud de flexión de la rodilla es distinta según sea la posición de la cadera y de acuerdo con las modalidades del movimiento mismo.

La flexión activa alcanza los 140 grados si la cadera está en flexión previa (Figura 1.9 (a)) y tan solo llega a 120 grados si la cadera se encuentra en extensión (Figura 1.9 (b)). Esta diferencia de amplitud se debe a la disminución de la eficacia de los isquiotibiales cuando la cadera está en extensión. Sin embargo es posible sobrepasar los 120 grados de flexión de la rodilla, con la cadera en extensión, gracias a la contracción balística; los isquiotibiales, promedio de una contracción potente y brusca, lanzan la flexión de la rodilla que finaliza con una flexión pasiva.

La flexión pasiva de la rodilla alcanza una amplitud de 150 grados (Figura 1.9 (b)) y permite que el talón entre en contacto con la nalga. Este movimiento es una prueba muy importante para comprobar la libertad de flexión de la rodilla; para apreciar la amplitud de flexión se mide la distancia que separa el talón de la nalga. En condiciones normales, la flexión sólo está limitada por el contacto elástico de las masas musculares de la pantorrilla y del muslo. En condiciones patológicas, la flexión pasiva de la rodilla queda limitada por la retracción del sistema extensor en especial por el cuádriceps o por las retracciones capsulares.

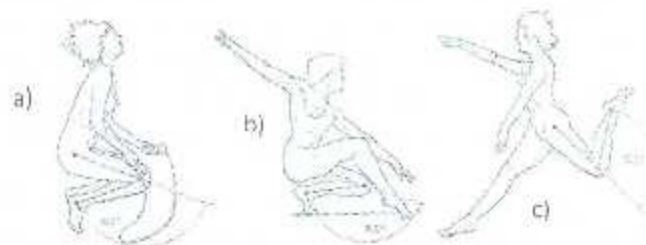


Figura 1.9: Movimientos de flexión [1]

#### 1.2.4. Los movimientos de los cóndilos sobre las glenoides en la flexión-extensión

El experimento de los hermanos Weber (Figura 1.10 (b)) demostró, en 1835, que el cóndilo rueda y resbala a la vez sobre la glenoide. Por otra parte es la única forma

de evitar la luxación posterior del cóndilo y a la vez permitir la flexión máxima de 160 grados ( Comparar la flexión de la Figura 1.10 (a), 1.10(b)) [1].

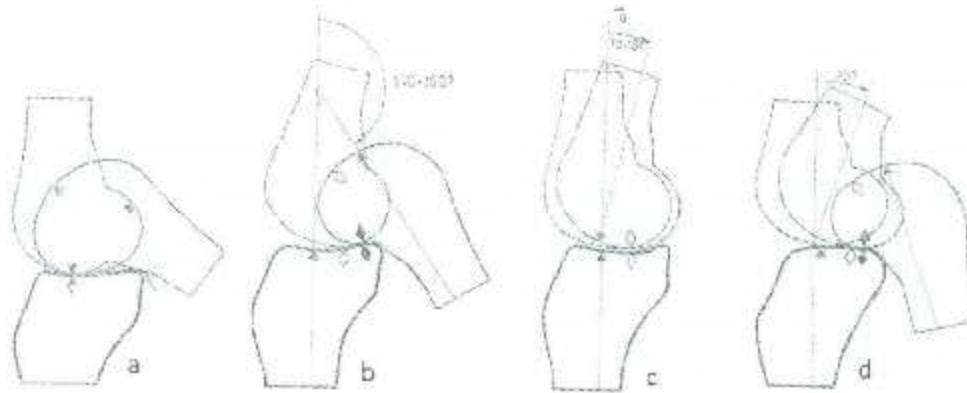


Figura 1.10: (a) Desplazamiento puro de la rodilla. (b) Cóndilo rodando y resbalando sobre la glenoide. (c) Flexión para cóndilo interno. (d) Flexión para cóndilo externo [1]

Para el cóndilo interno (Figura 1.10(c)) dicha rodadura sólo aparece durante los 10 grados a 15 grados iniciales de la flexión. Para el cóndilo externo (Figura 1.10(d)), la rodadura persiste hasta los 20 grados de flexión.

### 1.2.5. Par de la rodilla

Los reportes existentes de los requerimientos de torque máximo de la rodilla a la marcha normal del caminar se reportan de  $0.31 \pm 0.15$  Nm/kgm para mujeres y  $0.32 \pm 0.15$  Nm/kgm para hombres. Así que un sujeto masculino con masa corporal de 80 kg y estatura de 1.80 m, el torque máximo durante el caminado normal será de 45 Nm. También se ha reportado que para sujetos obesos el torque máximo puede ascender de 0.39 Nm hasta 0.97 Nm. Aguirre-Ollinger, Colgate J., Peshkin M A., y Goswami A. [2] para su exoesqueleto de rodilla consideraron estos datos y concluyeron que un sistema de actuador-transmisión debía ser capaz de aportar 20 Nm de torque continuo sería suficiente para producir asistencias largas y asistivas. Ellos usaron un motor de 2 Nm y una transmisión de 10:1, que les permitía tener al final los 20 Nm deseados.

## 1.3. Exoesqueletos

Un exoesqueleto es cualquier dispositivo mecánico actuado usado para mejorar las habilidades del individuo que lo está usando. Un exoesqueleto puede ser fijo o móvil; el fijo como lo indica su nombre es aquel que está anclado a una estación de operación "fija", en cambio los exoesqueletos móviles no están anclados a ninguna base, y por lo tanto pueden ser trasladados por el usuario mientras lo portan en

su propio cuerpo. Existen exoesqueletos para diferentes partes del cuerpo según la habilidad que se pretenda mejorar, independientemente de si es fija o móvil. Pueden ser diseñados para extremidades superiores, inferiores o ambas, y también los hay para partes específicas del cuerpo como rodillas donde la tarea del exoesqueleto es aligerar el esfuerzo y la fatiga de los tendones al realizar el movimiento de flexión y extensión.

### 1.3.1. Definición

Un exoesqueleto puede ser definido como un mecanismo portable con una configuración antropomórfica, capaz de seguir los movimientos del usuario. Un esqueleto robótico no tiene que ser de cuerpo completo, este puede ser diseñado y usado para partes específicas del cuerpo [2]. Los exoesqueletos pueden ser clasificados según sus tareas en:

- Exoesqueletos de rehabilitación
- Exoesqueletos de asistencia.
- Exoesqueletos de amplificación de fuerza.

### 1.3.2. Antecedentes de los exoesqueletos

La datación del reporte de prótesis más antiguo es el "Rig-Veda", un texto sagrado hindú escrito en sánscrito entre 3500 y 1800 A.C que cuenta la historia del guerrero Queen Vishpa que perdió su pierna en una batalla, pero fue remplazada por una prótesis de hierro y así pudo regresar a la batalla [5]. La prótesis encontrada, más antigua, fue descubierta en una momia de Egipto y corresponde a una prótesis del dedo hallux del pie (dedo gordo) (Figura 1.11) y está datada entre el año 950 y el 710 A.C.. Con su descubrimiento se probó que los egipcios también desarrollaron la medicina protética [6].



Figura 1.11: Prótesis egipcia de dedo Hallux [6]

La funcionalidad y ergonomía de las prótesis ha cambiado con el tiempo, comenzando con la prótesis egipcia del dedo hallux fabricado con madera, papel y resinas naturales. Luego las prótesis se convirtieron en simples muletas o copas de madera y cuero que se sujetaban a las piernas o extremidades. En 1858 se encontró en Capua, Italia una prótesis romana de 300 A.C. Construida con un centro de madera, una cobertura de bronce y ataduras de piel. En el renacimiento entre 1600 y 1800 D.C.

Se observó un refinamiento en las prótesis volviéndose más funcionales (Figura 1.12 (a), (b)). Para finales de la primera guerra mundial se fundó la asociación americana de prótesis y órtesis haciendo grandes contribuciones al desarrollo de las prótesis, sin embargo al concluir la segunda guerra mundial el número de amputados aumentó lo suficiente para darse cuenta que la tecnología de prótesis no había cambiado mucho desde 1800, de esta manera hasta los años 60's y 70's se mejoran las fijaciones de cuero por acopladores de plástico (fijación entre prótesis y muñón), además de la introducción del soporte hidráulico, prótesis endo esqueléticas y piel sintética.



Figura 1.12: (a), (b) Prótesis del renacimiento, (b) Prótesis de pie "SAFE" [5]

En 1980 se crea el pie "SAFE" (Figura 1.12. (c)), el cual permitía almacenar energía, siendo desde los 90's a la actualidad que se desarrollan prótesis electrónicas, actuadas e inteligentes y mucho más funcionales que sus antepasados ahora controladas por impulsos mioeléctricos dejando atrás movimientos mecánicos del usuario. En México existen registros de fábricas dedicadas a la manufactura de prótesis desde 1924, pero hasta 1940 se motivó y patrocinó a la creación de talleres dedicados al diseño, fabricación y adaptación de sistemas protésicos. Hasta la década de los 60s se fundó el Instituto Mexicano de Rehabilitación por el Sr. Rómulo O'Farril Senior. Posteriormente a principios de 1970 se fundó la Asociación de protesistas y ortesistas de la república mexicana, A.C. [5].

### 1.3.3. Exoesqueletos de rehabilitación

El objetivo principal de estos exoesqueletos es enseñar al paciente a tener movimientos coordinados, de esta manera puede decirse que el exoesqueleto asiste al paciente mientras éste intenta realizar movimientos [13].

En los exoesqueletos de rehabilitación se pueden mencionar los prototipos AutoAmbulator y Lokomat (Figura 1.13) que están disponibles comercialmente. El Lokomat consiste en una banda caminadora, un sistema de soporte del peso corporal del paciente y las órtesis conectadas a las extremidades inferiores del usuario. La flexión y extensión de cadera y rodillas están actuadas y han sido probadas para el tratamiento de adultos e infantes.

Un tema de discusión actual, es que los patrones de marcha de pacientes sometidos a rehabilitación con exoesqueletos, tienen patrones diferentes a los de marcha

independiente, e incluso entre los mismos pacientes los patrones no son iguales. Esto ha resultado en la incorporación de más grados de libertad a los dispositivos.

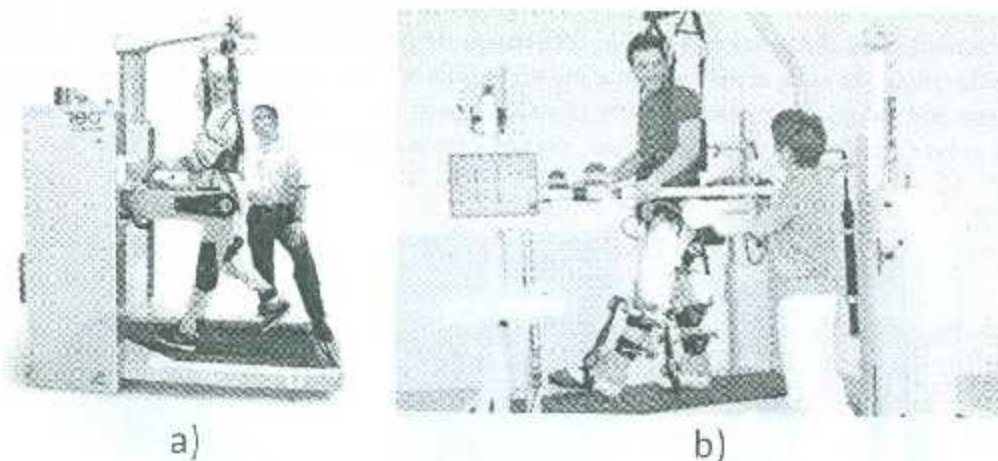


Figura 1.13: (a) AutoAmbulator, (b) Lokomat [13]

#### 1.3.4. Exoesqueleto de asistencia

En términos generales, los exoesqueletos de asistencia son diseñados y construidos para aumentar las habilidades ambulatorias de una persona que sufre alguna patología asociada al patrón de marcha. A los exoesqueletos de asistencia también se les llama "órtesis activas". Un pionero del desarrollo de exoesqueletos es Miodir Vukobratovic del Instituto Mihailo Pupin en Belgrado. En 1990 finalmente se desarrolló un exoesqueleto de cadera y extremidades superiores para ayudar a personas con paraplejia. El paciente comandaba el exoesqueleto que ya tenía trayectorias previamente definidas. Un exoesqueleto más reciente es el Rewalk (Figura 1.14), comercialmente disponible, fabricado por la compañía israelí Tecnologías Médicas Argu. Éste tiene las funciones de caminar, subir escalones, sentarse y pararse. La estabilidad y confianza del usuario es asegurada con el uso de muletas canadienses.

#### 1.3.5. Exoesqueletos de aumento de fuerza

El primer exoesqueleto que aumentaba la fuerza, también conocido como potenciador de fuerza, fue el Hardiman construido en los 60s por General Electric. Hardiman, por las palabras en inglés Human Augmentation Research and Development Investigation es un prototipo que usa sistemas hidráulicos con componentes mecánicos que amplifican la fuerza de los brazos y piernas de quien lo porta. El proyecto fue abandonado por problemas en la marcha que eran incontrolables. Tres de los exoesqueletos más importantes que fueron diseñados para aumentar la fuerza son el BLEEX, Sarcos WEAR y el exoesqueleto del MIT (Figura 1.15). El BLEEX fue creado para aumentar la capacidad de carga de una persona, tiene 7 grados de libertad de los cuales 4 son actuados. El exoesqueleto de la compañía Sarcos fue diseñado para el cuerpo completo y su nombre es WEAR, por "Wearable Energeti-



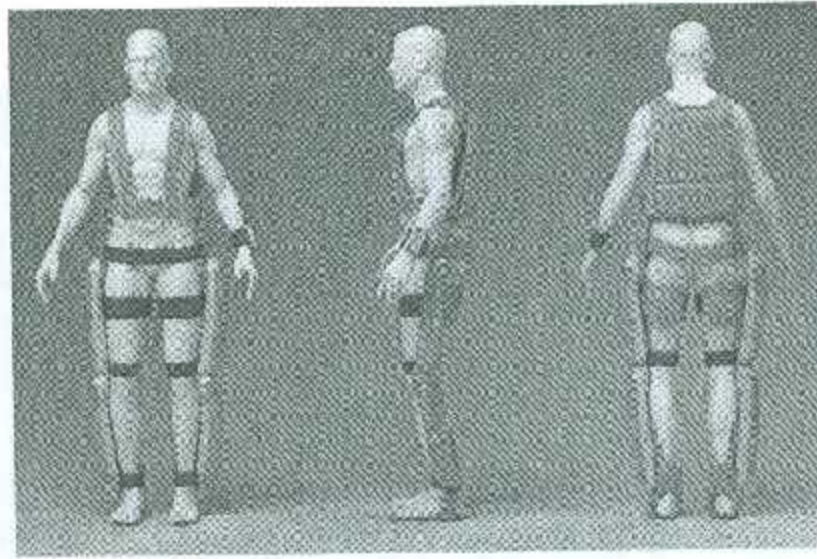


Figura 1.14: Exoesqueleto Rewalk [13]

cally Autonomous Robot"; este robot es capaz de permitir al usuario pararse en un solo pie mientras carga 84 kg en la espalda.

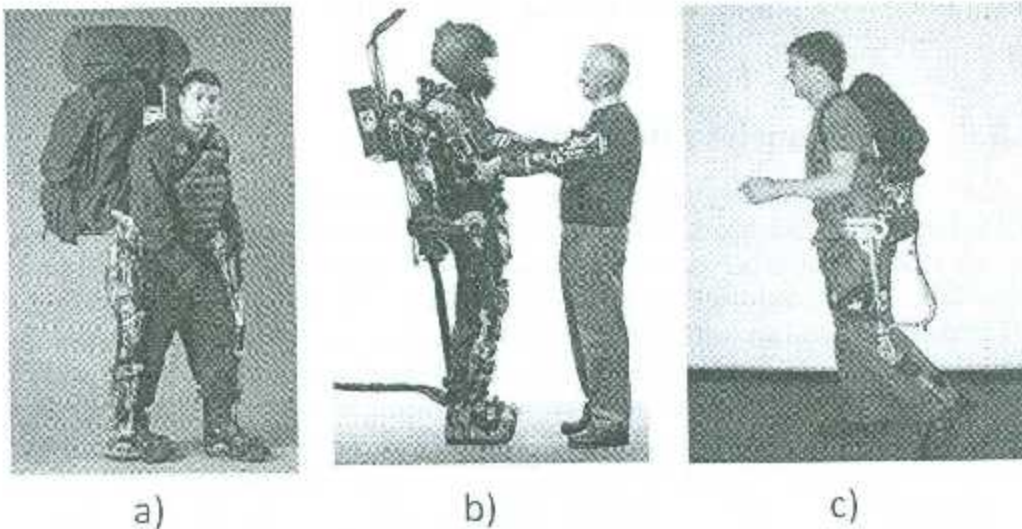


Figura 1.15: (a) Exoesqueleto BLEEX, (b) Sarcos, (c) Exoesqueleto del MIT [8]

De estos exoesqueletos, se cuenta sólo con la información que se publicó durante el desarrollo de los proyectos, pues al término de éstos el ejército estadounidense retomó las investigaciones y ya no se ha publicado en referencia a ellos. Japón no se ha quedado atrás en el desarrollo de exoesqueletos y ha tenido un rol importante en la evolución de los prototipos como el exoesqueleto de cuerpo completo para enfermeras Nurse-assist (Figura 1.16), actuado completamente por sistemas neumáticos, este aparato ayuda a la enfermera a cargar, mover o trasladar pacientes. El exoesqueleto HAL-5 que también es de cuerpo completo y sirve para asistir a personas con problemas locomotores o para incrementar el rendimiento físico de las personas

al aumentar sus habilidades [8].

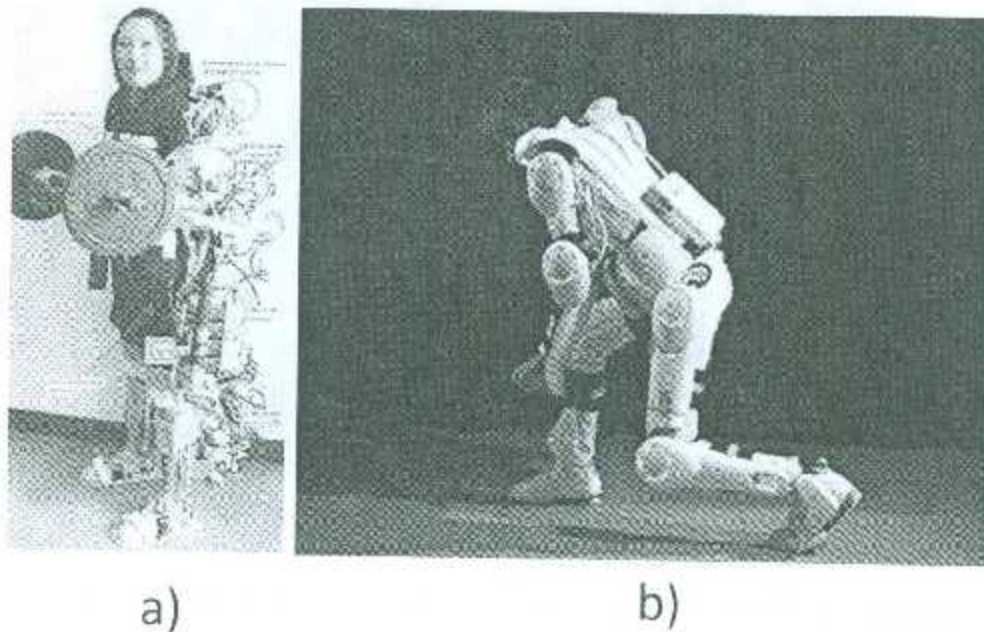


Figura 1.16: (a) Nurse-assist, (b) HAL-5 [8]

### 1.3.6. Exoesqueleto de rodilla

Jerry Pratt del Instituto de Cognición Para Humanos Máquinas, Steven H. De la Universidad de Michigan, Benjamin Krupp y Christopher Morse de Yobotics, Inc. en el 2004 dieron a conocer un exoesqueleto de un grado de libertad llamado RoboKnee. La detección de intención de movimiento del usuario es determinada por el ángulo de la posición actual de la rodilla y la reacción del piso sobre el pie. El torque es aplicado mientras el usuario relaja los músculos cuádriceps. El RoboKnee (Figura 1.17) permite al usuario subir escalones y hacer sentadillas mientras se carga peso en la espalda, el prototipo es capaz de proveer la suficiente energía para hacer trabajos contra la gravedad y también ayuda al usuario a caminar [10].

Aaron Dollar y Hugh Herr, investigadores de Harvard y del Instituto Tecnológico de Massachusetts respectivamente, en el 2008 publicaron su investigación de un exoesqueleto de rodilla para facilitar la acción de correr. El prototipo consiste en un mecanismo motorizado (Figura 1.18) y articulado, que activamente coloca y remueve un resorte colocado paralelamente a la articulación de la rodilla [3].

Gabriel Aguirre, Edward Colgate y Michael A. Peshkin [2] del departamento de ingeniería mecánica de la universidad del Noreste en Evanston, Illinois, en su trabajo "Design of an Active 1-DOF Lower-Limb Exoskeleton with Inertia Compensation" (Figura 1.19) escriben que ha habido significantes avances en la ingeniería en los aspectos de diseño de exoesqueletos (mecatrónica, control, actuadores), los aspectos fisiológicos de usar un exoesqueleto es poco comprendido. Una observación común en publicaciones recientes investigaciones de exoesqueletos ha sido la ausencia de reportes en donde se trate el tema de la disminución del costo metabólico de caminar.

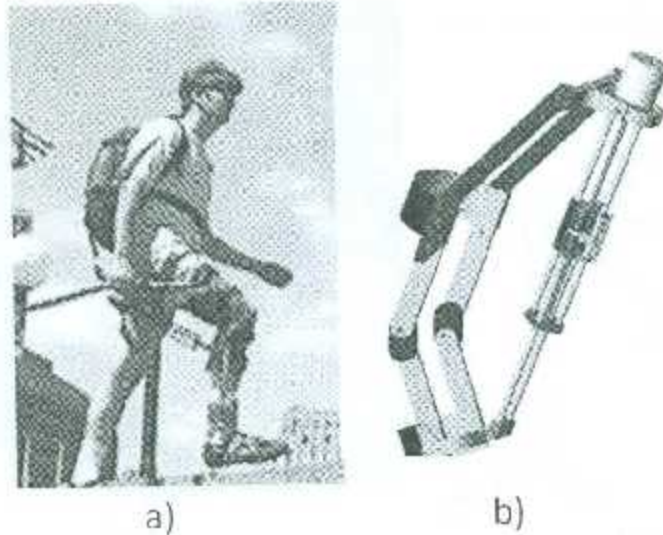


Figura 1.17: (a) Prototipo Roboknee siendo usado para subir escalones, (b) Dibujo del prototipo Roboknee [10]

Otro tema poco desarrollado ha sido el efecto de un exoesqueleto sobre la agilidad de los movimientos del usuario. Al menos en el 2010 no se tenían estudios de cómo un exoesqueleto podía afectar al usuario en su velocidad de caminado, o la habilidad de acelerar las piernas cuando es necesario realizar movimientos rápidos. A cierta velocidad del caminado, el balanceo de las piernas tiende a comportarse como el balanceo de un péndulo. En la fase de simple soporte, en donde se da el movimiento pendular de la pierna libre mientras la otra es apoyada, es donde se puede tomar una ventaja de este movimiento para reducir el costo metabólico de caminar.

Aguirre et al. (2011) diseñaron y construyeron un exoesqueleto de rodilla de un grado de libertad para la asistencia en ejercicios de flexión y extensión de la rodilla. Este exoesqueleto fue construido con la intención de estudiar los efectos de las dinámicas activas del exoesqueleto en las cinemáticas y energías del movimiento pendular de la pierna. Ellos concluyeron que un torque de 20 N-m sería suficiente para producir torques asistidos. Usaron un motor de 2 N-m conectado a una transmisión que aumenta el torque 10:1, que finalmente se convierte en el torque requerido de 20 N-m, el cuerpo pendular del exoesqueleto fue fabricado de aluminio con la intención de hacerlo lo más ligero posible a fin de reducir los efectos de la inercia [2].

Gosselin y Desailly [4] de Sistemas Robóticos Inteligentes de Francia en 2011 construyeron una órtesis activa para la rodilla que proveyera de un movimiento de flexión y extensión con la intención de ejercitar la articulación o de asistir el movimiento. El prototipo también puede monitorear la cinemática de la rodilla a través de la estimación del desplazamiento de los ejes. El modelo (Figura 1.20) tiene 7 eslabones que forman una cadena de 6 grados de libertad que están conectados a una articulación deslizante que permite al mecanismo adaptarse a diferentes medidas a lo largo de las piernas. Las últimas dos articulaciones rotacionales son usadas para compensar el desplazamiento entre los ejes de la tibia. El prototipo puede proveer un torque de 40N-m a través de una transmisión de 100:1 [4].

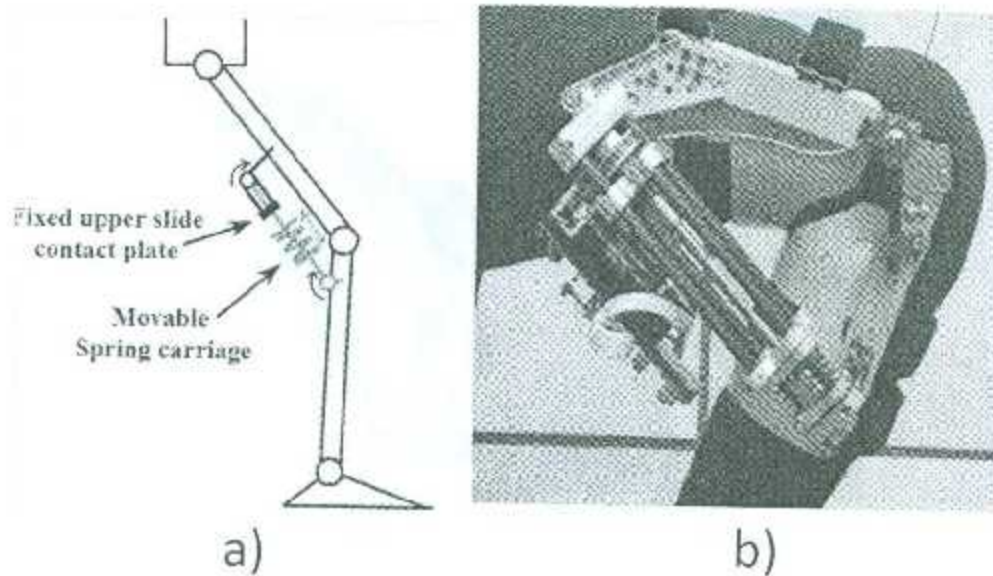


Figura 1.18: (a) Diagrama básico del Exoesqueleto. (b) Ángulo mínimo de flexión del exoesqueleto [3]

### 1.3.7. Comentarios

Los exoesqueletos son la evolución tecnológica de las prótesis y órtesis. Una prótesis por definición es una pieza o aparato artificial que se coloca en el cuerpo de un ser vivo para sustituir un órgano o un miembro; las hay articuladas, no articuladas no actuadas o actuadas por algún motor, músculo neumático o pistón. Una prótesis funcional debe ser capaz de sustituir el miembro faltante con las mismas facilidades y restricciones del movimiento, sin embargo esto no siempre se logra por limitaciones científicas, tecnológicas o ergonómicas. Es por ésto que en el estudio y desarrollo de las prótesis, el objetivo es hacerlas cada vez más eficientes y funcionales para los usuarios. Las órtesis son piezas o aparatos que ayudan a un ser vivo a realizar una tarea, sin embargo no sustituyen ningún órgano o miembro. Las órtesis pueden ser articuladas, rígidas, o ambas con seguros colocados en articulaciones que restringen o permiten el movimiento al colocar o quitar el seguro.

Las órtesis pueden ser usadas para reforzar alguna articulación evitando la cabalgadura de ligamentos y tendones por movimientos bruscos, tal como una órtesis de codo o de rodilla en las que algún deportista las puede usar para evitar lesiones o contrarrestar algún dolor; las órtesis en algunos casos contrarrestan movimiento para no lesionar tendones e inserciones, también pueden dar mayor rigidez a las articulaciones como por ejemplo un paciente con cuadriplejía quien necesita una órtesis de cuerpo completo para poder mantener una postura erguida o simplemente permanecer sentado, o un paciente de paraplejía que usa una órtesis de extremidades inferiores para poder caminar con ayuda de muletas canadienses.

El exoesqueleto se conoce por ser el esqueleto exterior que poseen algunos animales, básicamente insectos y crustáceos. Pero también el término exoesqueleto se ha empleado en robots que juegan el papel de un esqueleto externo en los humanos. Un exoesqueleto es el perfecto ejemplo de la unión del humano con el robot. En su diseño mecánico es necesario considerar la anatomía y fisiología humana, ergonomía,

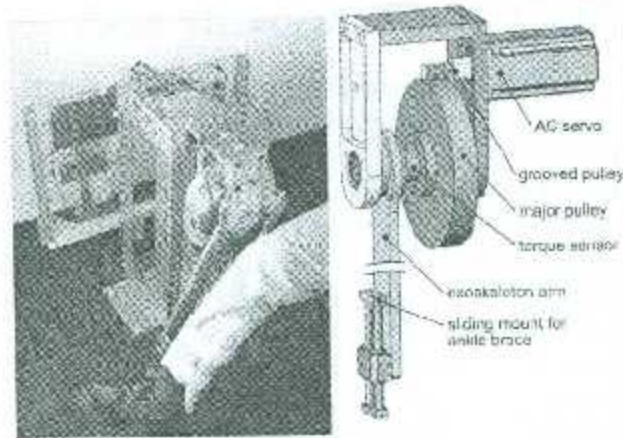


Figura 1.19: 1-DOF Exosqueleto [2]



Figura 1.20: Prototipo del exosqueleto al caminar [4]

volumen, peso, estética, etc., pues es un dispositivo usado por un humano, puede decirse que es un “traje robot”. La interacción del usuario con el robot no sólo es portarlo. Existe un sistema de detección de la intención de movimiento del usuario que le indica al robot la magnitud, dirección, la velocidad y la fuerza al desplazarse. Es decir, el robot debe de ser capaz de seguir todos los movimientos del usuario.

La detección de la intención de movimiento del usuario es conocido por el robot a través de un sistema de sensores de fuerza o de impulsos mioeléctricos. Los sensores de fuerza se colocan en puntos estratégicos como por ejemplo las articulaciones. El sensor hace una lectura de la fuerza aplicada y según el aumento o disminución de la fuerza del usuario, el robot tendrá una respuesta al movimiento del usuario. En cambio el sensor de impulsos mioeléctricos distingue qué músculo o tendón se está moviendo y en qué dirección, para luego indicarle al robot que dirección seguir.

El desarrollo en la materia de exosqueletos aún es poca, hay diferentes autores y cada uno de ellos aportando ideas diferentes para el control, detección de intención al movimiento del usuario, en la cinemática, en estudios de factibilidad para usos de exosqueletos, en daños al cuerpo producidos por estos, dispositivos mecánicos de fijación. Es por ello que en esta tesis se pretende diseñar un exosqueleto de rodilla con una configuración diferente a las ya mencionadas anteriormente.

## 1.4. Objetivo y justificación de tesis

El objetivo de esta tesis es diseñar un exoesqueleto de rodilla móvil cuya configuración mecánica tendrá por característica realizar movimientos de rotación y traslación como los efectuados por la rodilla humana. Los pasos generales, que se siguen, para el diseño del exoesqueleto son: desarrollo del diseño mecánico, diseño de sistema de control y diseño de la detección de intención de movimiento del usuario (selección de sensores y actuadores) esta tesis únicamente desarrolla el diseño y el control. En el diseño mecánico se debe considerar el aspecto biomecánico del humano puesto que el exoesqueleto debe adaptarse a la anatomía del cuerpo humano. También hay que tomar en cuenta el volumen, peso y estética del mecanismo. En los sistemas de control se debe proponer un sistema capaz de satisfacer las necesidades sobre todo de seguimiento al movimiento intuido. Existen exoesqueletos controlados por PID, redes neuronales y lógica difusa, en este trabajo se empleará un controlador en modo voltaje.

## 1.5. Aportaciones

Los impactos científicos, tecnológicos y sociales que podrían obtenerse al llevar a cabo esta tesis son:

- Formación en temas de investigación relacionados con bioingeniería, control y detección de intención de movimiento.
- Un modelo de control para exoesqueletos de rodilla.
- Propuesta y diseño de un mecanismo capaz de realizar el movimiento planar de rotación y traslación como una rodilla humana, que en los exoesqueletos actuales no existen.
- Presentación del artículo "Síntesis Dimensional de un Mecanismo de Eslabones Articulados para un Exoesqueleto de Rodilla" en el Congreso Mexicano de Robótica 2013 (COMROB 2013).

