



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Diseño óptimo y cuantificación de regeneración de energía de un absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional sujeto a vibración estocástica.

presentada por

Ing. Irving Abdiel Maldonado Bravo

como requisito para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Mecánica**

Director de tesis

Dr. Jorge Colín Ocampo

Codirector de tesis

Dr. Eduardo Barredo Hernández

Cuernavaca, Morelos, México. Enero de 2020.

Cuernavaca, Mor., 27/enero/2022
No. de Oficio: SAC/27/2022
Asunto: Autorización de impresión de tesis

**IRVING ABDIEL MALDONADO BRAVO
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
P R E S E N T E**

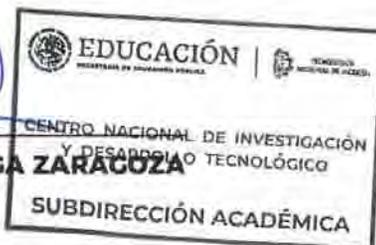
Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"DISEÑO ÓPTIMO Y CUANTIFICACIÓN DE REGENERACIÓN DE ENERGÍA DE UN ABSORBEDOR DE DOBLE MASA SINTONIZADAS CON INERCIA ROTACIONAL SUJETO A VIBRACIÓN ESTOCÁSTICA"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"Excelencia en Educación Tecnológica"
"Educación Tecnológica al Servicio de México"


DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



C.c.p Lic. Silvia del Carmen Ortiz Fuentes, Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Expediente
CMAZ/CHG

Cuernavaca, Mor., 27/enero/2022
No. Oficio: DIM/36/2022
Asunto: Autorización de impresión de tesis

**ING. IRVING ABDIEL MALDONADO BRAVO
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN ING. MECÁNICA
P R E S E N T E.**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **DISEÑO ÓPTIMO Y CUANTIFICACIÓN DE REGENERACIÓN DE ENERGÍA DE UN ABSORBEDOR DE DOBLE MASA SINTONIZADAS CON INERCIA ROTACIONAL SUJETO A VIBRACIÓN ESTOCÁSTICA** han informado, que están de acuerdo con el documento presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su documento de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"



**DR. MARIO ALEJANDRO GÓMEZ JIMÉNEZ
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**

C.c.p. Depto. de Servicios Escolares Lic. Silvia del Carmen Ortiz Fuentes
Expediente
MAGJ/RMA

*A mi ejemplo de hombre bueno y perseverante,
al que me dijo te amo sin palabras, a aquel
que me enseñó a investigar. A la memoria
de mi abuelo; Andrés Maldonado Ortíz.*

Agradecimientos

A mi creador.

Por acompañarme en esta etapa de mi vida, por despejar mi mente a través del deporte, por alegrarme con atardeceres hermosos en los momentos de angustia, por la familia que me a otorgado y personas amadas que por el he conocido. Gracias Padre.

A mi madre.

Soledad Maldonado Bravo, por su esfuerzo extraordinario para darme una vida digna y sencilla desde mi infancia hasta el día de hoy. Por sus sabios consejos de vida y orientación académica constante. Por su dureza y tenacidad para hacerme un hombre fuerte. Por su amor constante e incansable. Gracias mamá, te amo.

A mi abuela.

Paula Bravo Martinez, por el dulce amor de madre que me ha brindado desde niño, por los momentos que compartimos cada fin de semana, cada tarde, en cada viaje y cada vez que necesite un consuelo. Te amo abuelita.

A mi hermana.

Aymara Liliana, por escucharme siempre, cuidarme y consolarme en todo momento. Por alegrarse en mis exitos como si fueran suyos. Gracias Aymi, te quiero.

Al CONACYT.

Por el apoyo económico gubernamental que se me otorgó durante la realización de este trabajo.

Al CENIDET.

Por permitirme ingresar al programa de postgrado, aceptar mi trabajo de investigación y brindarme su confianza para concluirlo.

A mi director de tesis.

Dr. Jorge Colín Ocampo, por el asesoramiento al introducirme en este tema de investigación, sus enseñanzas como profesor y atenciones en el desarrollo de este trabajo. Por guiarme profesionalmente en este medio académico y haberme brindado su amistad.

A mi codirector de tesis.

Dr. Eduardo Barredo Hernández, por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo y proporcionarme artículos científicos para sustentarlo, por compartirme sus experiencias como investigador y ser una guía en el ámbito científico. Además, agradezco la confianza por las conversaciones personales, en las cuáles compartimos nuestros propósitos hallazgos y conocimientos.

A mi comité revisor.

Por el tiempo dedicado a la revisión y mejoramiento de este trabajo. En especial al Dr. Wilberth Melchor Alcocer Rosado por la revisión detallada y comentarios constructivos realizados a esta tesis de maestría.

A mis amigos de generación.

Arturo Cuevas Uribe por brindarme su amistad y motivarme con su alegría característica, Alejandra Arriola Gómez por brindarme su empatía al llegar a la Ciudad de Cuernavaca, a Jose Antonio Ruiz López y Kevin Edson Petatan Bahena por ser parte de esta etapa de mi vida y brindarme su amistad. Se que si esta contingencia sanitaria no se hubiera presentado, hubieramos compartido experiencias incomparables durante los dos años completos del programa de postgrado.

Resumen

En este trabajo de investigación, se obtuvo el modelo matemático de un nuevo absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional, conectado a una estructura tipo edificio con aislamiento en la base de múltiples grados de libertad utilizando la formulación de Euler - Lagrange. Este sistema mecánico fue simplificado en un sistema de tres grados de libertad, considerando un comportamiento dinámico de cuerpo rígido del edificio y la eliminación de una de las masas del dispositivo propuesto, dando origen a un absorbedor de vibración dinámico (DVA) tipo Frahm acoplado con un amortiguador inercial sintonizado (TID). Se propuso un conjunto de variables adimensionales en términos de los parámetros físicos de este nuevo dispositivo. Después, se formularon y resolvieron dos problemas de optimización multivariables no lineales mediante el programa de matemática simbólica "Maple-Soft". Se calcularon las variables adimensionales que minimizan las amplitudes de vibración en resonancia y la varianza de desplazamiento de la estructura, utilizando los índices de rendimiento H_∞ y H_2 . Las variables adimensionales optimizadas, se utilizaron en la solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema mecánico propuesto, sujeto a vibración estocástica de ruido blanco Gaussiano y después a aceleración artificial sísmica utilizando la función de densidad espectral de potencia de Kanai - Tajimi. Se realizaron simulaciones en el dominio del tiempo del desplazamiento de la estructura utilizando el programa "Matlab-Simulink". Con la finalidad de comparar el rendimiento dinámico del dispositivo propuesto, se realizó un estudio comparativo considerando cuatro dispositivos distintos de control pasivo. Finalmente, se realizó un análisis de sensibilidad del potencial de recolección de energía mediante la variación paramétrica del coeficiente del amortiguador viscoso considerando tres tipos de sismos artificiales.

Abstract

In this research work, the mathematical model of a novel tuned double mass absorber with rotational inertia, attached to a structure type base isolated building of multiple degrees of freedom was obtained using the Euler - Lagrange's formulation. This mechanical system was simplified in a three degree-of-freedom mechanical system, considering a dynamic behavior rigid-body in the building and the elimination of one mass to the proposed device, creating a dynamic vibration absorber (DVA) type Frahm attached to one tuned inerter damper (TID). A set of dimensionless variables in terms of the physical parameters of this novel device was proposed. After that, two multivariable non-linear optimization problems were formulated and solved through the symbolic math software "Maple-Soft", the dimensionless variables that minimize the vibration amplitudes in resonance and the displacement variance of the structure were computed using the performance indexes H_∞ and H_2 . The optimized dimensionless variables were used for the solution of the proposed mechanical system's motion equations subjected either white noise random vibration and earthquake artificial acceleration, through Kanai - Tajimi's power spectral density function. Then, the time-domain numerical simulations to find the structure's displacement were carried out via "Matlab-Simulink" software. In order to compare and reveal the dynamic performance of the proposed device, a comparative study was performed considering four kinds of passive control devices. Finally, a sensitivity analysis for the potential of energy harvesting was conducted through the parametric variation of damping coefficient considering three kinds of the artificial earthquakes.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Lista de figuras	VII
Lista de tablas	XIV
Terminología	1
Introducción	4
1. Estado del arte	5
1.1. Configuraciones de los DVAs	6
1.2. Diseño óptimo de los DVAs	8
1.3. Absorbedores de vibración de doble masa	9
1.4. Uso de inersores	10
1.5. Disipación y almacenamiento de energía	13
1.6. Uso de absorbedores de vibración en estructuras	15
2. Generalidades	18
2.1. Descripción del problema	18
2.2. Hipótesis de solución	20

2.3. Objetivo general	21
2.3.1. Objetivos específicos	21
2.4. Justificación	21
2.5. Contribución del trabajo	22
3. Marco teórico	23
3.1. Ecuación de Euler-Lagrange	23
3.2. Transformada de Laplace y de Fourier	24
3.3. Absorbedor de vibración dinámico clásico	25
3.4. Optimización de variables	27
4. Modelado matemático en el dominio del tiempo	31
4.1. Modelo dinámico del edificio MDOF conectado al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional en la base aislada	32
4.2. Modelo dinámico del edificio MDOF conectado al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional en el n -ésimo piso	42
5. Modelado matemático en el dominio de la frecuencia	53
5.1. Modelo matemático en el dominio de la frecuencia del edificio SDOF conec- tado al IDVA propuesto en la base aislada	53
5.1.1. FRF del edificio SDOF conectado al IDVA propuesto en la base aislada	58
5.2. Modelo matemático en el dominio de la frecuencia del edificio SDOF conec- tado al IDVA propuesto en el n -ésimo piso	63
5.2.1. FRF del edificio SDOF conectado al IDVA propuesto en el n -ésimo piso	66
6. Diseño óptimo de las variables adimensionales	68
6.1. Técnica de los puntos fijos extendida aplicada en el edificio SDOF conectado al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional	69
6.1.1. Cálculo del factor de amortiguamiento ζ_B para un edificio de cinco pisos con aislamiento en la base	73

6.1.2. Análisis de las soluciones analíticas obtenidas de la técnica de los puntos fijos extendida	76
6.2. Optimización H_∞ aplicada en el edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID	81
6.3. Optimización H_2 aplicada en el edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID	86
6.4. Análisis comparativo de las variables óptimas del DVA tipo Frahm acoplado con TID	92
6.4.1. Diseño óptimo del edificio SDOF con aislamiento en la base conectado a diferentes dispositivos de absorción de vibraciones mecánicas	92
6.4.2. Comparación de las curvas de respuesta en frecuencia óptimas de los diferentes dispositivos de absorción de vibración	104
7. Análisis estocástico y respuesta en el dominio del tiempo	108
7.1. Características de la señal sísmica estocástica	108
7.1.1 Vibración estocástica de ruido blanco Gaussiano	113
7.2. Respuesta en el dominio del tiempo del edificio SDOF aislado en la base sujeto a excitación sísmica	115
8. Análisis de la energía regenerada	126
8.1. Análisis de posición y velocidad del DVA tipo Frahm acoplado con TID	126
8.2. Potencia mecánica disipada	130
8.3. Análisis de sensibilidad paramétrica	134
Conclusiones	139
Trabajo futuro	141
Apéndice A. Edificio de 5 pisos aislado en la base	143
Apéndice B. Gráficas adicionales	145

Apéndice C. Tablas.	153
Referencias	155

Índice de figuras

1.1. Absorbedor de Vibración Dinámico tipo Frahm (Rao, 2012).	5
1.2. Absorbedor Dinámico de Vibración con el Amortiguador Conectado al Sistema Primario (Ren, 2001).	7
1.3. DVA con rigidez negativa (Shen, Peng, Li, & Yang, 2017).	7
1.4. (a) Configuración típica del DVA, (b) DVA de doble masa configurado en Serie, (c) DVA de doble masa configurado en paralelo (Asami T. , 2017).	9
1.5. Configuración del inersor piñon-cremallera (Papageorgiou, Houghton & Smith, 2009).	10
1.6. Configuración del inersor de fluido con hélice externa (Swift et al, 2013).	11
1.7. Dispositivo HEI (Shen et al, 2019).	11
1.8. (a) DVA tradicional, (b) DVA modificado, $Y(S)$ representa la impedancia de las redes mecánicas (Hu & Chen, 2015).	12
1.9. Redes mecánicas analizadas por Hu & Chen (2015).	12
1.10. DVA Recolector de Energía (Madhav & Ali, 2016).	14
1.11. EH-TMDI utilizado en edificios altos excitados por el viento (Petrini, Giaralis, & Wang, 2020).	14
1.12. (a) Estructura aislada en la base MDOF, (b) Estructura aislada en la base MDOF controlada mediante un TMDI (Matteo, Masnata, & Pirrotta, 2019).	15
1.13. Edificio de n plantas equipado con un TMDI en el último piso excitado por el viento (Giaralis & Petrini, 2017).	17
3.1. Absorbedor de vibración dinámico clásico (Rao,2012).	25
3.2. Efecto de un DVA clásico en la FRF de un sistema primario (Rao,2012)	26

3.3.	a) Intersecciones de las curvas de nivel de f (verde) y la función g (azul). b) Punto de tangencia entre $g(x, y) = k$ y $f(x, y) = c$, los gradientes de f y g son paralelos en este punto (Zill & Wright, 2011).	29
4.1.	Edificio aislado en la base de múltiples grados de libertad (MDOF)	31
4.2.	Edificio MDOF aislado en la base controlado mediante el absorbedor de vibración propuesto.	33
4.3.	Absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional controlando la vibración de cualquier piso del edificio.	42
5.1.	Estructura rígida SDOF de base aislada conectada al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional desde la base aislada.	58
5.2.	Estructura rígida SDOF de base aislada conectada al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional desde el n -ésimo piso.	65
6.1.	Curva de respuesta óptima utilizando la técnica de los puntos fijos extendida con las variables $\beta = 0.01$, $\delta = 5$, $\nu_{op} = 1.0000$, $\eta_{op} = 2.4006$, $\mu_{op} = 0.0033$ y $\zeta_{Bop} = 0.2230$	75
6.2.	Curva verde: respuesta en frecuencia de M_t utilizando el TMDI. Curva azul: respuesta en frecuencia de M_t utilizando el IDVA propuesto.	76
6.3.	Estructura rígida SDOF de base aislada conectada al dispositivo propuesto sin la masa m_B (DVA tipo Frahm acoplado con TID).	77
6.4.	Curvas de respuesta del edificio SDOF con y sin el efecto de m_B	80
6.5.	Curvas de respuesta en frecuencia H_{a_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID utilizando la norma H_∞	85
6.6.	Curvas de respuesta en frecuencia H_{a_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID utilizando la norma H_2	91
6.7.	TVMD conectado entre el suelo y la masa m_A utilizado para controlar la vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.	93
6.8.	Curvas de respuesta en frecuencia H_{b_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar el TVMD utilizando la norma H_∞	95
6.9.	Curvas de respuesta en frecuencia H_{b_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar el TVMD utilizando la norma H_2	96

6.10. Red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte conectada entre el suelo y la masa m_A para controlar la vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.	96
6.11. Curvas de respuesta en frecuencia H_{c_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte utilizando la norma H_∞	99
6.12. Curvas de respuesta en frecuencia H_{c_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte utilizando la norma H_2	99
6.13. Absorbedor dinámico de vibración clásico utilizado para controlar los niveles de vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.	100
6.14. Curvas de respuesta en frecuencia H_{d_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al utilizar el DVA clásico y la norma H_2	101
6.15. Amortiguador de masa sintonizada con inersor utilizado para controlar los niveles de vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.	102
6.16. Curvas de respuesta en frecuencia H_{e_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al utilizar el TMDI y la norma H_2	104
6.17. FRFs H_i ($i = a5, b5, c5$) del edificio SDOF utilizando la norma H_∞ . Curva verde: DVA tipo Frahm acoplado con TID. Curva azul: Utilizando el TVMD. Curva roja: Utilizando la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte.	105
6.18. Acercamiento visual de las FRFs H_i ($i = a5, b5, c5$) del edificio SDOF utilizando la norma H_∞	105
6.19. FRFs H_i ($i = a5, b5, c5, d5, e5$) del edificio SDOF utilizando la norma H_2 . Curva verde: DVA-TID. Curva azul: TVMD. Curva roja: Amortiguador-inersor-resorte. Curva amarilla: DVA clásico. Curva morada: TMDI.	106
6.20. FRFs H_i ($i = a10, b10, c10, d10, e10$) del edificio SDOF utilizando la norma H_2 . Curva verde: DVA-TID. Curva azul: TVMD. Curva roja: Amortiguador-inersor-resorte. Curva amarilla: DVA clásico. Curva morada: TMDI.	106
7.1. Funciones de densidad espectral de potencia de ruido no blanco de diferentes tipos de suelo.	111
7.2. Vibración estocástica con densidad espectral de potencia sísmica y media aproximadamente igual a cero.	113

7.3. Vibración estocástica de ruido blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia constante y media igual a cero.	114
7.4. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA acoplado con TID.	118
7.5. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA acoplado con TID.	119
7.6. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.	119
7.7. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA acoplado con TID.	119
7.8. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA acoplado con TID.	120
7.9. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA-TID.	120
7.10. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA-TID.	121
7.11. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.	121
7.12. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA-TID.	121
7.13. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA-TID.	122
7.14. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables de la norma H_∞ . Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA-TID.	122
7.15. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables de la norma H_∞ . Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA-TID.	123

7.16. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables de la norma H_∞ . Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.	123
7.17. Posición del edificio SDOF relativa al suelo conectado al DVA-TID utilizando $\beta = 0.05$. Línea roja: Norma H_2 . Línea azul: Norma H_∞	124
7.18. Acercamiento visual de la posición del edificio SDOF relativa al suelo conectado al DVA-TID para $\beta = 0.05$. Línea roja: Norma H_2 . Línea azul: Norma H_∞	124
8.1. (a) Estructura MDOF controlada por el IDVA propuesto y conectada a un transductor electromagnético. (b) Estructura SDOF controlada por el IDVA propuesto y conectada a un transductor electromagnético.	127
8.2. Estructura SDOF controlada por el DVA tipo Frahm acoplado con TID y conectada a un transductor electromagnético para la regeneración de energía.128	
8.3. Posición de M_t , m_A y el nodo B en el dominio del tiempo utilizando las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$ y excitación sísmica en suelo medio.	128
8.4. Velocidad de M_t , m_A y el nodo B en el dominio del tiempo utilizando las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$ y excitación sísmica en suelo medio.	129
8.5. Zona de máximo desplazamiento del DVA tipo Frahm acoplado con TID conectado en la base del edificio	130
8.6. Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea roja: TVMD.	132
8.7. Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte.	132
8.8. Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea verde: DVA clásico.	132
8.9. Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea azul: TMDI.	133
8.10. Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_∞ . Línea negra: DVA-TID. Línea roja: TVMD.	133
8.11. Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_∞ . Línea negra: DVA-TID. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte.	134

8.12. Potencia media disipada al utilizar el DVA - TID considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables óptimas de la norma H_2	135
8.13. Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo suave y las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$. . .	136
8.14. Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$. . .	136
8.15. Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo firme y las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$. . .	137
8.16. Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo suave y las variables óptimas de la norma H_∞ para $\beta = 0.05$. . .	137
8.17. Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables óptimas de la norma H_∞ para $\beta = 0.05$. . .	138
8.18. Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo firme y las variables óptimas de la norma H_∞ para $\beta = 0.05$. . .	138
8.19. Edificio aislado en la base de dos grados de libertad. El elemento inercial M_1 representa la masa de las n plantas de un edificio MDOF.	141
8.20. Estructura tipo edificio analizada por De Domenico & Ricciardi (2018) y utilizada como referencia en este trabajo.	143
8.21. Estructura tipo edificio SDOF analizada por De Domenico, D. & Ricciardi (2018), utilizada por Matteo et al. (2019) y en este trabajo.	144
8.22. Vibración estocástica con densidad espectral de potencia sísmica en suelo suave y media aproximadamente igual a cero.	145
8.23. Vibración estocástica con densidad espectral de potencia sísmica en suelo firme y media aproximadamente igual a cero.	145
8.24. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA - TID.	146
8.25. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA - TID.	146
8.26. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.	147

8.27. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA - TID.	147
8.28. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA - TID.	147
8.29. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA - TID.	148
8.30. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA - TID.	148
8.31. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.	149
8.32. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA - TID.	149
8.33. Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA - TID.	149
8.34. Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva roja: TVMD.	150
8.35. Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva morada: Amortiguador-inersor-resorte.	150
8.36. Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva verde: DVA clásico.	151
8.37. Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva azul: TMDI.	151
8.38. Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva roja: TVMD.	151
8.39. Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva morada: Amortiguador-inersor-resorte.	152
8.40. Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva verde: DVA clásico.	152
8.41. Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva azul: TMDI.	152

Índice de tablas

6.1. Variables $\alpha, \nu, \eta, \zeta_B$ óptimas y amplitud de vibración mínima $h_{min} = H_{a_{min}}$ considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$	85
6.2. Variables $\alpha, \nu, \eta, \zeta_B$ óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$	90
6.3. Variables $\alpha, \nu, \eta, \zeta_B$ óptimas y amplitud de vibración mínima $h_{min} = H_{b_{min}}$ utilizando el TVMD y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$	94
6.4. Variables $\alpha, \nu, \eta, \zeta_B$ óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando el TVMD y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$	95
6.5. Variables $\alpha, \nu, \eta, \zeta_B$ óptimas y amplitud de vibración mínima $h_{min} = H_{c_{min}}$ utilizando la conexión en serie amortiguador-inersor-resorte y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$	98
6.6. Variables $\alpha, \nu, \eta, \zeta_B$ óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando la conexión en serie amortiguador-inersor-resorte y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$	98
6.7. Variables ν y ζ_A óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando el DVA clásico y considerando valores constantes de β en el intervalo $(0, 0.1]$	101
6.8. Variables ν y ζ_A óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando el TMDI y considerando valores de β en el intervalo $(0, 0.1]$ y de α en el intervalo $(0, 0.04]$	103
7.1. Parámetros de frecuencia y relación de amortiguamiento del suelo (Zuo et al., 2021) y (Liang et al., 2021).	110

- 8.1. Potencia media disipada en el edificio SDOF con frecuencia natural $\omega_s = \frac{4}{3}\pi rad/s$, $\zeta_s = 0$ y $M_t = 34 \cdot 10^4 kg$ 153
- 8.2. Potencia media disipada en el edificio SDOF con frecuencia natural $\omega_s = \frac{4}{3}\pi rad/s$, $\zeta_s = 0$ y $M_t = 34 \cdot 10^4 kg$ 154

Terminología

- TMD: Tuned Mass Damper (Amortiguador de Masa Sintonizado).
- TMDI: Tuned Mass Damper Inerter (Amortiguador de Masa Sintonizado-Inersor).
- MDOF: Multiple Degree of Freedom Structure (Múltiples Grados de Libertad).
- DVA: Dynamic Vibration Absorber (Absorbedor de Vibración Dinámico).
- TMA: Tuned Mass Absorber (Absorbedor de Masa Sintonizado).
- VD: Viscous Damper (Amortiguador Viscoso).
- TID: Tuned Inerter Damper (Amortiguador Sintonizado con Inersor).
- TVMD: Tuned Viscous Mass Damper (Amortiguador Sintonizado con Masa Viscosa).
- TDOF: Two Degree of Freedom System (Sistema de dos grados de libertad).
- SDOF: Single Degree of Freedom (Un sólo grado de libertad).
- IDVA: Inerter Dynamic Vibration Absorber (Absorbedor de vibración dinámico basado en inersor).
- AVA: Auto-parametric Vibration Absorber (Absorbedor de Vibración Autoparamétrico).
- EHDVA: Energy Harvesting Dynamic Vibration Absorber (Absorbedor de Vibración Dinámico Recolector de Energía).
- EH-TMDI: Energy Harvesting-Tuned Mass Damper Inerter (Amortiguador de Masa Sintonizado-Inersor Recolector de Energía).
- HEI: Hydraulic-Electrical Inerter (Inersor Hidráulico-Eléctrico).
- PSD: Power Spectral Density (Densidad espectral de potencia).
- L Lagrangiano.
- T Función de energía cinética.

- V Función de energía potencial.
- D Función de disipación de energía de Rayleigh.
- q_i Coordenada generalizada de la ecuación de Euler - Lagrange.
- x_g Posición absoluta del suelo.
- x_{st} Posición absoluta de la base aislada.
- x_{it} Posición absoluta de la i -ésima masa de la estructura principal.
- x_{At} Posición absoluta de la masa m_A .
- x_{Bt} Posición absoluta de la masa m_B .
- x_s Posición de la base aislada relativa al suelo x_g .
- x_i Posición de la i -ésima masa de la estructura principal relativa a la base aislada x_{st} .
- x_A Posición de la masa m_A relativa a la base aislada x_{st} .
- x_B Posición de la masa m_B relativa a la base aislada x_{st} .
- s Variable de Laplace.
- ω Variable de Fourier.
- C_1 Conjunto de variables adimensionales $\nu, \eta, \mu, \delta, \beta, \zeta_B, \zeta_s$ y Ω .
- C_2 Conjunto de variables adimensionales $\nu, \eta, \alpha, \beta, \zeta_B, \zeta_s$ y Ω .
- FRF: Frequency Response Function (Función de Respuesta en Frecuencia)
- H_s FRF de M_t al conectar el IDVA propuesto en la base aislada.
- H_n FRF de M_t al conectar el IDVA propuesto en el n -ésimo piso del Edificio.
- H_a FRF de M_t al conectar el DVA tipo Frahm acoplado con TID en el edificio SDOF.
- H_b FRF de M_t al acoplar la red mecánica TVMD en el edificio SDOF.
- H_c FRF de M_t al acoplar la red mecánica amortiguador-inersor-resorte en el edificio SDOF.
- H_d FRF de M_t al conectar el DVA clásico en el edificio SDOF.
- H_e FRF de M_t al conectar el TMDI en el edificio SDOF.
- H_2 Índice de rendimiento H_2 .

- H_∞ Índice de rendimiento H_∞ .
- $E[x_s^2]$ Energía total de vibración de la estructura tipo edificio SDOF (coordenada x_s).
- $\sigma_{x_s}^2$ Varianza de desplazamiento de la estructura tipo edificio SDOF (coordenada x_s).
- $\ddot{x}_g(t)$ Excitación sísmica y de ruido blanco Gaussiano.
- P_i ($i = a, b, c, d, e$) Potencia mecánica disipada en los sistemas mecánicos analizados.

Introducción

En este trabajo, se propone un nuevo dispositivo mecánico de absorción de vibración dinámico basado en inersor (IDVA). La topología de diseño del dispositivo anti-vibratorio ha sido realizada mediante los últimos avances científicos y tecnológicos reportados en la literatura, sobre todo en el área de ingeniería civil para la protección de estructuras sujetas a cargas sísmicas. En la literatura, se reporta el diseño y aplicación de varios tipos de absorbedores dinámicos de vibración (DVAs) en estructuras sujetas a excitación armónica y/o estocástica. En estos trabajos, los investigadores consideran los parámetros óptimos del absorbedor de forma optimizada, con la finalidad de conseguir que la energía total de vibración de la estructura y la respuesta en el dominio del tiempo se minimice.

El rendimiento dinámico de los DVAs, ha sido mejorado mediante el uso de inersores conectados al absorbedor para modificar la energía cinética efectiva del sistema y en consecuencia controlar los desplazamientos indeseados. El uso de la tecnología de inersores, ha dado origen a distintas configuraciones de absorbedores estudiados extensamente en la literatura. El inersor ha sido propuesto recientemente para mitigar vibración indeseable tanto en estructuras mecánicas estacionarias como no estacionarias. De hecho, muchos investigadores han remarcado su efectividad en el control de vibración de forma pasiva en sistemas sujetos a diferentes tipos de excitación. Además, la efectividad de rendimiento de control del inersor ha sido verificada en la atenuación de vibración en cables, turbinas de viento, plataformas marítimas, mitigación de vibración sísmica, en tanques de almacenamiento de combustible y en aplicaciones de ingeniería civil.

Es por eso que se propone el diseño óptimo de un dispositivo de control de vibración pasivo de doble masa sintonizadas con inercia rotacional, con la finalidad de conectarlo a una estructura tipo edificio de marco plano con aislamiento en la base y de múltiples grados de libertad sujeta a vibración estocástica, para minimizar los niveles de vibración y cuantificar la energía regenerada durante un evento sísmico. El objetivo principal de diseñar y analizar teóricamente este dispositivo, es contribuir en las investigaciones relacionadas con el control pasivo de vibración utilizando la tecnología de inersores para la protección de estructuras mecánicas. Asimismo, contribuir en la reducción de los daños estructurales provocados por fenómenos naturales como sismos o terremotos y en la prolongación de la vida útil de las estructuras. Particularmente, de los edificios altos con aislamiento en la base.

Capítulo 1

Estado del arte

Los absorbedores de vibraciones han sido implementados en las estructuras desde hace varios años para el control de vibraciones indeseadas. El primero de ellos, propuesto por Frahm, es una configuración básica como la que se muestra en la Figura 1.1, que consta de un resorte lineal y una masa (m_2). Este dispositivo, se denominó como absorbedor de vibración dinámico, que por sus siglas en inglés es conocido como DVA. Diversos investigadores, han tomado como referencia la configuración del absorbedor mostrado en la Figura 1.1, con la finalidad de proponer cambios en su configuración y mejorar su rendimiento dinámico. El DVA tipo Frahm, es un dispositivo mecánico pasivo, utilizado para suprimir la vibración de banda estrecha (Ren, 2001). Aunque este dispositivo tiene esta limitación, es posible proponer otras configuraciones particulares y mejorar su rendimiento mediante un esquema de ajuste óptimo, obteniendo una absorción de vibraciones de banda ancha (Gao, Xiang, Liu, Walker, y Zhang, 2019).

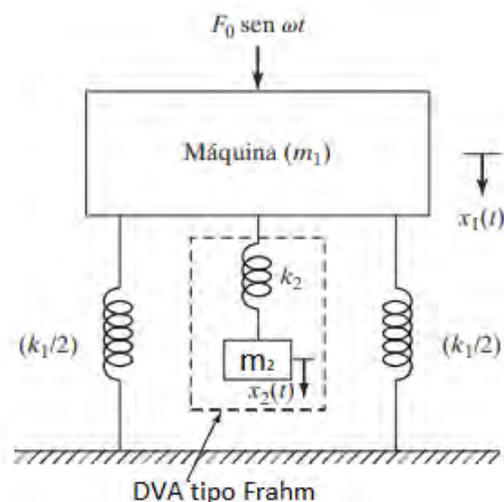


Figura 1.1: Absorbedor de Vibración Dinámico tipo Frahm (Rao, 2012).