## 1.6. Desarrollo de la tesis

En esta tesis primero se desarrolla una introducción al estado del arte de los estudios biomecánicos de la rodilla y los exoesqueletos ya en existencia para dicha articulación; posteriormente se presenta un mecanismo que servirá como articulación en el diseño; después de eso se explica la obtención de su modelo cinemático, su modelo dinámico y la aplicación en simulación de un controlador basado en voltaje; al final están los anexos en donde el lector puede apoyarse para entender el contenido de la tesis.

# Capítulo 2

## Modelo cinemático

### 2.1. Introducción

La teoría de los mecanismos y las máquinas es una ciencia aplicada que sirve para comprender las relaciones entre la geometría y los movimientos de las piezas de una máquina o un mecanismo, y las fuerzas que generan tales movimientos. El concepto comprendido en el término "diseño" podría llamarse más correctamente "síntesis", o sea, el proceso de idear un patrón o método para lograr un propósito dado. En cambio el análisis es el conjunto más abundante de métodos científicos de los que dispone un diseñador. Es preciso tener siempre en mente que aunque la mayor parte de los esfuerzos realizados se dediquen al análisis, la meta es la síntesis, es decir, el diseño de una máquina o sistema.

### 2.2. Descripción del mecanismo

Un mecanismo se define como una "combinación de cuerpos rígidos conectados por medio de articulaciones móviles para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo, y cuyo propósito es transformar el movimiento". Aquí se usará la palabra "eslabón" para designar una pieza de una máquina o un componente de un mecanismo completamente rígido.

Los eslabones de un mecanismo se deben conectar entre sí de una manera tal que transmitan el movimiento del impulsor, o eslabón de entrada, al seguidor, o eslabón de salida.

Para que un mecanismo sea útil, los movimientos entre los eslabones no pueden ser completamente arbitrarios, estos también deben restringirse para producir los movimientos relativos adecuados que determine el diseñador para el trabajo particular que se deba desarrollar.

Cuando se plantea el problema de cinemática de diseño de un mecanismo, es necesario reconocer el tipo de movimiento relativo permitido en cada uno de los pares, y asignarle algún parámetro variable (o algunos parámetros variables) para medir o calcular el movimiento.

Los mecanismos se pueden clasificar de diversas maneras haciendo hincapié en sus similitudes y sus diferencias. El mecanismo YONG-1 es un mecanismo plano en el que todas las partículas describen curvas planas en el espacio y todas estas se encuentran en planos paralelos; en otras palabras, los lugares geométricos de todos los puntos son curvas planas paralelas a un solo plano en común. Esta característica

hace posible que el lugar geométrico de cualquier punto se represente con su verdadero tamaño y forma real en un solo dibujo o figura.

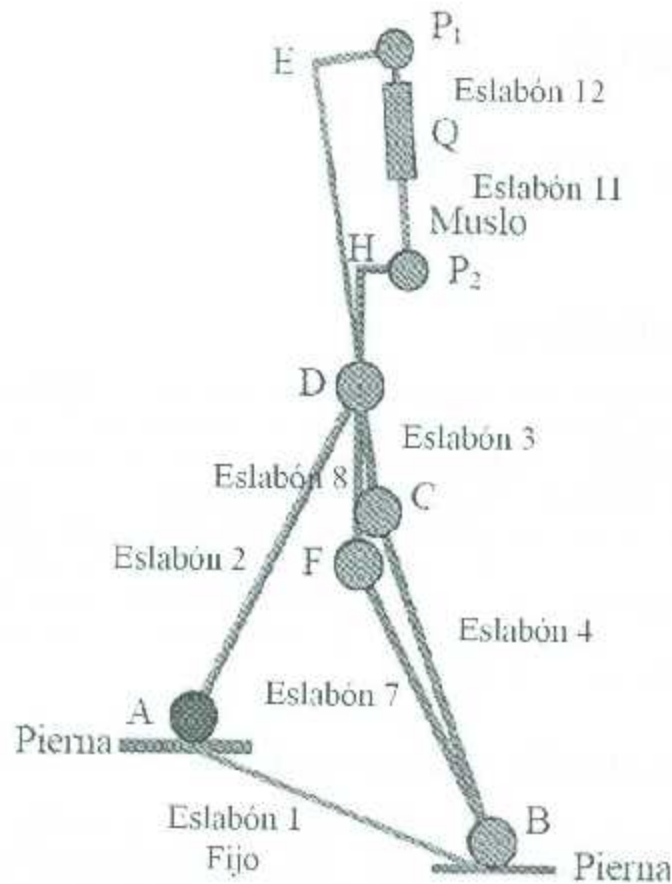


Figura 2.1: Esquema cinemático del mecanismo

La ley de Grashof afirma que, para un eslabonamiento plano de cuatro barras (ver Figura 2.2), la suma de las longitudes más corta y más larga de los eslabones no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los dos eslabones restantes, si se desea que exista una rotación relativa continua entre dos elementos.

De lo anterior se puede decir que el mecanismo YONG-1 no es Grashof, esta característica es un Poca-Yoke de seguridad para el usuario en dado caso que el control no logre su objetivo o el usuario tuviese un movimiento que conduzca la rodilla a una luxación por hiperextensión.

$$s + l \leq p + q$$

El esquema cinemático del mecanismo propuesto se muestra en la Figura 2.1; a este mecanismo le llamaremos YONG-1. Se trata de dos cadenas cinemáticas en paralelo que comparten el eslabón conductor. Los eslabones acopladores de ambas cadenas se interconectan mediante los eslabones 11 y 12, donde el eslabón 12 que a su vez corresponde a una articulación prismática. La primera cadena cinemática es



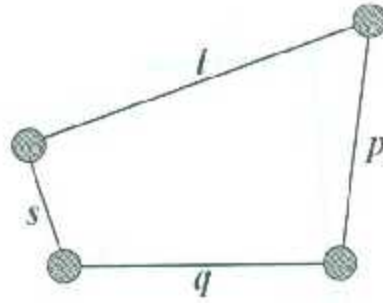


Figura 2.2: Esquema del mecanismo de 4 barras

la  $ABCDEP_1$ , y la segunda es la  $ABFDHP_2$ . El eslabón acoplador de la primera cadena es el  $CDEP_1$  y el de la segunda es el  $FDHP_2$ . El eslabón  $AB$  se une rígidamente a la pierna, mientras que los puntos  $P_1$  y  $P_2$  del mecanismo se conectan a una abrazadera que se sujeta al músculo. En las Figuras 2.3 y 2.4 se aprecian los diagramas vectoriales que se utilizan para el modelado matemático del mecanismo. En la Tabla 2.1 se indican las variables que se usarán en este capítulo.

Tabla 2.1: Variables del modelo cinemático.

Variable	Unidad	Descripción
$\vec{r}_i$	$m$	Vector asociado al eslabón $i$
$r_i$	$m$	Magnitud del vector asociado al eslabón $i$
$\hat{r}_i$	—	Vector unitario del eslabón $i$
$\theta_i$	$rad$	Ángulo respecto al eje $x$ del marco 0 del eslabón $i$
$\vec{v}_i$	$m/s$	Vector de velocidad del eslabón $i$
$v_i$	$m/s$	Velocidad lineal del eslabón $i$
$\omega_i$	$rad/s$	Velocidad angular del eslabón $i$
$\vec{a}_i$	$m/s^2$	Vector de aceleración del eslabón $i$
$a_i$	$m/s^2$	Aceleración lineal del eslabón $i$
$\alpha_i$	$rad/s^2$	Aceleración angular del eslabón $i$
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	—	Vector unitario de las componentes $x, y, z$

### 2.3. Análisis de posición del mecanismo YONG-1

El modelo cinemático directo de posición del mecanismo está resuelto en los siguientes párrafos. En el polígono de vectores de la Figura 2.4 se verifica la siguiente ecuación

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_4 = \vec{r}_2 + \vec{r}_3, \quad (2.1)$$

de esta se tiene que:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_4 - \vec{r}_3 \quad (2.2)$$

o bien puesto que

$$\vec{r}_5 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.3)$$

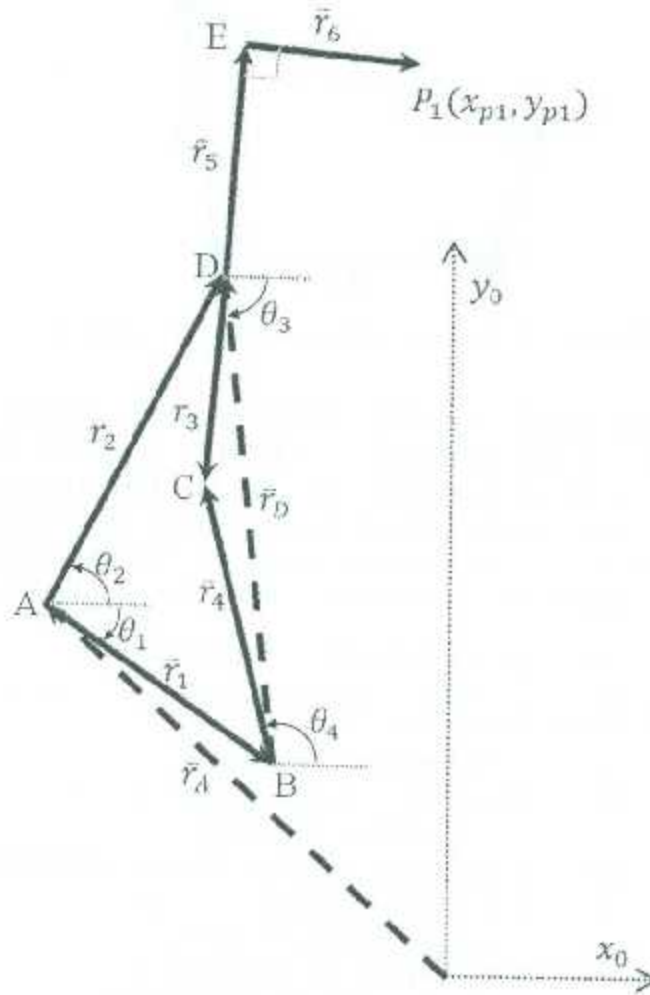


Figura 2.3: Cadena cinemática 1

entonces

$$\bar{r}_D = \bar{r}_4 - \bar{r}_3, \quad (2.4)$$

los vectores  $\bar{r}_3$  y  $\bar{r}_4$  en (2.4) son de magnitud conocida y dirección desconocida.

Por otra parte  $\bar{r}_D$  es de magnitud y dirección conocida, toda vez que  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$  son completamente conocidos; en efecto:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= (r_1 c_1) \hat{i} + (r_1 s_1) \hat{j} \\ \bar{r}_2 &= (r_2 c_2) \hat{i} + (r_2 s_2) \hat{j} \end{aligned} \quad (2.5)$$

en donde se utiliza la siguiente notación:

$$c_j \equiv \cos \theta_j, \quad s_j \equiv \sin \theta_j, \quad (j = 1, 2), \quad (2.6)$$

por lo tanto de la ecuaciones (2.3) se tiene que:

$$\begin{aligned} r_{Dx} &= r_2 c_2 - r_1 c_1 \\ r_{Dy} &= r_2 s_2 - r_1 s_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

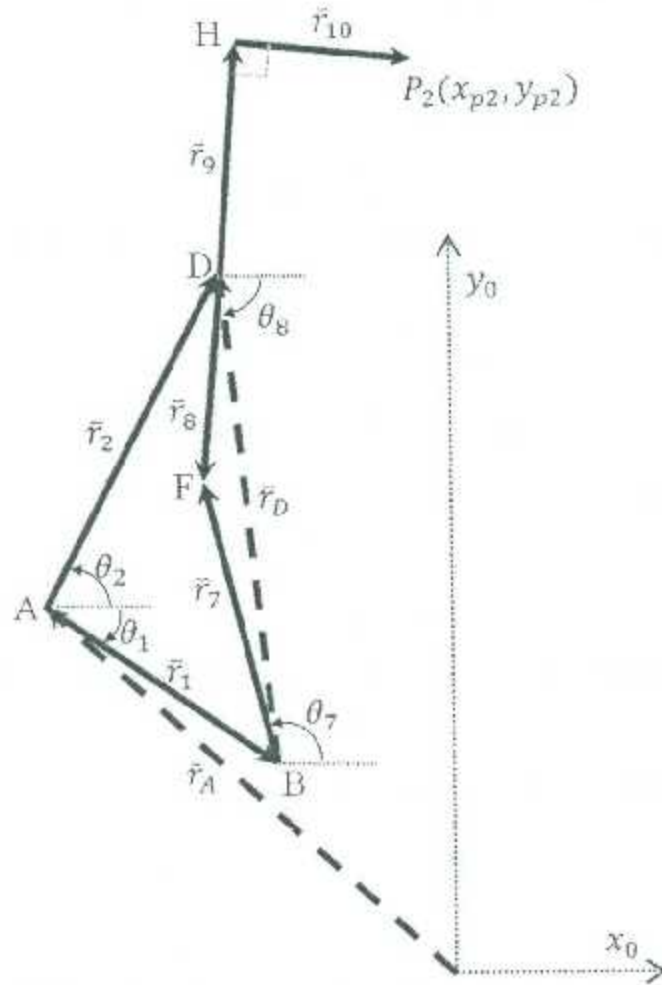


Figura 2.4: Cadena cinemática 2

en las ecuaciones (2.7) el ángulo  $\theta_2$  es conocido pues es el ángulo del eslabón director. Mientras que  $\theta_1$  se obtiene mediante:

$$\theta_1 = \text{atan2}((y_B - y_A), (x_B - x_A)) \quad (2.8)$$

entonces (2.4) se puede resolver aplicando el método de Chace para las ecuaciones vectoriales planas. De esta manera se obtiene:

$$\vec{r}_3 = (h_1 r_{Duy} + g_1 r_{Dux})\hat{i} + (g_1 r_{Duy} + h_1 r_{Dux})\hat{j} \quad (2.9)$$

en esta ecuación  $r_{Dux}$  y  $r_{Duy}$  son las componentes del vector unitario  $\vec{r}_D$  asociado a  $\vec{r}_D$ :

$$\begin{aligned} r_{Dux} &= \frac{r_{Dx}}{r_D} \\ r_{Duy} &= \frac{r_{Dy}}{r_D} \end{aligned} \quad (2.10)$$

los escalares  $g_1$  y  $h_1$  de la ecuación (2.9) están definidos por:

$$g_1 \equiv \frac{r_3^2 - r_4^2 + r_1^2}{2r_1} \quad (2.11)$$

$$h_1 \equiv \sqrt{r_3^2 - g_1^2} \quad (2.12)$$

Una vez calculado  $\bar{r}_3$  mediante la ecuación (2.9), se obtienen las componentes de su vector unitario asociado a  $\hat{r}_3$ , mediante:

$$r_{3xz} = \frac{(h_1 r_{Dxy} + g_1 r_{Dxz})}{r_3} \quad (2.13)$$

$$r_{3xy} = \frac{(g_1 r_{Dxy} - h_1 r_{Dxz})}{r_3} \quad (2.14)$$

además se observa que

$$\hat{r}_5 = -\hat{r}_3 \quad (2.15)$$

$$\hat{r}_6 = \hat{k} \times \hat{r}_5 \quad (2.16)$$

Con las direcciones  $\hat{r}_5$  y  $\hat{r}_6$  se obtiene el vector de posición de  $P_1$  mediante:

$$\bar{r}_{P1} = \bar{r}_A + \bar{r}_2 + r_5 \hat{r}_5 + r_6 \hat{r}_6 \quad (2.17)$$

por lo tanto, finalmente, las coordenadas de  $P_1$  son:

$$x_{P1} = x_A + r_2 c_2 - r_5 r_{3xz} - r_6 r_{3xy} \quad (2.18)$$

$$y_{P1} = y_A + r_2 s_2 - r_5 r_{3xy} + r_6 r_{3xz} \quad (2.19)$$

Para la determinación de las coordenadas de  $P_2$  se procede de manera similar considerando la segunda cadena cinemática del mecanismo. En el polígono de vectores de la Figura 2.4 se verifica la siguiente ecuación:

$$\bar{r}_7 - \bar{r}_8 = \bar{r}_D \quad (2.20)$$

En esta ecuación (2.20) los vectores  $\bar{r}_7$  y  $\bar{r}_8$  son de magnitud conocida y dirección desconocida, mientras que  $\bar{r}_D$  es de magnitud y dirección desconocida, mientras que  $\hat{r}_D$  es de magnitud y dirección conocida. De la solución de Chace para la ecuación (2.20) se obtiene:

$$\bar{r}_8 = (h_2 r_{Dxy} + g_2 r_{Dxz})\hat{i} + (g_2 r_{Dxy} + h_2 r_{Dxz})\hat{j} \quad (2.21)$$

donde los escalares  $g_2$  y  $h_2$  son:

$$g_2 \equiv \frac{r_8^2 - r_7^2 + r_D^2}{2r_D} \quad (2.22)$$

$$h_2 \equiv \sqrt{r_8^2 - g_2^2} \quad (2.23)$$

Una vez calculado  $\bar{r}_8$  mediante la ecuación (2.21) se obtienen las componentes de su vector unitario asociado  $\hat{r}_8$  mediante:

$$r_{8ux} = \frac{(h_2 r_{Duy} + g_2 r_{Dux})}{r_8} \quad (2.24)$$

$$r_{8uy} = \frac{(g_2 r_{Duy} - h_2 r_{Dux})}{r_8} \quad (2.25)$$

y se observa que:

$$\hat{r}_9 = -\hat{r}_8 \quad (2.26)$$

$$\hat{r}_{10} = \hat{k} \times \hat{r}_8 \quad (2.27)$$

a partir de  $\hat{r}_9$  y  $\hat{r}_{10}$  se obtiene el vector de posición de  $P_2$  mediante:

$$\vec{r}_{P_2} = \vec{r}_A + \vec{r}_2 + r_9 \hat{r}_9 + r_{10} \hat{r}_{10}, \quad (2.28)$$

así, se obtienen las siguientes ecuaciones para las coordenadas de  $P_2$ :

$$x_{P_2} = x_A + r_2 c_2 - r_9 \hat{r}_{8ux} - r_{10} \hat{r}_{8uy} \quad (2.29)$$

$$y_{P_2} = y_A + r_2 s_2 - r_9 \hat{r}_{8uy} - r_{10} \hat{r}_{8ux}. \quad (2.30)$$

## 2.4. Análisis de velocidad del mecanismo YONG-1

El modelo cinemático de velocidad está resuelto en los siguientes párrafos. Así como se cerró el polígono de vectores de las Figuras 2.3 y 2.4 se verifica la siguiente ecuación para la velocidad:

$$\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_4 = \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3. \quad (2.31)$$

Del Apéndice A se toman las ecuaciones de velocidad y se sustituye en la ecuación (2.31) para cada uno de los vectores que cierran la cadena; entonces se tiene:

$$\dot{\vec{r}}_1 = v_1 \hat{r}_1 + \omega_1 r_1 (\hat{k} \times \hat{r}_1) \quad (2.32)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = v_2 \hat{r}_2 + \omega_2 r_2 (\hat{k} \times \hat{r}_2) \quad (2.33)$$

$$\dot{\vec{r}}_3 = v_3 \hat{r}_3 + \omega_3 r_3 (\hat{k} \times \hat{r}_3) \quad (2.34)$$

$$\dot{\vec{r}}_4 = v_4 \hat{r}_4 + \omega_4 r_4 (\hat{k} \times \hat{r}_4), \quad (2.35)$$

de aquí que la ecuación (2.31) queda:

$$v_1 \hat{r}_1 + \omega_1 r_1 (\hat{k} \times \hat{r}_1) + v_4 \hat{r}_4 + \omega_4 r_4 (\hat{k} \times \hat{r}_4) = v_2 \hat{r}_2 + \omega_2 r_2 (\hat{k} \times \hat{r}_2) + v_3 \hat{r}_3 + \omega_3 r_3 (\hat{k} \times \hat{r}_3). \quad (2.36)$$

El eslabón fijo  $\hat{r}_1$  es considerado con  $v_1 = 0$  y  $\omega_1 = 0$ , los vectores  $\hat{r}_2$ ,  $\hat{r}_3$ ,  $\hat{r}_4$  son de magnitud constante por lo que  $v_i = 0$  ( $i = 2, 3, 4$ ), y la ecuación (2.36) queda:

$$\omega_4 r_4(\hat{k} \times \hat{r}_4) = \omega_2 r_2(\hat{k} \times \hat{r}_2) + \omega_3 r_3(\hat{k} \times \hat{r}_3), \quad (2.37)$$

siendo todos los valores conocidos, excepto  $\omega_3$  y  $\omega_4$ , y si se sabe que  $(\hat{k} \times \hat{r}_i) \cdot \hat{r}_i = 0$  realizando un producto punto la ecuación (2.37) con  $\hat{r}_3$  ó bien  $\hat{r}_4$  es posible resolver la incógnita de  $\omega_3$  ó  $\omega_4$  respectivamente. De esta manera se tiene:

$$\omega_3 = \frac{-\omega_2 r_2(\hat{k} \times \hat{r}_2) \cdot \hat{r}_4}{r_3(\hat{k} \times \hat{r}_3) \cdot \hat{r}_4} \quad (2.38)$$

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 r_2(\hat{k} \times \hat{r}_2) \cdot \hat{r}_3}{r_4(\hat{k} \times \hat{r}_4) \cdot \hat{r}_3} \quad (2.39)$$

Para la segunda cadena cinemática

$$\dot{\hat{r}}_1 + \dot{\hat{r}}_7 = \dot{\hat{r}}_2 + \dot{\hat{r}}_8, \quad (2.40)$$

de igual manera de la ecuación de velocidad de Chace del Apéndice A sustituyéndola en la ecuación (2.40) para cada uno de los vectores que cierran la cadena entonces se tiene:

$$\dot{\hat{r}}_8 = v_8 \hat{r}_8 + \omega_8 r_8(\hat{k} \times \hat{r}_8) \quad (2.41)$$

$$\dot{\hat{r}}_7 = v_7 \hat{r}_7 + \omega_7 r_7(\hat{k} \times \hat{r}_7), \quad (2.42)$$

de aquí que la ecuación (2.40) queda:

$$v_1 \hat{r}_1 + \omega_1 r_1(\hat{k} \times \hat{r}_1) + v_2 \hat{r}_2 + \omega_2 r_2(\hat{k} \times \hat{r}_2) = v_8 \hat{r}_8 + \omega_8 r_8(\hat{k} \times \hat{r}_8) + v_7 \hat{r}_7 + \omega_7 r_7(\hat{k} \times \hat{r}_7). \quad (2.43)$$

El eslabón fijo  $\hat{r}_1$  por ser considerado con  $v = 0$  y  $\omega_1 = 0$ , los eslabones  $\hat{r}_2$ ,  $\hat{r}_7$ ,  $\hat{r}_8$  son de magnitud constante por lo que  $v_i = 0$  ( $i = 2, 7, 8$ ) y la ecuación (2.43) queda:

$$\omega_7 r_7(\hat{k} \times \hat{r}_7) = \omega_2 r_2(\hat{k} \times \hat{r}_2) - \omega_8 r_8(\hat{k} \times \hat{r}_8), \quad (2.44)$$

siendo todos los valores conocidos, excepto  $\omega_7$  y  $\omega_8$ , y si se sabe que  $(\hat{k} \times \hat{r}_i) \cdot \hat{r}_i = 0$  realizando un producto punto la ecuación (2.44) con  $\hat{r}_8$  ó bien  $\hat{r}_7$  es posible resolver la incógnita de  $\omega_7$  ó  $\omega_8$  respectivamente. De esta manera se tiene:

$$\omega_7 = \frac{(\omega_2 r_2(\hat{k} \times \hat{r}_2)) \cdot \hat{r}_8}{(r_7(\hat{k} \times \hat{r}_7)) \cdot \hat{r}_8} \quad (2.45)$$

$$\omega_8 = \frac{(-\omega_2 r_2(\hat{k} \times \hat{r}_2)) \cdot \hat{r}_7}{(r_7(\hat{k} \times \hat{r}_7)) \cdot \hat{r}_8} \quad (2.46)$$

Ahora que las velocidades angulares de las cadenas cerradas correspondientes al mecanismo de cuatro barras son conocidas y ya que los vectores  $\hat{r}_2$  y  $\hat{r}_8$  son la extensión del eslabón  $\hat{r}_3$  tienen la misma velocidad y aceleración angular; de igual manera los vectores  $\hat{r}_7$  y  $\hat{r}_{10}$  son la extensión del eslabón  $\hat{r}_8$  y también tienen la misma velocidad y aceleración angular.

$$\omega_3 = \omega_5 \quad (2.47)$$

$$\omega_8 = \omega_9 \quad (2.48)$$

Para encontrar las velocidades de  $\hat{r}_{11}$ , es decir  $\omega_{11}$  y  $v_{11}$

$$\dot{r}_2 + \dot{r}_5 + \dot{r}_{10} = \dot{r}_3 + \dot{r}_5 + \dot{r}_6 + \dot{r}_{11} \quad (2.49)$$

se tiene que

$$\dot{r}_{11} = -\dot{r}_3 - \dot{r}_6 + \dot{r}_9 + \dot{r}_{10} \quad (2.50)$$

donde

$$\dot{r}_3 = \omega_5 r_3 (\hat{k} \times \hat{r}_3) \quad (2.51)$$

$$\dot{r}_6 = \omega_6 r_6 (\hat{k} \times \hat{r}_6) \quad (2.52)$$

$$\dot{r}_9 = \omega_9 r_9 (\hat{k} \times \hat{r}_9) \quad (2.53)$$

$$\dot{r}_{10} = \omega_{10} r_{10} (\hat{k} \times \hat{r}_{10}) \quad (2.54)$$

$$\dot{r}_{11} = v_{11} \hat{r}_{11} + \omega_{11} r_{11} (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \quad (2.55)$$

Sustituyendo desde la ecuación (2.51) hasta (2.55) en (2.50) se tiene que:

$$v_{11} \hat{r}_{11} + \omega_{11} r_{11} (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) = -\omega_5 r_3 (\hat{k} \times \hat{r}_3) - \omega_6 r_6 (\hat{k} \times \hat{r}_6) + \omega_9 r_9 (\hat{k} \times \hat{r}_9) + \omega_{10} r_{10} (\hat{k} \times \hat{r}_{10}). \quad (2.56)$$

Así para encontrar  $v_{11}$  se realiza un producto punto por  $(\hat{r}_{11})$  y para resolver  $\omega_{11}$  el producto punto es por  $(\hat{k} \times \hat{r}_{11})$ . De esta manera obtenemos

$$v_{11} = \frac{v_{11N}}{v_{11D}} \quad (2.57)$$

$$v_{11N} = -\omega_5 r_3 (\hat{k} \times \hat{r}_3) \cdot \hat{r}_{11} - \omega_6 r_6 (\hat{k} \times \hat{r}_6) \cdot \hat{r}_{11} + \omega_9 r_9 (\hat{k} \times \hat{r}_9) \cdot \hat{r}_{11} + \omega_{10} r_{10} (\hat{k} \times \hat{r}_{10}) \cdot \hat{r}_{11}$$

$$v_{11D} = \hat{r}_{11} \cdot \hat{r}_{11}$$

$$\omega_{11} = \frac{\omega_{11N}}{\omega_{11D}} \quad (2.58)$$

$$\omega_{11N} = -\omega_5 r_3 (\hat{k} \times \hat{r}_3) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) - \omega_6 r_6 (\hat{k} \times \hat{r}_6) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) + \omega_9 r_9 (\hat{k} \times \hat{r}_9) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) + \omega_{10} r_{10} (\hat{k} \times \hat{r}_{10}) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11})$$

$$\omega_{11D} = r_{11} (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \cdot r_{11} (\hat{k} \times \hat{r}_{11}).$$

## 2.5. Análisis de aceleración

El modelo cinemático de aceleración está resuelto en los siguientes párrafos. Así como se cerró el polígono de vectores de las Figuras 2.3 y 2.4 se verifican las siguientes ecuaciones para la solución de la aceleración.

$$\ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_4 = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_3. \quad (2.59)$$

De la ecuación (A.4) del Apéndice A sustituyendo la ecuación (2.59) para cada uno de los vectores que cierran la cadena entonces se tiene:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = a_1 \dot{\vec{r}}_1 + 2\omega_1 v_1 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_1) - \omega_1^2 r_1 \dot{\vec{r}}_1 + \alpha_1 r_1 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_1) \quad (2.60)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = a_2 \dot{\vec{r}}_2 + 2\omega_2 v_2 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_2) - \omega_2^2 r_2 \dot{\vec{r}}_2 + \alpha_2 r_2 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_2) \quad (2.61)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = a_3 \dot{\vec{r}}_3 + 2\omega_3 v_3 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_3) - \omega_3^2 r_3 \dot{\vec{r}}_3 + \alpha_3 r_3 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_3) \quad (2.62)$$

$$\ddot{\vec{r}}_4 = a_4 \dot{\vec{r}}_4 + 2\omega_4 v_4 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_4) - \omega_4^2 r_4 \dot{\vec{r}}_4 + \alpha_4 r_4 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_4). \quad (2.63)$$

El eslabón fijo para la solución del problema se considera la aceleración instantánea igual a 0, además que no tiene desplazamiento lineal por lo que las aceleraciones y velocidades lineales se hacen 0, de lo anterior que la ecuación (2.59) queda:

$$\alpha_4 r_4 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_4) - \omega_4^2 r_4 \dot{\vec{r}}_4 = +\alpha_2 r_2 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_2) - \omega_2^2 r_2 \dot{\vec{r}}_2 + \alpha_3 r_3 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_3) - \omega_3^2 r_3 \dot{\vec{r}}_3. \quad (2.64)$$

donde las incógnitas son  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$  realizando un producto punto la ecuación (2.64) con  $\dot{\vec{r}}_3$  ó bien  $\dot{\vec{r}}_4$  es posible resolver la incógnita de  $\alpha_4$  ó  $\alpha_3$  respectivamente. De esta manera se tiene:

$$\alpha_3 = \frac{+\alpha_2 r_2 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_2) \cdot \dot{\vec{r}}_3 - \omega_2^2 r_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_3 - \omega_3^2 r_3 \dot{\vec{r}}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3 + \omega_4^2 r_4 \dot{\vec{r}}_4 \cdot \dot{\vec{r}}_3}{-r_3 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_3) \cdot \dot{\vec{r}}_3} \quad (2.65)$$

$$\alpha_4 = \frac{+\alpha_2 r_2 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_2) \cdot \dot{\vec{r}}_4 - \omega_2^2 r_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_4 - \omega_3^2 r_3 \dot{\vec{r}}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_4 + \omega_4^2 r_4 \dot{\vec{r}}_4 \cdot \dot{\vec{r}}_4}{r_4 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_4) \cdot \dot{\vec{r}}_4} \quad (2.66)$$

Para la segunda cadena cinemática cerrada la ecuación es:

$$\ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_8 = \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_7. \quad (2.67)$$

De la ecuación (A.4), sustituyendo la ecuación (2.67) para cada uno de los vectores que cierran la cadena entonces se tiene:

$$\ddot{\vec{r}}_7 = a_7 \dot{\vec{r}}_7 + 2\omega_7 v_7 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_7) - \omega_7^2 r_7 \dot{\vec{r}}_7 + \alpha_7 r_7 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_7) \quad (2.68)$$

$$\ddot{\vec{r}}_8 = a_8 \dot{\vec{r}}_8 + 2\omega_8 v_8 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_8) - \omega_8^2 r_8 \dot{\vec{r}}_8 + \alpha_8 r_8 (\hat{k} \times \dot{\vec{r}}_8). \quad (2.69)$$



Ya que el eslabón 1 se considera fijo para la solución del problema su aceleración instantánea es 0, además que los vectores asociados estos eslabones son de magnitud constante por lo que las aceleraciones y velocidades lineales se hacen 0, de lo anterior que la ecuación (2.67) queda:

$$\alpha_7 r_7 (\hat{k} \times \hat{r}_7) - \omega_7^2 r_7 \hat{r}_7 = +\alpha_2 r_2 (\hat{k} \times \hat{r}_2) - \omega_2^2 r_2 \hat{r}_2 - \alpha_8 r_8 (\hat{k} \times \hat{r}_8) - \omega_8^2 r_8 \hat{r}_8. \quad (2.70)$$

Donde las incógnitas son  $\alpha_7$  y  $\alpha_8$  realizando un producto punto la ecuación (2.70) con  $\hat{r}_8$  ó bien  $\hat{r}_7$ , es posible resolver la incógnita de  $\alpha_7$  ó  $\alpha_8$  respectivamente. De esta manera se tiene:

$$\alpha_7 = \frac{+\alpha_2 r_2 (\hat{k} \times \hat{r}_2) \cdot \hat{r}_8 - \omega_2^2 r_2 \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_8 - \omega_8^2 r_8 \hat{r}_8 \cdot \hat{r}_8 + \omega_7^2 r_7 \hat{r}_7 \cdot \hat{r}_8}{r_7 (\hat{k} \times \hat{r}_7) \cdot \hat{r}_8} \quad (2.71)$$

$$\alpha_8 = \frac{-\alpha_2 r_2 (\hat{k} \times \hat{r}_2) \cdot \hat{r}_7 + \omega_2^2 r_2 \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_7 + \omega_8^2 r_8 \hat{r}_8 \cdot \hat{r}_7 - \omega_7^2 r_7 \hat{r}_7 \cdot \hat{r}_7}{r_8 (\hat{k} \times \hat{r}_8) \cdot \hat{r}_7} \quad (2.72)$$