A lo largo de los años, los absorbedores de vibración ampliaron su aplicación hacia distintas áreas de estudio, debido a su efectividad para el control de vibraciones. Inicialmente estos dispositivos mecánicos se denominaron como absorbedores dinámicos

de vibración (DVA), y tienen la capacidad de disminuir las amplitudes de vibración de algún sistema primario. Además, están configurados de distintas formas de acuerdo con la función para la cual hayan sido diseñados. Las configuraciones de los absorbedores de vibración, en general hacen uso de elementos mecánicos como resortes, amortiguadores, péndulos, recientemente inersores, entre otros elementos que no siempre son mecánicos. Frecuentemente se han realizado estudios teóricos y experimentales con los absorbedores de vibración, en los cuales se busca continuamente reducir o mitigar la amplitud de las vibraciones, optimizar los parámetros de amortiguamiento, rigidez y masa, aprovechar la energía disipada por el o los dispositivos, implementar dispositivos mecánicos novedosos para analizar la respuesta en frecuencia del sistema, evitar que la masa principal entre en resonancia, entre otros aspectos.

Algunos autores, comenzaron a nombrar el DVA como amortiguador de masa sintonizado, conocido por sus siglas en inglés como TMD. Sin embargo, ambos absorbedores tienen la misma función; reducir la vibración no deseada. Otro de los dispositivos de control de vibraciones es el absorbedor de masa sintonizado (TMA), que se diferencia del TMD en el reemplazo del muelle (lineal o no lineal) por un péndulo. Adicionalmente, se ha hablado de los amortiguadores viscosos (VD) o del amortiguador inersor sintonizado (TID). De hecho, se han realizado estudios en donde se compara el rendimiento del VD con el TID en determinadas aplicaciones de la ingeniería (Lazar, Neild, & Wagg, 2016).

Los absorbedores de vibración tienen una gama amplia de aplicaciones en la ciencia e ingeniería, una de ellas, es el área estructural. La función que los absorbedores desempeñan en este campo, es controlar las vibraciones que surgen en edificios, casas, puentes entre otras obras estructurales, originadas por sismos, corrientes intensas de viento, entre otros fenómenos físicos que se originan momentáneamente. Por esta razón, se han hecho diversos trabajos de investigación y diseño para hacer contribuciones en la mejora de este problema. En general, se han conseguido buenos avances de diseño (Brzeski, Pavlovskaja, Kapitaniak, & Perlikowski, 2015), (Gao et al, 2019), (Ren, 2001), (Matteo, Masnata, & Pirrotta, 2019) y otros.

1.1. Configuraciones de los DVAs

A lo largo del tiempo, algunas configuraciones comúnmente utilizadas han cambiado no sólo para mejorar el rendimiento de los absorbedores (Brzeski et al, 2015), sino también para tratar de acoplarse a determinadas condiciones del sistema primario (Ren, 2001). Generalmente, se realizan buscando la minimización de las amplitudes de vibración (Shen, Peng, Li, y Yang, 2017). Algunas de las transformaciones que ha sufrido la configuración tradicional del DVA, han ocurrido al implementar redes mecánicas en el mismo (Hu & Chen, 2015). Hu y Chen (2015), estudiaron la respuesta en frecuencia de algunos absorbedores dinámicos de vibración basados en inersores conocidos como IDVAs. Estos

dispositivos consisten en el reemplazo del amortiguador por redes mecánicas basadas en inersores. Por otra parte, existe el análisis teórico de una variante en el DVA, en donde el amortiguador se conecta a un marco fijo (base), en lugar de conectarlo en la masa primaria como usualmente se realiza. Los resultados de este estudio son favorables al compararlos con el DVA clásico (Ren, 2001). La configuración de este absorbedor se muestra en la Figura 1.2.

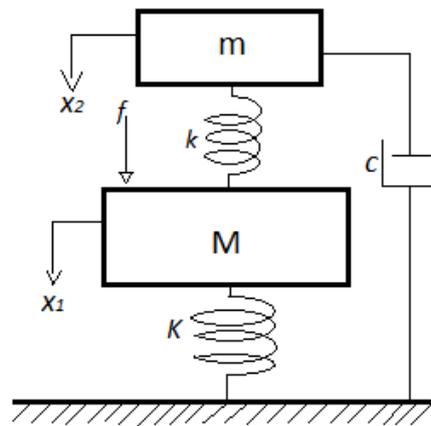


Figura 1.2: Absorbedor Dinámico de Vibración con el Amortiguador Conectado al Sistema Primario (Ren, 2001).

Otras de las modificaciones del DVA, han ocurrido al considerar la rigidez como un parámetro negativo, el diagrama de esta configuración se muestra en la Figura 1.3.

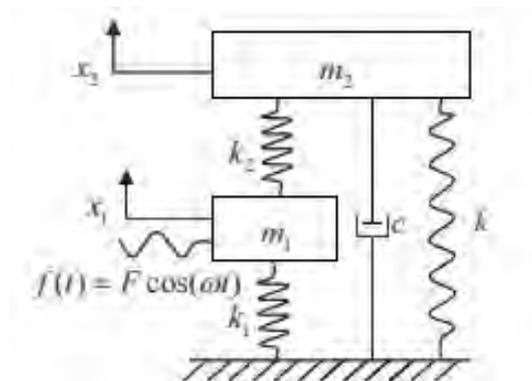


Figura 1.3: DVA con rigidez negativa (Shen, Peng, Li, & Yang, 2017).

En la configuración mostrada en la Figura 1.3, se realizó el diseño óptimo de los parámetros utilizando la metodología de los puntos fijos desarrollada por Den Hartog, concluyendo que el rango de frecuencias de operación se amplía bajo ciertas condiciones. Asimismo, se utilizó la misma configuración del DVA con rigidez negativa bajo condiciones de excitación aleatoria para evaluar su rendimiento (Shen et al, 2017). Shen et al. (2017), realizaron simulaciones de los desplazamientos de una estructura primaria en el dominio del tiempo sujeta a excitación aleatoria durante un período de 50 segundos utilizando la

configuración de la Figura 1.3. En las cuáles se observó que el DVA con rigidez negativa es efectivo cuando está sujeto a excitación aleatoria.

1.2. Diseño óptimo de los DVAs

A medida que los absorbedores de vibración fueron evolucionando, se determinó que la optimización de los parámetros de amortiguamiento y frecuencia del absorbedor es fundamental para el trabajo de diseño. De manera que, al seleccionar estos parámetros, sea posible obtener una respuesta en frecuencia que sea mínima o que su magnitud sea disminuida en la medida de lo posible. Otra de las razones de la optimización, es disminuir el efecto de la resonancia. En varios estudios se han utilizado métodos matemáticos de optimización y normas de rendimiento. Estas normas de rendimiento comúnmente utilizadas son la Norma H_∞ y H_2 (Tursun & Eskinat, 2014). La primera consiste en encontrar los parámetros óptimos que disminuyen la amplitud de los puntos resonantes, mientras que la segunda consiste en minimizar la energía de vibración. Por otra parte, se ha trabajado de manera continua en mejorar el rendimiento de los DVAs optimizando sus parámetros haciendo uso de la Norma H_∞ (Asami & Nishihara, 2003). Asimismo, se han realizado pruebas teóricas y experimentales de diferentes diseños de absorbedores, en las cuales se analiza la respuesta de un sistema en particular considerando un esquema de ajuste de frecuencia óptimo (Gao et al, 2019). Se ha encontrado también, que un esquema de ajuste de frecuencia óptimo, mejora significativamente el control de vibraciones por medio de un DVA semiactivo (Gao et al, 2019). Otra de las alternativas para el diseño óptimo de los sistemas de control pasivo de vibraciones, es el uso de las herramientas computacionales. En las cuales, continuamente se han buscado nuevas estrategias para el diseño óptimo de diferentes configuraciones del TMD y del TMDI (Palacios-Quiñonero, Rubió-Massegú, Rossell, & Karimi, 2017).

Algunos de los criterios de optimización y medidas de rendimiento utilizadas para el diseño de los absorbedores conllevan cierto margen de error, o no siempre coinciden con los resultados físicos que se obtienen a partir de la experimentación. Sin embargo, no dejan de ser de gran utilidad. Asami T. (2017), realizó la optimización de los parámetros de tres configuraciones de DVAs, utilizando las Normas H_∞ , H_2 y el criterio de maximización de estabilidad para realizar una investigación teórica y analítica acerca del rendimiento de un absorbedor de vibración de una sola masa comparándolo con el de dos configuraciones distintas de absorbedores de doble masa.

Es importante tener en cuenta que para diseñar de manera óptima un TMD, es necesario considerar tres parámetros importantes, (1) la relación de ajuste de frecuencias, (2) relación de amortiguamiento y (3) la relación de masa. Den Hartog propuso el método de los “puntos fijos” para hallar una relación de ajuste óptimo para un TMD aplicado en estructuras sin amortiguamiento. A partir de esta teoría, se han realizado varias investi-

gaciones en las cuales se intenta encontrar una relación de ajuste óptimo para los TMD utilizados en estructuras amortiguadas o con niveles bajos de amortiguamiento (Ghosh & Basu, 2007).

1.3. Absorbedores de vibración de doble masa

Como se ha visto, existen diferentes variaciones y/o configuraciones del absorbedor dinámico de vibración clásico. Una de las configuraciones que ha mostrado alto rendimiento en el control de vibraciones es el absorbedor dinámico de vibración de doble masa (Zuo & Nayfeh, 2006), (Asami T. , 2017), (Asami, Mizukawa& Ise, 2018). Es decir, se trata de un DVA de dos grados de libertad (TDOF). Los absorbedores dinámicos de vibración en los que se involucra más de una masa se les conoce como DVA multimasa, esta clase de absorbedores por lo general, son más complicados de optimizar, debido a que aparecen más parámetros que en un DVA de una sola masa.

Zuo y Nayfeh (2006), propusieron que más de un modo de vibración de un absorbedor se ajustara a la frecuencia natural de un sistema primario. Para esto, utilizaron un TMD de dos grados de libertad, analizaron la respuesta del sistema ante excitación aleatoria y armónica desarrollando los criterios de optimización basados en las medidas de rendimiento H_2 y H_∞ . De acuerdo con los resultados, un TMD de dos grados de libertad tiene un mayor rendimiento en la mitigación de vibraciones que dos TMD de un grado de libertad (SDOF) óptimos cuando se colocan separados con una distribución de masa optimizada, (Zuo & Nayfeh, 2006). Por otro lado, en la Figura 1.4, se observan tres configuraciones distintas de absorbedores de vibración conectadas a una masa primaria m_1 : (a) DVA de una sola masa m_2 , (b) absorbedor de doble masa conectado en serie cuyas masas son m_2 y m_3 y (c) absorbedor de doble masa conectado en paralelo m_2 y m_3 .

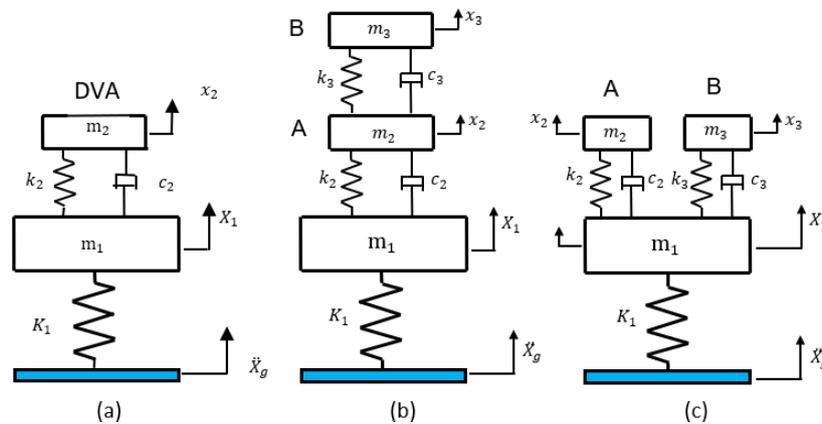


Figura 1.4: (a) Configuración típica del DVA, (b) DVA de doble masa configurado en Serie, (c) DVA de doble masa configurado en paralelo (Asami T. , 2017).

Asami T. (2017), realizó un estudio sobre el rendimiento dinámico de las configuraciones descritas en la Figura 1.4 sujetas a vibración transitoria, utilizó los criterios de

optimización H_∞ , H_2 y de maximización de estabilidad. Concluyendo que para los tres métodos de optimización, el DVA de doble masa conectado en serie de la Figura 1.4 (b), presenta un rendimiento superior al de la configuración conectada en paralelo y al DVA de una sola masa para determinados valores de la relación de masas. Adicionalmente, Asami T. (2017) obtuvo resultados gráficos en los cuáles se demostró que el DVA de doble masa arreglado en serie posee un rendimiento dinámico más alto (considerando la minimización de la amplitud de resonancia) y mayor estabilidad dinámica que los otros dos dispositivos bajo el efecto de vibración transitoria.

1.4. Uso de inersores

Uno de los dispositivos mecánicos que en los últimos años ha sido implementado en algunas configuraciones de los absorbedores de vibración, es el inersor. El inersor convencional, es un elemento mecánico de control pasivo, propuesto inicialmente por Smith (2002), posee dos terminales y un volante de inercia accionado por el mecanismo piñón-cremallera (ver Figura 1.5). Al recibir una fuerza o aceleración de excitación en una de sus terminales, el mecanismo genera una fuerza de resistencia directamente proporcional a la aceleración relativa entre sus dos terminales, considerando una constante de proporcionalidad conocida como inercancia b .

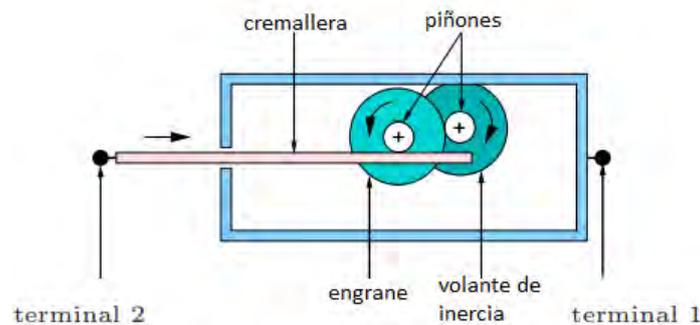


Figura 1.5: Configuración del inersor piñón-cremallera (Papageorgiou, Houghton & Smith, 2009).

Adicionalmente, existen inersores diseñados con base en las propiedades de los fluidos incompresibles (Swift et al, 2013) que funcionan bajo el mismo principio que los inersores mecánicos, considerando una constante de inercia en función de la densidad del fluido y las características geométricas del pistón, cilindro y longitud del canal helicoidal del mismo dispositivo (ver Figura 1.6). Otro tipo de inersores funcionan aprovechando las propiedades de los fluidos magnetorreológicos (Tipuric, Deastra, Wagg, & Sims, 2018).

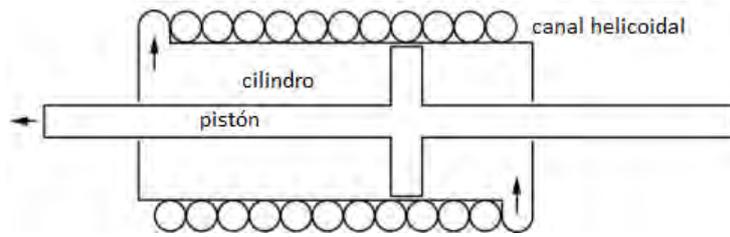


Figura 1.6: Configuración del inersor de fluido con hélice externa (Swift et al, 2013).