Ahora que las aceleraciones angulares de las cadenas cerradas análogas al mecanismo de cuatro barras ya fueron resueltas y sabiendo que  $\hat{r}_5$  y  $\hat{r}_6$  son la extensión del eslabón  $\hat{r}_3$  tienen la misma aceleración angular; de igual manera el vector  $\hat{r}_9$  y  $\hat{r}_{10}$  son la extensión del eslabón  $\hat{r}_8$  también tienen la misma velocidad y aceleración angular.

$$\alpha_3 = \alpha_5 \quad (2.73)$$

$$\alpha_8 = \alpha_9. \quad (2.74)$$

Para encontrar las aceleraciones de  $\hat{r}_{11}$ , es decir  $\alpha_{11}$  y  $a_{11}$

$$\ddot{\hat{r}}_2 + \ddot{\hat{r}}_3 + \ddot{\hat{r}}_{10} = \ddot{\hat{r}}_2 + \ddot{\hat{r}}_5 + \ddot{\hat{r}}_6 + \ddot{\hat{r}}_{11} \quad (2.75)$$

$$\ddot{\hat{r}}_{11} = -\ddot{\hat{r}}_5 - \ddot{\hat{r}}_6 + \ddot{\hat{r}}_9 + \ddot{\hat{r}}_{10}, \quad (2.76)$$

donde

$$\ddot{\hat{r}}_5 = +\alpha_5 r_5 (\hat{k} \times \hat{r}_5) - \omega_5^2 r_5 \hat{r}_5 \quad (2.77)$$

$$\ddot{\hat{r}}_6 = +\alpha_6 r_6 (\hat{k} \times \hat{r}_6) - \omega_6^2 r_6 \hat{r}_6 \quad (2.78)$$

$$\ddot{\hat{r}}_9 = +\alpha_9 r_9 (\hat{k} \times \hat{r}_9) - \omega_9^2 r_9 \hat{r}_9 \quad (2.79)$$

$$\ddot{\hat{r}}_{10} = +\alpha_{10} r_{10} (\hat{k} \times \hat{r}_{10}) - \omega_{10}^2 r_{10} \hat{r}_{10} \quad (2.80)$$

$$\ddot{\hat{r}}_{11} = a_{11} \hat{r}_{11} + 2\omega v_{11} (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) - \omega^2 r_{11} \hat{r}_{11} + \alpha r_{11} (\hat{k} \times \hat{r}_{11}). \quad (2.81)$$

Sustituyendo desde la ecuación (2.77) hasta (2.81) en (2.76) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 a_{11}\hat{r}_{11} + \alpha_{11}r_{11}(\hat{k} \times \hat{r}_{11}) = & +\alpha_9r_9(\hat{k} \times \hat{r}_9) - \omega_9^2r_9\hat{r}_9 + \alpha_{10}r_{10}(\hat{k} \times \hat{r}_{10}) \\
 & - \omega_{10}^2r_{10}\hat{r}_{10} - \alpha_5r_5(\hat{k} \times \hat{r}_5) + \omega_5^2r_5\hat{r}_5 \\
 & - \alpha_6r_6(\hat{k} \times \hat{r}_6) + \omega_6^2r_6\hat{r}_6.
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

así para encontrar  $a_{11}$  se realiza un producto punto por  $(\hat{k} \times \hat{r}_{11})$  y para resolver  $\alpha_{11}$  el producto punto es por  $(\hat{r}_{11})$ . De esta manera obtenemos:

$$a_{11} = \frac{a_{11N}}{a_{11D}} \tag{2.83}$$

donde  $a_{11N}$

$$\begin{aligned}
 a_{11N} = & \alpha_{10}r_{10}(\hat{k} \times \hat{r}_{10}) \cdot (\hat{r}_{11}) - \omega_9^2r_9\hat{r}_9 \cdot (\hat{r}_{11}) + \alpha_9r_9(\hat{k} \times \hat{r}_9) \cdot (\hat{r}_{11}) \\
 & - \omega_9^2r_9\hat{r}_9 \cdot (\hat{r}_{11}) - \alpha_5r_5(\hat{k} \times \hat{r}_5) \cdot (\hat{r}_{11}) + \omega_5^2r_5\hat{r}_5 \cdot (\hat{r}_{11}) \\
 & - \alpha_6r_6(\hat{k} \times \hat{r}_6) \cdot (\hat{r}_{11}) + \omega_6^2r_6\hat{r}_6 \cdot (\hat{r}_{11}) + \omega_{11}^2r_{11}(\hat{r}_{11}) \cdot (\hat{r}_{11})
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

$$a_{11D} = \hat{r}_{11} \cdot \hat{r}_{11} \tag{2.85}$$

$$\alpha_{11} = \frac{a_{11N}}{a_{11D}} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11N} = & +\alpha_{10}r_{10}(\hat{k} \times \hat{r}_{10}) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) - \omega_9^2r_9\hat{r}_9 \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \\
 & + \alpha_9r_9(\hat{k} \times \hat{r}_9) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) - \omega_9^2r_9\hat{r}_9 \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \\
 & - \alpha_5r_5(\hat{k} \times \hat{r}_5) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) - \omega_5^2r_5\hat{r}_5 \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \\
 & - \alpha_6r_6(\hat{k} \times \hat{r}_6) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) + \omega_6^2r_6\hat{r}_6 \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \\
 & - 2\omega_{11}v(\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11})
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$a_{11D} = r_{11}(\hat{k} \times \hat{r}_{11}) \cdot (\hat{k} \times \hat{r}_{11}). \tag{2.88}$$

# Capítulo 3

## Síntesis del mecanismo

### 3.1. Introducción

En el capítulo 2 se describió el mecanismo y se desarrollaran los modelos cinemáticos de posición, velocidad y aceleración, este mecanismo deberá operar en el plano sagital, de tal manera que el movimiento relativo entre el eslabón unido al muslo y el eslabón unido a la pierna del usuario reproduzca el movimiento natural de la extremidad en dicho plano con un error suficiente pequeño como para no lastimar al usuario. Para ello en punto  $P_1$  del mecanismo deberá seguir la ruta de un punto  $P_1^*$ , del muslo del usuario del exoesqueleto y simultáneamente, el punto  $P_2$  del mecanismo describirá la ruta del punto  $P_2^*$  del muslo.

La articulación actuada de las dos cadenas del mecanismo es la A. Ambas cadenas cinemáticas deberán dimensionarse de tal manera que se verifiquen las rutas deseadas de  $P_1$  y de  $P_2$ . Éste como se observa, es un problema de síntesis dimensional del mecanismo.

Las rutas deseadas a considerar de los puntos  $P_1^*$  y  $P_2^*$  se determinaron experimentalmente a partir de los movimientos típicos de flexión (Apéndice B) de las extremidades inferiores del usuario del exoesqueleto. Las coordenadas de ambos puntos se obtuvieron para cinco posturas de la extremidad en la flexión.

Tabla 3 1: Coordenadas en el marco 0 de los puntos  $P_1^*$  y  $P_2^*$  del muslo con respecto la pierna,  $i = 1$  hasta 5

Postura $i$	$\theta_2$ [°]	$x_{P1i}$ [cm]	$y_{P1i}$ [cm]	$x_{P2i}$ [cm]	$y_{P2i}$ [cm]
1	20	0.0	17.5	0.0	14.5
2	18.5	4.0	14.8	2.7	12.1
3	14.5	6.8	11.5	4.0	10.4
4	13.1	7.5	10.0	4.6	9.2
5	11.4	8.1	7.9	5.1	7.9

### 3.2. Formulación de una solución al problema de síntesis dimensional

El término síntesis cinemática se refiere al diseño o creación de un mecanismo para obtener un conjunto deseado de características de movimiento. El problema de

síntesis que aborda este trabajo de tesis es de tipo "guía del cuerpo"; en este caso el interés es mover un objeto de una posición a otra con la combinación de traslación y rotación [12].

En el problema de síntesis dimensional del mecanismo se deben determinar las posiciones de las articulaciones  $A$  y  $B$ , del mecanismo en el marco  $x_0 - y_0$  cuya ubicación se describe en el Apéndice B. Así como las longitudes de los eslabones de las dos cadenas cinemáticas, de tal manera que los errores de posición de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  del mecanismo, con respecto a los puntos  $P_1^*$  y  $P_2^*$  del muslo, respectivamente, sean tan pequeños como sea posible para las 5 posiciones dadas en la Tabla 3.1. Las longitudes de los eslabones corresponden a las normas de los vectores asociados a los eslabones, como se observa en los esquemas de las Figuras 2.3 y 2.4. En resumen las incógnitas del problema de síntesis son:  $x_A, y_A, y_B, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9$  y  $r_{10}$ ; donde  $r_k = \| r_k \|$  para  $k = 2, 3, 4, 5, 7, 8$  y  $9$  (el símbolo  $\| \cdot \|$  denota la norma euclidiana del vector argumento), para  $r_6$  y  $r_{10}$  la norma no aplica pues el símbolo positivo o negativo denota la dirección del vector. Las coordenadas  $x_A, y_A$  son las del punto  $A$  en el marco  $x_0 - y_0$ , mientras que  $x_B, y_B$  son las de  $B$ .

Todo el mecanismo se mueve en función del eslabón director y el ángulo de entrada se debe proponer por el usuario. Así que para cada  $P_1^*$  también debe haber un  $\theta_2$ , que corresponda para esa posición. Así como no puede haber un  $P_1^*$  igual a otro tampoco lo puede ser un ángulo  $\theta_{2i}$ .

Esta secuencia de puntos descados deberá ser el resultado del movimiento del mecanismo ya optimizado provocado por la rotación angular del eslabón director.

A continuación se desarrolla la función objetivo a minimizar:

$$f = f_{P1} + f_{P2}, \quad (3.1)$$

donde

$$f_{Pj} = e_{mj} + e_{\sigma j}, \quad (3.2)$$

en la función (3.2) se tiene que  $e_{mj}$  ( $j = 1, 2$ ) es el promedio de los errores de posición de los puntos  $P_j$ , correspondientes a  $n$  posturas consideradas ( $n = 5$ ) del mecanismo, con respecto a los puntos  $P_j^*$  especificados:

$$e_{mj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{ji}. \quad (3.3)$$

Mientras que  $e_{\sigma j}$  es la desviación estándar de los errores de posición de los puntos  $P_j$ :

$$e_{\sigma j} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_{ji} - e_{mj})^2} \quad (3.4)$$

el error de posición  $e_{ji}$  del punto  $P_j$  ( $j = 1, 2$ ) del mecanismo, correspondiente a la postura  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), es la distancia de éste al punto  $P_j^*$  del muslo; es decir:

$$e_{ji} = \sqrt{(x_{Pji}^* - x_{Pji})^2 + (y_{Pji}^* - y_{Pji})^2}. \quad (3.5)$$

Las variables independientes implícitas de  $f$  son las incógnitas del problema de síntesis. La minimización de esta función se realiza mediante un proceso iterativo aplicando la función *fminsearch* del paquete Matlab en el cual, en cada iteración, se mejoran los valores de las variables independientes (a partir de un conjunto inicial de valores arbitrarios) de tal manera que la función objetivo se reduce hasta que se cumple el criterio de convergencia.

Para concluir el análisis de síntesis del mecanismo es necesario tener el modelo cinemático de posición que se describe en la siguiente sección.

### 3.3. Análisis de posición para la síntesis

El análisis de posición ya se hizo en el capítulo 2, se enlistará un resumen de ecuaciones con nuevos índices necesarios para el proceso de síntesis. Por los ángulos de entrada propuestos se añadirá un índice que indica la postura  $i$  a la que pertenece numéricamente esa posición. Teniendo en cuenta que en una iteración del proceso de optimización de la función objetivo se tiene un conjunto de variables independientes de prueba conocidas  $(x_A, y_A, x_B, y_B, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9$  y  $r_{10})$ .

Para los procesos iterativos de optimización el ángulo  $\theta_{2i}$  se especifica para cada juego de valores de  $x_{Pj}^*$  y  $y_{Pj}^*$  ( $j = 1, 2$ ) en la Tabla 3.1.

Las ecuaciones que resuelven las coordenadas de posición de  $P_1$  y  $P_2$ , que son usadas en la función a minimizar son:

$$x_{P1i} = x_A + r_2 c_{2i} - r_5 r_{5axi} - r_6 r_{6ayi} \quad (3.6)$$

$$y_{P1i} = y_A + r_2 s_{2i} - r_5 r_{5ayi} + r_6 r_{6axi} \quad (3.7)$$

$$x_{P2i} = x_A + r_2 c_{2i} - r_9 r_{9axi} - r_{10} r_{10yi} \quad (3.8)$$

$$y_{P2i} = y_A + r_2 s_{2i} - r_9 r_{9ayi} + r_{10} r_{10axi} \quad (3.9)$$

estas ecuaciones son las equivalentes a (3.6), (3.7), (3.8) y (3.9) pero ahora con el índice  $i$  que corresponde a la solución cinemática de posición para cada uno de los  $\theta_{2i}$  del eslabón director.

### 3.4. Resultados de la síntesis del mecanismo

Las coordenadas de  $P_1$  y  $P_2$ , obtenidas para cada postura del mecanismo mediante las ecuaciones (3.6), (3.7), (3.8) y (3.9), en una iteración del proceso de optimización, corresponden a un conjunto de valores de prueba de las variables independientes. Los errores de posición de  $P_1$  y  $P_2$  que resultan con respecto a las posiciones deseadas se calculan mediante la ecuación (3.5) que, a su vez a través de las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4), permiten evaluar la función objetivo (3.1). En cada iteración, la función *fminsearch* mejora los valores de las variables independientes.

En la Tabla 3.2 se dan las magnitudes óptimas de las variables independientes, así como el valor correspondiente de la función objetivo. En la Figura 3.1 se muestra un modelo CAD del mecanismo con las dimensiones óptimas de los eslabones.

Tabla 3.2: Variables óptimas de las variables de diseño.

Variable [cm]	V. Inicial	V. Final
$x_A$	-11.869	-8.100
$y_A$	3.451	4.800
$x_B$	-8.728	-7.270
$y_B$	.072	0.270
$r_2$	9.124	5.410
$r_3$	2.4	1.320
$r_4$	6.144	6.350
$r_5$	10.525	9.260
$r_6$	-2.237	-1.680
$r_7$	11.936	11.430
$r_8$	1.596	0.940
$r_9$	6.948	6.710
$r_{10}$	-4.539	-3.410
$f$	15	0.071

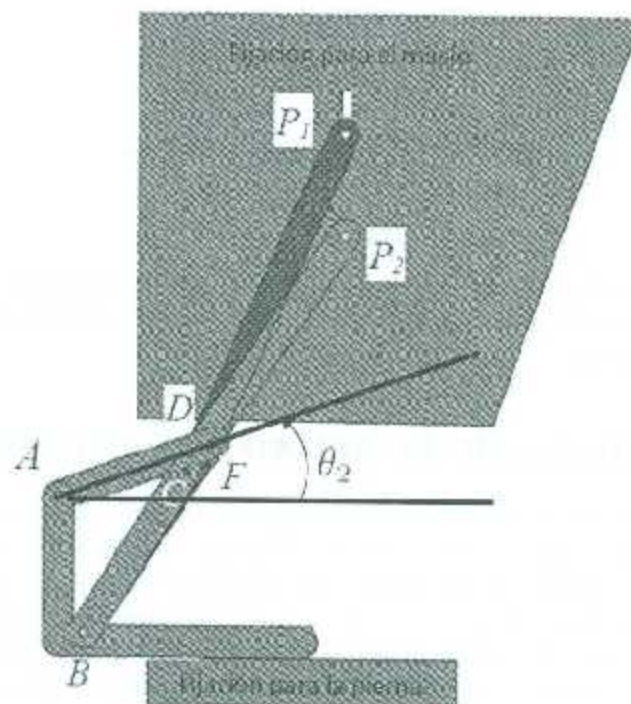


Figura 3.1: Modelo CAD del mecanismo

# Capítulo 4

## Simulación cinemática

### 4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones realizadas en Matlab para validar el comportamiento del modelo cinemático del mecanismo. La simulación comprende el modelo cinemático de posición, velocidad y aceleración.

La simulación se pone a prueba para los movimientos que realiza el mecanismo en las tareas de flexión y extensión.

La trayectoria deseada corresponde a la trayectoria que debe tener el eslabón director para que cuando ejecute su tarea como actuador del mecanismo pueda realizar las tareas de flexión y extensión. Las trayectorias de velocidad y aceleración deben empezar y acabar en 0, esto indica que los eslabones comenzarán en reposo y terminarán de la misma forma. Las ecuaciones que describen esta trayectoria son:

- Para flexión

$$\theta_{dflex}(t) = \theta_{iflex} - \theta_{fflex} \left[ \frac{t}{t_f} - \frac{1}{2\pi} \text{sen} \left( 2\pi \frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (4.1)$$

$$\dot{\theta}_{dflex}(t) = \frac{\theta_{fflex}}{t_f} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$\ddot{\theta}_{dflex}(t) = 2\pi \frac{\theta_{fflex}}{t_f^2} \text{sen} \left( 2\pi \frac{t}{t_f} \right). \quad (4.3)$$

- Para extensión

$$\theta_{dext}(t) = \theta_{oext} + \theta_{fext} \left[ \frac{t}{t_f} - \frac{1}{2\pi} \text{sen} \left( 2\pi \frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (4.4)$$

$$\dot{\theta}_{dext}(t) = \frac{\theta_{fext}}{t_f} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (4.5)$$

$$\ddot{q}_{dext}(t) = 2\pi \frac{\theta_{fext}}{t_f^2} \sin\left(2\pi \frac{t}{t_f}\right), \quad (4.6)$$

donde  $t_f$  es el tiempo total en el que se realizarán todas las iteraciones,  $t = \frac{t}{np}$  es el tiempo de muestreo,  $n$  es el número de iteración en el que se encuentra la simulación y  $np$  es el total de iteraciones a realizar.

Los parámetros necesarios para ejecutar la simulación se enlistan en la Tabla 4.1, donde desde  $r_2$  hasta  $r_{10}$  son las longitudes entre las articulaciones que tienen los eslabones del mecanismo.

Tabla 4.1: Valores de los parámetros para la simulación cinemática.

Variable [cm]	Valor
$x_A$	-8.100
$y_A$	4.800
$x_B$	-7.276
$y_B$	0.270
$r_2$	5.410
$r_3$	1.320
$r_4$	6.350
$r_5$	9.260
$r_6$	-1.680
$r_7$	11.430
$r_8$	0.940
$r_9$	6.710
$r_{10}$	-3.410
$t_f$	10
$np$	1000
$\theta_{i flex}$	20°
$\theta_{f flex}$	-8.8°
$\theta_{i ext}$	11.2°
$\theta_{f ext}$	8.8°

## 4.2. Simulación de flexión

Los códigos para realizar la simulación en Matlab se incluye en el Apéndice E.

Con los parámetros ya descritos anteriormente los resultados de las simulaciones para cada uno de los eslabones descritos en la cadena cinemática de las Figuras 2.3 y 2.4 son:

- La trayectoria que tienen  $\theta_2$ ,  $\omega_2$  y  $\alpha_2$  son descritas por las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3, respectivamente.



---

- La trayectoria que tienen  $\theta_3$ ,  $\omega_3$  y  $\alpha_3$  son descritas por las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6, respectivamente.

- La trayectoria que tienen  $\theta_8$ ,  $\omega_8$  y  $\alpha_8$  son descritas por las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9, respectivamente.

- La trayectoria que tienen  $\theta_4$ ,  $\omega_4$  y  $\alpha_4$  son descritas por las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12, respectivamente.

- La trayectoria que tienen  $\theta_7$ ,  $\omega_7$  y  $\alpha_7$  son descritas por las Figuras 4.13, 4.14 y 4.15, respectivamente.

### 4.3. Simulación de la extensión

El código de la simulación en Matlab está desarrollado en el Apéndice E.

Con los parámetros ya descritos anteriormente los resultados de las simulaciones para cada uno de los eslabones descritos en la cadena cinemática en las Figuras 2.3 y 2.4 son:

- La trayectoria que tienen  $\theta_2$ ,  $\omega_2$  y  $\alpha_2$  son descritas por las Figuras 4.16, 4.17 y 4.18, respectivamente.

- La trayectoria que tienen  $\theta_3$ ,  $\omega_3$  y  $\alpha_3$  son descritas por las Figuras 4.19, 4.20 y 4.21, respectivamente.

- La trayectoria que tienen  $\theta_8$ ,  $\omega_8$  y  $\alpha_8$  son descritas por las Figuras 4.22, 4.23 y 4.24, respectivamente.

- La trayectoria que tienen  $\theta_4$ ,  $\omega_4$  y  $\alpha_4$  son descritas por las Figuras 4.25, 4.26 y 4.27, respectivamente.

- La trayectoria que tienen  $\theta_7$ ,  $\omega_7$  y  $\alpha_7$  son descritas por las Figuras 4.28, 4.29 y 4.30, respectivamente.

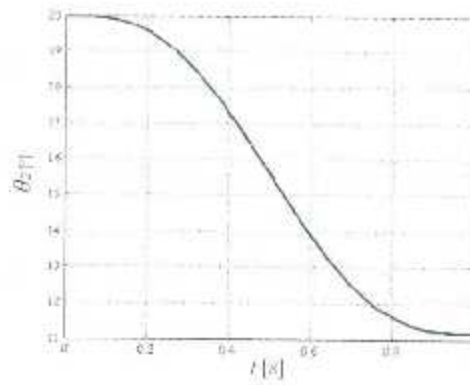


Figura 4.1:  $\theta_2$  del eslabón director en flexión

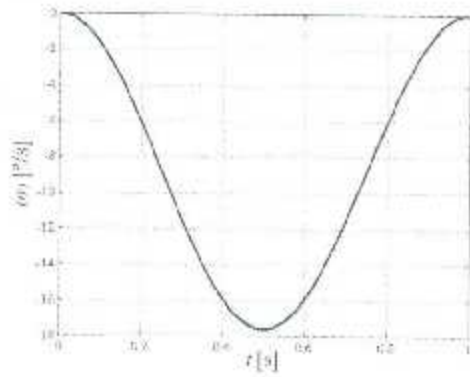


Figura 4.2:  $\omega_2$  del eslabón director en flexión

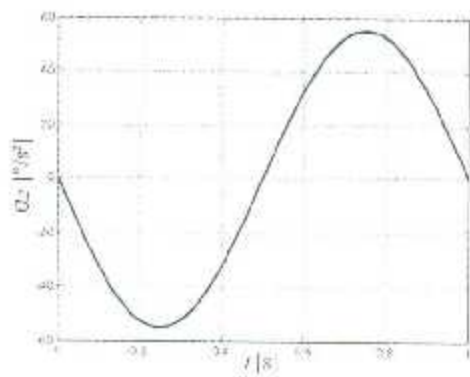


Figura 4.3:  $\alpha_2$  del eslabón director en flexión

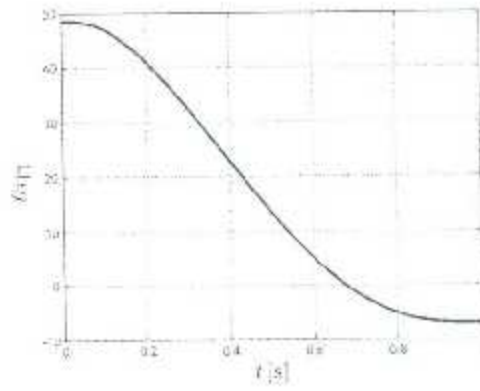


Figura 4.4:  $\theta_3$  del eslabón acoplador 3 en flexión

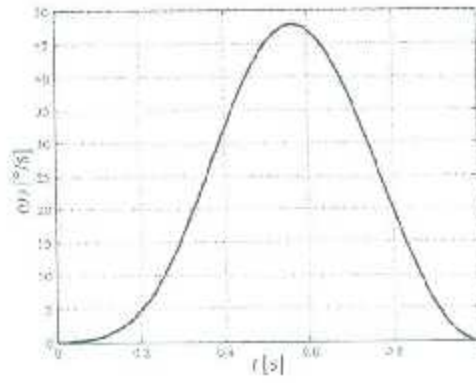


Figura 4.5:  $\omega_3$  del eslabón acoplador 3 en flexión

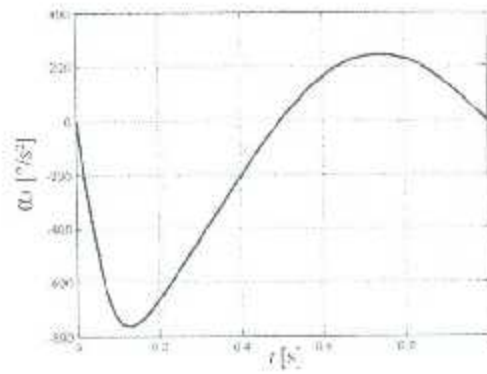


Figura 4.6:  $\alpha_3$  del eslabón acoplador 3 en flexión

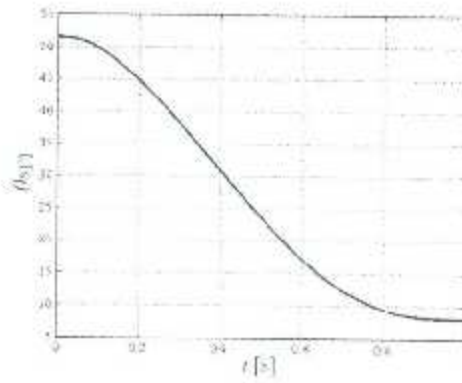


Figura 4.7:  $\theta_8$  del eslabón acoplador 8 en flexión

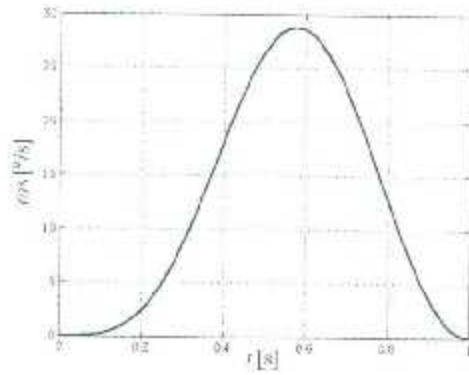


Figura 4.8:  $\omega_8$  del eslabón acoplador 8 en flexión

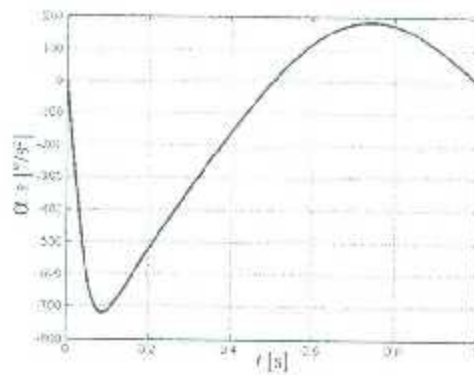


Figura 4.9:  $\alpha_8$  del eslabón acoplador 8 en flexión

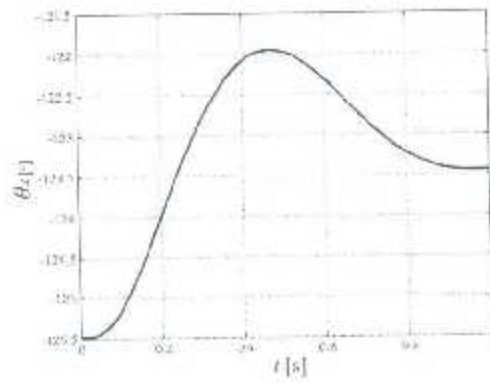


Figura 4.10:  $\theta_4$  del eslabón retorno 4 en flexión

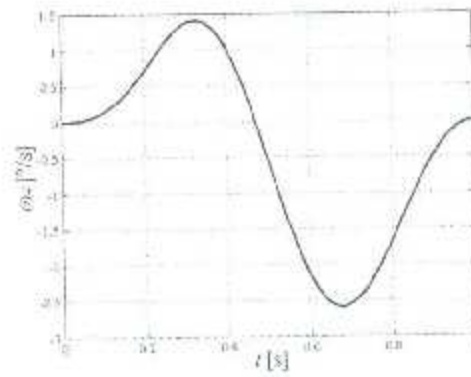


Figura 4.11:  $\omega_4$  del eslabón retorno 4 en flexión

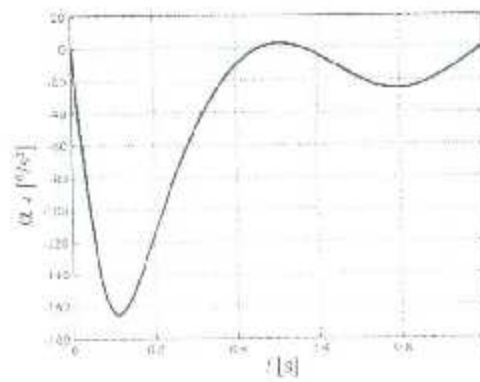


Figura 4.12:  $\alpha_4$  del eslabón retorno 4 en flexión

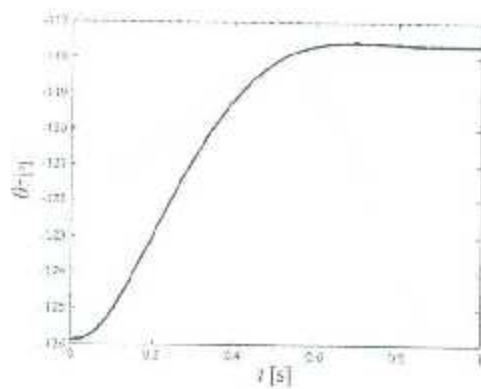


Figura 4.13:  $\theta_7$  del eslabón retorno 7 en flexión

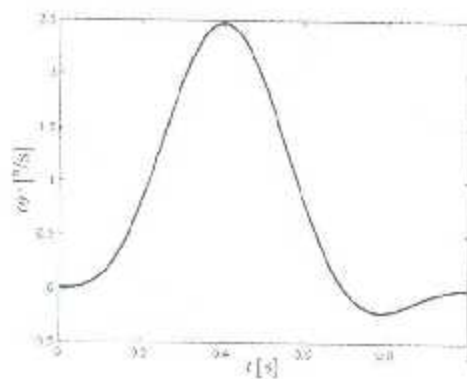


Figura 4.14:  $\omega_7$  del eslabón retorno 7 en flexión

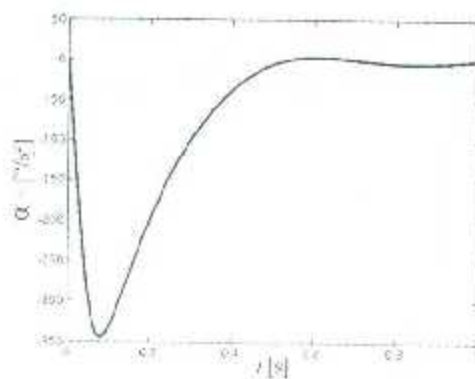


Figura 4.15:  $\alpha_7$  del eslabón retorno 7 en flexión

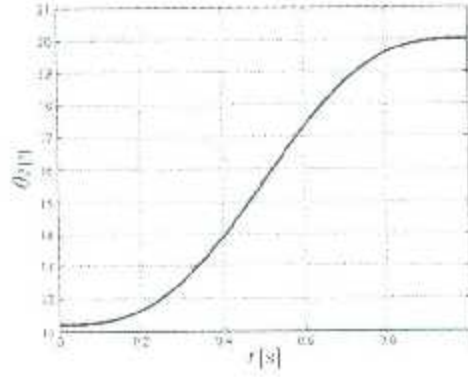


Figura 4.16:  $\theta_2$  del eslabón director en extensión

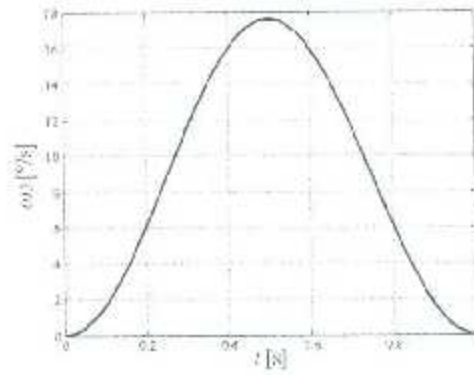


Figura 4.17:  $\omega_2$  del eslabón director en extensión

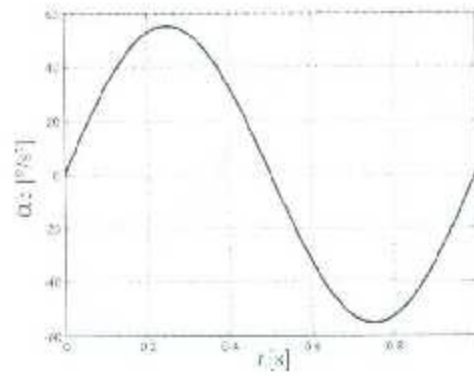


Figura 4.18:  $\alpha_2$  del eslabón director en extensión

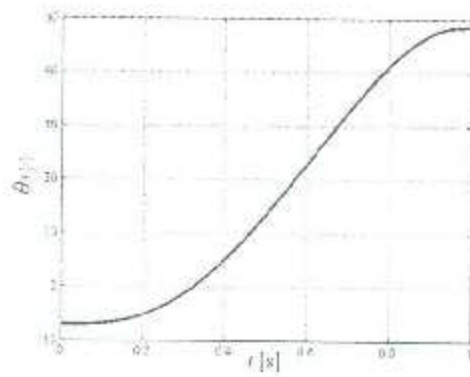


Figura 4.19:  $\theta_3$  del eslabón acoplador 3 en extensión.

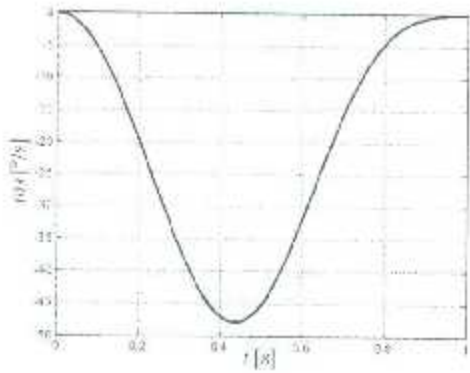


Figura 4.20:  $\omega_3$  del eslabón acoplador 3 en extensión

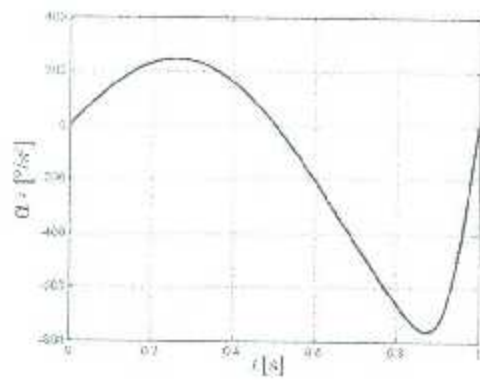


Figura 4.21:  $\alpha_3$  del eslabón acoplador 3 en extensión



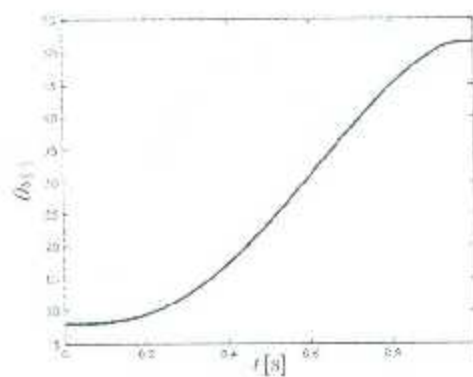


Figura 4.22:  $\theta_8$  del eslabón acoplador 8 en extensión

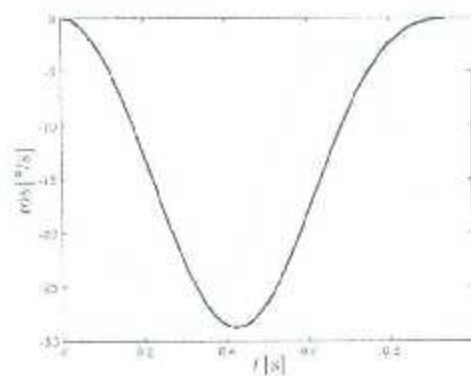


Figura 4.23:  $\omega_8$  del eslabón acoplador 8 en extensión

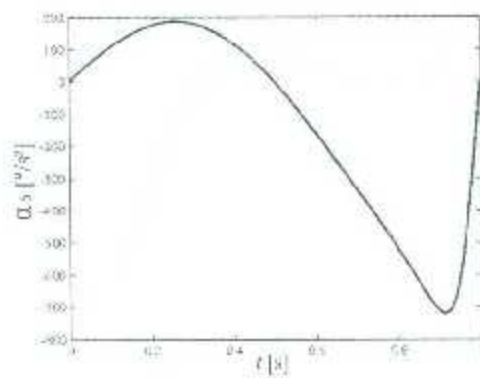


Figura 4.24:  $\alpha_8$  del eslabón acoplador 8 en extensión

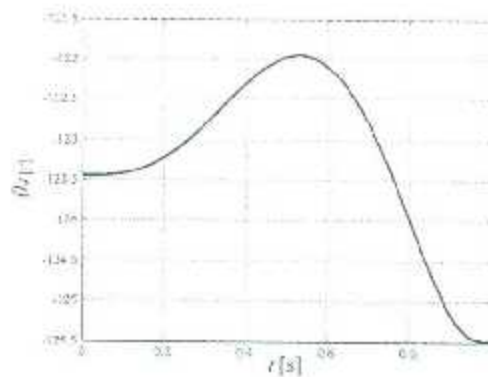


Figura 4.25:  $\theta_4$  del eslabón retorno 4 en extensión

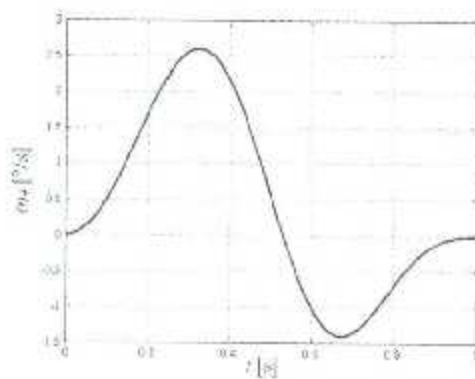


Figura 4.26:  $\omega_4$  del eslabón retorno 4 en extensión

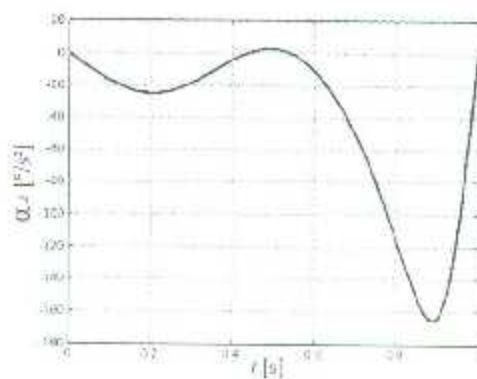


Figura 4.27:  $\alpha_4$  del eslabón retorno 4 en extensión

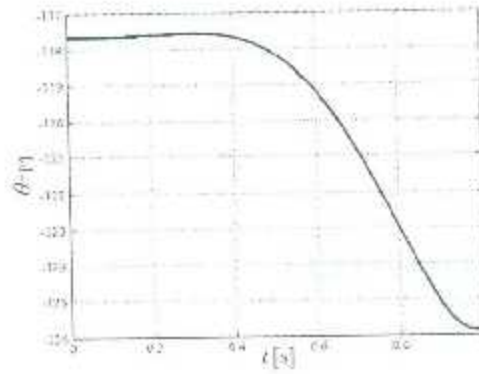


Figura 4.28:  $\theta_7$  del eslabón retorno 7 en extensión

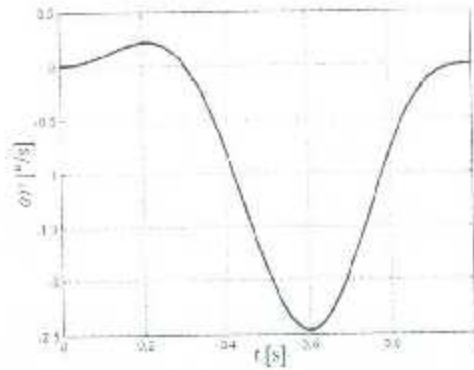


Figura 4.29:  $\omega_7$  del eslabón retorno 7 en extensión

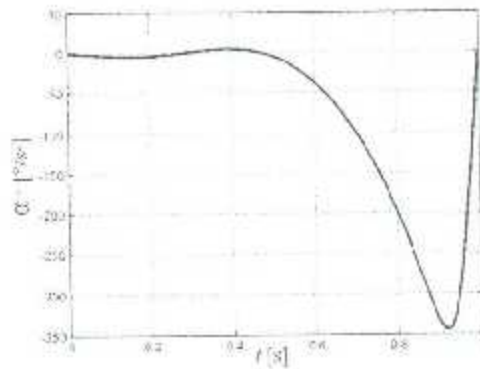


Figura 4.30:  $\alpha_7$  del eslabón retorno 7 en extensión

# Capítulo 5

## Modelo dinámico

### 5.1. Introducción

El modelo dinámico de un robot consiste en una ecuación diferencial (ordinaria) vectorial en las posiciones, ya sean articulares “ $q$ ” o cartesianas “ $x$ ”, generalmente de segundo orden, pudiéndose expresar como:

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0$$

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau) = 0$$

En la Tabla 5.1 se indican las variables que se usarán en este capítulo.

El ensamblaje de los eslabones del mecanismo del exoesqueleto se muestra en la Figura 5.1.

Los valores de los parámetros de los eslabones del mecanismo estudiado se han determinado a partir de los modelos realizados en el programa de Solid Works.

En los siguientes párrafos se describen las ecuaciones de Newton-Euler (NE) para cada uno de los eslabones del mecanismo.

El eslabón 1 es el eslabón fijo, este eslabón se sujeta a la pierna y tiene la articulación “A” con el eslabón 2, “B” con los eslabones seguidores 4 y 7.

En la nomenclatura que se utiliza para el modelo dinámico, no se mencionan los eslabones 5, 6, 9 y 10 pues son correspondientes a vectores usados en el modelo cinemático.

### 5.2. Eslabón 2

El eslabón 2 es el director, cuyo movimiento se especifica en el capítulo 2.

En las Figuras 5.3 y 5.4 se muestra cómo se realiza la medición de los ángulos  $\theta_{3^*,2}$  y  $\theta_{8^*,2}$ .

Datos del eslabón 2

$${}^3_3R = \begin{bmatrix} C_{3^*,2} & -S_{3^*,2} & 0 \\ S_{3^*,2} & C_{3^*,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^8_8R = \begin{bmatrix} C_{8^*,2} & -S_{8^*,2} & 0 \\ S_{8^*,2} & C_{8^*,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Tabla 5.1: Variables del modelo dinámico.

Variable	Descripción
${}^i R_j$	Matriz de rotación del eslabón $i$ al $j$
$C_{i,j}$	Coseno del ángulo $\theta_i$ que forma el eje $x$ del marco $i$ con el eje $x$ del marco $j$ alrededor de $z_i$
$S_{i,j}$	Senos del ángulo $\theta_i$ que forma el eje $x$ del marco $i$ con el eje $x$ del marco $j$ alrededor de $z_i$
$g$	Aceleración de la gravedad, $9.81 \text{ m/s}^2$
${}^i a_{cm}$	Aceleración del centro de masa del eslabón $i$ expresada en el marco $i$
$m_i$	Masa del eslabón $i$
$I_i$	Matriz de inercia del eslabón $i$
${}^i I_{zx}, {}^i I_{yz}$	Momento de inercia del eslabón $i$ respecto al marco $i$
${}^i I_{yz}, {}^i I_{xz}$	Producto de inercia del eslabón $i$ respecto al marco $i$
$W_i$	Fuerza de gravedad del eslabón $i$
$W_{body}$	Fuerza de gravedad del cuerpo del usuario
${}^i P_{n,m}$	Vector del punto $n$ al punto $m$ expresada en el marco $i$
${}^i c_i$	Vector del marco $i$ al centro de gravedad del eslabón $i$
${}^i f_{j,i}$	Fuerza que ejerce el eslabón $j$ sobre el eslabón $i$ respecto al marco $i$
${}^i f_i^*$	Es la resultante de las fuerzas ejercidas sobre el eslabón $i$
${}^i \mu_i^*$	Es la resultante de los momentos ejercidos sobre el eslabón $i$
$\theta_3$	Es el ángulo que forma el vector $\bar{r}_3$ en dirección de $D$ a $C$ , con respecto del marco $M_1$
$\theta_3^*$	Es el ángulo que forma el vector $\bar{r}_3$ en dirección de $C$ a $P_1$ , con respecto del marco $M_1$
$\theta_{3,2}$	Es el ángulo que forma el vector $\bar{r}_3$ en dirección de $C$ a $P_1$ , con respecto del marco $M_2$
$\theta_8$	Es el ángulo que forma el vector $\bar{r}_8$ en dirección de $D$ a $F$ , con respecto del marco $M_1$
$\theta_8^*$	Es el ángulo que forma el vector $\bar{r}_8$ en dirección de $C$ a $P_2$ , con respecto del marco $M_1$
$\theta_{8,2}^*$	Es el ángulo que forma el vector $\bar{r}_8$ en dirección de $C$ a $P_2$ , con respecto del marco $M_2$

$${}^2 e_2 = \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2 P_{2AD} = \begin{bmatrix} P_{2ADx} \\ P_{2ADy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2 W_2 = \begin{bmatrix} -S_2 m_2 g \\ -C_2 m_2 g \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^3 f_{2,3} = \begin{bmatrix} {}^3 f_{2,3x} \\ {}^3 f_{2,3y} \\ {}^3 f_{2,3z} \end{bmatrix}, \quad {}^8 f_{2,8} = \begin{bmatrix} {}^8 f_{2,8x} \\ {}^8 f_{2,8y} \\ {}^8 f_{2,8z} \end{bmatrix}, \quad {}^2 f_{1,2} = \begin{bmatrix} {}^2 f_{1,2x} \\ {}^2 f_{1,2y} \\ {}^2 f_{1,2z} \end{bmatrix},$$

$${}^2 f_2^* = \begin{bmatrix} m_2 {}^2 a_{gc2x} \\ m_2 {}^2 a_{gc2y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2 \mu_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^2 I_{xz} \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de fuerzas

$${}^2 f_{3,2} = -{}^2 f_{2,3} = -{}^2 R^3 f_{2,3}$$

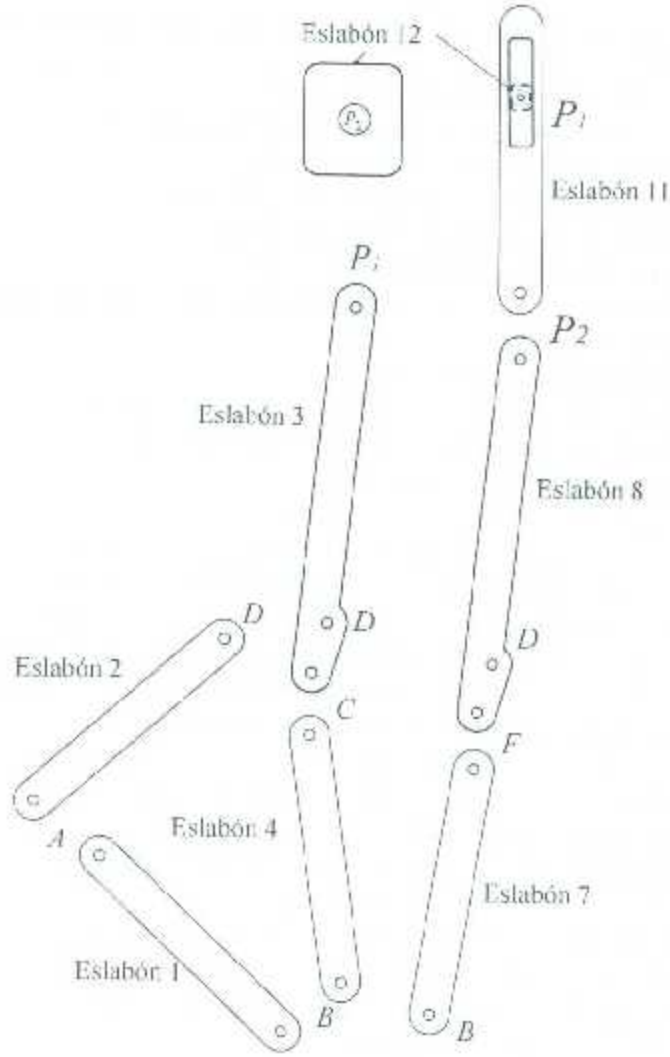


Figura 5.1: Ensamblaje de los eslabones del mecanismo

$${}^2f_{8,2} = -{}^2f_{2,8} = -{}^2_8R^8 f_{2,8}$$

$$-{}^2_3R^3 f_{2,3} = - \begin{bmatrix} C_{3^*2} & -S_{3^*2} & 0 \\ S_{3^*2} & C_{3^*2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^8f_{2,3x} \\ {}^8f_{2,3y} \\ {}^8f_{2,3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{3^*2} {}^3f_{2,3x} + S_{3^*2} {}^3f_{2,3y} \\ -S_{3^*2} {}^3f_{2,3x} - C_{3^*2} {}^3f_{2,3y} \\ -{}^3f_{2,3z} \end{bmatrix}$$

$$-{}^2_8R^8 f_{2,8} = - \begin{bmatrix} C_{8^*2} & -S_{8^*2} & 0 \\ S_{8^*2} & C_{8^*2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^8f_{2,8x} \\ {}^8f_{2,8y} \\ {}^8f_{2,8z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{8^*2} {}^8f_{2,8x} + S_{8^*2} {}^8f_{2,8y} \\ -S_{8^*2} {}^8f_{2,8x} - C_{8^*2} {}^8f_{2,8y} \\ -{}^8f_{2,8z} \end{bmatrix}$$

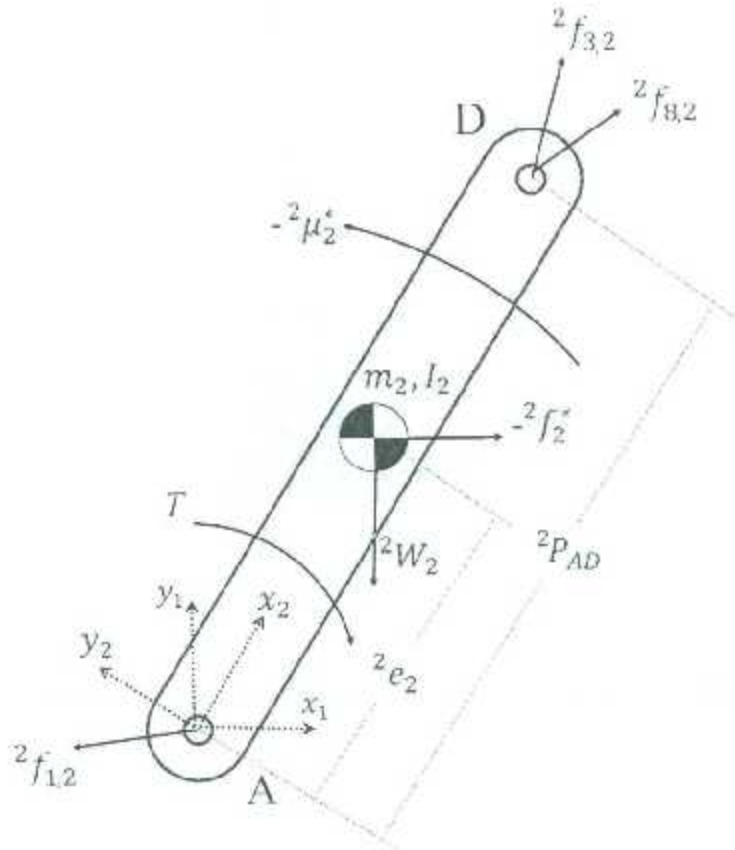


Figura 5.2: Eslabón 2 (Eslabón director)

Sumatoria de fuerzas

$${}^2f_2^* = {}^2f_{32} + {}^2f_{82} + {}^2W_2 + {}^2f_{12} = -\frac{2}{3}R^3 f_{32} - \frac{2}{8}R^8 f_{82} + {}^2W_2 + {}^2f_{12}$$

$$\begin{bmatrix} m_2 a_{g1,2x} \\ m_2 a_{g1,2y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{3,2} {}^3f_{2,3x} + S_{3,2} {}^3f_{2,3y} \\ -S_{3,2} {}^3f_{2,3x} - C_{3,2} {}^3f_{2,3y} \\ -{}^3f_{2,3z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{8,2} {}^8f_{2,8x} + S_{8,2} {}^8f_{2,8y} \\ -S_{8,2} {}^8f_{2,8x} - C_{8,2} {}^8f_{2,8y} \\ -{}^8f_{2,8z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_2 m_2 g \\ -C_2 m_2 g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^2f_{1,2x} \\ {}^2f_{1,2y} \\ {}^2f_{1,2z} \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de pares del eslabón 2

$${}^2\mu_2^* = ({}^2e_2 \times {}^2W_2) + ({}^2P_{AD} \times (-\frac{2}{3}R^3 f_{2,3})) + ({}^2P_{AD} \times (-\frac{2}{8}R^8 f_{2,8})) - ({}^2e_2 \times {}^2f_2^*) + T$$

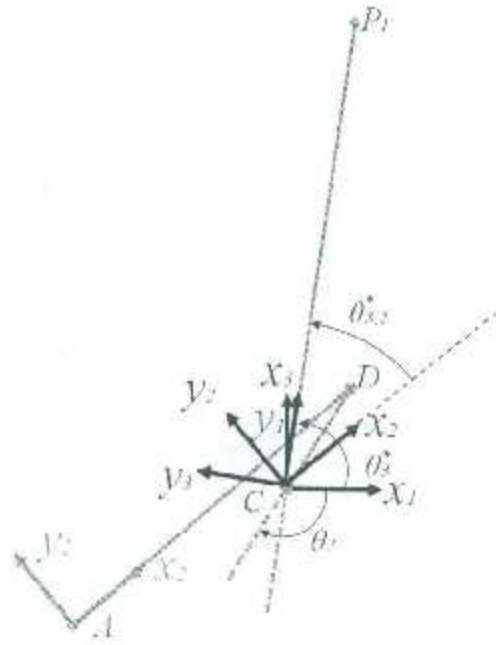


Figura 5.3: Ángulo que forma el marco 3 respecto del marco 2

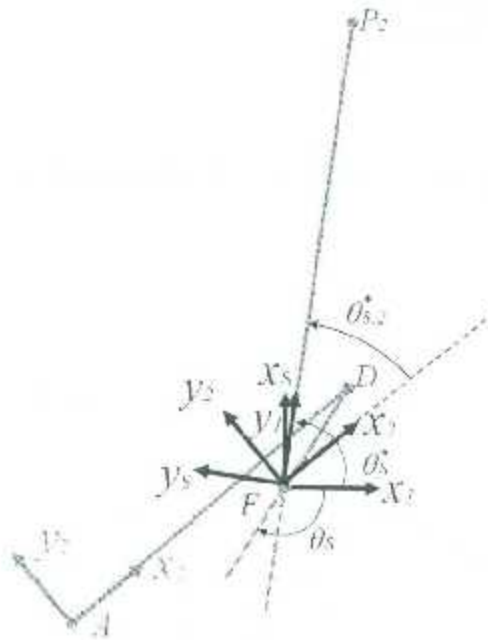


Figura 5.4: Ángulo que forma el marco 5 respecto del marco 2

$${}^2P_{AD} \times \left(-\frac{2}{8}R^8 f_{2,8}\right) = \begin{bmatrix} -P_{2ADy}^8 f_{2,8z} \\ P_{2ADx}^8 f_{2,8z} \\ P_{2ADx}(-S_{8 \cdot 2}^8 f_{2,8y} - C_{8 \cdot 2}^8 f_{2,8u}) \\ -P_{2ADy}(-C_{8 \cdot 2}^8 f_{2,8v} + S_{8 \cdot 2}^8 f_{2,8u}) \end{bmatrix}$$



$${}^2P_{AD} \times (-\frac{2}{3}R^3 f_{2,3}) = \begin{bmatrix} -P_{2ADy} {}^3f_{2,3x} \\ P_{2ADx} {}^3f_{2,3z} \\ P_{2ADz}(-S_{3^*} {}^3f_{2,3x} - C_{3^*} {}^3f_{2,3y}) \\ -P_{2ADy}(-C_{3^*} {}^3f_{2,3x} - S_{3^*} {}^3f_{2,3y}) \end{bmatrix}$$

$${}^2e_2 \times {}^2W_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e_{2x} & e_{2y} & 0 \\ -S_2 m_2 g & -C_2 m_2 g & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{2x} C_2 m_2 g + e_{2y} S_2 m_2 g \end{bmatrix}$$

$$e_2 \times {}^2f_2^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e_{2x} & e_{2y} & 0 \\ m_2 a_{2cxz} & m_2 a_{2cyx} & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{2x} m_2 a_{2cyx} - e_{2y} m_2 a_{2cxz} \end{bmatrix}$$

Sumatoria de pares del eslabón 2

$${}^2\mu_2^* = ({}^2P_{AD} \times (-\frac{2}{3}R^3 f_{2,3})) + ({}^2P_{AD} \times (-\frac{2}{8}R^8 f_{2,8})) - ({}^2e_2 \times {}^2f_2^*) + ({}^2e_2 \times {}^2W_2) + T$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^2I_{zz} \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{2ADy} {}^3f_{2,3x} \\ P_{2ADx} {}^3f_{2,3z} \\ P_{2ADz}(-S_{3^*} {}^3f_{2,3x} - C_{3^*} {}^3f_{2,3y}) \\ -P_{2ADy}(-C_{3^*} {}^3f_{2,3x} - S_{3^*} {}^3f_{2,3y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{2x} C_2 m_2 g \\ +e_{2y} S_2 m_2 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -P_{2ADy} {}^8f_{2,8x} \\ P_{2ADx} {}^8f_{2,8z} \\ P_{2ADz}(-S_{8^*} {}^8f_{2,8x} - C_{8^*} {}^8f_{2,8y}) \\ -P_{2ADy}(-C_{8^*} {}^8f_{2,8x} + S_{8^*} {}^8f_{2,8y}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{2x} m_2 a_{2cyx} \\ -e_{2y} m_2 a_{2cxz} \end{bmatrix}$$

### 5.3. Eslabón 3

El eslabón 3 corresponde al eslabón acoplador seguidor del punto  $P_1$ , los eslabones adyacentes son el eslabón director con subíndice 2, el eslabón seguidor 4 y el eslabón 12 guía que forma la unión entre el  $P_1$  y  $P_2$ .

La medición del ángulo 3 respecto del marco 1 está descrita en la Figura 5.6, el ángulo formado entre los marcos 12 y 3 está descrito en la Figura 5.7.

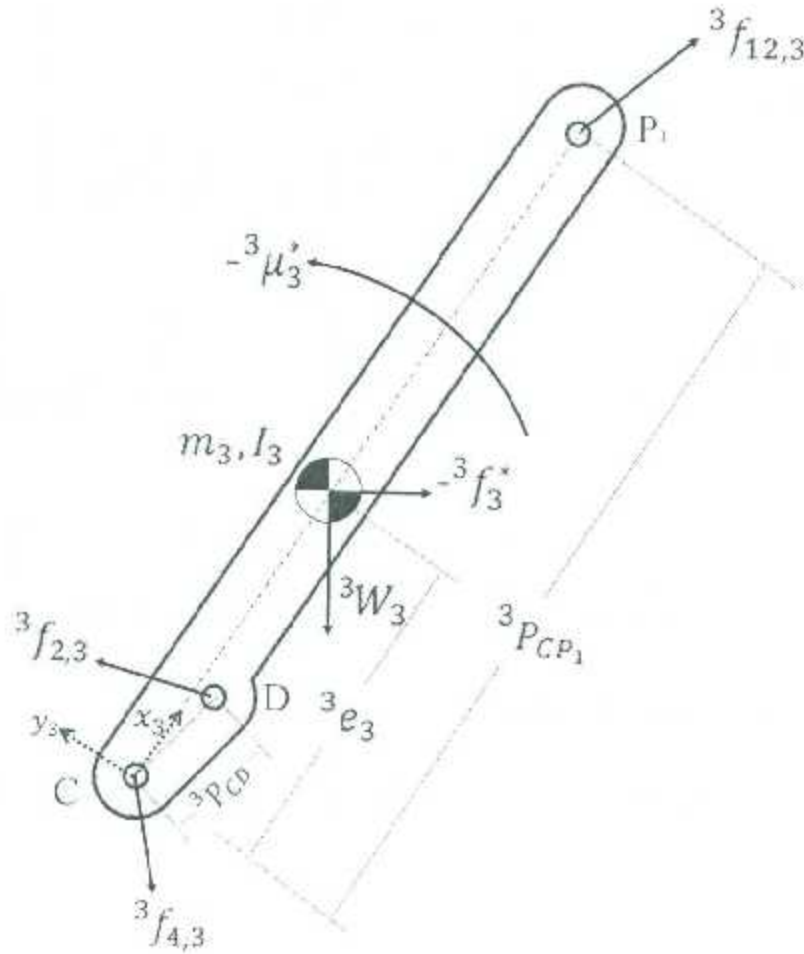


Figura 5.5: Eslabón 3 (Eslabón acoplador superior)

Datos del eslabón 3

$${}^3_2R = \begin{bmatrix} C_{12,3} & -S_{12,3} & 0 \\ S_{12,3} & C_{12,3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3P_{CP_1} = \begin{bmatrix} P_{3CP_1x} \\ P_{3CP_1y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3P_{CD} = \begin{bmatrix} P_{3CDx} \\ P_{3CDy} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^3e_3 = \begin{bmatrix} e_{3x} \\ e_{3y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3W_3 = \begin{bmatrix} -S_3 \cdot m_3 g \\ -C_3 \cdot m_3 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{12}f_{3,12} = \begin{bmatrix} {}^{12}f_{3,12x} \\ {}^{12}f_{3,12y} \\ {}^{12}f_{3,12z} \end{bmatrix},$$

$${}^3f_{2,3} = \begin{bmatrix} {}^3f_{2,3x} \\ {}^3f_{2,3y} \\ {}^3f_{2,3z} \end{bmatrix}, \quad {}^3f_{4,3} = \begin{bmatrix} {}^3f_{4,3x} \\ {}^3f_{4,3y} \\ {}^3f_{4,3z} \end{bmatrix}, \quad {}^3f_3^* = \begin{bmatrix} m_3 {}^3a_{pc3x} \\ m_3 {}^3a_{pc3y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\mu_3^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^3I_{x_3} \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}.$$

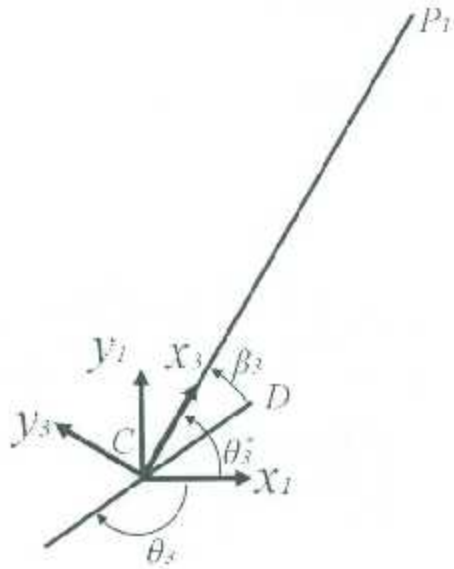


Figura 5.6: Ángulo del marco 3 respecto del marco 1

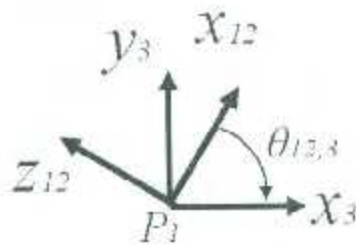


Figura 5.7: Ángulo entre el marco 12 y 3

Operaciones previas a la sumatoria de fuerzas del eslabón 3

$${}^3f_{12,3} = -{}^3f_{3,12} = -{}^3_{12}R^{12} f_{3,12}$$

$$\begin{aligned} {}^3f_{12,3} = -{}^3_{12}R^{12} f_{3,12} &= - \begin{bmatrix} C_{12,3^*} & -S_{12,3^*} & 0 \\ S_{12,3^*} & C_{12,3^*} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{12}f_{3,12x} \\ {}^{12}f_{3,12y} \\ {}^{12}f_{3,12z} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} C_{12,3^*} {}^{12}f_{3,12x} - S_{12,3^*} {}^{12}f_{3,12y} \\ S_{12,3^*} {}^{12}f_{3,12x} + C_{12,3^*} {}^{12}f_{3,12y} \\ {}^{12}f_{3,12z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sumatoria de fuerzas del eslabón 3

$${}^3f_3^* = {}^3W_3 + {}^3f_{12,3} + {}^3f_{2,3} + {}^3f_{4,3} = {}^3W_3 - {}^3_{12}R^{12}f_{3,12} + {}^3f_{2,3} - {}^3f_{4,3}$$

$$\begin{bmatrix} m_3 {}^3a_{g,3x} \\ m_3 {}^3a_{g,3y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 m_3 g \\ C_3 m_3 g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{12,3} {}^{12}f_{3,12x} + S_{12,3} {}^{12}f_{3,12y} \\ S_{12,3} {}^{12}f_{3,12x} - C_{12,3} {}^{12}f_{3,12y} \\ -{}^{12}f_{3,12z} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} {}^3f_{2,3x} \\ {}^3f_{2,3y} \\ {}^3f_{2,3z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^3f_{4,3x} \\ {}^3f_{4,3y} \\ {}^3f_{4,3z} \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de pares del eslabón 3

$${}^3P_{3CP_1} \times (-{}^3_{12}R^{12}f_{3,12}) = \begin{bmatrix} -P_{3CP_1y} {}^{12}f_{12,3z} \\ P_{3CP_1x} {}^{12}f_{12,3z} \\ P_{3CP_1x} (-S_{12,3} {}^{12}f_{3,12x} - C_{12,3} {}^{12}f_{3,12y}) \\ -P_{3CP_1y} (-C_{12,3} {}^{12}f_{3,12x} + S_{12,3} {}^{12}f_{3,12y}) \end{bmatrix}$$

$${}^3P_{3CD} \times {}^3f_{2,3} = \begin{bmatrix} P_{3CDy} {}^3f_{2,3z} \\ -P_{3CDx} {}^3f_{2,3z} \\ P_{3CDx} ({}^3f_{2,3y}) - P_{3CDy} ({}^3f_{2,3x}) \end{bmatrix}$$

$${}^3e_3 \times {}^3f_3^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{3x} m_3 {}^3a_{g,3y} - e_{3y} m_3 {}^3a_{g,3x} \end{bmatrix}$$

$${}^3e_3 \times {}^3W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{3x} C_3 m_3 g - e_{3y} S_3 m_3 g \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de pares del eslabón 3

$${}^3\mu_3^* = ({}^3e_3 \times {}^3W_3) - ({}^3e_3 \times {}^3f_3^*) + ({}^3P_{CP_1} \times (-{}^3_{12}R^{12}f_{3,12})) + ({}^3P_{CD} \times {}^3f_{2,3})$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^3I_{223}\ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{3CP_{1z}} {}^3f_{3,12z} \\ P_{3CP_{1x}} {}^3f_{3,12z} \\ P_{3CP_{1x}}(-C_{12,3} {}^3f_{3,12y}) \\ -P_{3CP_{1y}}(-S_{12,3} {}^3f_{3,12x}) \\ 0 \\ 0 \\ e_{3x}m_3 {}^3a_{cg3y} \\ -e_{3y}m_3 {}^3a_{cg3z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{3CDy} {}^3f_{2,3z} \\ -P_{3CDx} {}^3f_{2,3z} \\ P_{3CDx}({}^3f_{2,3y}) \\ -P_{3CDy}({}^3f_{2,3x}) \\ 0 \\ 0 \\ e_{3x}C_3 m_3 g \\ -e_{3y}S_3 m_3 g \end{bmatrix}$$

#### 5.4. Eslabón 4

El eslabón 4 es el eslabón seguidor de la cadena cinemática correspondiente a  $P_1$ , y sus eslabones adyacentes son el eslabón fijo con subíndice 1 y el eslabón 3 que ya se describió previamente.