En general, las propiedades de los fluidos han sido aprovechadas para el diseño de inersores, mostrando buenos resultados debido a su efecto de amplificación de masa. Otro tipo de inersores que ha presentado un alto rendimiento dinámico y que ha sido utilizado en suspensiones de automóviles es el inersor electro- hidráulico, por sus siglas en inglés conocido como HEI (Shen, Liu, Chen & Yang, 2019). Este dispositivo se muestra en la Figura 1.7 y se compone de dos partes esenciales: Un inersor de pistón hidráulico y un motor eléctrico lineal. En la Figura 1.7 las terminales del inersor se muestran en (1) y (7), mientras que la numeración (2)-(6) y (8)-(15) representan el sistema hidráulico y eléctrico respectivamente, esta configuración se detalla en (Shen et al, 2019).

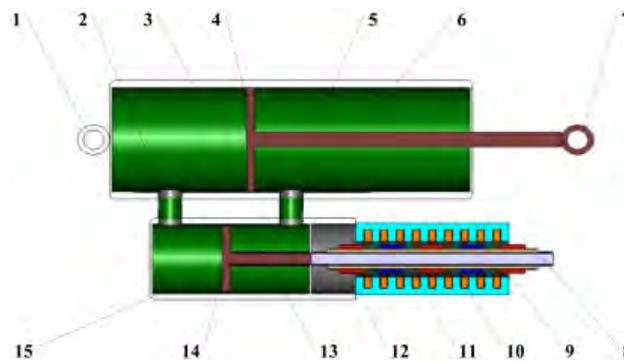


Figura 1.7: Dispositivo HEI (Shen et al, 2019).

Se han realizado diversos estudios teóricos y experimentales acerca de las configuraciones de los absorbedores que utilizan inersores. En los cuáles, se ha demostrado que en la mayoría de los casos este dispositivo tiene efectos positivos en el control de vibraciones (Jin, Chen, & Huang, 2016). Por otro lado, se determinó que la implementación de un inersor en un TMA conduce a una reducción sustancial de las amplitudes de vibración que intervienen en el sistema primario, siempre que se seleccione una configuración adecuada entre el inersor y el amortiguador del TMA (Brzeski et al, 2015). También, se realizó el análisis teórico del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de un DVA de uno y dos grados de libertad (SDOF y TDOF), considerando que estos sistemas mecánicos entran en resonancia, donde se concluyó que si el inersor es configurado adecuadamente en este tipo de sistemas su respuesta dinámica es mejorada (Barredo, 2016). Lazarek et al. (2018), trabajaron en el diseño e identificación de los parámetros de un TMD con un inersor que permite cambios en la inercia. Los resultados que obtuvieron, basados en el apego de los modelos matemáticos con los resultados experimentales, son favorables en la disminución de vibración tanto en maquinaria como en estructuras.

En relación con el diseño óptimo, la adición de un inersor en un DVA tradicional debe darse de manera adecuada para dar origen a un IDVA (absorbedor dinámico de vibración con inersor) de alto rendimiento. Hu y Chen (2015), obtuvieron la respuesta en frecuencia de diferentes IDVAs reemplazando el amortiguador del DVA tradicional por seis diferentes redes mecánicas basadas en inersores como se muestra en la Figura 1.8. Compararon el rendimiento de cada uno de estos IDVAs con el del DVA tradicional, aplicando los criterios de optimización H_∞ y H_2 . Hu y Chen (2015), encontraron que cuatro redes mecánicas basadas en inersores de las seis que analizaron, proporcionan una mejora del 20% en la minimización de las amplitudes resonantes del sistema primario con respecto al DVA tradicional. Adicionalmente, encontraron un incremento en el ancho de banda del sistema y una mejora significativa al utilizar el índice de rendimiento H_2 .

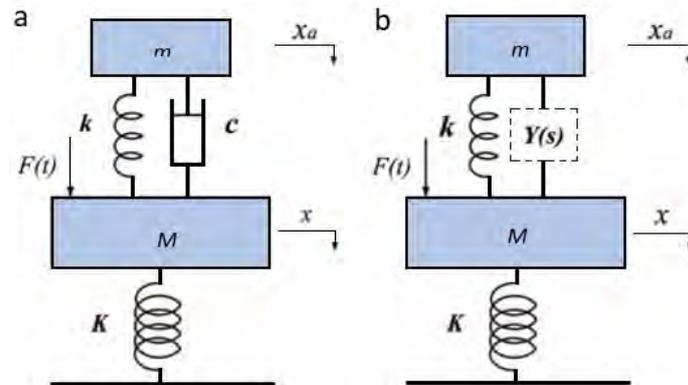


Figura 1.8: (a) DVA tradicional, (b) DVA modificado, $Y(S)$ representa la impedancia de las redes mecánicas (Hu & Chen, 2015).

Las tres redes mecánicas que proporcionan mayor rendimiento dinámico al reemplazarlas por el amortiguador del DVA tradicional de la Figura 1.8 (a) se muestran en la Figura 1.9. Estas redes mecánicas son denominadas en la literatura como C3, C4 y C6 (Hu & Chen, 2015).

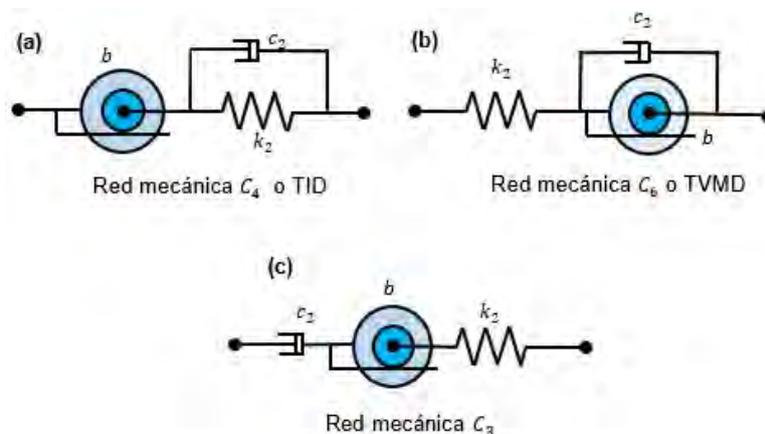


Figura 1.9: Redes mecánicas analizadas por Hu & Chen (2015).

1.5. Disipación y almacenamiento de energía

Cuando se diseña un absorbedor de vibración, un aspecto importante a considerar es la influencia de la energía disipada o absorbida por los elementos que lo conforman. Lazarek et al (2018), realizaron un estudio teórico y experimental de un TMD basado en un inersor con cambios en la inercia al mismo tiempo que analizaron el modelo de disipación de energía de los elementos que lo conforman. Consideraron, que las fuentes de disipación de energía, se llevan a cabo a través del amortiguamiento viscoso y fricción seca (modelo de Coulomb). Ellos encontraron que la disipación de energía de los mecanismos que conforman a este dispositivo, es un factor crucial para un buen rendimiento (Lazarek, Brzeski & Perlikowski, 2018).

Por otra parte, existen otros dispositivos que no son totalmente mecánicos y que también son implementados en la configuración de los absorbedores. Tales como; los inersores basados en fluido reológico (Mazón Valadez, 2019), elementos piezoeléctricos o electromagnéticos, que se implementan con la finalidad de mejorar las condiciones de amortiguamiento o de aprovechar la energía cinética disipada. Todas las configuraciones de los absorbedores de vibración contienen elementos mecánicos que pueden absorber energía o disiparla. Sin embargo, en muchos de estos diseños se implementan dispositivos adicionales que son útiles para la regeneración de energía. Los absorbedores que se utilizan para la recolección de energía son conocidos como absorbedores dinámicos de vibración recolectores de energía (EHDVAs). Este tipo de dispositivos funcionan mediante la excitación de algún elemento piezoeléctrico o electromagnético causada por la vibración, y con base en otros principios físicos conocidos, es posible almacenar y cuantificar energía, que puede ser útil para otras aplicaciones como los sensores de monitoreo de estructuras (Madhav & Ali, 2016). En otras palabras, la energía cinética causada y disipada por el movimiento vibratorio es absorbida por el EHDVA.

Para utilizar un EHDVA se debe encontrar un punto de equilibrio entre ambos objetivos, debido a que el almacenamiento de energía se vuelve significativo a medida que el absorbedor vibra. Sin embargo, ante excitación sísmica, esto hace que se pierda el objeto principal del absorbedor, que es minimizar la amplitud de vibración o la energía de vibración. Por tal razón, es recomendable utilizar este tipo de absorbedores en estructuras grandes. Las cuales, debido a su masa, muestran ser adecuadas para la recolección de energía (Madhav y Ali, 2016). Por otro lado, las vibraciones que surgen en las estructuras no son armónicas, pero si estocásticas. Por esta razón, en muchas de las investigaciones acerca de los absorbedores recolectores de energía, se analiza la respuesta y la recolección de energía considerando excitaciones de ruido blanco Gaussiano (Madhav & Ali, 2016), (Matteo, Masnata, & Pirrotta, 2019). En la Figura 1.10 se muestra la configuración de un EHDVA. Se observa un elemento piezoeléctrico conectado al DVA al mismo tiempo que se conecta a un circuito recolector de energía.

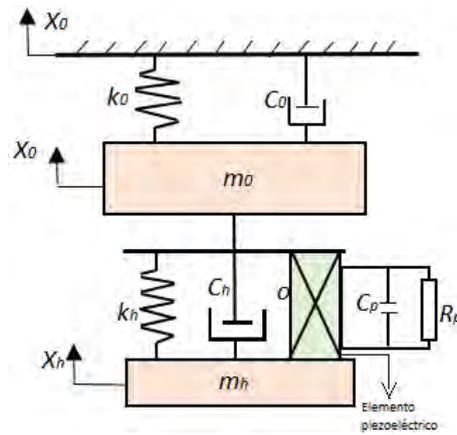


Figura 1.10: DVA Recolector de Energía (Madhav & Ali, 2016).

Recientemente, los estudios realizados acerca de la recolección de energía disipada y originada por los desplazamientos que surgen en los edificios altos sujetos a corrientes de viento, se han hecho utilizando el TMDI. Los TMDI utilizados para recolectar energía, son conocidos como EH-TMDI (TMDI recolector de energía). Petrini et al. (2020), realizaron un estudio de la regeneración de energía de un edificio alto sujeto a corrientes de viento utilizando un EH-TMDI. Encontraron que cuando el inersor se conecta abarcando la mayor cantidad de pisos del edificio partiendo de la parte superiores, se contribuye significativamente tanto en el rendimiento en el control de desplazamientos del edificio, como en el almacenamiento de la cantidad de energía regenerada. Respecto a la recolección de energía, consideraron un circuito eléctrico conectado en el TMDI como se muestra en la Figura 1.11.

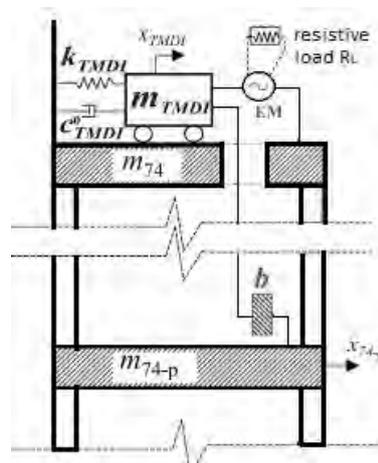


Figura 1.11: EH-TMDI utilizado en edificios altos excitados por el viento (Petrini, Giaralis, & Wang, 2020).

1.6. Uso de absorbedores de vibración en estructuras

Actualmente, existen varios estudios acerca del rendimiento de los absorbedores de vibración en obras de ingeniería civil, que enfatizan los resultados favorables que se presentan en la respuesta dinámica de los edificios y otras estructuras cuando se someten a vibraciones estocásticas de ruido blanco Gaussiano y a cargas sísmicas. Recientemente, se ha utilizado el inersor como un elemento crucial en la configuración del amortiguador de masa sintonizado (TMD) cuando se emplea en el control de vibraciones en estructuras (Matteo, Masnata, & Pirrotta, 2019). Esto da origen a un TMDI, propuesto inicialmente por Marian y Giaralis Agathoklis (2014), su uso frecuente se debe a la inercia rotacional que posee. En otras palabras, el inersor es capaz de generar un efecto de amplificación de masa mucho mayor al que un TMD posee de manera real. El amortiguador de masa sintonizado inersor (TMDI) surge de conectar un inersor entre la masa física del TMD y la tierra mecánica (Marian & Giaralis, 2014). Por lo general, los análisis teóricos de rendimiento de los TMDI en la absorción de vibraciones que surgen en las estructuras, se realizan ante excitaciones estocásticas (Marian & Giaralis, 2014). De esta manera se consiguen resultados con mayor apego a condiciones de vibración reales.

Por otra parte, Matteo et al. (2019), obtuvieron una solución analítica simplificada a partir del diseño óptimo de un TMDI para una estructura aislada en la base (ver Figura 1.12) cuando esta sujeta a excitación de ruido blanco Gaussiano. Esta solución mostró buenos resultados al ser confiable incluso al compararla con un procedimiento de optimización iterativo computacional más exigente.

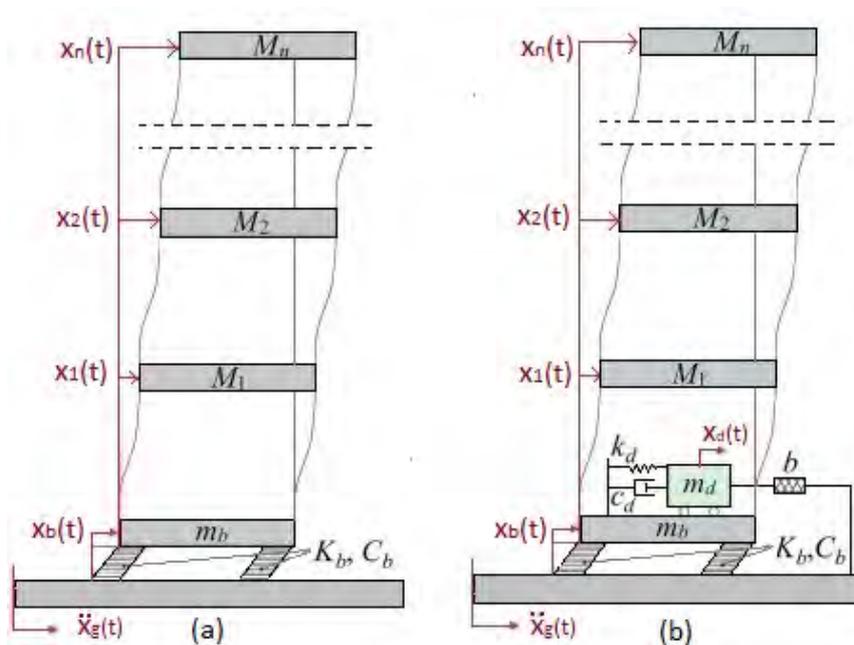


Figura 1.12: (a) Estructura aislada en la base MDOF, (b) Estructura aislada en la base MDOF controlada mediante un TMDI (Matteo, Masnata, & Pirrotta, 2019).

Los resultados gráficos de las soluciones analíticas simplificadas obtenidas por Matteo

et al. (2019), indican el índice de control de rendimiento considerando valores distintos de la relación de amortiguamiento de la base aislada. Asimismo, estos resultados mostraron que su solución analítica presenta una similitud considerable con respecto a los resultados numéricos obtenidos computacionalmente. Es por eso que el TMDI muestra eficacia al acoplarlo en edificios aislados en la base y en la optimización de sus parámetros.