El ángulo formado entre los marcos 3 y 4 está descrito en la Figura 5.9

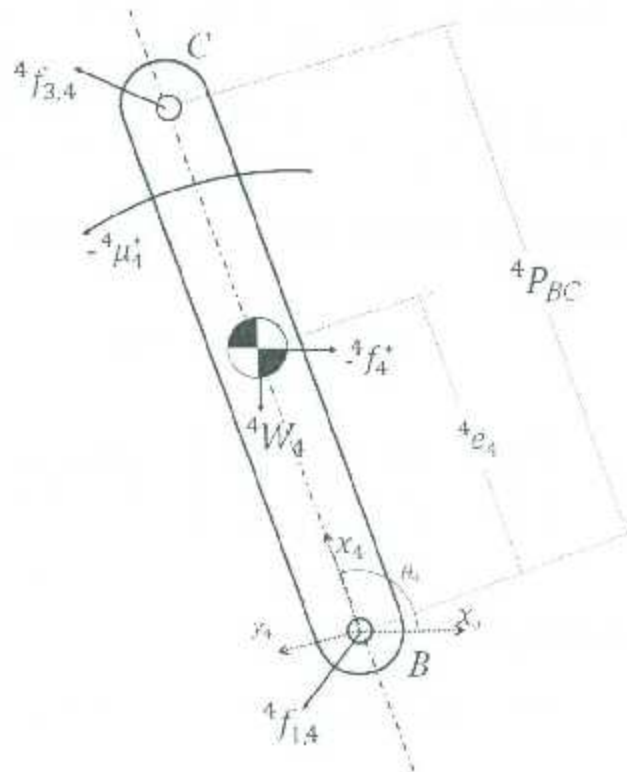


Figura 5.8: Eslabón 4 (Eslabón seguidor superior)

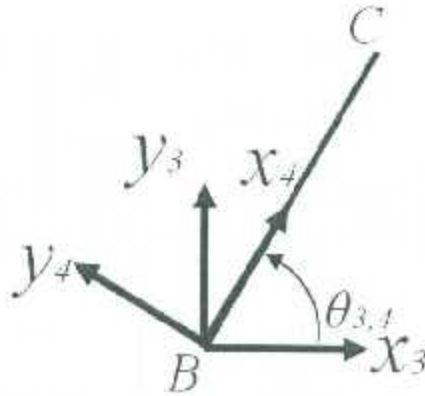


Figura 5.9: Ángulo del marco 4 respecto al marco 3

Datos del eslabón 4

$${}^3R = \begin{bmatrix} C_{3,4} & -S_{3,4} & 0 \\ S_{3,4} & C_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^4P_{BC} = \begin{bmatrix} P_{ABCx} \\ P_{ABCy} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^4e_4 = \begin{bmatrix} e_{4x} \\ e_{4y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4W_4 = \begin{bmatrix} -S_4 m_4 g \\ -C_4 m_4 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4f_{1,A} = \begin{bmatrix} {}^4f_{1,Ax} \\ {}^4f_{1,Ay} \\ {}^4f_{1,Az} \end{bmatrix},$$

$${}^3f_{4,3} = \begin{bmatrix} {}^3f_{4,3x} \\ {}^3f_{4,3y} \\ {}^3f_{4,3z} \end{bmatrix}, \quad {}^4f_A^* = \begin{bmatrix} m_4^4 a_{gc4x} \\ m_4^4 a_{gc4y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\mu_4^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^4I_{zz4} \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de fuerzas del eslabón 4

$${}^4f_{3,4} = -{}^4f_{4,3} - {}^3R^3 f_{4,3}$$

$${}^3R^3 f_{4,3} = \begin{bmatrix} C_{3,4} & -S_{3,4} & 0 \\ S_{3,4} & C_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3f_{4,3x} \\ {}^3f_{4,3y} \\ {}^3f_{4,3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{3,4} {}^3f_{4,3x} - S_{3,4} {}^3f_{4,3y} \\ S_{3,4} {}^3f_{4,3x} + C_{3,4} {}^3f_{4,3y} \\ {}^3f_{4,3z} \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de fuerzas del eslabón 4

$${}^4f_4^* = {}^4W_4 + {}^4f_{3,4} + {}^4f_{1,A} = {}^4W_4 - {}^3R^3 f_{4,3} + {}^4f_{1,A}$$

$$\begin{bmatrix} m_4^4 a_{gc4x} \\ m_4^4 a_{gc4y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_4 m_4 g \\ -C_4 m_4 g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{3,4} {}^3f_{4,3x} - S_{3,4} {}^3f_{4,3y} \\ S_{3,4} {}^3f_{4,3x} + C_{3,4} {}^3f_{4,3y} \\ {}^3f_{4,3z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^4f_{1,Ax} \\ {}^4f_{1,Ay} \\ {}^4f_{1,Az} \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de pares del eslabón 4

$${}^4P_{BC} \times ({}^{-4}_3R^3 f_{4,3}) = \begin{bmatrix} -P_{4BCy} f_{4,3z} \\ P_{4BCx} f_{4,3z} \\ P_{4BCx} (-S_{3,4}^3 f_{4,3x} - C_{3,4}^3 f_{4,3y}) \\ -P_{4BCy} (-C_{3,4}^3 f_{4,3x} + S_{3,4}^3 f_{4,3y}) \end{bmatrix}$$

$${}^4e_4 \times {}^4f_{4,3}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{4z} m_4^4 a_{c94y} - e_{4y} m_4^4 a_{c94x} \end{bmatrix}$$

$${}^4e_4 \times {}^4W_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{4x} C_4 m_4 g + e_{4y} S_4 m_4 g \end{bmatrix}$$

Sumatoria de pares del eslabón 4

$${}^4\mu_4^* = ({}^4P_{BC} \times ({}^{-4}_3R^3 f_{4,3})) - ({}^4e_4 \times {}^4f_{4,3}^*) + ({}^4e_4 \times {}^4W_4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^4I_{zz} \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{4BCy} f_{4,3z} \\ P_{4BCx} f_{4,3z} \\ P_{4BCx} (-S_{3,4}^3 f_{4,3x} - C_{3,4}^3 f_{4,3y}) - P_{4BCy} (-C_{3,4}^3 f_{4,3x} + S_{3,4}^3 f_{4,3y}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{4z} m_4^4 a_{c94y} - e_{4y} m_4^4 a_{c94x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{4x} C_4 m_4 g + e_{4y} S_4 m_4 g \end{bmatrix}$$

## 5.5. Eslabón 7

El eslabón 7 corresponde al eslabón seguidor del punto  $P_2$ , los eslabones adyacentes son el eslabón fijo con subíndice 1 y el eslabón 8.

El ángulo del marco 8 respecto del marco 7 se describe en la Figura 5.11.

Datos del eslabón 7

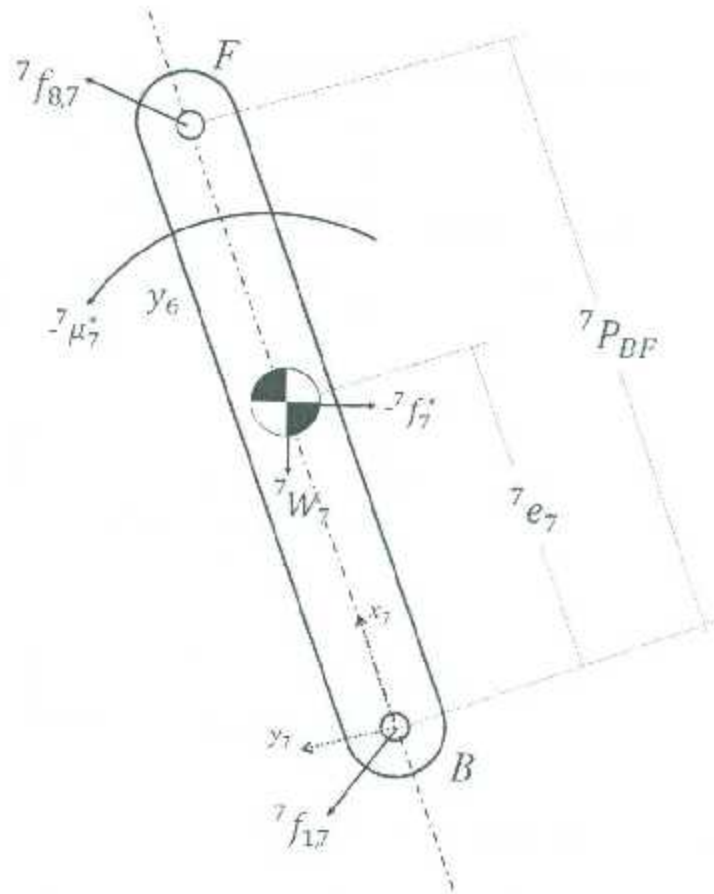


Figura 5.10: Eslabón 7 (Eslabón seguidor inferior)

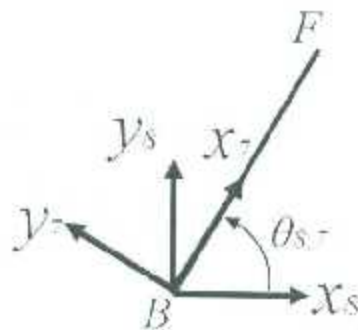


Figura 5.11: Marco 8 respecto del marco 7

$${}^8R_7 = \begin{bmatrix} C_{8,7} & -S_{8,7} & 0 \\ S_{8,7} & C_{8,7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^7e_7 = \begin{bmatrix} e_{7x} \\ e_{7y} \\ 0 \end{bmatrix},$$



$${}^7P_{BF} = \begin{bmatrix} P_{7BFx} \\ P_{7BFy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7W_7 = \begin{bmatrix} -S_7 m_7 g \\ -C_7 m_7 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8f_{7,8} = \begin{bmatrix} {}^8f_{7,8x} \\ {}^8f_{7,8y} \\ {}^8f_{7,8z} \end{bmatrix},$$

$${}^7f_{1,7} = \begin{bmatrix} {}^7f_{1,7x} \\ {}^7f_{1,7y} \\ {}^7f_{1,7z} \end{bmatrix}, \quad {}^7f_7^* = \begin{bmatrix} m_7^7 \ddot{a}_{c7x} \\ m_7^7 \ddot{a}_{c7y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\mu_7^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^7I_{c27} \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de fuerzas del eslabón 7

$${}^7f_{8,7} = -{}^7f_{7,8} = -{}^7R^8 f_{7,8}$$

$${}^7R^8 f_{7,8} = \begin{bmatrix} C_{8,7} & -S_{8,7} & 0 \\ S_{8,7} & C_{8,7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^8f_{7,8x} \\ {}^8f_{7,8y} \\ {}^8f_{7,8z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{8,7} {}^8f_{7,8x} - S_{8,7} {}^8f_{7,8y} \\ S_{8,7} {}^8f_{7,8x} + C_{8,7} {}^8f_{7,8y} \\ {}^8f_{7,8z} \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de fuerzas del eslabón 7

$${}^7f_7^* = {}^7W_7 + {}^7f_{8,7} + {}^7f_{1,7} = {}^7W_7 - {}^7R^8 f_{7,8} + {}^7f_{1,7}$$

$$\begin{bmatrix} m_7^7 \ddot{a}_{c7x} \\ m_7^7 \ddot{a}_{c7y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{8,7} {}^8f_{7,8x} + S_{8,7} {}^8f_{7,8y} \\ -S_{8,7} {}^8f_{7,8x} - C_{8,7} {}^8f_{7,8y} \\ {}^8f_{7,8z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_7 m_7 g \\ -C_7 m_7 g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^7f_{1,7x} \\ {}^7f_{1,7y} \\ {}^7f_{1,7z} \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de pares del eslabón 7

$${}^7P_{BF} \times (-{}^7R^8 f_{7,8}) = \begin{bmatrix} -P_{7BFy} f_{7,8z} \\ P_{7BFx} f_{7,8z} \\ P_{7BFx} (-S_{8,7} f_{7,8x} - C_{8,7} f_{7,8y}) \\ -P_{7BFy} (-C_{8,7} f_{7,8x} + S_{8,7} f_{7,8y}) \end{bmatrix}$$

$${}^7e_7 \times {}^7f_7^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{7x} m_7^7 \ddot{a}_{c7y} - e_{7y} m_7^7 \ddot{a}_{c7x} \end{bmatrix}$$

$${}^7e_7 \times {}^7W_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{7z}C_7m_7g + e_{7y}S_7m_7g \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de pares del eslabón 7

$${}^7\mu_7^* = ({}^7P_{BF} \times ({}^7R^8 f_{7,8})) - ({}^7e_7 \times {}^7f_7^*) + (e_7 \times {}^7W_7)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^7I_{zz7}\ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{2BFy}^8 f_{7,8z} \\ P_{2BFx}^8 f_{7,8z} \\ P_{2BFx}(-S_{8,7}^8 f_{7,8z} - C_{8,7}^8 f_{7,8y}) - P_{2BFy}(-C_{8,7}^8 f_{7,8z} + S_{8,7}^8 f_{7,8y}) \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{7z}m_7{}^7a_{cg7z} - e_{7y}m_7{}^7a_{cg7x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{7z}C_7m_7g + e_{7y}S_7m_7g \end{bmatrix}.$$

## 5.6. Eslabón 8

El eslabón 8 corresponde al eslabón acoplador seguidor del punto  $P_2$ , los eslabones adyacentes son el eslabón director con subíndice 2, el eslabón seguidor 7 y el eslabón de unión entre el  $P_1$  y  $P_2$ .

El marco 8 respecto del marco 1 se describe en la figura 5.13. La medición del ángulo 11 respecto al 8 se muestra en la Figura 5.14.

Datos del eslabón 8

$${}^8R = \begin{bmatrix} C_{11,8} & -S_{11,8} & 0 \\ S_{11,8} & C_{11,8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^8e_8 = \begin{bmatrix} e_{8x} \\ e_{8y} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^8P_{8FP7} = \begin{bmatrix} P_{8FP7x} \\ P_{8FP7y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8P_{8FD} = \begin{bmatrix} P_{8FDx} \\ P_{8FDy} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^8W_8 = \begin{bmatrix} -S_8 \cdot m_8 g \\ -C_8 \cdot m_8 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8f_{2,8} = \begin{bmatrix} {}^8f_{2,8x} \\ {}^8f_{2,8y} \\ {}^8f_{2,8z} \end{bmatrix}, \quad {}^8f_{7,8} = \begin{bmatrix} {}^8f_{7,8x} \\ {}^8f_{7,8y} \\ {}^8f_{7,8z} \end{bmatrix},$$

$${}^{11}f_{8,11} = \begin{bmatrix} {}^{11}f_{8,11x} \\ {}^{11}f_{8,11y} \\ {}^{11}f_{8,11z} \end{bmatrix}, \quad {}^8f_8^* = \begin{bmatrix} m_8 {}^8a_{gc8x} \\ m_8 {}^8a_{gc8y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8u_8^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^8I_{zz8}\ddot{\theta}_8 \end{bmatrix}.$$

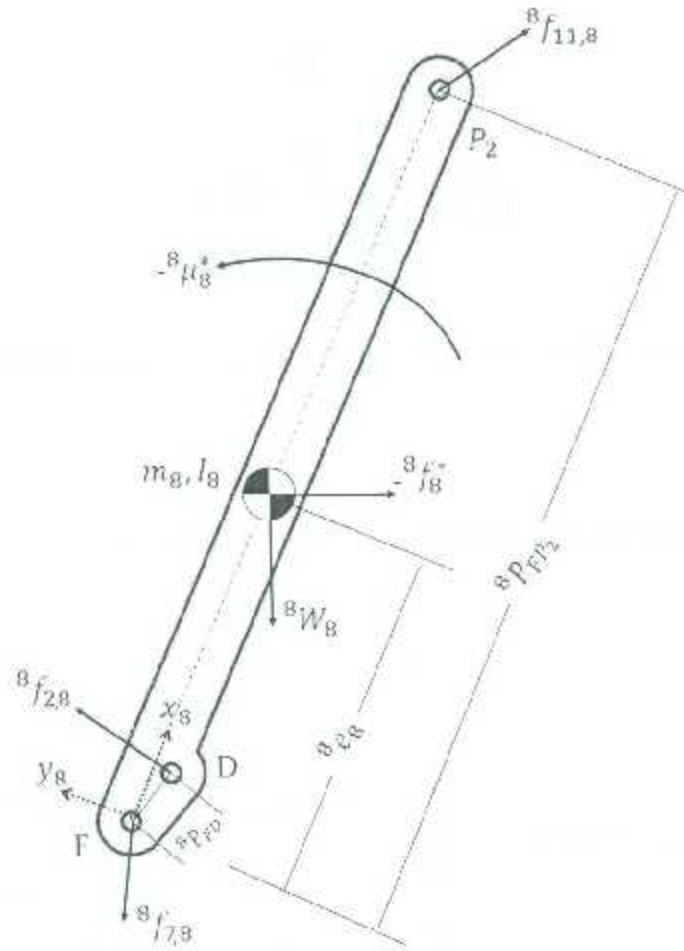


Figura 5.12: Eslabón 8 (Eslabón acoplador inferior)

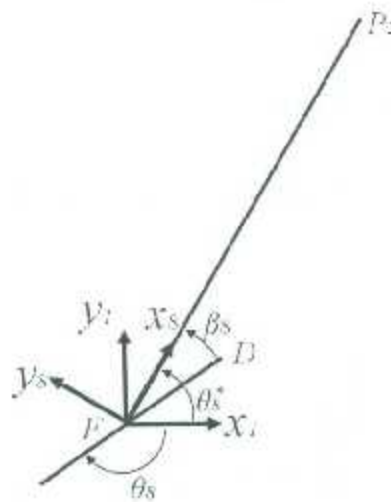


Figura 5.13: Medición del ángulo  $\theta_8^*$

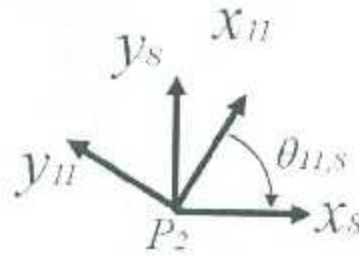


Figura 5.14: Ángulo del marco 11 respecto del marco 8

Operaciones previas a la sumatoria de fuerzas del eslabón 8

$${}^8f_{11,8} = -{}^8f_{8,11} = -{}^8_{11}R^{11}f_{8,11}$$

$$\begin{aligned} {}^8f_{8,11} &= {}^8_{11}R^{11}f_{8,11} = \begin{bmatrix} C_{11,8} & -S_{11,8} & 0 \\ S_{11,8} & C_{11,8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{11}f_{8,11x} \\ {}^{11}f_{8,11y} \\ {}^{11}f_{8,11z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11x} - S_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11y} \\ S_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11x} + C_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11y} \\ {}^{11}f_{8,11z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sumatoria de fuerzas del eslabón 8

$${}^8f_8^* = {}^8W_8 : {}^8f_{11,8} + {}^8f_{2,8} - {}^8f_{7,8} = {}^8W_8 - {}^8_{11}R^{11}f_{8,11} + {}^8f_{2,8} + {}^8f_{7,8}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_8 {}^8a_{p8z} \\ m_8 {}^8a_{p8y} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -C_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11x} - S_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11y} \\ -S_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11x} - C_{11,8} \cdot {}^{11}f_{8,11y} \\ -{}^{11}f_{8,11z} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -S_8 m_8 g \\ -C_8 m_8 g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^8f_{2,8z} \\ {}^8f_{2,8y} \\ {}^8f_{2,8x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^8f_{7,8x} \\ {}^8f_{7,8y} \\ {}^8f_{7,8z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Operaciones previas a la sumatoria de pares del eslabón 8

$$\begin{aligned}
{}^8P_{8F\mathcal{P}_2} \times (-{}^8_{11}R^{11}f_{8,11}) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_{8F\mathcal{P}_2x} & P_{8F\mathcal{P}_2y} & 0 \\ {}^{11}f_{11,8x} & {}^{11}f_{11,8y} & {}^{11}f_{11,8z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -P_{8F\mathcal{P}_2y} {}^{11}f_{8,11z} \\ P_{8F\mathcal{P}_2x} {}^{11}f_{8,11z} \\ P_{8F\mathcal{P}_2x}(-S_{11,8} {}^{11}f_{8,11z} - C_{11,8} {}^{11}f_{8,11y}) \\ -P_{8F\mathcal{P}_2y}(-C_{11,8} {}^{11}f_{8,11z} + S_{11,8} {}^{11}f_{8,11y}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^8P_{8FD} \times {}^8f_{2,8} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_{8FDx} & P_{8FDy} & 0 \\ {}^8f_{2,8x} & {}^8f_{2,8y} & {}^8f_{2,8z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{8FDy} {}^{11}f_{2,8z} \\ -P_{8FDx} {}^{11}f_{2,8z} \\ P_{8FDx}({}^{11}f_{2,8z} + {}^{11}f_{2,8y}) - P_{8FDy}({}^{11}f_{2,8z} + {}^{11}f_{2,8y}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$${}^8e_8 \times {}^8f_8^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{8x}m_8^x a_{c98y} - e_{8y}m_8^y a_{c98x} \end{bmatrix}$$

$${}^8e_8 \times {}^8W_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{8z}C_8 \cdot m_8g + e_{8z}S_8 \cdot m_8g \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de pares del eslabón 8

$${}^8\mu_8^* = -({}^8e_8 \times {}^8f_8^*) + ({}^8e_8 \times {}^8W_8) + ({}^8P_{F\mathcal{P}_2} \times (-{}^8_{11}R^{11}f_{8,11})) + ({}^8P_{FD} \times {}^8f_{2,8})$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^8I_{z28}\ddot{\theta}_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -P_{8F}P_{8z}{}^{11}f_{1,\delta z} \\ P_{8F}P_{8x}{}^{11}f_{7,\delta x} \\ P_{8F}P_{8z}(-S_{11,8}{}^{11}f_{8,11x} - C_{11,8}{}^{11}f_{8,11y}) \\ -P_{8F}P_{8y}(-C_{11,8}{}^{11}f_{8,11x} + S_{11,8}{}^{11}f_{8,11y}) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} P_{8FDy}{}^{11}f_{2,\delta z} \\ -P_{8FDx}{}^{11}f_{2,\delta z} \\ P_{8FDx}({}^{11}f_{2,\delta x} - {}^{11}f_{2,\delta y}) - P_{8FDy}({}^{11}f_{2,\delta x} + {}^{11}f_{2,\delta y}) \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{8x}m_8{}^8a_{c9\delta y} - e_{8y}m_8{}^8a_{c9\delta x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{8x}C_8\pi_{\delta g} - e_{8z}S_8m_8g \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

## 5.7. Eslabón 11

El eslabón 11 corresponde al eslabón de unión de  $P_1$  y  $P_2$ , los eslabones 8 y 12 son los adyacentes.

Datos del eslabón 11

$$\begin{aligned}
 {}^{11}R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{11}e_{11} = \begin{bmatrix} e_{11x} \\ e_{11y} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 {}^{11}P_{P_2P_8} &= \begin{bmatrix} P_{11P_2P_8x} \\ P_{11P_2P_8y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{11}W_{11} = \begin{bmatrix} -S_{11}m_{11}g \\ -C_{11}m_{11}g \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 {}^{11}W_{body} &= \begin{bmatrix} -S_{11}m_{body}g \\ -C_{11}m_{body}g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{11}f_{8,11} = \begin{bmatrix} {}^{11}f_{8,11x} \\ {}^{11}f_{8,11y} \\ {}^{11}f_{8,11z} \end{bmatrix}, \quad {}^{12}f_{11,12} = \begin{bmatrix} {}^{12}f_{11,12x} \\ {}^{12}f_{11,12y} \\ {}^{12}f_{11,12z} \end{bmatrix}, \\
 {}^{11}f_{11}^* &= \begin{bmatrix} m_{11}{}^{11}a_{gc11x} \\ m_{11}{}^{11}a_{gc11y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{11}\mu_{11}^* = \begin{bmatrix} {}^{11}I_{x211}\ddot{\theta}_{11} - {}^{11}I_{y211}\dot{\theta}_{11}^2 \\ {}^{11}I_{y211}\ddot{\theta}_{11} - {}^{11}I_{x211}\dot{\theta}_{11}^2 \\ {}^{11}I_{z211}\ddot{\theta}_{11} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Operaciones previas a la sumatoria de fuerzas del eslabón 11

$${}^{11}f_{12,11} = -{}^{11}f_{11,12} = -{}^{11}R^{12}f_{11,12}$$

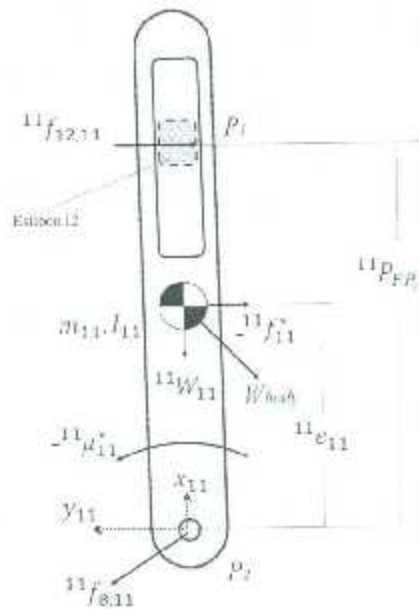


Figura 5.15: Eslabón 11

$${}^{11}R^{12} f_{11,12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{12}f_{11,12x} \\ {}^{12}f_{11,12y} \\ {}^{12}f_{11,12z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{12}f_{11,12x} \\ {}^{12}f_{11,12z} \\ -{}^{12}f_{11,12y} \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de fuerzas del eslabón 11

$${}^{11}f_{11}^* = +{}^{12}W_{11} + {}^{11}f_{12,11} + {}^{11}f_{11,12} + {}^{11}W_{body} = {}^{11}W_{11} - {}^{12}R^{12} f_{11,12} + {}^{11}f_{8,11} + {}^{12}W_{body}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} {}^{13}a_{gc11x} \\ m_{11} {}^{11}a_{gc11y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{11}m_{11}g \\ -C_{11}m_{11}g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -{}^{12}f_{11,12x} \\ -{}^{12}f_{11,12z} \\ {}^{12}f_{11,12y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{11}f_{8,11x} \\ {}^{11}f_{8,11y} \\ {}^{11}f_{8,11z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_{11}m_{body}g \\ -C_{11}m_{body}g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de pares del eslabón 11

$$\begin{aligned} {}^{11}P_{P_2P_1}^* \times (-{}^{12}R^{12} f_{11,12}) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_{11}P_2P_{3x} & P_{11}P_2P_{3y} & 0 \\ -{}^{12}f_{11,12x} & -{}^{12}f_{11,12z} & {}^{11}f_{11,12y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11}P_2P_{3y} {}^{12}f_{11,12z} \\ -P_{11}P_2P_{3x} {}^{12}f_{11,12y} \\ -P_{11}P_2P_{3x} {}^{12}f_{11,12z} + P_{11}P_2P_{3y} {}^{12}f_{11,12x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{11}e_{12} \times {}^{11}f_{11}^* &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{11x}m_{11}{}^{11}a_{cg11y} - e_{11y}m_{11}{}^{11}a_{cg11x} \end{bmatrix} \\
 {}^{11}e_{11} \times {}^{11}W_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{11x}C_{11}m_{11}g - e_{11z}S_{11}m_{11}g \end{bmatrix} \\
 {}^{11}e_{11} \times {}^{11}W_{body} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{11x}C_{11}m_{body}g + e_{11z}S_{11}m_{body}g \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Sumatoria de pares del eslabón 11

$${}^{11}\mu_{11}^* = ({}^{11}P_{P_2P_8} \times (-{}^{11}R^{12}f_{11,12})) - ({}^{11}e_{11} \times {}^{11}f_{11}^*) + ({}^{11}e_{11} \times {}^{11}W_{11}) + ({}^{11}e_{11} \times {}^{11}W_{body})$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^{11}J_{z11}\tilde{\theta}_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{11}P_2P_8y{}^{12}f_{11,12y} \\ -P_{11}P_2P_8x{}^{12}f_{11,12y} \\ -P_{11}P_2P_8x{}^{12}f_{11,12z} + P_{11}P_2P_8y{}^{12}f_{11,12z} \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{11x}C_{11}m_{11}g - e_{11z}S_{11}m_{11}g \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +e_{11x}m_{11}{}^{11}a_{cg11y} - e_{11y}m_{11}{}^{11}a_{cg11x} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_{11x}C_{11}m_{body}g + e_{11z}S_{11}m_{body}g \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$



## 5.8. Eslabón 12

El eslabón 12 es el eslabón guía en la unión del  $P_1$  y  $P_2$ , los eslabones adyacentes a él son el eslabón 11 y 3. La peculiaridad de este eslabón es que su movimiento de translación está definido sobre el eslabón 11 la asignación del marco 12 se realizó considerando que es una articulación prismática.

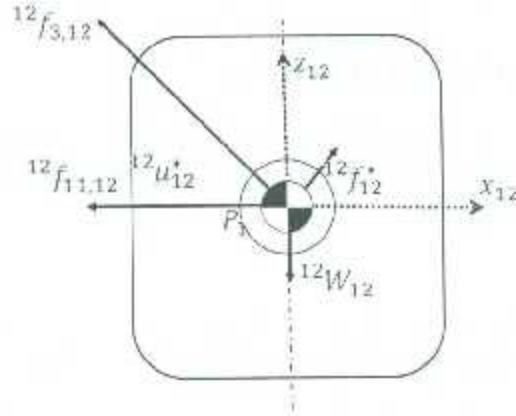


Figura 5.16: Eslabón 12

Datos del eslabón 12

$${}^{12}P_{P_1 P_3} = \begin{bmatrix} P_{P_1 P_2} \\ P_{P_1 P_3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{12}f_{11,12} = \begin{bmatrix} {}^{12}f_{11,12x} \\ {}^{12}f_{11,12y} \\ {}^{12}f_{11,12z} \end{bmatrix}, \quad {}^{12}f_{3,12} = \begin{bmatrix} {}^{12}f_{3,12x} \\ {}^{12}f_{3,12y} \\ {}^{12}f_{3,12z} \end{bmatrix},$$

$${}^{12}W_{12} = \begin{bmatrix} -S_{12}m_{12}g \\ 0 \\ -C_{12}m_{12}g \end{bmatrix}, \quad {}^{12}f_{12}^* = \begin{bmatrix} m_{12}{}^{12}a_{gc,12x} \\ m_{12}{}^{12}a_{gc,12y} \\ m_{12}{}^{12}a_{gc,12z} \end{bmatrix}, \quad {}^{12}u_{12}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^{12}I_{zz,12}\ddot{\theta}_{11} \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de fuerzas del eslabón 12

$${}^{12}f_{12}^* = {}^{12}W_{12} + {}^{12}f_{3,12} + {}^{12}f_{11,12}$$

$$\begin{bmatrix} m_{12}{}^{12}a_{gc,12x} \\ m_{12}{}^{12}a_{gc,12y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{12}m_{12}g \\ 0 \\ -C_{12}m_{12}g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{12}f_{3,12x} \\ {}^{12}f_{3,12y} \\ {}^{12}f_{3,12z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{12}f_{11,12x} \\ {}^{12}f_{11,12y} \\ {}^{12}f_{11,12z} \end{bmatrix}.$$

Operaciones previas a la sumatoria de pares del eslabón 12

$${}^{11}P_{P_1 P_3} \times ({}^{12}f_{11,12}) = \begin{bmatrix} P_{12P_1 P_2} {}^{12}f_{11,12y} \\ P_{12P_1 P_3} {}^{12}f_{11,12y} \\ P_{12P_1 P_3x} {}^{12}f_{11,12x} - P_{12P_1 P_3y} {}^{12}f_{11,12z} \end{bmatrix}.$$

Sumatoria de pares del eslabón 12

$${}^{12}\mu_{12}^* = {}^{12}P_{P_1 P_8} \times {}^{12}f_{11,12} = \begin{bmatrix} P_{12P_1 P_8y} {}^{12}f_{11,12y} \\ -P_{12P_1 P_8x} {}^{12}f_{11,12y} \\ -P_{12P_1 P_8x} {}^{12}f_{11,12x} + P_{12P_1 P_8y} {}^{12}f_{11,12x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^{12}I_{zz} \tilde{\theta}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12P_1 P_8y} {}^{12}f_{11,12y} \\ -P_{12P_1 P_8x} {}^{12}f_{11,12y} \\ P_{12P_1 P_8x} {}^{12}f_{11,12x} + P_{12P_1 P_8y} {}^{12}f_{11,12x} \end{bmatrix}$$

## 5.9. Sistema de ecuaciones

Como se considera sólo un modelo planar para las piernas las componentes de las fuerzas que corresponden al plano  $z_0$  no pueden ser incluidas en el conjunto de ecuaciones lineales por resolverse.

### • Eslabón 2

$$\begin{aligned} m_2 a_{gc2x} &= -C_3 \cdot 2^3 f_{2,3x} - S_3 \cdot 2^3 f_{2,3y} C_8 \cdot 2^8 f_{2,8x} + S_8 \cdot 2^8 f_{2,8y} - S_2 m_2 g + {}^2 f_{1,2x} \\ m_2 a_{gc2y} &= -S_3 \cdot 2^3 f_{2,3x} - C_3 \cdot 2^3 f_{2,3y} - S_8 \cdot 2^8 f_{2,8x} - C_8 \cdot 2^8 f_{2,8y} - C_2 m_2 g + {}^2 f_{1,2y} \\ {}^2 I_{zz} \tilde{\theta}_2 &= +P_{2ADx} (-S_3 \cdot 2^3 f_{2,3x} - C_3 \cdot 2^3 f_{2,3y}) - P_{2ADy} (-C_3 \cdot 2^3 f_{2,3x} + S_3 \cdot 2^3 f_{2,3y}) \\ &\quad + P_{2ADx} (-S_8 \cdot 2^8 f_{2,8x} - C_8 \cdot 2^8 f_{2,8y}) - P_{2ADy} (-C_8 \cdot 2^8 f_{2,8x} + S_8 \cdot 2^8 f_{2,8y}) \\ &\quad + e_{2x} m_2 a_{cg2y} - e_{2y} m_2 a_{cg2x} - e_{2x} C_2 m_2 g + e_{2y} S_2 m_2 g + T. \end{aligned}$$

### • Eslabón 3

$$\begin{aligned} m_3^3 a_{gc3x} &= -C_{12,3} {}^{12} f_{3,12x} + S_{12,3} {}^{12} f_{3,12y} + S_3 m_3 g + {}^3 f_{1,3x} + {}^3 f_{4,3x} \\ m_3^3 a_{gc3y} &= -S_{12,3} {}^{12} f_{3,12x} - C_{12,3} {}^{12} f_{3,12y} + C_3 m_3 g + {}^3 f_{1,3y} - {}^3 f_{4,3y} \\ {}^3 I_{zz} \tilde{\theta}_3 &= +P_{3CP_x} (-C_{12,3} {}^{12} f_{3,12y}) - P_{3CP_y} (-S_{12,3} {}^{12} f_{3,12x}) \\ &\quad + P_{3CD_x} ({}^3 f_{1,3y}) - P_{3CD_y} ({}^3 f_{1,3x}) + e_{3x} m_3^3 a_{cg3y} - e_{3y} m_3^3 a_{cg3x} \\ &\quad - e_{3x} C_3 m_3 g - e_{3y} S_3 m_3 g. \end{aligned}$$

### • Eslabón 4

$$\begin{aligned} m_4^4 a_{gc4x} &= -S_4 m_4 g + C_{3,4} {}^3 f_{4,3x} - S_{3,4} {}^3 f_{4,3y} + {}^4 f_{1,4x} \\ m_4^4 a_{gc4y} &= -C_4 m_4 g + S_{3,4} {}^3 f_{4,3x} + C_{3,4} {}^3 f_{4,3y} + {}^4 f_{1,4y} \\ {}^4 I_{zz} \tilde{\theta}_4 &= -P_{4BCx} (-S_{3,4} {}^3 f_{4,3x} - C_{3,4} {}^3 f_{4,3y}) + e_{4y} S_4 m_4 g - e_{4x} C_4 m_4 g \\ &\quad - P_{4BCy} (-C_{3,4} {}^3 f_{4,3x} + S_{3,4} {}^3 f_{4,3y}) + e_{4x} m_4^4 a_{cg4y} - e_{4y} m_4^4 a_{cg4x}. \end{aligned}$$

### • Eslabón 7

$$\begin{aligned} m_7^7 a_{gc7x} &= -C_{8,7} {}^8 f_{7,8x} + S_{8,7} {}^8 f_{7,8y} - S_7 m_7 g + {}^7 f_{1,7x} \\ m_7^7 a_{gc7y} &= -S_{8,7} {}^8 f_{7,8x} - C_{8,7} {}^8 f_{7,8y} - C_7 m_7 g + {}^7 f_{1,7y} \\ {}^7 I_{zz} \tilde{\theta}_7 &= +P_{2BFx} (-S_{8,7} {}^8 f_{7,8x} - C_{8,7} {}^8 f_{7,8y}) - P_{2BFy} (-C_{8,7} {}^8 f_{7,8x} + S_{8,7} {}^8 f_{7,8y}) \\ &\quad + e_{7x} m_7^7 a_{cg7y} - e_{7y} m_7^7 a_{cg7x} - e_{7x} C_7 m_7 g + e_{7y} S_7 m_7 g. \end{aligned}$$

### • Eslabón 8

$$\begin{aligned} m_8^8 a_{gc8x} &= -C_{11,8} {}^{11} f_{8,11x} + S_{11,8} {}^{11} f_{8,11y} - S_8 m_8 g + {}^8 f_{2,8x} + {}^8 f_{7,8x} \\ m_8^8 a_{gc8y} &= -S_{11,8} {}^{11} f_{8,11x} - C_{11,8} {}^{11} f_{8,11y} - C_8 m_8 g + {}^8 f_{2,8y} + {}^8 f_{7,8y} \\ {}^8 I_{zz} \tilde{\theta}_8 &= +P_{8F_Px} (-S_{11,8} {}^{11} f_{8,11x} - C_{11,8} {}^{11} f_{8,11y}) - e_{8x} C_8 m_8 g - e_{8y} S_8 m_8 g \\ &\quad - P_{8F_Py} (-C_{11,8} {}^{11} f_{8,11x} + S_{11,8} {}^{11} f_{8,11y}) + e_{8x} m_8^8 a_{cg8y} - e_{8y} m_8^8 a_{cg8x} \\ &\quad + P_{8F_Dx} ({}^{11} f_{2,8x} - {}^{11} f_{2,8y}) - P_{8F_Dy} ({}^{11} f_{2,8x} + {}^{11} f_{2,8y}). \end{aligned}$$

• Eslabón 11

$$\begin{aligned}
 m_{11}^{11} a_{gc11x} &= -S_{11} m_{11} g - {}^{12}f_{11,12x} + {}^{11}f_{8,11x} - S_{11} m_{body} g \\
 m_{11}^{11} a_{gc11y} &= -C_{11} m_{11} g - {}^{12}f_{11,12y} + {}^{11}f_{8,11y} - C_{11} m_{body} g \\
 {}^{11}I_{zz11} \ddot{\theta}_{11} &= -P_{11} P_2 P_3 x {}^{12}f_{11,12z} + P_{11} P_3 P_3 y {}^{12}f_{11,12x} - e_{11x} C_{11} m_{11} g - e_{11x} S_{11} m_{11} g \\
 &\quad + e_{11x} m_{11} {}^{11}a_{cg11y} - e_{11y} m_{11} {}^{11}a_{cg11x} - e_{11x} C_{11} m_{body} g + e_{11x} S_{11} m_{body} g.
 \end{aligned}$$

• Eslabón 12

$$\begin{aligned}
 m_{12}^{12} a_{gc12x} &= -S_{12} m_{12} g + {}^{12}f_{3,12x} + {}^{12}f_{11,12x} \\
 m_{12}^{12} a_{gc12y} &= -C_{12} m_{12} g + {}^{12}f_{3,12y} + {}^{12}f_{11,12y} \\
 {}^{12}I_{zz12} \ddot{\theta}_{12} &= -P_{12} P_1 P_2 x {}^{12}f_{11,12z} + P_{12} P_1 P_2 y {}^{12}f_{11,12x}
 \end{aligned}$$

# Capítulo 6

## Control y simulación

En este capítulo se presenta la descripción del control de seguimiento de trayectorias deseadas de flexión y extensión  $\theta_{rod}(t)$  del mecanismo reproductor del movimiento planar de la rodilla, donde se analiza la estabilidad en lazo cerrado. En este esquema de control basado en voltaje se considera un solo actuador donde el par de carga  $T(t)$  es ejercido por el mecanismo y el peso del usuario.

### 6.1. Control basado en voltaje

En las referencias [7] y [9] propone un control basado en voltaje modificado para robots manipuladores, cuyo análisis de estabilidad de Lyapunov concluye convergencia semiglobal de la posición y de los errores de velocidad para el caso de control de seguimiento.

El modelo eléctrico de un motor de CD con imanes permanentes es descrito por la siguiente ecuación:

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad (6.1)$$

donde  $R$  es la resistencia de armadura en ohms  $[\Omega]$ ,  $L$  es la inductancia de armadura en henrios  $[H]$ ,  $k_b$  es la constante de fuerza contraelectromotriz en voltios por segundo entre radian  $[V \cdot s/\text{rad}]$ ,  $v(t)$  es el voltaje de armadura en voltios  $[V]$ ,  $i(t)$  es la corriente de armadura en amperes  $[A]$  y  $\theta_m(t)$  es la posición del rotor en radianes  $[\text{rad}]$ .

Se puede reescribir (6.1) como:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{v(t) - Ri(t) - k_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}}{L} \quad (6.2)$$

El modelo mecánico del motor de CD con imanes permanentes está dado por

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) + rT(t) \quad (6.3)$$

donde  $T(t)$  es el par de carga en  $[N \cdot m]$ ,  $\tau_m(t)$  es el par del motor en  $[N \cdot m]$ ,  $r$  es el coeficiente de reducción de engranes,  $J_m$  es la suma de las inercias del actuador y los engranes en  $[N \cdot m/\text{seg}^2]$ , y  $B_m$  es el coeficiente de amortiguamiento en  $[N \cdot m \cdot \text{seg}/\text{rad}]$ ,  $v$ ,  $i$ ,  $\theta_m$ ,  $T$ ,  $\tau_m$  están en función del tiempo. El par del motor  $\tau_m(t)$  es proporcional a la corriente de armadura y está dado por

$$\tau_m(t) = k_m i(t), \quad (6.4)$$

donde  $k_m$  es el coeficiente de par en  $[\text{N m} / \text{A}]$ . Para el motor de CD de imanes permanentes, el coeficiente de par es igual a la constante de fuerza contraelectromotriz, esto es

$$k_m = k_b. \quad (6.5)$$

Usando (6.1), (6.3) y (6.4), se obtiene el siguiente sistema en lazo abierto.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \dot{\theta}_m(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \frac{k_m i(t) - B_m \dot{\theta}_m(t) - rT(t)}{J_m} \\ \frac{v(t) - B_e(t) - k_b \dot{\theta}_m(t)}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Ahora se usará la siguiente ley de control

$$v(t) = Ri(t) + k_1 L \frac{di(t)}{dt} + k_2 f(t) \quad (6.7)$$

$$f(t) = \dot{\theta}_{md}(t) + k_p(\theta_{md}(t) - \theta_m(t))$$

donde  $\theta_m(t)$  es la posición del rotor,  $\theta_{md}(t)$  es la posición deseada del rotor y  $\dot{\theta}_{md}(t)$  es la velocidad deseada del rotor y  $k_1$  es una constante positiva estrictamente menor que 1. Sustituyendo la ley de control (6.7) en (6.6) se puede obtener el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \frac{1}{L(1-k_1)} [k_2(\dot{e}(t) + k_p e(t))] \\ \frac{1}{J_m} [J_m \ddot{\theta}_{md}(t) + B_m(\dot{\theta}_{md}(t) - \dot{e}(t)) + rT(t) - k_m i(t)] \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

donde  $e(t) = \theta_{md}(t) - \theta_m(t)$  y  $\dot{e}(t) = \dot{\theta}_{md}(t) - \dot{\theta}_m(t)$  son los errores de posición y velocidad respectivamente. La ecuación (6.8) puede ser representada por la siguiente ecuación lineal de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2 k_p}{L(1-k_1)} & 0 & \frac{k_2}{L(1-k_1)} \\ 0 & -\frac{k_m}{J_m} & \frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{J_m} & \frac{B_m}{J_m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ \dot{\theta}_{md}(t) \\ \ddot{\theta}_{md}(t) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

que tiene la siguiente estructura

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6.10)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6.11)$$

con

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_e k_p}{L(1-k_r)} & 0 & \frac{k_b}{L(1-k_r)} \\ 0 & -\frac{k_m}{J_m} & \frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{J_m} & \frac{B_m}{J_m} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ \dot{\theta}_{md}(t) \\ \ddot{\theta}_{md}(t) \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

La transformada de Laplace de (6.9) está dada por

$$X(s) = [sI - A]^{-1}[X(0)] + [sI - A]^{-1}BU(s) \quad (6.16)$$

$$Y(s) = CX(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(s) \\ i(s) \\ \dot{e}(s) \end{bmatrix} = e(s). \quad (6.17)$$

Cuando  $U(s) = 0$  es decir, con respuesta libre, se tiene

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1}[X(0)], \quad (6.18)$$

lo que resulta en

$$e(t) = e(0)e^{-k_p t} \quad (6.19)$$

$$i(t) = e(0) \frac{B_m k_p - J_m - J_m k_p^2}{k_m} e^{-k_p t} \quad (6.20)$$

$$\dot{e}(t) = -e(0)k_p e^{-k_p t}. \quad (6.21)$$

Cuando el sistema está sujeto a la entrada  $\mathbf{u}(t)$ ; si la entrada es acotada, es decir

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ \dot{\theta}_{md}(t) \\ \ddot{\theta}_{md}(t) \end{bmatrix} \in L_{\infty}^3, \quad (6.22)$$

o sea el

$$\sup_{t \geq 0} |T(t)| < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{\theta}_{md}(t)| < \infty \quad \text{y} \quad \sup_{t \geq 0} |\ddot{\theta}_{md}(t)| < \infty \quad (6.23)$$

entonces de acuerdo con el Lema 1 del anexo D.1  $y = Cx = e(t) \in L_\infty$ . Si además la entrada

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ \dot{\theta}_{md}(t) \\ \ddot{\theta}_{md}(t) \end{bmatrix} \in L_2^3, \quad \text{o sea} \quad \int_0^\infty \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt < \infty, \quad (6.24)$$

entonces de acuerdo al Corolario del Apéndice D.1 se tiene que  $y(t) = e(t) \rightarrow 0$ , esto significa que  $\theta_m(t)$  tiende a  $\theta_{md}(t)$ . Es posible probar que en nuestro caso la entrada

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ \dot{\theta}_{md}(t) \\ \ddot{\theta}_{md}(t) \end{bmatrix} \in L_2^3 \cap L_\infty^3. \quad (6.25)$$

La prueba de lo anterior está en el Apéndice D. Por lo tanto en nuestro caso queda probado que  $\theta_m(t)$  tiende a  $\theta_{md}(t)$ .

El diagrama de control en lazo cerrado del sistema es representado en la Figura 6.1.

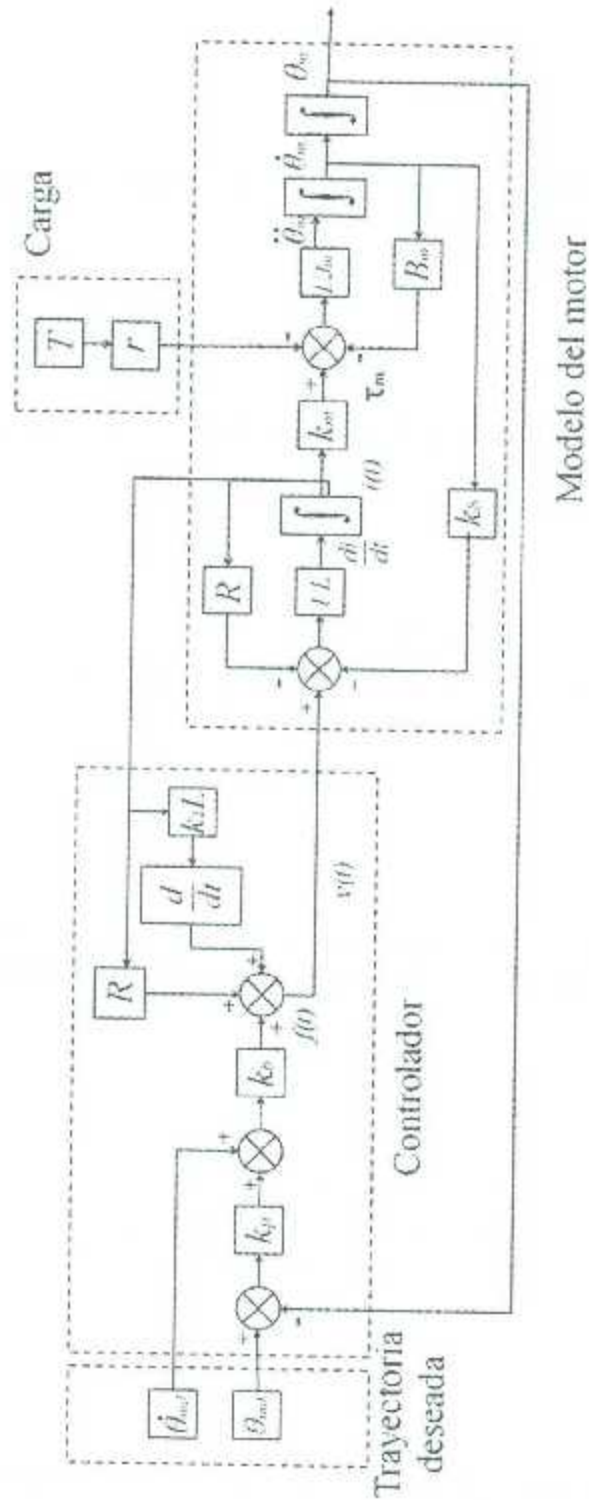


Figura 6.1: Diagrama de control en lazo cerrado



## 6.2. Simulación

Ahora se presentan los resultados de las simulaciones realizadas en *Matlab* para validar el comportamiento del modelo cinemático y dinámico del exoesqueleto de rodilla al aplicarle un control basado en voltaje. La simulación comprende la trayectoria deseada del eslabón director, modelo eléctrico del motor, modelo mecánico del motor, cinemática del exoesqueleto, dinámica del exoesqueleto, y dinámica del usuario que está representada en el capítulo 5 con el subíndice "body".

La simulación se pone a prueba para la tarea de flexión y extensión que realiza un usuario al levantarse y sentarse de un asiento. En el orden en como se mencionan las partes del diagrama de simulación (ver Figura 6.2) se hará la descripción de las mismas.

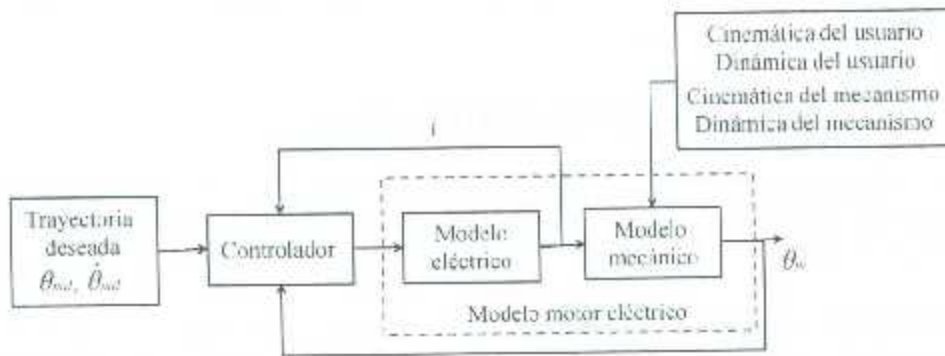


Figura 6.2: Diagrama resumido de simulación.

1.- Trayectoria deseada: en esta parte se define la trayectoria que debe tener el eslabón director. Las trayectorias deben ser suaves para evitar picos de corriente. El objetivo de control es mover la articulación del eslabón director de una posición inicial a una posición final usando una trayectoria suave en estado transitorio. Esta trayectoria cumple con las características para la estabilidad como se describe en el Apéndice D. La ecuación que describe esta trayectoria es:

$$\theta_{nd}(t) = \begin{cases} \frac{\theta_{f1}}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) - \frac{1}{4} \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) \right) \right] & \text{para } 0 < t \leq 5 \\ \frac{\theta_{f2}}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) - \frac{1}{4} \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) \right) \right] & \text{para } 5 < t \leq 10 \\ 0 & \text{para } t > t_f \end{cases}$$

donde  $\theta_{f1}$  es la posición angular a la que se llega en la etapa de extensión para luego retornar a la posición final de flexión  $\theta_{f2}$  que es 0 y  $t_{f1}$  es el tiempo en que se realiza la trayectoria de extensión en los primeros 5 segundos y flexión que para nuestro caso son los últimos 5 segundos, en total toda la simulación tiene una duración de  $t$  igual a 10 segundos.

2.- Modelo eléctrico y mecánico del motor: Estos contienen la información de las constantes del motor para que sea modelado lo más apegado a una respuesta real. El

modelo eléctrico es una parte esencial pues el controlador está basado en voltaje. Aunque ambas partes están asociadas al controlador, la parte mecánica es la que está asociada al comportamiento dinámico del exoesqueleto y su interacción con el usuario. Es en esta parte en donde se obtienen los valores de  $\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ ,  $v(t)$ , donde  $\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$  y  $\ddot{\theta}(t)$  serán utilizados para conocer la situación cinemática del exoesqueleto.

3.- Modelo cinemático y dinámico del exoesqueleto: La cinemática del exoesqueleto depende de los valores de posición, velocidad y aceleración del eslabón director de esta manera se puede saber las variables de posición, velocidad, y aceleración de los eslabones restantes, y de la carcasa superior del exoesqueleto. Las variables obtenidas en este paso son necesarias para calcular el valor numérico del  $T(t)$  que el exoesqueleto y el usuario provocan en el motor.

4.- Cinemática del usuario: Es la parte que se encarga de simular la cinemática del usuario para apreciar si el exoesqueleto está funcionando acorde al movimiento del usuario.

### 6.3. Resultados de la simulación

Los códigos empleados para realizar la simulación en *Matlab* se incluyen en el Apéndice E. Con los parámetros ya descritos anteriormente los resultados de las simulaciones son:

- La trayectoria deseada del eslabón 2 es descrita en la Figura 6.3, la cual cumple los requisitos ya establecidos en el análisis de estabilidad, dado en el Apéndice D.
- De acuerdo a los resultados obtenidos en simulación el error de seguimiento en su máximo valor es igual a 0.054 grados por lo que el seguimiento que tiene el eslabón director es satisfactorio (ver Figura 6.6). Es importante que el control cumpla con el objetivo en el seguimiento de trayectoria pues de esto depende una interacción humano-robot exitosa.
- La curva del voltaje se muestra en la Figura 5.9.
- Las Figuras 6.4 a 6.5 muestran la velocidad y aceleración deseada respectivamente, aun que la aceleración deseada no fue necesaria en el controlador se muestra para conocimiento de ella en la prueba de estabilidad del Apéndice D. Obsérvese que la velocidad deseada también es trayectoria suave.
- La Figura 6.7 se aprecia que la trayectoria real de  $\theta_m$  del rotor del motor es casi igual a la de  $\theta_{rad}$ .

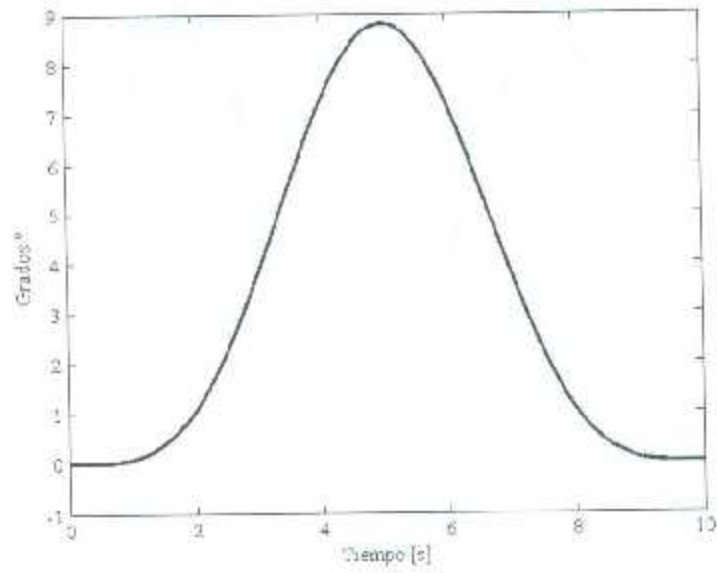


Figura 6.3: Trayectoria deseada para el rotor  $\theta_{md}(t)$

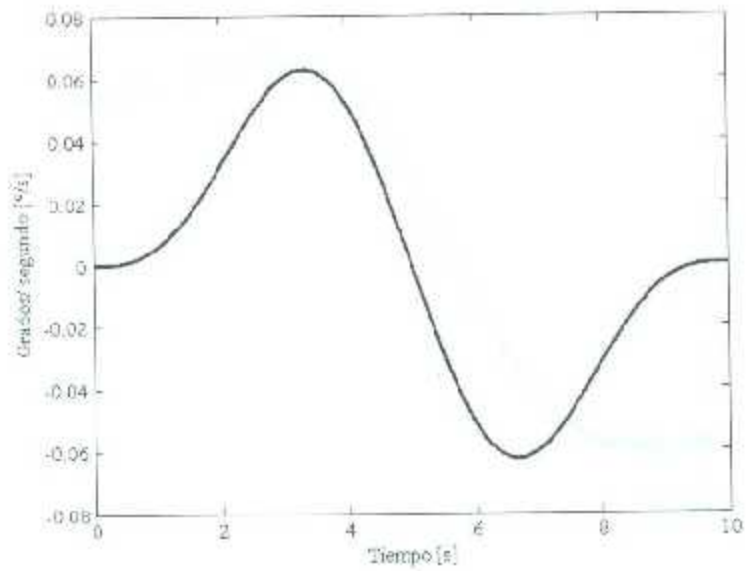


Figura 6.4: Trayectoria de la velocidad deseada para el rotor  $\dot{\theta}_{md}(t)$

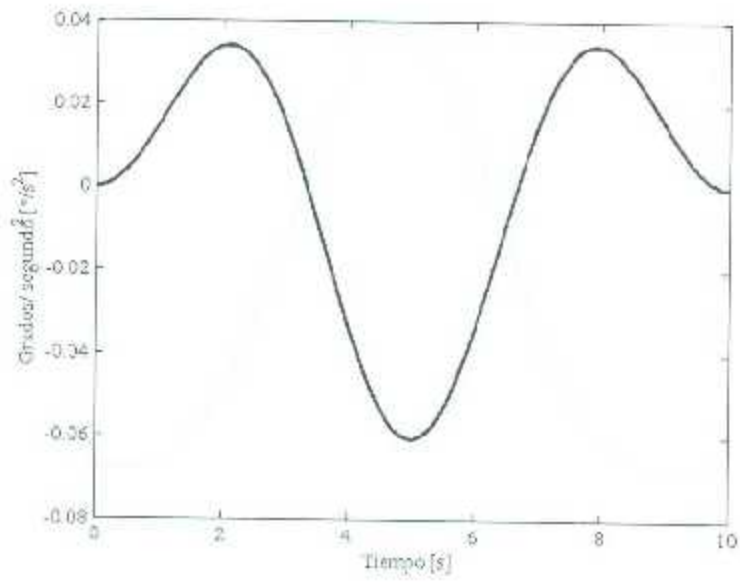


Figura 6.5: Aceleración deseada para el rotor  $\ddot{\theta}_{rod}(t)$

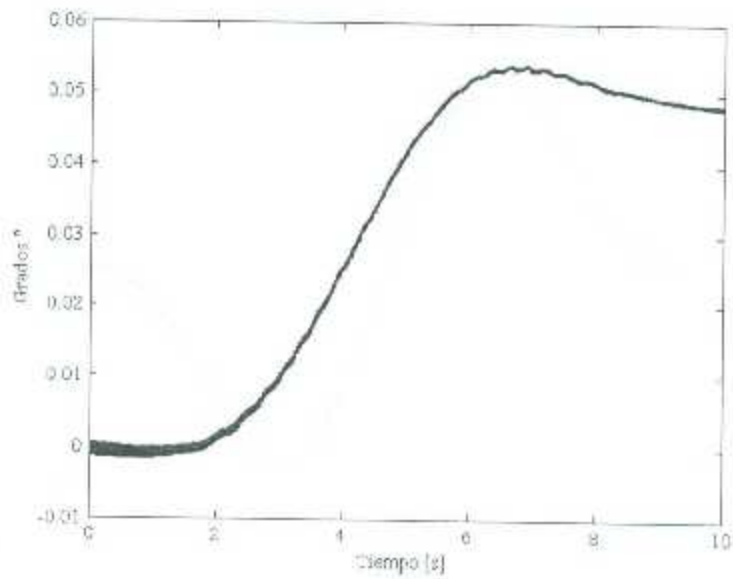


Figura 6.6: Error de seguimiento  $e(t)$  en flexión-extensión

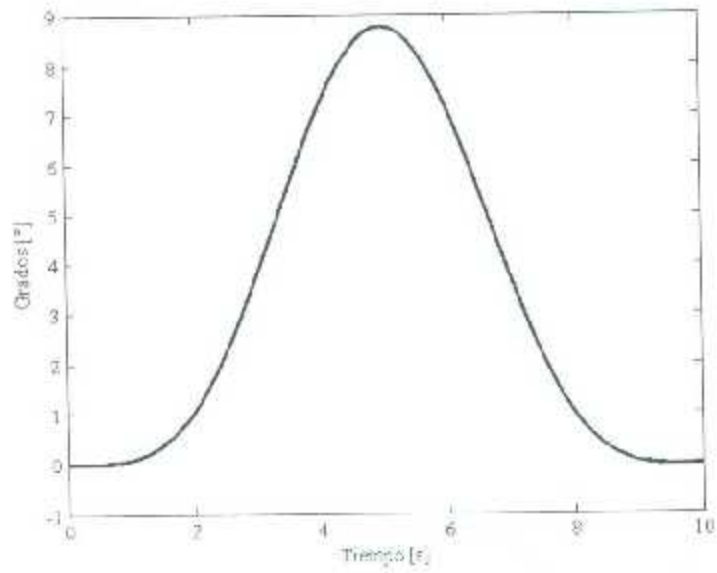


Figura 6.7: Trayectoria del rotor del motor  $\theta_m(t)$

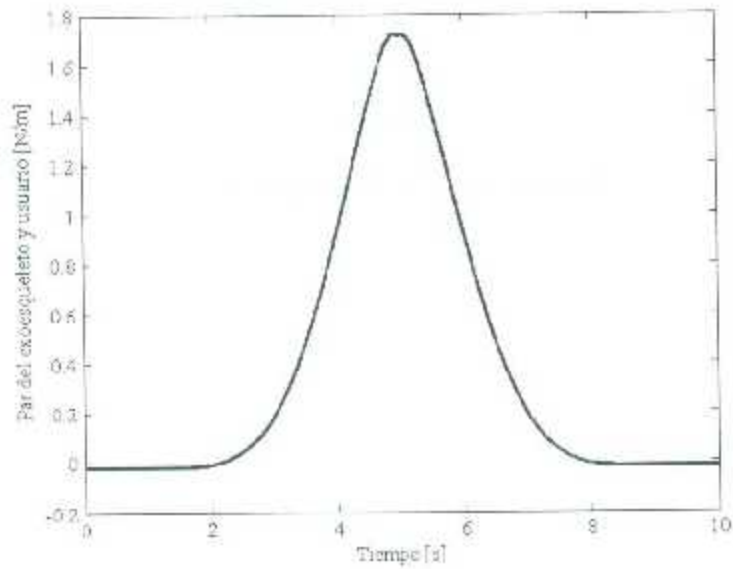


Figura 6.8:  $T(t)$  par del exoesqueleto y usuario

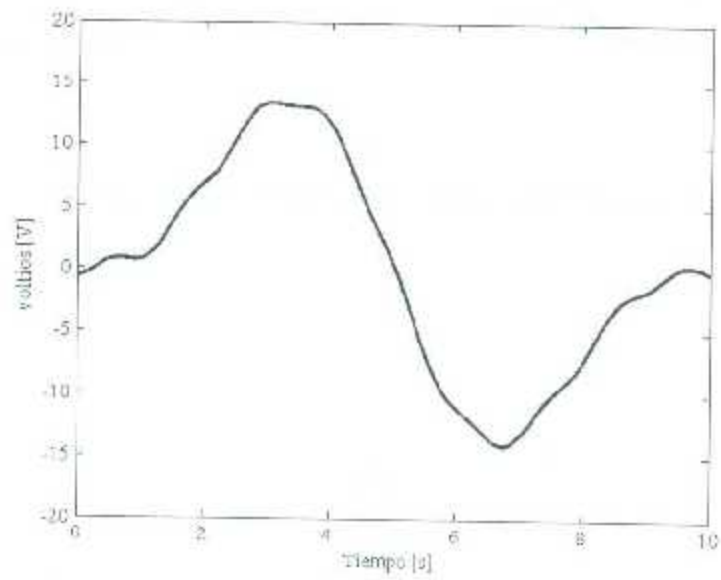


Figura 6.9: Curva de voltaje  $v(t)$

## Capítulo 7

### Conclusiones

Desarrollar un exoesqueleto desde su concepto teórico hasta la creación de un prototipo conlleva estudios multidisciplinarios, en anatomía, ergonomía, biomecánica, robótica y control. Aún existen muchas lagunas científicas para determinar que tan factible es la utilidad y sus impactos positivos o negativos en los cuerpos de quienes los usan. Esta tesis es sólo la base para lograr un entendimiento básico del funcionamiento de estos aparatos.