Por otra parte, se han realizado simulaciones de la respuesta en el dominio del tiempo de las estructuras aisladas en la base conectadas a un TMDI ante sismos reales ocurridos a lo largo de la historia, con base en los registros existentes de las señales vibratorias. Uno de estos registros es; el sismo Valle Imperial en Estados Unidos (09/15/1979). Matteo et al. (2019), realizaron un análisis simulado de la respuesta de una estructura de marco plano aislada en la base de cinco pisos considerando este evento sísmico, concluyendo que el TMDI es efectivo al reducir las amplitudes de desplazamiento de la estructura.

De acuerdo con los estudios realizados por diversos investigadores, se ha demostrado que el uso de inersores en el control de vibraciones es favorable. En los últimos años, se han diseñado inersores para otras aplicaciones, como en el control de vibraciones no deseadas en maquinaria industrial, en rotores, suspensiones de automóviles, entre otras. Por esta razón, es importante considerar el diseño de estos dispositivos en las estructuras, específicamente en los edificios altos. Esto representa un gran reto, debido a que las dimensiones del inersor cambiarían considerablemente en comparación con las dimensiones de los que actualmente están disponibles. Al diseñar un TMDI, se debe considerar especialmente la masa del absorbedor y del inersor, debido a que se relacionan directamente con la masa de la estructura primaria durante el trabajo de absorción de vibraciones. Por otra parte, es importante considerar la altura de la estructura que se va a controlar (en caso de tratarse de un edificio), debido a que cuanto más alta sea, estará más susceptible a sufrir desplazamientos, sobre todo en la planta más alta. En este caso, el TMDI tiene una importante aplicación no solamente para cuando se presentan sismos. Si no también, cuando se presentan corrientes intensas de viento (Giaralis & Petrini, 2017), (Petrini, Giaralis & Wang, 2020).

Existen antecedentes en los que se ha estudiado el comportamiento dinámico de los edificios altos y de sección transversal pequeña, cuando sufren oscilaciones en el último piso debido a corrientes intensas de viento, que si bien, en una construcción o edificio pequeño suelen ser despreciables, en un edificio alto pueden causar daños en la estructura o molestias a los ocupantes de los últimos pisos. Giaralis y Petrini (2017), estudiaron teóricamente un caso particular acerca de los efectos de un TMDI en un edificio con estructura de acero de 74 pisos y 305 metros de altura, considerando que cada piso tiene un área de $50 * 50m^2$. Ellos encontraron resultados favorables al conseguir minimizar la máxima aceleración de la parte más alta del edificio, considerando que el inersor tiene un comportamiento lineal. En la Figura 1.13, se muestra el esquema de referencia considerado por (Giaralis & Petrini, 2017).

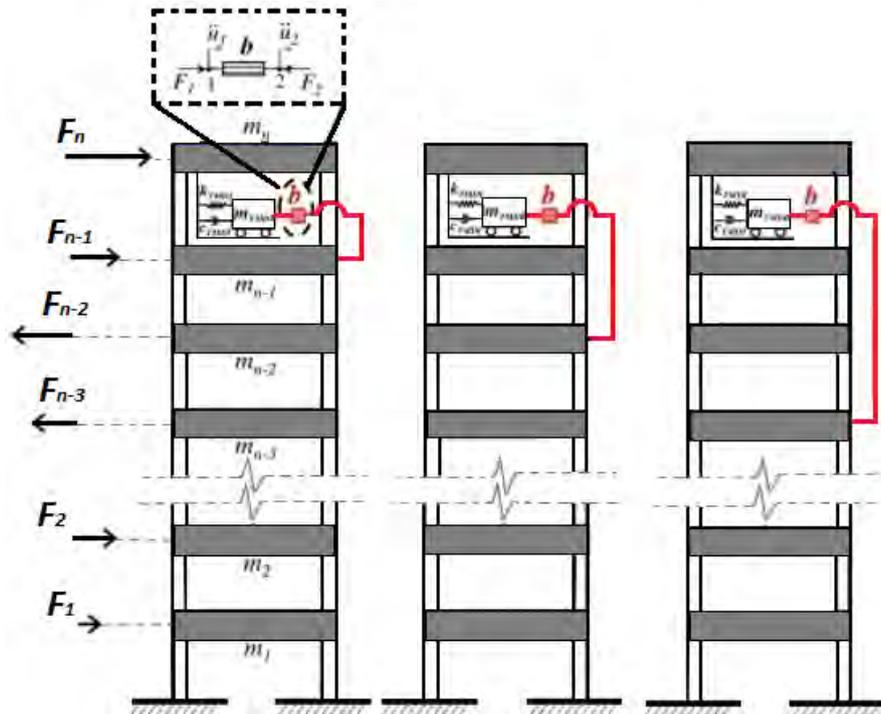


Figura 1.13: Edificio de n plantas equipado con un TMDI en el último piso excitado por el viento (Giaralis & Petrini, 2017).

Capítulo 2

Generalidades

2.1. Descripción del problema

Desde hace varios años hasta fechas recientes se han diseñado distintos tipos de absorbedores de vibración tanto teórica como experimentalmente, con la finalidad de controlar distintos procesos de ingeniería. Además, se ha documentado el uso de absorbedores en el control de máquinas en general, automóviles, rotores, estructuras, entre otros. Todos ellos cuando son sometidos a efectos vibratorios. Específicamente, en el área de ingeniería civil, existen investigaciones relacionadas con la disminución o mitigación de las vibraciones que surgen en las estructuras, que generalmente, son ocasionadas por sismos en los que se involucran excitaciones estocásticas.

Algunos de los trabajos más recientes en el área de control de vibraciones en estructuras, tratan específicamente de los efectos del uso del amortiguador de masa sintonizado con inersor, que por sus siglas en inglés es conocido como TMDI (Tuned Mass Damper Inerter). Estos estudios, se han realizado cuando el TMDI se conecta en la base, parte intermedia o superior de algún edificio de múltiples grados de libertad (MDOF), al mismo tiempo que es sometida a excitaciones aleatorias (estocásticas), específicamente de ruido blanco Gaussiano o colorido. En la mayoría de los casos, estos trabajos han mostrado resultados alentadores.

El principal problema de no controlar las vibraciones que surgen en las estructuras debido a sismos o corrientes intensas de viento, son los efectos catastróficos que pueden resultar cuando la estructura es afectada por el fenómeno de resonancia. Este fenómeno, puede ocasionar que se desarrollen fuerzas internas indeseables. Produciendo, en muchos casos, la fractura de las estructuras. Asimismo, la integridad de los ocupantes se ve comprometida. Por otro lado, existen edificios con aislamiento en la base, en los cuáles es difícil que ocurra la fractura de la estructura debido al factor de amortiguamiento proporcionado por el efecto del aislador. No obstante, también puede entrar en resonancia

ocasionando desplazamientos de alta magnitud y en consecuencia daños en el interior de la misma estructura.

Por otro lado, algunas ciudades se encuentran en creciente desarrollo urbano. Debido a ello, es deseable evitar la congestión de centros urbanos modernos. Para lograrlo, ha resultado conveniente la construcción de edificaciones de altitud considerable. De esta manera, se optimizan los espacios destinados para la construcción de centros urbanos. Sin embargo, como consecuencia de la construcción de este tipo de estructuras altas, se obtienen edificios más propensos a sufrir desplazamientos no deseados cuando se producen corrientes intensas de aire, así como a sufrir daños más severos en caso de vibraciones causadas por sismos.

Por otra parte, y en relación con el desarrollo sustentable, en las diversas áreas de la ingeniería continuamente se hace referencia acerca de la regeneración, recolección y conversión de energía producida por medios naturales como la energía obtenida por vibración. Esto resulta importante, porque actualmente y prácticamente en todos los sectores del país y del mundo, el uso de energías renovables resulta de interés para la conservación del medio. Como es conocido, la tierra está sujeta constantemente a vibraciones en el suelo, que generalmente, no son perceptibles por el ser humano. Sin embargo, se vuelven perceptibles cuando ocurren sismos de magnitud considerable. Por esta razón, ante estos fenómenos la energía cinética generada por la vibración de una masa primaria (edificio), puede ser transmitida a un absorbedor de vibración dinámico y transformada por medio de un transductor electromagnético. Independientemente de la posibilidad de utilizar o no la energía regenerada, la cuantificación de la misma puede proporcionar información acerca de la posibilidad de utilizarla para otras aplicaciones de ingeniería y del comportamiento del sistema dinámico.

2.2. Hipótesis de solución

En fechas recientes, el TMDI ha demostrado reducir eficientemente los desplazamientos en las estructuras con aislamiento en la base, ocasionados por vibraciones estocásticas como el ruido blanco Gaussiano. Por otra parte, se ha determinado que los absorbedores de vibración de doble masa configurados en serie, tienden a ser más eficientes que los DVAs tradicional. Además, es posible cuantificar la energía disipada por estos dispositivos e implementar algún dispositivo electromagnético dentro de la configuración de un IDVA para regenerar la energía absorbida. Contribuyendo a la implementación de energías renovables, al mismo tiempo que se trabaja eficientemente en el control de vibraciones.

Debido a que el trabajo de diseño consiste en la optimización y rendimiento dinámico del absorbedor, es posible ampliar la eficacia del TMDI documentado en los antecedentes, utilizando un absorbedor de alto rendimiento. Por esta razón, se propone el diseño óptimo de un absorbedor de doble masa conectado convenientemente a un inersor (debido a las propiedades inerciales que este posee), para ser utilizado en un edificio de múltiples grados de libertad con base aislada sujeta a vibración sísmica.

Hipótesis:

Es posible reducir la amplitud de vibración en un edificio de múltiples grados de libertad con base aislada sujeto a vibración estocástica, utilizando un absorbedor de doble masa diseñado óptimamente conectado a un inersor.

2.3. Objetivo general

Diseñar teóricamente un absorbedor de alto rendimiento para minimizar la energía total de vibración conectado a una estructura mecánica MDOF sujeta a vibración estocástica.

2.3.1. Objetivos específicos

1. Obtener el modelo dinámico sin dimensión tanto en el dominio del tiempo como en frecuencia del absorbedor de alto rendimiento conectado a una estructura mecánica de múltiples grados de libertad.
2. Aplicar la norma H_2 para obtener soluciones numéricas óptimas de la estructura sujeta a vibración de amplio espectro.
3. Generar un código de optimización para las variables adimensionales propuestas.
4. Realizar el análisis estocástico del sistema mecánico propuesto.
5. Realizar simulaciones en el dominio del tiempo considerando los parámetros óptimos obtenidos a partir de la norma H_2 y excitación de ruido blanco Gaussiano.
6. Analizar la capacidad de regeneración de energía de vibración a través de un análisis de sensibilidad paramétrica.

2.4. Justificación

Este trabajo de investigación, se realiza con la finalidad de hacer comparaciones analíticas y numéricas del diseño óptimo del IDVA propuesto con respecto a otros reportados en la literatura. Además, es importante dar continuidad al diseño de sistemas mecánicos que contribuyen al control de vibraciones, debido a que la urbanización de las ciudades está en continuo desarrollo. Por ello, los sistemas estructurales cada vez son más propensos a sufrir fracturas o desplazamientos indeseados debido a fuerzas o aceleraciones externas. Asimismo, se desea conocer la respuesta en el dominio del tiempo de una estructura de múltiples grados de libertad sujeta a vibración estocástica utilizando un diseño óptimo del IDVA propuesto. Asimismo, es necesario hacer una aportación teórica al estado del arte en el control pasivo de vibraciones y luego, dar continuidad al trabajo haciendo análisis teóricos complementarios y diversas pruebas experimentales en el futuro.

2.5. Contribución del trabajo

El alcance de este trabajo de investigación está limitado únicamente al mejoramiento del índice de control del DVA mediante la tecnología de inersores. Particularmente, cuando ellos son conectados a estructuras tipo edificios altos de sección transversal regular que poseen varios pisos (plantas) y cuentan con aislamiento en la base. En otras palabras, está enfocado en el control de vibraciones en estructuras de múltiples grados de libertad (MDOF). Donde cada piso (planta), representa un elemento inercial (masa). Asimismo, los resultados obtenidos en relación a la minimización de la respuesta dinámica de este tipo de estructuras ante excitación estocástica resultó favorable, al ser comparable con el acoplamiento de otros dispositivos reportados en la literatura. Por otro lado, mediante la solución de los problemas de optimización planteados considerando la Norma H_∞ y H_2 , se calculan los parámetros de ajuste de frecuencias naturales, amortiguamiento e inercia óptimos en función de una relación de masas definida para el IDVA propuesto, que después es modificado en un DVA-TID. En este trabajo, el DVA-TID proporcionó funcionalidad física, la cuál radica en la construcción de este absorbedor de vibración utilizando los parámetros óptimos calculados.

El aporte de este trabajo al estado del arte, es la comprobación de que al acoplar en serie un DVA simple (tipo Frahm) a un TID, se obtiene un IDVA de alto rendimiento superior al TMDI, que es el dispositivo utilizado con mayor frecuencia en la literatura en este tipo de estructuras. Se reafirmó, que la red mecánica conocida como TID supera a las redes mecánicas reportadas en la literatura al ser utilizada en estructuras con aislamiento en la base. Las variables óptimas del DVA-TID son comparables con las que se obtienen al optimizar los parámetros del TMDI. Se demostró que el DVA-TID, es funcional en la reducción de desplazamientos de una estructura al presentarse un sismo en un suelo con las tres caracterizaciones hechas en la literatura. Finalmente, se aporta un análisis cuantitativo de la energía mecánica disipada por el dispositivo propuesto y otros tomados de la literatura cuando son conectados a este tipo de edificios sujetos a vibración estocástica.

Capítulo 3

Marco teórico

La mecánica clásica, se basa en una serie de principios físico-matemáticos que son de utilidad para definir el comportamiento de algún sistema mecánico en particular. La mecánica Newtoniana, por ejemplo, hace uso de las leyes de Newton para derivar las ecuaciones diferenciales de movimiento de un determinado sistema. La expresión matemática general para la segunda ley de Newton esta dada por:

$$F = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

donde m es la masa de la partícula y \bar{v} su velocidad. Asumiendo que la masa de la partícula no varía,

$$F = m \frac{d}{dt} \bar{v}$$
$$F = m\bar{a}$$

sumando todas las fuerzas participantes en el sistema, la expresión anterior se escribe como:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = m\bar{a} \tag{3.1}$$

la ecuación 3.1, es utilizada para modelar matemáticamente diversos sistemas mecánicos.

3.1. Ecuación de Euler-Lagrange

En diversas ocasiones, utilizar la segunda ley de Newton resulta complicado debido a la descomposición vectorial de las fuerzas participantes en el sistema. Por ello, existe un segundo método para obtener ecuaciones diferenciales de movimiento. Este método, se basa en el principio de conservación de la energía y fue planteado por Joseph Louis Lagrange. Por ello, y debido a la contribución de Euler, las ecuaciones de este método energético

son nombradas como la Formulación de Euler-Lagrange. La expresión matemática de las ecuaciones de Lagrange para sistemas conservativos es;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.2)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

donde el subíndice i , se utiliza para representar cada una de las coordenadas generalizadas y L se conoce como Lagrangiano. El Lagrangiano es definido como la diferencia de la energía cinética total del sistema con la energía potencial total. En otras palabras;

$$L = T - V \quad (3.3)$$

La deducción de la ecuación 3.2, hace uso del análisis funcional y cálculo de variaciones. En general, su demostración es complicada. Asimismo, existe una segunda ecuación para sistemas no conservativos, en la cuál se considera una función de disipación de energía denotada como D . Esta función, considera pérdidas de energía del sistema por fricción, calor entre otros factores. La ecuación de Euler-Lagrange para sistemas no conservativos se define como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (3.4)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

la coordenada q_i representa las coordenadas generalizadas, mientras que Q_i las fuerzas generalizadas correspondientes a cada coordenada.

3.2. Transformada de Laplace y de Fourier

Siempre que es necesario representar una ecuación definida en el tiempo, en el dominio de la frecuencia, se utilizan las definiciones de la transformada de Laplace y de Fourier unilaterales. Es decir, que existen en el intervalo $(0, \infty)$.

El operador matemático de la transformada de Laplace unilateral es;

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.5)$$

donde la variable s es un número complejo de la forma $s = \sigma + j\omega$.

De manera similar se define la transformada unilateral de Fourier;

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.6)$$

Se puede ver que la transformada de Fourier se puede obtener a partir de la transformada de Laplace haciendo $s = j\omega$. Sin embargo, esto no siempre es válido. La condición necesaria para que esto se cumpla es que σ sea cero, lo cual ocurre cuando se analiza la parte estable de los sistemas dinámicos. Asimismo, la región de convergencia de la transformada de Laplace, únicamente ocurre cuando $\sigma > 0$.

3.3. Absorbedor de vibración dinámico clásico

Un absorbedor de vibración dinámico clásico es un dispositivo mecánico utilizado para atenuar la vibración indeseable de un sistema determinado, está compuesto de una masa, un resorte y un amortiguador de fluido viscoso que se conectan a una masa primaria (masa del sistema a controlar). Por esta razón, un absorbedor de vibración clásico en conjunto con la masa principal, conforman un sistema de dos grados de libertad. El común de los DVAs, constan de elementos que conservan energía cinética (resortes), otros que la disipan (elementos de amortiguamiento) y elementos inerciales (masas adicionales) que actúan como un medio para absorber energía. En la Figura 3.1, se muestra la configuración elemental del absorbedor de vibración dinámico clásico.

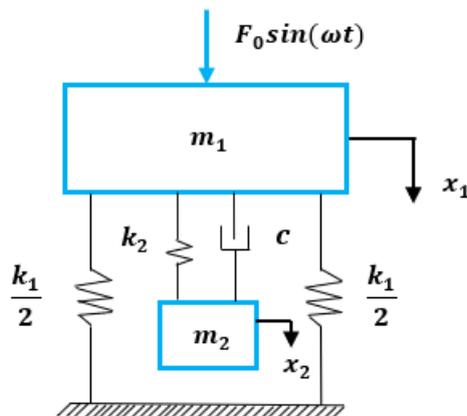


Figura 3.1: Absorbedor de vibración dinámico clásico (Rao,2012).

En la configuración de un DVA, los parámetros del dispositivo conforman una parte crucial del proceso de diseño. Para analizar el funcionamiento de este dispositivo, es necesario definir las ecuaciones diferenciales de movimiento en el dominio del tiempo. Luego, se establece un modelo en el dominio de la frecuencia. A partir de ahí, se optimizan los parámetros del absorbedor. A esta última parte se le conoce como diseño óptimo. En el proceso de optimización, se utilizan parámetros adimensionales que relacionan las variables del sistema. Luego, según la metodología empleada, se obtienen expresiones analíticas o valores numéricos óptimos que producen la misma amplitud de vibración en los puntos invariantes, minimizan la amplitud de vibración en los puntos resonantes y/o minimizan la energía total de vibración del sistema primario.

La dificultad para realizar el diseño óptimo de un absorbedor dependerá de la cantidad de parámetros adimensionales y de la configuración del absorbedor. Por otro lado, el diseño de un absorbedor de vibración dinámico se realiza de modo que las frecuencias naturales del sistema primario se alejen de la frecuencia de excitación, evitando o disminuyendo el fenómeno de resonancia, que ocurre cuando la frecuencia de la excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema. Este fenómeno, es una de las causas principales que ocasionan fallas en los sistemas mecánicos. Cuando una máquina o estructura sufre desplazamientos o velocidades no deseadas, es un indicador de que existen vibraciones no controladas en el sistema, y que en determinado momento podría ocurrir el fenómeno de resonancia. En la Figura 3.2, se observan las gráficas de respuesta en frecuencia correspondientes a la Figura 3.1 (DVA clásico).

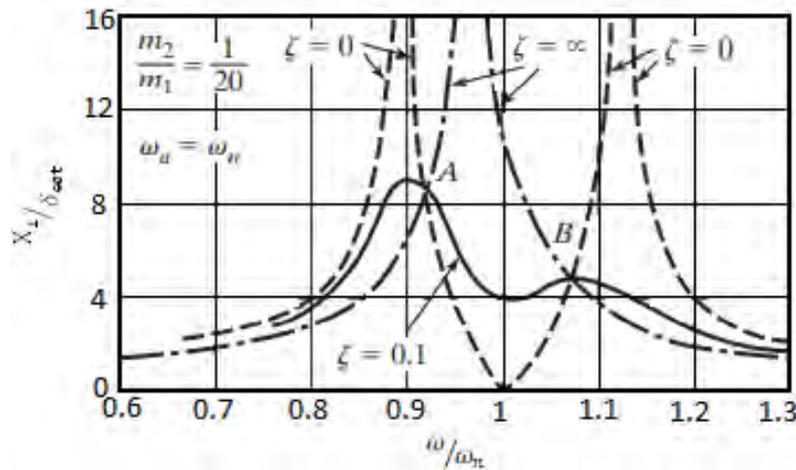


Figura 3.2: Efecto de un DVA clásico en la FRF de un sistema primario (Rao,2012)

En la Figura 3.2, se muestran tres curvas de respuesta en frecuencia correspondientes al sistema de la Figura 3.1. La primera; cuando el amortiguamiento es $\zeta = 0$, la segunda cuando $\zeta = \infty$ y la última para un valor arbitrario de ζ . Es posible apreciar, que existen dos puntos invariantes A y B que forman parte del dominio de las tres curvas. De igual manera, sucedería para cualquier otro valor del amortiguamiento ζ . De esta observación, surge la metodología de Den Hartog desarrollada en 1956 (Shen et al, 2017), que se centra en encontrar la curva de respuesta en frecuencia que produce la menor amplitud de vibración posible. Esto se logra, encontrando una relación de frecuencias y de amortiguamiento óptimo. Esta técnica ha sido utilizada por diversos investigadores, generalmente para estudiar las estructuras no amortiguadas (Shen et al, 2017), (Ren, 2001), (Ghosh & Basu, 2007) y otros. Este método no esta relacionado íntimamente con los que se describen en la Sección 3.4. De hecho, esta técnica es considerada una técnica de ajuste o de sintonización y solamente es aplicable en sistemas de dos grados de libertad incluyendo el del DVA implementado.

La amplitud de la función de respuesta en frecuencia, conocida por sus siglas en inglés como FRF, está definida en función de los parámetros de masa, amortiguamiento y frecuencia natural. En consecuencia, varía en función de los parámetros adimensionales que

se definen en el proceso de diseño. Por otro lado, si se fijan las relaciones de masa, frecuencia e inertancia (si la hay), y únicamente varía la relación de amortiguamiento, se verá que la amplitud en el diagrama de Bode también varía, pero que todas las curvas obtenidas pasan por dos o más puntos en común, a estos puntos se les conoce como puntos fijos o invariantes como se observa en la Figura 3.2.

Adicionalmente, un sistema mecánico, puede estar sujeto a excitación armónica. Sin embargo, los sistemas estructurales, generalmente están sometidos a aceleraciones externas de comportamiento no definido, conocido como aleatorio o estocástico. Debido a ello, la respuesta en el tiempo de los sistemas ante este tipo de excitaciones tendrán un comportamiento similar, con o sin el efecto del absorbedor de vibración implementado.

3.4. Optimización de variables

De manera general, la formulación de un problema de optimización consiste en una función matemática de una o más variables. Cuya variable dependiente debe minimizarse o maximizarse según la necesidad del problema planteado. En ocasiones, los problemas de optimización están sujetos a una o más restricciones. Es decir, debe encontrarse el valor máximo o mínimo de alguna variable, sin contradecir matemáticamente las limitaciones de la o las restricciones dadas. Este tipo de problemas, pueden variar, e ir desde lo más simple hasta lo más complejo. La complejidad de este tipo de problemas dependerá del tipo de función a optimizar, el comportamiento de la misma y del número de variables independientes involucradas.

Optimización de funciones de una variable.

Un problema de optimización de una variable, se representa con una función matemática que generalmente se denota como $h = h(x)$. Este problema, consiste en encontrar el o los valores de x para los cuales la variable h se minimiza o se maximiza. Esto se consigue calculando la primera derivada de $h = h(x)$, igualando con cero (debido a que geométricamente la derivada es la pendiente en cualquiera de los puntos de $h(x)$) y resolviendo para x . En otras palabras;

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) = \frac{dh(x)}{dx} = 0$$

de esta ecuación, se pueden encontrar una o más raíces; $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4 \dots x = x_n$.

De todas las raíces encontradas, es posible que algunas representen máximos o mínimos relativos, mientras que otras pueden ser soluciones triviales que posiblemente posean un sentido y una justificación matemática pero que carecen de sentido físico y solamente

una de ellas puede ser un máximo o un mínimo absoluto. Para determinar que tipo de extremos produce cada raíz, se pueden utilizar criterios como el de la primera derivada, segunda derivada o realizar un análisis completo de la concavidad y del comportamiento de $h(x)$, $h'(x)$ y $h''(x)$.

Optimización de funciones de más de una variable.

Para optimizar funciones de más de una variable, la metodología es similar a la que se sigue en la optimización de una variable. En otras palabras, podría decirse que es una generalización del primer caso. Tomando en cuenta una función de dos variables $z = z(x, y)$ es posible calcular sus derivadas parciales siempre y cuando la función z sea continua en un disco abierto de radio r , siempre que exista algún punto $(a, b) \in \mathfrak{R}$ donde $a^2 + b^2 < r^2$. Estas derivadas se denotan como sigue;

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y} \right) = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

la igualación con cero de estas ecuaciones se debe al mismo concepto geométrico que en una variable. Es decir, que para encontrar los puntos críticos de z se asumen planos tangentes a la superficie y de pendiente cero con respecto al plano xy . Asimismo, mientras se define la variación de z con respecto a cualquiera de las dos variables independientes la otra permanece constante en un plano vertical, sea $x = a$ o $y = b$.

Una vez calculadas las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, se resuelve simultáneamente el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

los valores encontrados tanto para x como para y , conforman las coordenadas de los puntos críticos, y al igual que en el caso de una variable, existe un criterio para decidir si estos puntos son máximos o mínimos absolutos, relativos, puntos de silla o si simplemente alguna de las derivadas parciales no existe en ese punto. Este criterio es el siguiente;

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

esta función es nombrada como discriminante. Los puntos críticos denotados como x_0, y_0 deben sustituirse utilizando el siguiente criterio. Si $D(x_0, y_0) > 0$ es posible que

exista un máximo o mínimo relativo, si $D(x_0, y_0) < 0$ no hay un extremo relativo en ese punto y si $D(x_0, y_0) = 0$ la prueba falla.

Esta metodología se generaliza para funciones de n variables. En ese caso, se utiliza un criterio que de igual manera esta relacionado con el de la segunda derivada tanto de una como de dos variables. Este criterio, se define con la siguiente matriz, conocida como matriz Hessiana o Hessiano.

$$H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Elegir los puntos adecuados que minimizan o maximizan la función de interés suele complicarse cuando intervienen varias variables. En general, la demostración de este criterio es complicada.

Multiplicadores de Lagrange.

Este método de optimización, es utilizado cuando existe una o más restricciones descritas matemáticamente que son necesarias de satisfacer al encontrar el máximo o mínimo de una función objetivo. Si se considera una función descrita en el espacio \mathbb{R}^3 como $z = f(x, y)$, trazando sus diferentes curvas de nivel $z = c_1, z = c_2, z = c_3, \dots, z = c_n$ y considerando la función en \mathbb{R}^2 denotada como $g(x, y) = k$. Además, sabiendo que las curvas de nivel de z y la función g se intersectan en varios puntos x_0, y_0 (ver Figura 3.3 (a)). Es posible ver que solamente en algunos de ellos estas curvas se vuelven tangentes entre si. Estos puntos se denominan como puntos criticos, posibles máximos o mínimos de la función z cuando esta sujeta a la restricción g .

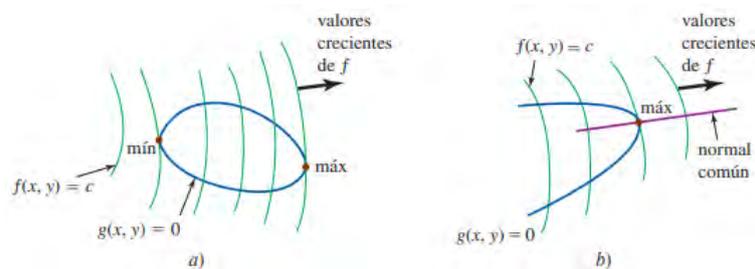


Figura 3.3: a) Intersecciones de las curvas de nivel de f (verde) y la función g (azul). b) Punto de tangencia entre $g(x, y) = k$ y $f(x, y) = c$, los gradientes de f y g son paralelos en este punto (Zill & Wright, 2011).

Por otro lado en la Figura 3.3 (b), es posible ver que el vector gradiente de z es

perpendicular a cualquiera de sus curvas de nivel, mientras que el gradiente de g es perpendicular a ella misma. Particularmente, en el punto de tangencia, estos vectores se vuelven paralelos entre si. Matemáticamente;

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad (3.7)$$

donde el escalar λ se utiliza para dar la condición de paralelismo entre el vector gradiente de f y g .

Estos vectores son paralelos entre si en alguno de los puntos de tangencia entre una de las curvas de nivel de z y la restricción g como se describe en la Figura 3.3 (b). Para encontrar los puntos críticos de este problema es necesario resolver el sistema de ecuaciones escalares que genera la ecuación 3.7 junto con la restricción $g(x, y) = 0$. Este sistema genera las incógnitas x , y y λ .

Un planteamiento similar se utiliza cuando se tiene más de una restricción, en este caso;

$$\vec{\nabla} f = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 + \dots + \lambda_m \vec{\nabla} g_m$$

sujeto a las g_m restricciones de este problema.

De manera general este método se puede denotar vectorialmente como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots \\ & + \lambda_m \vec{\nabla} g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

con

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.

Como se ve, la ecuación 3.8, produce $n + m$ ecuaciones escalares con $n + m$ incógnitas. Donde m , indica la cantidad de multiplicadores de Lagrange dados por el número de restricciones g_m .

Capítulo 4

Modelado matemático en el dominio del tiempo

Para iniciar con el modelado matemático, se define el sistema mecánico que se analiza a lo largo de este trabajo considerando la hipótesis planteada en la Sección 2.2. Este sistema mecánico se define como un edificio MDOF con aislamiento en la base sujeto a aceleración sísmica como el que se muestra en el diagrama cinético de la Figura 4.1. Luego, es necesario obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento en el dominio del tiempo que rigen el comportamiento dinámico del edificio mostrado en la Figura 4.1, pero conectándolo al absorbedor de vibración propuesto.