En este trabajo de tesis se diseñó un mecanismo que reproduce el movimiento planar de la rodilla. Para efectuar el diseño se resolvió el problema de optimización dimensional; para esto se usó un algoritmo de búsqueda del mínimo (*min search*). Este proceso de optimización permite tener un mecanismo particular para cada usuario, incluso para cada rodilla. La intención del desarrollo de este mecanismo es que efectúe la tarea de rotación y translación como lo hace la rodilla humana; así también fue necesario obtener el modelo cinemático de posición, velocidad y aceleración. Se propuso un controlador basado en voltaje para el cual fue necesario el diseño de trayectorias deseadas suaves que aseguren que estas serán alcanzadas satisfactoriamente.

Como trabajos a futuro se propone abordar el tema de interacción humano-robot.

Sería una buena aportación al tema de exoesqueletos desarrollar un controlador que satisfaga las necesidades de rehabilitación, donde también tendrían que adentrarse en los temas que tengan que ver con la respuesta del robot a la inercia y la oscilación que tienen las piernas al caminar.

# Bibliografía

- [1] Kapandji I. A. *Cuadernos de Fisiología Articular, Cuaderno II*. Toray-Masson, 1991.
- [2] Peshkin M.A. Goswami A. Aguirre-Ollinger G., Colgate J. Design of an active 1-DOF lower limb exoskeleton with inertia compensation. *Robotics Research*, 30:486-499, 2011.
- [3] Herr H. Dollar A. M. Design of a quasi-passive knee exoskeleton to assist running. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 22–26, France, Septiembre, 2008.
- [4] Hayward V. Gosselin F. Desailly E. Dung V. A., Bidand P. Self-adjusting, isostatic exoskeleton for the human knee joint. *33rd Annual International Conference of the IEEE EMBS*, Massachusetts USA, Septiembre, 2011.
- [5] Hernández F. Diseño y construcción de un prototipo neumático de prótesis de pierna humana. Tesis de Licenciatura, Universidad de las Américas. Cholula Puebla., 2008.
- [6] David A.R. Finch J. L. The significance of EA 29996 to the history of prosthetic medicine: Evaluation of the original artifact and the biomechanical assessment of a replica. *The british museum, the third british egyptology congress.*, pages 11–12.
- [7] Orrante J.A. Control de robots manipuladores tipo PID considerando fenómenos de fricción y saturación: teoría y experimentación. Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de la Laguna, 2012.
- [8] Junius K. Design of an actuated orthosis for support of the sound leg of transfemoral cyvascular amputees. Tesis de maestría, Facultad de ingeniería, Universidad de Bruselas, 2012.
- [9] Moreno J. Orrante J.A., Santibañez V. Stability analysis of a voltage based-control for robot manipulators. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 9:1-10, 2012.
- [10] Morse C. J. Collins S. H. Pratt J. F., Krupp B.T. The roboknee: An exoskeleton for enhancing strength and endurance during walking. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, Abril 2004.
- [11] Kelly R. Santibañez V. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson, Prentice Hall, 2003.



- 
- [12] Shigley J.E. Uicker J.J. *Teoría de Máquinas y Mecanismos*. Mc. Graw Hill, 1988.
- [13] Rousseau B. W. Considerations for the use of an exoskeleton for extremity control and assistance when learning to walk with cerebral palsy. Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, mayo, 2008.

# Apéndice A

## Ecuaciones de Chace

### A.1. Ecuaciones de Chace para posición, velocidad y aceleración

Chace fue el primero en aprovechar la brevedad de la notación vectorial para resolver la cinemática de posición de un mecanismo. A continuación se describirá el método de Chace para el caso de una suma vectorial  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$  en la que las direcciones de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son desconocidas.

$$\vec{A} = \pm \sqrt{A^2 - \frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}} (\hat{C} \times \hat{k}) + \frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C} \hat{C} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{B} = \mp \sqrt{A^2 - \frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}} (\hat{C} \times \hat{k}) + \frac{B^2 - A^2 + C^2}{2C} \hat{C}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $C$  es la magnitud del vector  $\vec{C}$ , y  $\hat{C}$  es el vector unitario de  $\vec{C}$  y  $A$  y  $B$  son las magnitudes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  respectivamente.

Con la aplicación de las formulas (A.1) y (A.2) es posible conocer los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en sus componentes vectoriales.

La fórmula de velocidad está dada por:

$$\dot{\vec{R}} = v\hat{R} + \omega R(\hat{k} \times \hat{R}) \quad (\text{A.3})$$

donde  $\dot{\vec{R}}$  es la velocidad instantánea,  $R$  representa la magnitud de cualquier vector,  $v$  es la velocidad lineal,  $\omega$  es la velocidad angular,  $\hat{k}$  es el vector unitario ubicado en el eje  $z$  (perpendicular al plano  $x, y$  en donde se sitúan los vectores y sus movimientos).

Para analizar la aceleración instantánea al derivar  $\dot{\vec{R}}$  con respecto al tiempo, y así se obtiene la ecuación

$$\ddot{\vec{R}} = a\hat{R} + 2\omega\dot{R}(\hat{k} \times \hat{R}) - \omega^2 R\hat{R} + \alpha R(\hat{k} \times \hat{R}), \quad (\text{A.4})$$

donde  $\ddot{\vec{R}}$  es la aceleración instantánea,  $a$  es la aceleración lineal y  $\alpha$  es la aceleración angular.

## Apéndice B

### Método de fotogrametría

Entre las técnicas de estudio del movimiento del cuerpo humano está la goniometría, el sistema ISL ( Instrumented Spacial Linkage), la videografía, la radiografía, la fluoroscopia y la fotogrametría. El método aplicado en el desarrollo de esta tesis es la de fotogrametría combinada con videografía.

Para obtener los puntos  $P_1^*$  y  $P_2^*$  que son utilizados en el capítulo 3 se sugiere el siguiente procedimiento, que consiste en tomar una serie de fotografías para observar y describir el movimiento de flexión y extensión de cada usuario:

- 1.-Es necesario trazar un marco  $M_0$  a partir del cual se estudiarán las posiciones.

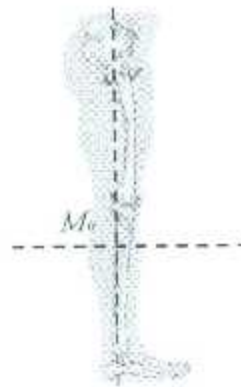


Figura B.1: Lugar de colocación del  $M_0$

- 2.- Se marca el piso para asegurar que siempre se colocarán los pies de la misma manera

- 3.- Se coloca una cámara fotográfica o de video a la altura del marco  $M_0$ , si la cámara fotográfica tiene la opción de tomar fotografías secuenciadas es necesario tener esa opción, pero si la cámara no tiene la opción será necesario usar una cámara que tome video.

- 4.- Cuando se tenga el video será necesario obtener una secuencia de fotos con algún software de edición de video o fotografía, una vez que se tiene esta secuencia, es necesario escalar las longitudes trazadas e impresas de las fotografías con las longitudes reales.

Nota: Es necesario que desde el comienzo se trace una recta sobre la pierna o muslo de manera vertical y se tenga conocimiento y anotación de la longitud pues ésta servirá como referencia al momento del escalamiento.

Se sugiere al lector que si intenta reproducir el experimento no dude en realizarlo más de una ocasión para verificar la calidad de las fotografías o video.

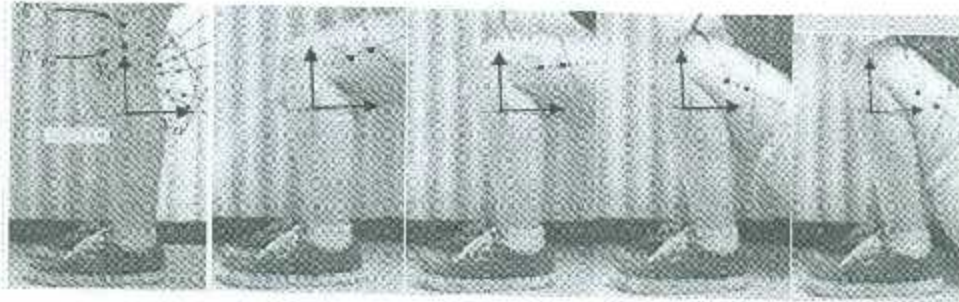


Figura B.2: Fotogrametría de rodilla para los puntos de optimización

# Apéndice C

## Parámetros

Los datos de las siguientes tablas son utilizados en los valores requeridos para las simulaciones de control.

Tabla C.1: Valor numérico de los parámetros de la simulación.

Parámetro	Unidad	Valor
$R$	$\Omega$	2.3
$L$	H	0.0096
$J_{\eta}$	$[\text{N m/s}^2]$	0.001243
$B_m$	$[\text{N m s/rad}]$	0.00108
$\tau$	m	1/15
$k_b$	-	0.573
$k_{op}$	-	0.5
$k_{uv}$	-	0.04
$m_1$	kg	0.3
$m_2$	kg	0.3
$m_3$	kg	0.3
$m_4$	kg	0.4
$m_5$	kg	0.2
$m_6$	kg	0.3
$m_7$	kg	0.4
$m_{body}$	kg	50
$I_1$	kg	0.1
$I_2$	kg	0.2
$I_3$	kg	0.1
$I_4$	kg	0.1
$I_5$	kg	0.6
$I_6$	kg	0.1
$I_7$	kg	0.3

Tabla C.2: Valor numérico de las longitudes.

Parámetro	Unidad	Valor
$d_1$	m	0.0044
$d_2$	m	0.0019
$d_3$	m	$1.4989 \times 10^{-4}$
$d_4$	m	0.0090
$d_5$	m	$8.0000 \times 10^{-4}$
$d_6$	m	$4.5290 \times 10^{-5}$
$d_7$	m	0.0013
$d_8$	m	0.0013
$d_9$	m	$3.8234 \times 10^{-4}$
$d_{10}$	m	0.0067
$d_{best}$	m	0.1250
$d_{11}$	m	0.3911
$d_{12}$	m	0.0017
$d_{13}$	m	$3.7473 \times 10^{-3}$
$d_{14}$	m	$1.1615 \times 10^{-4}$
$d_{15}$	m	$3.0650 \times 10^{-4}$
$d_{16}$	m	0.0019
$d_{17}$	m	0.0014

# Apéndice D

## Espacios de funciones

### D.1. Conceptos básicos [11]

El espacio  $L_2^n$  consiste en el conjunto de todas las funciones continuas  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que:

$$\int_0^\infty f(t)^T f(t) dt = \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt < \infty. \quad (D.1)$$

El espacio  $L_\infty^n$  consiste en el conjunto de todas las funciones continuas  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que sus normas euclidianas sean acotadas, es decir,

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\| < \infty. \quad (D.2)$$

Los símbolos  $L_2$  y  $L_\infty$  sirven para denotar a los espacios  $L_2^1$  y  $L_\infty^1$  respectivamente.

Considérese un sistema dinámico lineal descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  es el estado del sistema,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$  es la entrada,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  es la salida y  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$  son matrices con coeficientes reales constantes. La matriz de transferencia  $H(s)$  del sistema se define como  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$  donde  $s \in \mathbb{C}$ .

El siguiente resultado permite obtener conclusiones sobre la pertenencia de  $\mathbf{y}$  e  $\dot{\mathbf{y}}$  a  $L_2^n$  o  $L_\infty^n$  dependiendo de si  $\mathbf{u}$  pertenece a  $L_2^n$  o a  $L_\infty^n$ .

**Lema 1** Considérese la matriz cuadrada de dimensión  $n$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$  cuyos elementos son funciones racionales estrictamente propias de la variable compleja  $s$ . Supóngase que los denominadores de sus elementos tienen todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo.

-Si  $\mathbf{u} \in L_2^n$  entonces  $\mathbf{y} \in L_2^n \cap L_\infty^n$ ,  $\dot{\mathbf{y}} \in L_2^n$  e  $\mathbf{y}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

-Si  $\mathbf{u} \in L_\infty^n$  entonces  $\mathbf{y} \in L_\infty^n$ ,  $\dot{\mathbf{y}} \in L_\infty^n$ .

Finalmente, se presenta el siguiente corolario cuya demostración es inmediata del Lema 1.

**Corolario 1** Considérese la hipótesis del Lema 1 sobre la matriz de transferencia  $H(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  denótese por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$  sus entradas y salidas, respectivamente. Si  $\mathbf{u} \in L_2^n \cap L_\infty^n$ , entonces:

$$\mathbf{y} \in L_2^n \cap L_\infty^n$$

$$\dot{\mathbf{y}} \in L_2^n \cap L_\infty^n$$

$$\mathbf{y}(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

## D.2. Prueba de que $\mathbf{u}(t)$ pertenece a $L_2^3$ y a $L_\infty^3$

Sea

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ \dot{\theta}_{md}(t) \\ \ddot{\theta}_{md}(t) \end{bmatrix}$$

con

$$\theta_{md}(t) = \begin{cases} \frac{\theta_{f1}}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) - \frac{1}{4} \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) \right) \right] & \text{para } 0 < t \leq 5 \\ \frac{\theta_{f2}}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) - \frac{1}{4} \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) \right) \right] & \text{para } 5 < t \leq 10 \\ 0 & \text{para } t > t_f \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_{md}(t) = \begin{cases} \frac{\pi \theta_{f1}}{2t_f} \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) - \frac{1}{4} \text{sen}\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) \right] & \text{para } 0 < t \leq 5 \\ \frac{\pi \theta_{f2}}{2t_f} \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) - \frac{1}{4} \text{sen}\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) \right] & \text{para } 5 < t \leq 10 \\ 0 & \text{para } t > t_f \end{cases}$$

$$\ddot{\theta}_{md}(t) = \begin{cases} \frac{\pi^2 \theta_{f1}}{2t_f^2} \left[ \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f1}}\right) \right] & \text{para } 0 < t \leq 5 \\ \frac{\pi^2 \theta_{f2}}{2t_f^2} \left[ \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{t_{f2}}\right) \right] & \text{para } 5 < t \leq 10 \\ 0 & \text{para } t > t_f \end{cases}$$

donde  $t_f$  es el periodo del ciclo de rehabilitación y  $\theta_{f1}$  y  $\theta_{f2}$  fueron definidos en el capítulo 6; las gráficas de  $\theta_{md}$ ,  $\dot{\theta}_{md}$  y  $\ddot{\theta}_{md}$  se muestran en las Figuras 6.3, 6.4 y 6.5 respectivamente.

$T(t)$  se calcula de acuerdo al modelo dinámico visto en el capítulo 5 y su perfil se muestra en la Figura 6.8. De acuerdo a las respuestas  $\theta_{md}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{md}(t)$



y  $T(t)$  dadas se puede observar que el área bajo la curva desde 0 a  $\infty$  es acotada y por lo tanto cada una de las componentes de  $\mathbf{u}(t)$  están acotadas; es decir

$$\int_0^{\infty} \dot{\theta}_{md}(t)^2 dt < \infty$$

$$\int_0^{\infty} \dot{\theta}(t)^2 dt < \infty$$

$$\int_0^{\infty} T(t)^2 dt < \infty.$$

También es posible observar que el

$$\sup_{t \geq 0} \|\dot{\theta}_{md}(t)\| < \infty$$

$$\sup_{t \geq 0} \|\dot{\theta}\| < \infty$$

$$\sup_{t \geq 0} \|T(t)\| < \infty$$

por lo tanto  $\mathbf{u}(t)$  pertenece a los espacios  $L_2^3 \in L_\infty^3$ .

# Apéndice E

## Código de simulación

El siguiente código es para efectuar la simulación en el programa Matlab, corresponde a las funciones necesarias para efectuar la simulación cinemática y de control.

### E.1. qerror

```
function [qt] = qerror_folyn(x)
t=x(1);
qm=x(2);
tetai= 20.0*(pi/180);
tetad= 11.2000*(pi/180);
tiempototal= 10 ;
qd1=((tetad-tetai)/2)*(1-cos((pi*t)/(tiempototal-0)))+tetai;
r=1/15;
qd=(1/r)*qd1;
qt1=r*(qd-qm);
qt=[qt1;qd];
```

### E.2. qerrorextensión

```
function [qt] = qerror_folyn_pararse(x)
t =x(1);
qm=x(2);
tetai= 11.2000*(pi/180);
tetad= 20.0*(pi/180);
tiempototal= 10 ;
qd1=((tetad-tetai)/2)*(1-cos((pi*t)/(tiempototal-0)))+tetai;
r=1/15;
qd=(1/r)*qd1;
qt1=r*(qd-qm);
qt=[qt1;qd];
```

### E.3. Voltaje flexión

```
function [v] = voltaje_folyn(x)
ip1=x(1);
i1=x(2);
qm1=x(3);
t=x(4);
tetai= 20.0*(pi/180);
tetad= 11.2000*(pi/180);
tiempototal= 10;
ed1=((tetad-tetai)/2)*(1-cos((pi*t)/(tiempototal-0)))+tetai;
qpd1=(pi/2)*((tetad-tetai)/(tiempototal-0))*sin((pi*t)
/(tiempototal-0));
r = 1/15;
ip = ip1;
i = i1;
qd = (1/r)*qd1;
qpd=(1/r)*qpd1;
qm = qm1;
R = 2.3;
kb= 0.573;
L= 0.99*0.0096;
kpp= 0.1;
kpp=0.5
v = R*i+L*ip+kb*(qpd+kpp*(qd-qm));
```

### E.4. Voltaje extensión

```
function [v] = voltaje2_folyn_pararse(x)
ip1=x(1);
i1=x(2);
qm1=x(3);
t=x(4);
qppm1=x(5);
tetai= 11.2000*(pi/180);
tetad= 20.0*(pi/180);
tiempototal= 10 ;
qd1=((tetad-tetai)/2)*(1-cos((pi*t)/(tiempototal-0)))+tetai;
qpd1=x(6);
qpd1=(pi/2)*((tetad-tetai)/(tiempototal-0))*sin((pi*t)
/(tiempototal-0));
r=1/15;
ip=ip1;
i= i1;
qd=(1/r)*qd1;
qpd=(1/r)*qpd1;
qm= qm1;
qppm= qppm1;
```

```
R= 2.3; kb=0.573; L=0.9*0.0096;
kpp= 1.8; kvv= 0.04;
v = R*i+L*ip+kb*(qpd+kpp*(qd-qm)-kvv*qp);
```

## E.5. Animación cinemática

```
clc
clear all
x=[-12.580102637804686 3.12670904418286 -8.509391086383808
0.0039227408415070785 9.375538861834713 1.7294216164896987+.002
6.183433154892813 11.004711514705676 4.315323778126766
5.143895277312804 2.7632825258723215+.002 8.730906981656549
1.67912454975464];
ax=x(1);
ay=x(2);
bx=x(3);
by=x(4);
r2long=x(5); %director
r3long=x(6); %acoplador 1 OK
r4long=x(7); %retorno 1 OK
r5long=x(8); %herramienta prolongacion
r6long=x(9); %herramienta largo
r7long=x(10); %retorno 2 OK
r8long=x(11); %acplador R5
r9long=x(12); % herramienta 2 prol
r10long=x(13); %herramienta 2 largo
T=1; np= 100; %%T1; np= 100;
teta1= 20.0*(pi/180);
teta2= -8.8*(pi/180);
for i=0:np
    t=T*i/np; %ley de movimiento
    theta2= teta1+teta2*((t/T)-(1/(2*pi))*(sin(2*pi*t/T)));%%
    rAv= [ax ay 0 ];
    r1long=sqrt( (bx-ax)^2+(by-ay)^2 );
    theta1=atan2(real(by-ay),real(bx-ax));
    r1v=[r1long*cos(theta1) r1long*sin(theta1) 0 ];
    r2v=[r2long*cos(theta2) r2long*sin(theta2) 0 ];
    rDv=r2v-r1v;
    rDx=rDv(1);
    rDy=rDv(2);
    rDlong= sqrt(rDx^2+rDy^2 );
    rDux= rDx/rDlong;
    rDuy= rDy/rDlong;
    rDu= [rDx/rDlong rDy/rDlong 0];
    k=[0 0 1];
    g14=((r4long^2)-(r3long^2)+(rDlong^2 )) / (2*rDlong);
    h14=-sqrt((r4long^2)-g14^2);
```

```

r4v=h14*(cross(rDu,k))+g14*(rDu);
r3v=r4v-rDv;
r3ux= r3v(1)/r3long;
r3uy= r3v(2)/r3long;
r3unitario=[r3ux r3uy 0];
ang3=atan2(r3uy,r3ux)*180/pi;
r5unitario= -r3unitario;
r6unitario= cross(k,-r3unitario);
r5v=r5long*r5unitario;
r6v=r6long*r6unitario;
r4v=r2v+r3v-r1v;
rP1v=rAv+r2v+(r5long*r5unitario)+(r6long*r6unitario);
XP1=rP1v(1);
YP1=rP1v(2);
g17=((r7long^2)-(r8long^2)+(rDlong^2 )) / (2*rDlong);
h17=-sqrt((r7long^2)-g17^2);
r7v=h17*(cross(rDu,k))+g17*(rDu);
r8v=r7v-rDv;
r8ux= r8v(1)/r8long ;
r8uy= r8v(2)/r8long ;
r8unitario=[r8ux r8uy 0];
r9unitario= -r8unitario;
r10unitario= cross(k,-r8unitario);
r7v=rDv+r8v;
r9v=r9long*r9unitario;
r10v=r10long*r10unitario;
rP2v=rAv+r2v+(r9long*r9unitario)+(r10long*r10unitario);
XP2=rP2v(1);
YP2=rP2v(2);
r1x=[ax bx] ; r1y=[ay by];
r2x=[ax rAv(1)+r2v(1)];
r2y=[ay rAv(2)+r2v(2)];
r3x=[ax+r2v(1) ax+r2v(1)+r3v(1)];
r3y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r3v(2)];
r4x=[bx bx+r4v(1)];
r4y=[by by+r4v(2)];
r5x=[ax+r2v(1) ax+r2v(1)+r5v(1)];
r5y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r5v(2)];
r6x=[ax+r2v(1)-r5v(1) ax+r2v(1)+r5v(1)+r6v(1)];
r6y=[ay+r2v(2)+r5v(2) ay+r2v(2)+r5v(2)+r6v(2)];
r8x=[ax+r2v(1) ax+r2v(1)+r8v(1)];
r8y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r8v(2)];
r7x=[bx bx+r7v(1)] ;
r7y=[by by+r7v(2)] ;
r9x=[ax+r2v(1) ax+r2v(1)+r9v(1)];
r9y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r9v(2)];
r10x=[ax+r2v(1)+r9v(1) ax+r2v(1)+r9v(1)+r10v(1)];
r10y=[ay+r2v(2)+r9v(2) ay+r2v(2)+r9v(2)+r10v(2)];

```

```

px1=[0 4 6.8 7.5 8.1];
py1=[17.5 14.804 11.477 10 7.9];
px2=[0 2.7 4 4.6 5.1];
py2=[14.5 12.1 10.4 9.2 7.9] ;
px=[px1' px2'];
py=[py1' py2'];

%graficacion de la trayectoria
plrx(i+1)=XP1;
piry(i+1)=YP1;
p2rx(i+1)=XP2;
p2ry(i+1)=YP2;
prx=[XP1 XP2];
pry=[YP1 YP2];

%% articulacion prismatica parte fija
angulofemur=atan2(real(YP2-YP1),real(XP2-XP1))-pi;
longbx=XP2+.6*cos(angulofemur);
longby=YP2+.6*sin(angulofemur);
basecx=(longbx+.4*cos(angulofemur-(pi/2)));
basesy=(longby+.4*sin(angulofemur-(pi/2)));
baseix=(longbx+.4*cos(angulofemur+(pi/2)));
baseiy=(longby+.4*sin(angulofemur+(pi/2)));
cajaex=basecx+.7*cos(angulofemur);
cajasy=basesy+.7*sin(angulofemur);
cajaix=baseix+.7*cos(angulofemur);
cajaiy=baseiy+.7*sin(angulofemur);

largofundax=[longbx XP2];
largofunday=[longby YP2];

basesupx=[longbx basecx];
basesupy=[longby basesy];
baseinfx=[longbx baseix];
baseinfy=[longby baseiy];

fundasx=[basecx cajaex];
fundasy=[basesy cajasy];
fundaix=[baseix cajaix];
fundaiy=[baseiy cajaiy];

%% articulacion prismatica parte movil
longmx=XP1+2*cos(angulofemur+pi);
longmy=YP1+2*sin(angulofemur+pi);
tcpesx=(longmx+.3*cos(angulofemur+(pi/2)));

```

```

topesy=(longmy+.3*sin(angulofemur+(pi/2)));

topeix=(longmx+.3*cos(angulofemur-(pi/2)));
topeiy=(longmy+.3*sin(angulofemur-(pi/2)));

largointeriorx=[longmx XP1];
largointeriorx=[longmy YP1];

basensupx=[longmx topezx];
basensupy=[longmy topesy];

baseminfx=[longmx topeix];
baseminfy=[longmy topeiy];

%% muslo y femur

muslofrentex = [ XP1+5*cos(angulofemur+(pi/2))+10*cos(angulofemur)
XP2+5*cos(angulofemur+(pi/2))-1*cos(angulofemur)] ;
muslofrentey = [ YP1+5*sin(angulofemur+(pi/2))+10*sin(angulofemur)
YP2+5*sin(angulofemur-(pi/2))-1*sin(angulofemur)] ;

musloatrasx = [ XP1+6*cos(angulofemur-(pi/2))+10*cos(angulofemur)
XP2+6*cos(angulofemur-(pi/2))-1*cos(angulofemur)] ;
musloatrasx = [ YP1+6*sin(angulofemur-(pi/2))+10*sin(angulofemur)
YP2+6*sin(angulofemur-(pi/2))-1*sin(angulofemur)] ;

%%pierna fija

piernafrentex=[-4 -4];
piernafrentey=[1.5 -7];

piernaatrasx=[4 4];
piernaatrasly=[1.5 -6];

%% Graficacion
figure(1)
% plot
plot(px,py,'p',p1rx,p1ry,'b',p2rx,p2ry,'g',basensupx,basensupy,'k',
baseminfx,baseminfy,'k',largointeriorx,largointeriorx,'k',
largofundax,largofunday,'r',basesupx,basesupy,'r',baseinfx,baseinfy,
'r',fundasx,fundasy,'r',fundaix,fundaiy,'r',ax,ay,'s',bx,by,'s',r1x,
r1y,'b',r2x,r2y,'b',r3x,r3y,'k', r4x,r4y,'k',r5x,r5y,'k',r6x,r6y,
'k',XP1,YP1,'ok',XP2,YP2,'or', r7x,r7y,'r',r8x,r8y,'r',r9x,r9y,
'r', r10x,r10y,'r',r1x,r1y,'ob',r2x,r2y,'ob',r3x,r3y,'ok', r4x,r4y,
'ok',r7x,r7y,'or',r8x,r8y,'cr')
hold on
plot([-4 4],[1.5 1.5],'m', [muslofrentex(1),musloatrasx(1)],

```

```

[muslofrentey(1),musloatrasx(1)], 'm', [muslofrentex(2),
musloatrasx(2)], [muslofrentey(2),musloatrasx(2)], 'm', piernaatrasix,
piernaatrasix, 'm', piernaafrentex, piernaafrentey, 'm', muslofrentex,
muslofrentey, 'm', musloatrasx, musloatrasx, 'm', 'linewidth', 3)
hold off
grid on
axis ([-15, 20, -5, 30]);

longfemur(i+1)= ((XP1-XP2)^2+(YP1-YP2)^2)^(1/2);
angulofemur=angulofemur*(180/pi);
checar1=r7long+r8long;
checar2=r3long+r4long;
r7=sqrt((r7v(1))^2+(r7v(2))^2);
end

```

## E.6. Modelo dinámico directo

```

clc
clear all
x=[-12.580102637804686 3.12670904418286 -8.509391086383808
0.0039227408415070785 9.375538861834713 1.7294216164896987+.002
5.183433154892813 11.004711514705676 4.315323778126766
5.143895277312804 2.7632825258723215+.002 5.730906981656549
1.67912454975464];

%x=xmts;
ax=x(1);
ay=x(2);
bx=x(3);
by=x(4);
r2long=x(5); %director
r3long=x(6); %acoplador 1 OK
r4long=x(7); %retorno 1 OK
r5long=x(8); %herramienta prolongacion
r6long=x(9); %herramienta largo
r7long=x(10); %retorno 2 OK
r8long=x(11); %acplador R5
r9long=x(12); %herramienta 2 prol
r10long=x(13); %herramienta 2 largo
r12long=1.7;
T=1; np= 100; %T1; np= 100;
tetai= 20.0*(pi/180);
tetad= -8.8*(pi/180);
for i=0:np
    t=T*i/np; %ley de movimiento
    theta2= tetai+tetad*((t/T)-(1/(2*pi))*(sin(2*pi*t/T)));
    omega2=[0 0 (tetad/T)*(1-cos(t*2*pi/T))];
    alpha2=[0 0 (tetad*2*pi/(T*T))*sin(t*2*pi/T)];
end

```



```

rAv= [ax ay 0 ];
r1long=sqrt( (bx-ax)^2-(by-ay)^2 );
theta1=atan2(real(by-ay),real(bx-ax));
r1v=[r1long*cos(theta1) r1long*sin(theta1) 0 ];
r2v=[r2long*cos(theta2) r2long*sin(theta2) 0 ];
r2unitario=[cos(theta2) sin(theta2) 0 ];

rDv=r2v-r1v;
rDx=rDv(1);
rDy=rDv(2);
rDlong= sqrt(rDx^2+rDy^2 );
rDux= rDx/rDlong;
rDuy= rDy/rDlong;
rDu= [rDx/rDlong rDy/rDlong 0];
k=[0 0 1];
g14=((r4long^2)-(r3long^2)+(rDlong^2 )) / (2*rDlong);
h14=-sqrt((r4long^2)-g14^2);
r4v=h14*(cross(rDu,k))+g14*(rDu);
r3v=r4v-rDv;
r3ux= r3v(1)/r3long;
r3uy= r3v(2)/r3long;
r3unitario=[r3ux r3uy 0];
ang3=atan2(r3uy,r3ux)+180/pi;

r5unitario= -r3unitario;
r6unitario= cross(k,-r3unitario);
r5v=r5long*r5unitario;
r6v=r6long*r6unitario;
r4v=r2v+r3v-r1v;
r4unitario=r4v/r4long;
rP1v=rAv+r2v+(r5long*r5unitario)+(r6long*r6unitario);

XP1=rP1v(1);
YP1=rP1v(2);

%% para el mecanismo de P2

g17=((r7long^2)-(r8long^2)+(rDlong^2 )) / (2*rDlong);
h17=-sqrt((r7long^2)-g17^2);
r7v=h17*(cross(rDu,k))-g17*(rDu);

r8v=r7v-rDv;
r8ux= r8v(1)/r8long ;
r8uy= r8v(2)/r8long ;
r8unitario=[r8ux r8uy 0];
r9unitario= -r8unitario;
r10unitario= cross(k,-r8unitario);
r7v=rDv+r8v;

```

```

r7unitario=r7v/r7long;
r9v=r9long*r9unitario;
r10v=r10long*r10unitario;

rP2v=rAv+r2v+(r9long*r9unitario)+(r10long*r10unitario);

r11v=rP2v-rP1v;
r12v=rP1v-rP2v;
r11unitario=r11v/ ((( r11v(1)-r12v(1))^2)+(r11v(2)
-r12v(2)^2))^1/2);
r12unitario=-r11unitario;

XP2=rP2v(1);
YP2=rP2v(2);

r1x=[ax bx] ; r1y=[ay by];
r2x=[ax rAv(1)+r2v(1)];
r2y=[ay rAv(2)+r2v(2)];
r3x=[ax+r2v(1) ax+r2v(1)+r3v(1)];
r3y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r3v(2)];
r4x=[bx bx+r4v(1)] ;
r4y=[by by+r4v(2)] ;
r5x=[ax-r2v(1) ax+r2v(1)+r5v(1)];
r5y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r5v(2)];
r6x=[ax+r2v(1)+r5v(1) ax+r2v(1)+r5v(1)+r5v(1)];
r6y=[ay+r2v(2)+r5v(2) ay+r2v(2)+r5v(2)+r6v(2)];
r8x=[ax+r2v(1) ax+r2v(1)+r8v(1)];
r8y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r8v(2)];
r7x=[bx bx+r7v(1)];
r7y=[by by+r7v(2)];
r9x=[ax+r2v(1) ax+r2v(1)+r9v(1)];
r9y=[ay+r2v(2) ay+r2v(2)+r9v(2)];
r10x=[ax+r2v(1)+r9v(1) ax+r2v(1)+r9v(1)+r10v(1)];
r10y=[ay+r2v(2)+r9v(2) ay+r2v(2)+r9v(2)+r10v(2)];

%% puntos deseados
px1=[0 4 6.8 7.5 8.1 ];
py1=[17.5 14.804 11.477 10 7.9 ];
px2=[0 2.7 4 4.6 5.1 ];
py2=[14.5 12.1 10.4 9.2 7.9 ];
px=[px1' px2'];
py=[py1' py2'];

%graficacion de la trayectoria
plrx(i+1)=XPi;
plry(i+1)=YPi;

```

```

p2rx(i+1)=XP2;
p2ry(i+1)=YP2;

prx=[XP1 XP2];
pry=[YP1 YP2];

%% articulacion prismatica parte fija
angulofemur=atan2(real(YP2-YP1),real(XP2-XP1))-pi;
longbx=XP2+.6*cos(angulofemur);
longby=YP2+.6*sin(angulofemur);
basesx=(longbx+.4*cos(angulofemur-(pi/2)));
basesy=(longby+.4*sin(angulofemur-(pi/2)));
baseix=(longbx+.4*cos(angulofemur+(pi/2)));
baseiy=(longby+.4*sin(angulofemur+(pi/2)));
cajasx=basesx+.7*cos(angulofemur);
cajasy=basesy+.7*sin(angulofemur);
cajaix=baseix+.7*cos(angulofemur);
cajaiy=baseiy+.7*sin(angulofemur);

largofundax=[longbx XP2];
largofunday=[longby YP2];

basesupx=[longbx basesx];
basesupy=[longby basesy];
baseinfx=[longbx baseix];
baseinfy=[longby baseiy];

fundasx=[basesx cajasx];
fundasy=[basesy cajasy];
fundaix=[baseix cajaix];
fundaiy=[baseiy cajaiy];

%% articulacion prismatica parte movil
longmx=XP1+2*cos(angulofemur+pi);
longmy=YP1+2*sin(angulofemur+pi);
topesx=(longmx+.3*cos(angulofemur+(pi/2)));
topesy=(longmy+.3*sin(angulofemur+(pi/2)));
topeix=(longmx+.3*cos(angulofemur-(pi/2)));
topeiy=(longmy+.3*sin(angulofemur-(pi/2)));
largointeriorx=[longmx XP1];
largointeriorx=[longmy YP1];
basemsupx=[longmx topesx];
basemsupy=[longmy topey];
baseminfx=[longmx topeix];
baseminfy=[longmy topeiy];
%% muslo y femur
muslofrentex = [ XP1+5*cos(angulofemur+(pi/2))+10*cos(angulofemur)
XP2+5*cos(angulofemur+(pi/2))-1*cos(angulofemur)];

```

```

muslofrentey = [ YP1+5*sin(angulofemur+(pi/2))-10*sin(angulofemur)
YP2+5*sin(angulofemur+(pi/2))-1*sin(angulofemur)];
musloatrasx = [ XP1+6*cos(angulofemur-(pi/2))+10*cos(angulofemur)
XP2+6*cos(angulofemur-(pi/2))-1*cos(angulofemur)];
musloatrasx = [ YP1+6*sin(angulofemur-(pi/2))+10*sin(angulofemur)
YP2+6*sin(angulofemur-(pi/2))-1*sin(angulofemur)];

%%pierna fija
piernafrentex=[-4 -4];
piernafrentey=[1.8 -7];
piernaatrasix=[4 4];
piernaatrasly=[1.5 -6];

%% Graficacion
figure(1)
% plot
plot(px,py,'p',plr,plry,'b',p2rx,p2ry,'g',basemsupx,basemsupy,
'k',baseminfx,baseminfy,'k',largointeriorx,largointeriory,'k',
largofundax,largofunday,'r',basesupx,basesupy,'r',baseinfx,
baseinfy,'r',fundasx,fundasy,'r',fundaix,fundaiy,'r',ax,ay,'s',
bx,by,'s',r1x,r1y,'b',r2x,r2y,'b',r3x,r3y,'k', r4x,r4y,'k',r5x,
r5y,'k',r6x,r6y,'k',XP1,YP1,'ok',XP2,YP2,'or', r7x,r7y,'r',
r8x,r8y,'r',r9x,r9y,'r', r10x,r10y,'r',r1x,r1y,'ob',r2x,r2y,'ob',
r3x,r3y,'ok', r4x,r4y,'ok',r7x,r7y,'or',r8x,r8y,'or');
hold on
plot([-4 4],[1.5 1.5],'m', [muslofrentex(1),musloatrasx(1)],
[muslofrentey(1),musloatrasx(1)], 'm', [muslofrentex(2),musloa
trasx(2)], [muslofrentey(2),musloatrasx(2)], 'm',piernaatrasix,
piernaatrasly,'m',piernafrentex,piernafrentey,'m',muslofrentex,
muslofrentey,'m',musloatrasx,musloatrasly,'m','linewidth',3)
hold off
grid on
axis ([-15,20,-5,30]);
%figure(2)
% plot (t,angulofemur)
%hold on
%vector del femur es el segmento "eg"
% axis ([-.5,.5,-.5,.5]);

longfemur(i+1)= ((XP1-XP2)^2+(YP1-YP2)^2)^(1/2);
anfulosalida=angulofemur*(180/pi);
checari=r7long+r8long;
checar2=r3long+r4long;
r7=sqrt((r7v(1))^2+(r7v(2))^2);

%% modelo cinematico de velocidad

```

```

omega3= [0 0 -omega2(3)*r2v*(dot((cross(k,r2unitario)),
r4unitario)) / r3v*(dot((cross(k,r3unitario)),r4unitario))];
omega4= [0 0 omega2(3)*r2v*(dot((cross(k,r2unitario)),
r3unitario)) / r4v*(dot((cross(k,r4unitario)),r3unitario))];
omega5= omega3;
omega6= omega3;

omega8= [0 0 -omega2(3)*r2v*(dot((cross(k,r2unitario)),
r7unitario)) / r8v*(dot((cross(k,r8unitario)),r7unitario))];
omega7= [0 0 omega2(3)*r2v*(dot((cross(k,r2unitario)),
r8unitario)) / r7v*(dot((cross(k,r7unitario)),r8unitario))];
omega9= omega8;
omega10= omega8;

omega11= [0 0 ((omega3(3)*(r3v)*(dot(cross(k,r3unitario),
cross(k,r11unitario))))+(omega3(3)*r5v*dot(cross(k,r5unitario),
cross(k,r11unitario)))-(omega8(3)*(r8v)*(dot(cross(k,r8unitario),
cross(k,r11unitario)))-(omega8(3)*r10v*dot(cross(k,r10unitario),
cross(k,r11unitario))))/(r9v*dot(cross(k,r9unitario),
cross(k,r9unitario))) ];

omega12=omega11 ;
vellineal12= ((omega3(3)*(r3v)*(dot(cross(k,r3unitario),
r11unitario)))+(omega3(3)*r5v*dot(cross(k,r5unitario),r11unitario))
-(omega8(3)*(r8v)*(dot(cross(k,r8unitario),r11unitario)))
-(omega8(3)*r10v*dot(cross(k,r10unitario),r11unitario)))/
(dot(r11unitario,r11unitario));

%% modelo cinematico de aceleracion

alpha3 = [ 0 0 (-dot((omega2(3)^2)*r2long*r2unitario,r4unitario)
+dot(alpha2(3)*r2long*cross(k,r2unitario),r4unitario)-dot((omega3
(3)^2)*r3long*r3unitario,r4unitario)+dot((omega4(3)^2)*r4long*
r4unitario,r4unitario))/ (-dot(r3long*cross(k,r3unitario),
r4unitario))];

alpha4 = [ 0 0 (-dot((omega2(3)^2)*r2long*r2unitario,r3unitario)
+dot(alpha2(3)*r2long*cross(k,r2unitario),r3unitario)-dot((omega3
(3)^2)*r3long*r3unitario,r3unitario)+dot((omega4(3)^2)*r4long*
r4unitario,r3unitario))/ (-dot(r4long*cross(k,r4unitario),
r3unitario))];

alpha8 = [ 0 0 (-dot((omega2(3)^2)*r2long*r2unitario,r7unitario)
+dot(alpha2(3)*r2long*cross(k,r2unitario),r7unitario)-dot((
omega8(3)^2)*r8long*r8unitario,r7unitario)+dot((omega7(3)^2)*

```

```

r7long*r7unitario,r7unitario))/ (-dot(r8long*cross(k,r8unitario),
r7unitario))];

alpha7 = [ 0 0 (-dot((omega2(3)^2)*r2long*r2unitario,r8unitario)
+dot(alpha2(3)*r2long*cross(k,r2unitario),r8unitario)-dot((
omega8(3)^2)*r8long*r8unitario,r8unitario)+dot((omega7(3)^2)*r7long
*r7unitario,r8unitario))/ (-dot(r7long*cross(k,r7unitario),
r8unitario))];

alpha5 = alpha3 ;
alpha6 = alpha3 ;
alpha9 = alpha8 ;
alpha10= alpha8 ;

acellineal12 = [ 0 0 (-omega3(3)^2 *r3long*dot(r3unitario,
r12unitario)+alpha3(3)*r3long*dot(cross(k,r3unitario),
r12unitario)-omega3(3)^2*r3long*dot(r3unitario,r12unitario)
+alpha3(3)*r3long*dot(cross(k,r3unitario),r12unitario)
+omega8(3)^2 *r8long*dot(r8unitario,r12unitario)-alpha8(3)
*r8long*dot(cross(k,r8unitario),r12unitario)+omega8(3)^2*
r8long*dot(r8unitario,r12unitario)-alpha8(3)*r8long*dot
(cross(k,r8unitario),r12unitario) +omega12*r12long*dot
(r12unitario,r12unitario))/(dot(r12unitario,r12unitario))];
alpha12 = [0 0 (-omega3(3)^2*r3long*dot(r3unitario,
(cross(k,r12unitario)))+alpha3(3)*r3long*dot(cross(k,
r3unitario),(cross(k,r12unitario)))-omega3(3)^2*r3long*dot
(r3unitario,(cross(k,r12unitario)))+alpha3(3)*r3long*dot
(cross(k,r3unitario),(cross(k,r12unitario)))+omega8(3)^2*
r8long*dot(r8unitario,(cross(k,r12unitario)))-alpha8(3)*
r8long*dot(cross(k,r8unitario),(cross(k,r12unitario)))
+omega8(3)^2*r8long*dot(r8unitario,(cross(k,r12unitario)))
-alpha8(3)*r8long*dot(cross(k,r8unitario),(cross(k,
r12unitario)))+2*omega12(3)*vellineal12*dot((cross(k,
r12unitario),(cross(k,r12unitario)))/(r12long*(dot(cross
(k,r12unitario), cross(k,r12unitario))))];

alpha11 = -alpha12 ;

%% modelo dinamico
% desarrollo del modelo dinamico

%%constantes del modelo dinamico
% se escribira el prefijo new a cada
% nuevo valor asignado para
%no confundir con la nomenclatura anterior

newlccdir=1 ;

```

```

tetadir=theta2 ;
rb=newlkdir;
newracopaBlong= r3long/2
newtetacentroacoplador= tetaacoplador;
newracopbBlong=r6/2
tetacentroacopladorB= Btetaacoplador;
rcfemurElong=r9/2
tetafemur=posicionfemur;
rcdeslizadorGlong=r9;
tetadeslizador=posicionfemur;
alphadir=alpha1(3);
omegadir=omega1(3);
Ldir=r2
tetaacopa=tetaacoplador;
alphaacopa=Alphaacoplador(3);
omegaacopa=Omegaacoplador(3);
tetaacopb=Btetaacoplador;
omegaacopb=BOmegaacoplador(3);
alphaacopb=BAlphaacoplador(3);
lcretornoa=r4/2
tetareta=tetaretorno;
alphareta=Omegaseguidor(3);
omegareta=Alphaseguidor(3);
lcretornob=r5/2
tetaretb=Btetaretorno;
alpharetb=B0megaseguidor(3);
omegaretb=BAlphaseguidor(3);
lher= ((ex-bx)^2+(ey-by)^2)^(1/2);
tetaher= atan2((ey-by),(ex-bx));
alphaher=Alphaacoplador(3);
omegaher=Omegaacoplador(3);
lcfem=r9/2 ;
tetafem=tetafemur;
alphafem=acelangular9 ;
omegafem=omega9;
lcdes=r9;
tetades= tetadeslizador;
alphades=acelangular9;
omegades=omega9;
lcreta=lcretornoa;

%% localizacion de los centroides de masa

%eslabon director
rcdirx= ax-lkdir*cos(tetadir);
rcdiry= ay+lkdir*sin(tetadir);

```

```

rcdir=[rcdirx rcdiry 0 ] ;
        %del centro al punto A
rcdirA= rA-rcdir;
        %del centro al punto B
rcdirB= rb-rcdir;

%eslabon acoplador A
racopax=bx+racopaBlong*cos(tetacentroacoplador);
racopay=by+racopaBlong*sin(tetacentroacoplador);
rcacopa=[racopax racopay 0 ] ;
        %del centro al punto B
rcacopaB=rB-rcacopa;
        %del centro al punto C
rcacopaC=rC-rcacopa;
        %del centro al punto E
%rcacopaE=rE-rcacopa;

%eslabon acoplador B
racopbx=bx+racopbBlong*cos(tetacentroacopladorB);
racopby=by+racopbBlong*sin(tetacentroacopladorB);
rcacopb=[racopbx racopby 0 ] ;
        %del centro al punto B
rcacopbB=rB-rcacopb;
        %del centro al punto C
rcacopbF=rF-rcacopb;
        %del centro al punto E
rcacopbG=rG-rcacopb;

%eslabon femur
rcfemurx=ex+rcfemurElong*cos(tetafemur);
rcfemury=ey+rcfemurElong*sin(tetafemur);
rcfemur=[rcfemurx rcfemury 0 ] ;
        %del centro al punto E
rcacopaE=rE-rcfemur;
        %del centro al punto G
rcacopaG=rG-rcfemur;

%eslabon femur parte del deslizador
rcdeslizadorx=gx+rcdeslizadorGlong*cos(tetadeslizador);
rcdeslizadory=gy+rcdeslizadorGlong*sin(tetadeslizador);
rcdeslizador=[rcdeslizadorx rcdeslizadory 0 ] ;
        %del centro al punto G
rcdeslizadorG=rG-rcdeslizador;

```



```

%eslabon retorno A
rcretax=ax+lcreta*cos(tetaretorno);
rcretay=ay+lcreta*sin(tetaretorno);
rcreta=[rcretax rcretay 0 ] ;
        %del centro al punto D
rcretaD=rD-rcreta;
        %del centro al punto C
rcretaC=rC-rcreta;

%eslabon retorno B
rcretbx=ax+lcretornob*cos(Btetaretorno);
rcretby=ay+lcretornob*sin(Btetaretorno);
rcretb=[rcretbx rcretby 0 ] ;
        %del centro al punto D
rcretbD=rD-rcretb;
        %del centro al punto F
rcretbF=rF-rcretb;

%% velocidades del centro de masa

%% aceleraciones del centro de masa
        %acel centroide del eslabon director
acelcentrodirx= -lkdir*sin(tetadir)*alphadir-lkdir*cos
(tetadir)*(omegadir^2);
acelcentrodiry= lkdir*cos(tetadir)*alphadir-lkdir*sin
(tetadir)*omegadir^2;
acelcentrodir = [acelcentrodirx  acelcentrodiry  0 ];
acdirx=acelcentr[edir(1);
acdiry=acelcentrodir(2);
        %acel centroide del eslabon acoplador A
acelcentroacopladorax= -Ldir*sin(tetadir)*alphadir-Ldir*
cos(tetadir)*omegadir^2 -racopaBlong*sin(tetaacopa)*
alphaacopa-racopaBlong*cos(tetaacopa)*omegaacopa^2;
acelcentroacopladoray= Ldir*cos(tetadir)*alphadir-Ldir*
sin(tetadir)*omegadir^2 +racopaBlong*cos(tetaacopa)*
alphaacopa-racopaBlong*sin(tetaacopa)*omegaacopa^2;
acelcentroacopladora = [ acelcentroacopladorax
acelcentroacopladoray  0 ];

        %acel centroide del eslabon acoplador B
acelcentroacopladorbx= -Ldir*sin(tetadir)*alphadir-Ldir*
cos(tetadir)*omegadir^2 -racopbBlong*sin(tetaacopb)*
alphaacopb-racopbBlong*cos(tetaacopb)*omegaacopb^2;
acelcentroacopladorby= Ldir*cos(tetadir)*alphadir-Ldir*
sin(tetadir)*omegadir^2 +racopbBlong*cos(tetaacopb)*
alphaacopb-racopbBlong*sin(tetaacopb)*omegaacopb^2;
acelcentroacopladorb = [ acelcentroacopladorbx

```

```

acelcentroacopladorby  0 ]];

%acel centroide del eslabon retorno A
acelcentrorretornoax= -lcretornoa*sin(tetareta)*alphareta
-lcretornoa*cos(tetareta)*omegareta^2;
acelcentrorretornoay= lcretornoa*cos(tetareta)*alphareta
-lcretornoa*sin(tetareta)*omegareta^2;
acelcentrorretornoa =[ acelcentrorretornoax
acelcentrorretornoay  0 ]];

%acel centroide del eslabon retorno B
acelcentrorretornobx= -lcretornob*sin(tetaretb)*alpharetb
-lcretornob*cos(tetaretb)*omegaretb^2;
acelcentrorretornoby= lcretornob*cos(tetaretb)*alpharetb
-lcretornob*sin(tetaretb)*omegaretb^2;
acelcentrorretornob =[ acelcentrorretornobx
acelcentrorretornoby  0 ]];

%acel centroide del eslabon femur
acelcentrofemx= -Ldir*sin(tetadir)*alphadir-Ldir*cos(tetadir)
*omegadir^2-Lher*sin(tetaher)*alphaher-Lher*cos(tetadir)
*omegaher^2-lcfem*sin(tetafem)*alphafem-lcfem*cos(tetafem)
*omegafem^2;\\
acelcentrofemy= Ldir*cos(tetadir)*alphadir-Ldir*cos(tetadir)
*omegadir^2+Lher*sin(tetaher)*alphaher-Lher*sin(tetadir)
*omegaher^2+lcfem*cos(tetafem)*alphafem-lcfem*cos(tetafem)
*omegafem^2;
acelcentrofem =[ acelcentrofemx  acelcentrofemy  0 ]];

%acel centroide del eslabon deslizante
acelcentrodesx= -Ldir*sin(tetadir)*alphadir-Ldir*cos(tetadir)
*omegadir^2-Lher*sin(tetaher)*alphaher-Lher*cos(tetadir)*
omegaher^2-lcdes*sin(tetades)*alphades-lcdes*cos(tetades)
*omegades^2;
acelcentrodesy= Ldir*cos(tetadir)*alphadir-Ldir*cos(tetadir)
*omegadir^2+Lher*sin(tetaher)*alphaher-Lher*sin(tetadir)
*omegaher^2+lcdes*cos(tetades)*alphades-lcdes*cos(tetades)
*omegades^2;
acelcentrodes =[ acelcentrodesx  acelcentrodesy  0 ]];

%% modelo por recursivo
rH=rE+[cos(posicionfemur)*.04,sin(posicionfemur)*.04,0];
P1AB = rB-rA;
P2EC = rC-rD;

```

```

P3CB = rB-rC;
P3CE = rE-rC;
P4EH = rH-rE;
P5HG = rG-rH;
P6DF = rF-rD;
P7DF = rF-rD;
P7FB = rF-rB;
P7FG = rG-rF;
Pbody= [.5*cos(posicionfemur);.5*sin(posicionfemur);0];

```

```

e11 = rcdir;
e22 = rcreta-rC;
e33 = rcacopa-rC;
e44 = rcifemur-rE;
e55 = rcifemur-rH;
e66= rcretb-rD;
e77= rcretb-rF;

```

```

omega00 = [0;0;0];
omega11 =cmega1;
omega22 =Omegaseguidor;
omega33 =Omegaacoplador;
omega44 = [0; 0; omega9] ;
omega55 = [0; omega9 ; 0 ] ;
vel55 = [0; vellineal9 ; 0 ];
omega66 =BUnegaseguidor;
omega77 =BOmegaacoplador;

```

```

alpha00 = [0;0;0];
alpha11 = alpha1;
alpha22 = Alphaseguidor;
alpha33 = Alphaacoplador;
alpha44 = [0; 0; acelangular9] ;
alpha55 = [0; acelangular9; 0] ;
acel55 = [0; acellineal9;0 ] ;
alpha66 = BAlphaseguidor;
alpha77 = BAlphaacoplador;

```

```

ag11= cross(alpha11,e11)'+cross(omega11,cross(omega11,e11))' ;
ag22= cross(alpha22,e22)'+cross(omega22,cross(omega22,e22))' ;
ag33= cross(alpha33,e33)'+cross(omega33,cross(omega33,e33))' ;
ag44= cross(alpha44,e44)'+cross(omega44,cross(omega44,e44))' ;
ag55= cross(alpha55,e55)'+cross(omega55,cross(omega55,e55))'+acel55;
ag66= cross(alpha66,e66)'+cross(omega66,cross(omega66,e66))' ;

```

```

ag77= cross(alpha77,e77)'+cross(omega77,cross(omega77,e77))' ;

% Angulos para las matrices de rotacion ...
% TIENEN UN SUBINDICE LA LETRA "R"
theta1 = thetadir ;
theta2 = tetaretorno;
theta3 = tetaacoplador-tetaretorno+pi;
theta4 = tetafenur-theta3;
theta5 = theta4;
theta6 = Btetaretorno;
theta7 = Btetaacoplador+pi-Btetaretorno;
theta31 = tetaacoplador+pi-thetadir;
theta71 = Btetaacoplador+pi-thetadir;
theta75 = theta5-theta7;

C1= cos(theta1); S1= sin(theta1);
C2= cos(theta2); S2= sin(theta2);
C3= cos(theta3); S3= sin(theta3);
C4= cos(theta4); S4= sin(theta4);
C5= cos(theta5); S5= sin(theta5);
C6= cos(theta6); S6= sin(theta6);
C7= cos(theta7); S7= sin(theta7);
C31= cos(theta31); S31= sin(theta31);
C71= cos(theta71); S71= sin(theta71);
C75= cos(theta75); S75= sin(theta75);

R01=[C1 -S1 0 ; S1 C1 0 ; 0 0 1] ;
R02=[C2 -S2 0 ; S2 C2 0 ; 0 0 1] ;
R23=[C3 -S3 0 ; S3 C3 0 ; 0 0 1] ;
R34=[C4 -S4 0 ; S4 C4 0 ; 0 0 1] ;
R45=[ 1 0 0 ; 0 0 1 ; 0 -1 0];
R06=[C6 -S6 0 ; S6 C6 0 ; 0 0 1] ;
R67=[C7 -S7 0 ; S7 C7 0 ; 0 0 1] ;
R31=[C31 -S31 0 ; S31 C31 0 ; 0 0 1] ;
R71=[C71 -S71 0 ; S71 C71 0 ; 0 0 1] ;
R75=[C75 -S75 0 ; S75 C75 0 ; 0 0 1] ;
L5=r9;

%% datos del modelo dinamico
m1=.3;
m2=.3;
m3=.3;
m4=.4;
m5=.2 ;
m6=.3;

```

```

m7=.4;
%tbody=50;%0;%50;

I1=.1;
I2=.2;
I3=.1;
I4=.1;
I5=.6;
I6=.1;
I7=.3;

g=9.81; %m/seg^2

EC25=m5*ag55(1);
EC26=0;
EC27=m5*ag55(2)+m5*(g);
EC28=0;
EC29=e55(1)*m5*g+I5*alpha55(3)-e55(2)*m5*ag55(1)+e55(1)*m5*ag55(2);
EC30=0;
EC37=m7*ag77(1);
EC38=m7*ag77(2)+m7*(g);
EC39=0;
EC40=0;
EC41=0;
miuast29=(R75*[0;0;EC29]);
EC42=e77(1)*m7*g+I7*alpha77(3)-e77(2)*m7*ag77(1)+e77(1)*m7*ag77(2)
+miuast29(3);
EC31=m6*ag66(1);
EC32=m6*ag66(2)+m6*(g);
EC33=0;
EC34=0;
EC35=0;
miuast42=(R67*[0;0;EC42]);
EC36=e66(1)*m6*g+I6*alpha66(3)-e66(2)*m6*ag66(1)+e66(1)*m6*ag66(2)
+miuast42(3);
EC19=m4*ag44(1);
EC20=m4*ag44(2)+m4*(g);
EC21=0;
EC22=0;
EC23=0;
miuast29=(R45*[0;0;EC29]);
EC24=e44(1)*m4*g+I4*alpha44(3)-e44(2)*m4*ag44(1)+e44(1)*m4*ag44(2)
+miuast29(3);
EC13=m3*ag33(1);
EC14=m3*ag33(2)+m3*g+mbody*g;
EC15=0;
EC16=0;
EC17=0;

```

```

miuast24=+(R34*[0;0;EC24]);
EC18=e33(1)*m3*g+I3*alpha33(3)-e33(2)*m3*ag33(1)+e33(1)*m3*ag33(2)
+Pbody(1)*mbody*g+miuast24(3);
EC7=m2*ag11(1);
EC8=m2*ag11(2)+m2*(g);
EC9=0;
EC10=0;
EC11=0;
miuast18=(R23*[0;0;EC18]);
EC12=e22(1)*m2*g+I2*alpha22(3)-e22(2)*m2*ag22(1)+e22(1)*m2*ag22(2)
+miuast18(3);
EC1=m1*ag11(1);
EC2=m1*ag11(2)-m1*(g);
EC3=0;
EC4=0;
EC5=0;
miuast3171=+(R31*[0;0;EC18])+(R71*[0;0;EC36]);
EC6=e11(1)*m1*g+I1*alpha11(3)-e11(2)*m1*ag11(1)+e11(1)*m1*ag11(2)
+miuast3171(3);

%% dinamica solucion por sustitucion
F23Z=EC11/P2DC(1);
F75Y=EC30/(C5+L5);
F13Z=(EC15-(EC11/P2DC(1))+EC17)/(1-P3CB(1));
F34Z=EC17+(P3CB(1)*F13Z);
F45Z=F34Z;
F75Z=EC26-F45Z;
F45X=(EC24+(P4EH(1)+F45Z))/(P4EH(1)+P4EH(2));
F75X=EC25-F45X;
F34X=EC19+F45X;
F45Y=EC23/(-P4EH(1));
F34Y= EC20+F45Y;
F67X= EC36/((-P6DF(1)*S7)-(P6DF(2)+C7));
F67Y= (-F67X*((P6DF(2)*C7)-(P6DF(1)*S7))+EC36)/((-P6DF(1)*C7)
-(P6DF(2)*S7));
F67Z= EC35/P6DF(1);
F16Z= EC33-F67Z;
F17Z= EC33-F67Z;
F16Y= EC32-(S7*F67X)-(C7*F67Y);
F16X= EC31-(C7*F67X)+(S7*F67Y);
F17Y= EC38-(S75*F75X)+(C75*F75Y)-F67Y;
F17X=EC37-F67X+C75*F75X-S75*F75Y;
F12Z=EC9+F23Z;
SIM1=(EC18-(F34X*(-P3CE(1)*S4+P3CE(2)*C4))-(F34Y*(-P3CE(1)*C4
-P3CE(2)*S4)))/((1-P3CB(2)));
SIM2= -EC14-(S4*F34X)-(C4*F34Y);
SIM3= -EC13-(C4*F34X)-(S4*F34Y);
SIM4= -P2DC(1)*S2-P2DC(2)*C2;

```

```

SIM5= +P2DC(1)*C2-P2DC(2)*S2;
SIM6= EC12/SIM4 ;
M=[1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 SIM5/SIM4 1 ];
VEC=[SIM1;-SIM3;(SIM2/SIM4)];
VAR=VEC\M;
VEC1=SIM2/SIM4;
F13X=VAR(1);
F23X=VAR(2);
F23Y=VAR(3);
F13Y=EC14-F23Y+(S4*F34X)+(C4*F34Y);
F12Y=EC8+(C2*F23Y)+(S2*F23X);
F12X=EC7+(C2*F23X)-(S2*F23Y);
F01Z=EC3+F13Z+F17Z;
F01Y=EC2+(S31*F13X)+(S31*F13Y)+(S71*F17X)+(C71*F17Y);
F01X=EC1+(C31*F13X)-(S31*F13Y)+(C71*F17X)-(S71*F17Y);
TAU= EC6-(F13X*(-(P1AB(1)*S31)+(P1AB(2)*C31)))-(F13Y*(-(P1AB(1)
*C31)-(P1AB(2)*S31)))-(F17X*(-(P1AB(1)*S71)+(P1AB(2)*C71)))-(F17Y
*{-(P1AB(1)*C71)-(P1AB(2)*S71)});
TAU0= R01*[0 ; 0 ;TAU];

```

```
%% grafica
```

```

figure(5);
plot(t, TAU0(3),'o')
xlabel('t pararse (o) '),ylabel('Mmt ')
title('Tau '),grid
hold on

```

```
end
```

## E.7. Modelo eléctrico

```

function [ip] =modelo_electrico folyn(x)
%#eml
v1=x(1);
qp1=x(2);
i1=x(3);

v=v1;
qp=qp1;
i=i1;
R= 2.3; kb=0.573; Li= 1/0.0096;
ip1 = Li*(v-R*i-kb*qp);
ip= ip1;
\end{varbatim}

```

```
\section{Modelo mecánico}
\begin{verbatim}
function [qppm] =modelo_mecanico_folyn(x)
tc1=x(1);
t1=x(2);
qp1m=x(3);
r=1/15;
tc=r*tc1;
t =t1;
qpm= qp1m ;
Ji= 1/0.001243; B= 0.00108 ;
qppm = Ji*(t-B*qpm-tc);
\end{verbatim}
```