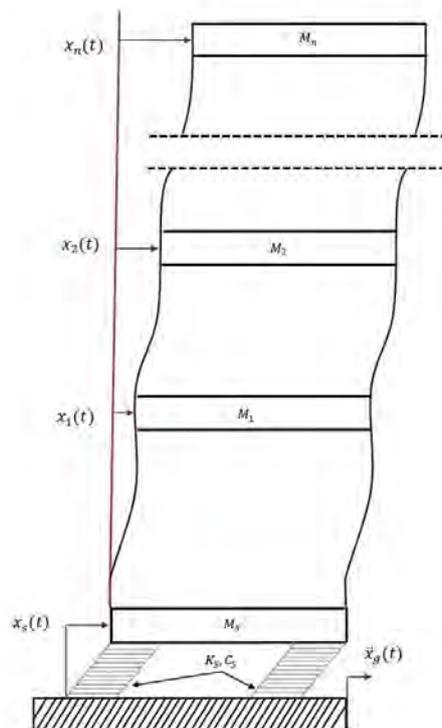


Figura 4.1: Edificio aislado en la base de múltiples grados de libertad (MDOF)

Adicionando el dispositivo propuesto en este trabajo al edificio de la Figura 4.1, denominado como absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional, se generan los siguientes dos casos particulares.

Caso uno: Se tiene la misma estructura que en la Figura 4.1 conectada en la base aislada a la configuración del DVA propuesto como se muestra en la Figura 4.2.

Caso dos: Es el mismo edificio MDOF conectado al DVA propuesto en la parte superior (enésima masa), y su vez conectado a cualquier planta del edificio (ver Figura 4.3).

Es necesario mencionar que los diagramas que aparecen en las Figuras 4.2 y 4.3, son representativos y estan sujetos a cambios de acuerdo con el desarrollo y los análisis que se realicen a lo largo de esta investigación.

Para obtener los modelos dinámicos, se utiliza la formulación de Euler-Lagrange para sistemas no conservativos definida en la ecuación 3.4 en la Sección 3.1, considerando las n coordenadas generalizadas de cada masa (pisos del edificio) y una adicional proporcionada por la masa de la base aislada como se muestra en la Figura 4.1. Por lo tanto, el modelo matemático de la estructura MDOF sin absorbedor, cuenta con $n + 1$ ecuaciones diferenciales de movimiento. Sin embargo, los modelos matemáticos correspondientes a los casos uno y dos (Figuras 4.2 y 4.3), contarán con $n + 3$ ecuaciones diferenciales, debido a la adición de las dos coordenadas generalizadas de los elementos inerciales del DVA propuesto denotados como m_A y m_B .

4.1. Modelo dinámico del edificio MDOF conectado al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional en la base aislada

Este sistema mecánico se muestra en la Figura 4.2, y esta conformado por el edificio MDOF con aislamiento en la base y el absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional. El dispositivo propuesto es conectado mediante un muelle de rigidez k_A en la base de la estructura, mientras que el otro extremo (terminal del inersor) es conectado en el suelo de la misma manera en que se emplea el TMDI en este tipo de edificios (Matteo et al, 2019). Para obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de este sistema se toma en cuenta el marco de referencia inercial de la Figura 4.2. A partir de ahí, la posición de la base aislada M_s se mide respecto a la posición del suelo, mientras que las posiciones de las n masas, la masa m_A y m_B , se miden con respecto a la posición de la base aislada. Asimismo, se asumen parámetros de rigidez y amortiguamiento de cada masa propias de las características físicas del material.

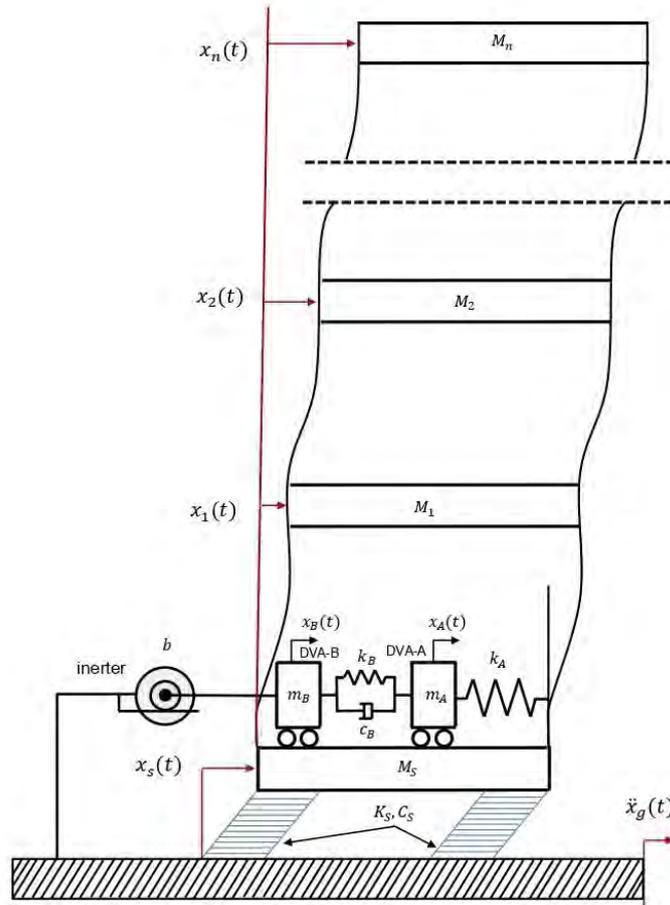


Figura 4.2: Edificio MDOF aislado en la base controlado mediante el absorbedor de vibración propuesto.

A continuación, se considera la siguiente nomenclatura para las posiciones absolutas:

- x_g = posición absoluta del suelo.
- x_{st} = posición absoluta de la base aislada.
- x_{it} = posición absoluta de la i -ésima masa de la estructura principal.
- x_{At} = posición absoluta de la masa m_A .
- x_{Bt} = posición absoluta de la masa m_B .

Por otro lado, las posiciones relativas quedan definidas como sigue:

- x_s = posición de la base aislada relativa al suelo x_g .
- x_i = posición de la i -ésima masa de la estructura principal relativa a x_{st} . Para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
- x_A = posición de la masa m_A relativa a x_{st} .
- x_B = posición de la masa m_B relativa a x_{st} .

Con base en la nomenclatura establecida para las posiciones relativas, se obtienen las posiciones absolutas para cada una de las masas:

para M_s ,

$$x_s = x_{st} - x_g$$

$$x_{st} = x_s + x_g$$

para m_A ,

$$x_A = x_{At} - x_{st}$$

$$x_{At} = x_A + x_{st}$$

$$x_{At} = x_A + x_s + x_g$$

para m_B ,

$$x_B = x_{Bt} - x_{st}$$

$$x_{Bt} = x_B + x_{st}$$

$$x_{Bt} = x_B + x_s + x_g$$

para M_1 ,

$$x_1 = x_{1t} - x_{st}$$

$$x_{1t} = x_1 + x_{st}$$

$$x_{1t} = x_1 + x_s + x_g$$

para M_2 ,

$$x_2 = x_{2t} - x_{st}$$

$$x_{2t} = x_2 + x_{st}$$

$$x_{2t} = x_2 + x_s + x_g$$

continuando hasta M_n ,

\vdots

para M_{n-1} ,

$$x_{n-1} = x_{n-1t} - x_{st}$$

$$x_{n-1t} = x_{n-1} + x_{st}$$

$$x_{n-1t} = x_{n-1} + x_s + x_g$$

para M_n ,

$$x_n = x_{nt} - x_{st}$$

$$x_{nt} = x_n + x_{st}$$

$$x_{nt} = x_n + x_s + x_g$$

.

Para obtener los desplazamientos entre dos masas consecutivas de la estructura MDOF, se considera un resorte (elemento elástico) idealizado conectado entre cada una de las masas. El alargamiento o acortamiento de cada elemento elástico, se determina denotando la

diferencia de las posiciones de dos masas consecutivas. De esta manera, las deformaciones de los elementos elásticos se denotan como sigue:

desplazamiento entre M_s y el suelo,

$$x_{st} - x_g = x_s + x_g - x_g = x_s$$

desplazamiento entre M_A y M_s ,

$$x_{At} - x_{st} = x_A + x_s + x_g - x_s - x_g = x_A$$

desplazamiento entre M_B y M_A ,

$$x_{Bt} - x_{At} = x_B + x_s + x_g - x_A - x_s - x_g = x_B - x_A$$

desplazamiento entre M_1 y M_s ,

$$x_{1t} - x_{st} = x_1 + x_s + x_g - x_s - x_g = x_1$$

desplazamiento entre M_2 y M_1 ,

$$x_{2t} - x_{1t} = x_2 + x_s + x_g - x_1 - x_s - x_g = x_2 - x_1$$

⋮

desplazamiento entre M_{n-1} y M_{n-2} ,

$$x_{n-1t} - x_{n-2t} = x_{n-1} + x_s + x_g - x_{n-2} - x_s - x_g = x_{n-1} - x_{n-2}$$

desplazamiento entre M_n y M_{n-1} ,

$$x_{nt} - x_{n-1t} = x_n + x_s + x_g - x_{n-1} - x_s - x_g = x_n - x_{n-1}$$

para obtener la diferencia de velocidades entre cada masa, se deriva el conjunto de la diferencia de posiciones entre masas;

velocidad relativa entre M_s y el suelo,

$$\dot{x}_{st} - \dot{x}_g = \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_g = \dot{x}_s$$

velocidad relativa entre m_A y M_s (no hay amortiguamiento),

$$\dot{x}_{At} - \dot{x}_{st} = \dot{x}_A + \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_s - \dot{x}_g = \dot{x}_A$$

velocidad relativa entre m_B y m_A ,

$$\dot{x}_{Bt} - \dot{x}_{At} = \dot{x}_B + \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_A - \dot{x}_s - \dot{x}_g = \dot{x}_B - \dot{x}_A$$

velocidad relativa entre M_1 y M_s ,

$$\dot{x}_{1t} - \dot{x}_{st} = \dot{x}_1 + \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_s - \dot{x}_g = \dot{x}_1$$

velocidad relativa entre M_2 y M_1 ,

$$\dot{x}_{2t} - \dot{x}_{1t} = \dot{x}_2 + \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_1 - \dot{x}_s - \dot{x}_g = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$$

⋮

velocidad relativa entre M_{n-1} y M_{n-2} ,

$$\dot{x}_{n-1t} - \dot{x}_{n-2t} = \dot{x}_{n-1} + \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_{n-2} - \dot{x}_s - \dot{x}_g = \dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2}$$

velocidad relativa entre M_n y M_{n-1} ,

$$\dot{x}_{nt} - \dot{x}_{n-1t} = \dot{x}_n + \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_{n-1} - \dot{x}_s - \dot{x}_g = \dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}$$

Una vez definido el conjunto de posiciones absolutas, de desplazamiento entre masas y de velocidades relativas, es posible escribir la función que denota la energía cinética, potencial elástica y de disipación de energía del sistema mecánico estructural. Estas funciones se definen como sigue:

$$T = \frac{1}{2} (M_s \dot{x}_{st}^2 + M_1 \dot{x}_{1t}^2 + M_2 \dot{x}_{2t}^2 + \dots + M_{n-1} \dot{x}_{n-1t}^2 + M_n \dot{x}_{nt}^2 + m_A \dot{x}_{At}^2 + m_B \dot{x}_{Bt}^2) \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} b (\dot{x}_{Bt} - \dot{x}_g)^2}_{\text{T del inersor}}$$

note que el término de la energía cinética del inersor esta relacionado con la velocidad del suelo (terminal 1 del inersor) y de la masa m_B (terminal 2 del inersor).

Sustituyendo el conjunto de posiciones absolutas y desarrollando los productos,

$$T(\dot{x}_s, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \dot{x}_A, \dot{x}_B) = \frac{1}{2} M_s (\dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2} M_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 \quad (4.1)$$

$$+ \frac{1}{2} M_2 (\dot{x}_2 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 \dots + \frac{1}{2} M_{n-1} (\dot{x}_{n-1} + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2} M_n (\dot{x}_n + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2$$

$$+ \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_A + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_B + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} b (\dot{x}_B + \dot{x}_s)^2}_{\text{T del inersor}}$$

por otro lado, la energía potencial elástica del sistema se denota considerando el conjunto de desplazamientos entre masas (deformaciones). Esta expresión es

$$V = \frac{1}{2} k_s (x_{st} - x_g)^2 + \frac{1}{2} k_1 (x_{1t} - x_{st})^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_{2t} - x_{1t})^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_{3t} - x_{2t})^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} k_{n-1} (x_{n-1t} - x_{n-2t})^2 + \frac{1}{2} k_n (x_{nt} - x_{n-1t})^2 + \frac{1}{2} k_A (x_{At} - x_{st})^2 + \frac{1}{2} k_B (x_{Bt} - x_{At})^2$$

sustituyendo el conjunto de desplazamiento entre masas,

$$V(x_s, x_1, x_2, \dots, x_n, x_A, x_B) = \frac{1}{2}k_s x_s^2 + \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 (x_3 - x_2)^2 + \dots \quad (4.2)$$

$$+ \frac{1}{2}k_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2})^2 + \frac{1}{2}k_n (x_n - x_{n-1})^2 + \frac{1}{2}k_A x_A^2 + \frac{1}{2}k_B (x_B - x_A)^2$$

De manera similar que en el caso de la función 4.2, la función de disipación de energía de Rayleigh se define utilizando el conjunto de velocidades relativas. Estas velocidades están directamente relacionadas con los parámetros de amortiguamiento. La función queda definida como;

$$D(\dot{x}_s, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \dot{x}_A, \dot{x}_B) = \frac{1}{2}C_s \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}C_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}C_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}C_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 + \dots \quad (4.3)$$

$$+ \frac{1}{2}C_{n-1} (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2})^2 + \frac{1}{2}C_n (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})^2 + \frac{1}{2}C_B (\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2$$

Recordando la definición del Lagrangiano en 3.3,

$$L = T - V$$

sustituyendo 4.1 y 4.2 en 3.3;

$$L = \frac{1}{2}M_s (\dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}M_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}M_2 (\dot{x}_2 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{2}M_{n-1} (\dot{x}_{n-1} + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}M_n (\dot{x}_n + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}m_A (\dot{x}_A + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 \quad (4.4)$$

$$+ \frac{1}{2}m_B (\dot{x}_B + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}b (\dot{x}_B + \dot{x}_s)^2 - \frac{1}{2}k_s x_s^2 - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_1)^2$$

$$- \frac{1}{2}k_3 (x_3 - x_2)^2 \dots - \frac{1}{2}k_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2})^2 - \frac{1}{2}k_n (x_n - x_{n-1})^2 - \frac{1}{2}k_A x_A^2$$

$$- \frac{1}{2}k_B (x_B - x_A)^2$$

Por otro lado, la ecuación de Euler-Lagrange para sistemas no conservativos se define en la ecuación 3.4 como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

para este análisis $q = x$ e $i = s, A, B, 1, 2, 3, \dots, n$.

Calculando las derivadas parciales de las funciones 4.3 y 4.4, dadas por la ecuación 3.4, para $i = s$, es decir, $q_s = x_s$ se tiene;

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} = (M_s + \sum_{i=1}^n M_i + M_A + M_B + b)\dot{x}_s + (M_s + \sum_{i=1}^n M_i + M_A + M_B)\dot{x}_g + \sum_{i=1}^n M_i \dot{x}_i \quad (4.5)$$

$$+ M_A \dot{x}_A + (M_B + b)\dot{x}_B$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_s} = -k_s x_s \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_s} = C_s \dot{x}_s \quad (4.7)$$

reemplazando las expresiones 4.5, 4.6 y 4.7 en la ecuación 3.4, considerando $Q_s(t) = 0$ y ordenando los términos;

$$(M_s + \sum_{i=1}^n M_i + M_A + M_B + b)\ddot{x}_s + \sum_{i=1}^n M_i \ddot{x}_i + M_A \ddot{x}_A + (M_B + b)\ddot{x}_B + C_s \dot{x}_s \quad (4.8)$$

$$+ k_s x_s = -(M_s + \sum_{i=1}^n M_i + M_A + M_B)\ddot{x}_g$$

La ecuación 4.8, es la ecuación diferencial de movimiento para la base aislada de masa M_s . De manera similar, se calculan las derivadas parciales de las funciones 4.3 y 4.4, dadas por la ecuación 3.4, para $i = A$, es decir, $q_A = x_A$;

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} = m_A(\dot{x}_A + \dot{x}_s + \dot{x}_g) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = -k_A x_A + k_B(x_B - x_A) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_A} = -C_B(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \quad (4.11)$$

reemplazando las expresiones 4.9, 4.10 y 4.11 en la ecuación 3.4, considerando $Q_A(t) = 0$, simplificando y ordenando resulta;

$$m_A \ddot{x}_A + m_A \ddot{x}_s + C_B \dot{x}_A - C_B \dot{x}_B + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A \ddot{x}_g \quad (4.12)$$

La ecuación 4.12, es la ecuación diferencial de movimiento correspondiente a la coordenada x_A . Ahora, se calculan las derivadas parciales de las funciones 4.3 y 4.4, dadas por la ecuación 3.4, para $i = B$, es decir, $q_B = x_B$;

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_B} = m_B(\dot{x}_B + \dot{x}_s + \dot{x}_g) + b(\dot{x}_B + \dot{x}_s) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_B} = -k_B(x_B - x_A) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_B} = C_B(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \quad (4.15)$$

reemplazando las expresiones 4.13, 4.14 y 4.15 en la ecuación 3.4, considerando $Q_B(t) = 0$, simplificando y ordenando resulta;

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + (m_B + b)\ddot{x}_s - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_Bx_A + k_Bx_B = -m_B\ddot{x}_g \quad (4.16)$$

La ecuación 4.16, es la ecuación diferencial de movimiento de la masa m_B .

Luego, se sigue el mismo procedimiento para obtener las ecuaciones de cada una de las masas, desde $i = 1$ hasta n . Para ello, se calculan las derivadas parciales de las funciones 4.3 y 4.4, dadas por la ecuación 3.4 para cada valor de i , comenzando por $i = 1$ ($q_1 = x_1$). Al hacerlo y después de simplificaciones, se obtiene la ecuación 4.17

$$M_1\ddot{x}_1 + M_1\ddot{x}_s + (C_1 + C_2)\dot{x}_1 - C_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = -M_1\ddot{x}_g \quad (4.17)$$

La ecuación diferencial de movimiento 4.17, corresponde a la coordenada x_1 . De la misma manera se obtiene la ecuación diferencial de movimiento para $i = 2$, es decir; $q_2 = x_2$. Esta ecuación esta dada en 4.18

$$M_2\ddot{x}_2 + M_2\ddot{x}_s - C_2\dot{x}_1 + (C_2 + C_3)\dot{x}_2 - C_3\dot{x}_3 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = -M_2\ddot{x}_g \quad (4.18)$$

Luego, para $q_3 = x_3$ se obtiene la ecuación diferencial de movimiento dada en 4.19

$$M_3\ddot{x}_3 + M_3\ddot{x}_s - C_3\dot{x}_2 + (C_3 + C_4)\dot{x}_3 - C_4\dot{x}_4 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4 = -M_3\ddot{x}_g \quad (4.19)$$

Continuando hasta la n -ésima coordenada para $q_{n-1} = x_{n-1}$ se obtiene la ecuación 4.20;

$$M_{n-1}\ddot{x}_{n-1} + M_{n-1}\ddot{x}_s - C_{n-1}\dot{x}_{n-2} + (C_{n-1} + C_n)\dot{x}_{n-1} - C_n\dot{x}_n - k_{n-1}x_{n-2} \quad (4.20)$$

$$+(k_{n-1} + k_n)x_{n-1} - k_nx_n = -M_{n-1}\ddot{x}_g$$

finalmente, se obtiene la ecuación 4.21 para $q_n = x_n$

$$M_n\ddot{x}_n + M_n\ddot{x}_s - C_n\dot{x}_{n-1} + C_n\dot{x}_n - k_nx_{n-1} + k_nx_n = -M_n\ddot{x}_g \quad (4.21)$$

Analizando las ecuaciones 4.17 - 4.21, se observa que siguen un patrón en el orden de sus términos. Por ello, es posible reescribirlas en forma matricial como:

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}}_s) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (4.22)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, mientras que $\ddot{\mathbf{x}}_s$, \mathbf{x} y \mathbf{F} son los vectores de aceleración de la base, posición de las masas y fuerzas generalizadas respectivamente. Estas matrices y vectores están dados por;

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_n \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1} + C_n & -C_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -C_n & C_n \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_s = \ddot{x}_s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = -\ddot{\mathbf{x}}_g \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}$$

además, la ecuación 4.22, se puede escribir utilizando la notación suma, fijando las filas de las matrices \mathbf{C} y \mathbf{K} denotadas con la letra i y haciendo variar la componente j en la i -ésima ecuación.

$$M_i \ddot{x}_i + M_i \ddot{x}_s + \sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j = -M_i \ddot{x}_g(t) \quad (4.26)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Donde C_{ij} y k_{ij} son elementos de las matrices de amortiguamiento y rigidez.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento de la estructura MDOF conectada en la base aislada al absorbedor propuesto, están descritas por el conjunto de $n + 3$ ecuaciones diferenciales denotadas en 4.8, 4.12, 4.16 y 4.26. Por otro lado, si el término $M_s + \sum_{i=1}^n M_i$ que aparece en la ecuación 4.8 se escribe como M_t (masa total), este conjunto de ecuaciones diferenciales queda como sigue:

$$(M_t + m_A + m_B + b) \ddot{x}_s + \sum_{i=1}^n M_i \ddot{x}_i + m_A \ddot{x}_A + (m_B + b) \ddot{x}_B + C_s \dot{x}_s + k_s x_s = -(M_t + m_A + m_B) \ddot{x}_g$$

$$m_A \ddot{x}_A + m_A \ddot{x}_s + C_B \dot{x}_A - C_B \dot{x}_B + (k_A + k_B) x_A - k_B x_B = -m_A \ddot{x}_g$$

$$(m_B + b) \ddot{x}_B + (m_B + b) \ddot{x}_s - C_B \dot{x}_A + C_B \dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B = -m_B \ddot{x}_g$$

$$M_i \ddot{x}_i + M_i \ddot{x}_s + \sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j = -M_i \ddot{x}_g(t)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Al inicio de este Capítulo, se mencionó que el diagrama de la Figura 4.1 puede presentar cambios a lo largo del trabajo. Es por eso que las $n + 3$ ecuaciones obtenidas en 4.8, 4.12, 4.16 y 4.26 también están sujetas a los mismos cambios, de acuerdo con los análisis desarrollados en este trabajo.

4.2. Modelo dinámico del edificio MDOF conectado al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional en el n -ésimo piso

Para obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de este sistema se toma en cuenta el marco de referencia inercial de la Figura 4.3, donde se muestra el absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional ahora conectado en el n -ésimo piso del edificio. En esta Figura, las posiciones de las masas se miden igual que en el caso de Figura 4.2. Asimismo, se asumen parámetros de rigidez y amortiguamiento de cada masa propias de las características físicas del material del edificio.

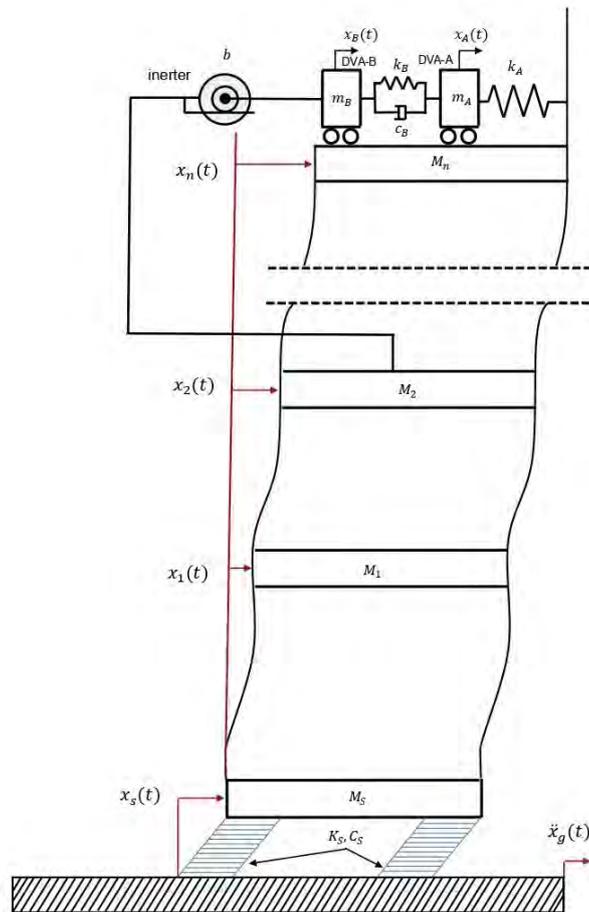


Figura 4.3: Absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional controlando la vibración de cualquier piso del edificio.

Considerando la siguiente nomenclatura para las posiciones absolutas:

x_g = posición absoluta del suelo.

x_{st} = posición absoluta de la base aislada.

x_{it} = posición absoluta de la i -ésima masa de la estructura principal para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

x_{At} = posición absoluta de la masa m_A .

x_{Bt} = posición absoluta de la masa m_B .

por otro lado, las posiciones relativas quedan definidas como sigue:

x_s = posición de la base aislada relativa al suelo x_g .

x_i = posición de la i -ésima masa de la estructura principal relativa a x_{st} . Para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

x_A = posición de la masa m_A relativa a x_{st} .

x_B = posición de la masa m_B relativa a x_{st} .

Con base en la nomenclatura establecida para las posiciones relativas y de manera similar al modelo de la Sección 4.1, se obtienen las posiciones absolutas para cada una de las masas:

para M_s ,

$$x_{st} = x_s + x_g$$

para M_1 ,

$$x_{1t} = x_1 + x_s + x_g$$

para M_2 ,

$$x_{2t} = x_2 + x_s + x_g$$

continuando hasta M_n ,

⋮

para M_{n-1} ,

$$x_{n-1t} = x_{n-1} + x_s + x_g$$

para M_n ,

$$x_{nt} = x_n + x_s + x_g$$

para m_A ,

$$x_{At} = x_A + x_s + x_g$$

para m_B ,

$$x_{Bt} = x_B + x_s + x_g$$

.

Para obtener los desplazamientos entre dos masas consecutivas de la estructura MDOF, se considera un resorte (elemento elástico) idealizado conectado entre cada una de las masas. El alargamiento o acortamiento de cada elemento elástico, se determina calculando la

diferencia de las posiciones de dos masas consecutivas. De esta manera, las deformaciones de los elementos elásticos se escriben como sigue:

desplazamiento entre M_s y el suelo,

$$x_{st} - x_g = x_s + x_g - x_g = x_s$$

desplazamiento entre M_1 y M_s ,

$$x_{1t} - x_{st} = x_1 + x_s + x_g - x_s - x_g = x_1$$

desplazamiento entre M_2 y M_1 ,

$$x_{2t} - x_{1t} = x_2 + x_s + x_g - x_1 - x_s - x_g = x_2 - x_1$$

⋮

desplazamiento entre M_{n-1} y M_{n-2} ,

$$x_{n-1t} - x_{n-2t} = x_{n-1} + x_s + x_g - x_{n-2} - x_s - x_g = x_{n-1} - x_{n-2}$$

desplazamiento entre M_n y M_{n-1} ,

$$x_{nt} - x_{n-1t} = x_n + x_s + x_g - x_{n-1} - x_s - x_g = x_n - x_{n-1}$$

desplazamiento entre m_A y M_n ,

$$x_{At} - x_{nt} = x_A + x_s + x_g - x_n - x_s - x_g = x_A - x_n$$

desplazamiento entre m_B y m_A ,

$$x_{Bt} - x_{At} = x_B + x_s + x_g - x_A - x_s - x_g = x_B - x_A$$

para obtener la diferencia de velocidades entre cada masa, se deriva con respecto al tiempo el conjunto de la diferencia de posiciones entre masas;

velocidad relativa entre M_s y el suelo,

$$\dot{x}_{st} - \dot{x}_g = \dot{x}_s$$

velocidad relativa entre M_1 y M_s ,

$$\dot{x}_{1t} - \dot{x}_{st} = \dot{x}_1$$

velocidad relativa entre M_2 y M_1 ,

$$\dot{x}_{2t} - \dot{x}_{1t} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$$

⋮

velocidad relativa entre M_{n-1} y M_{n-2} ,

$$\dot{x}_{n-1t} - \dot{x}_{n-2t} = \dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2}$$

velocidad relativa entre M_n y M_{n-1} ,

$$\dot{x}_{nt} - \dot{x}_{n-1t} = \dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}$$

velocidad relativa entre m_A y M_n (no hay amortiguamiento),

$$\dot{x}_{At} - \dot{x}_{nt} = \dot{x}_A - \dot{x}_n$$

velocidad relativa entre m_B y m_A ,

$$\dot{x}_{Bt} - \dot{x}_{At} = \dot{x}_B - \dot{x}_A$$

.

Una vez definido el conjunto de posiciones absolutas, de desplazamiento entre masas y de velocidades relativas, se escribe la función de energía cinética, potencial elástica y de disipación de energía del sistema mecánico. Estas funciones se definen como sigue:

$$T = \frac{1}{2} (M_s \dot{x}_{st}^2 + M_1 \dot{x}_{1t}^2 + M_2 \dot{x}_{2t}^2 + \dots + M_{n-1} \dot{x}_{n-1t}^2 + M_n \dot{x}_{nt}^2 + m_A \dot{x}_{At}^2 + m_B \dot{x}_{Bt}^2) \dots$$

$$+ \frac{1}{2} b (\dot{x}_{Bt} - \dot{x}_{it})^2, \longrightarrow \text{observe que;}$$

$$\dot{x}_{Bt} - \dot{x}_{it} = \dot{x}_B + \dot{x}_s + \dot{x}_g - \dot{x}_i - \dot{x}_s - \dot{x}_g = \dot{x}_B - \dot{x}_i$$

la velocidad en la terminal de entrada del inersor está en función del subíndice i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sustituyendo el conjunto de posiciones absolutas y desarrollando los productos,

$$T(\dot{x}_s, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \dot{x}_A, \dot{x}_B) = \frac{1}{2} M_s (\dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2} M_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 \quad (4.27)$$

$$+ \frac{1}{2} M_2 (\dot{x}_2 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \dots + \frac{1}{2} M_{n-1} (\dot{x}_{n-1} + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2} M_n (\dot{x}_n + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2$$

$$+ \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_A + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_B + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2} b (\dot{x}_B - \dot{x}_i)^2$$

$i = s, 1, 2, 3, \dots, n$

por otro lado, la energía potencial elástica del sistema se obtiene considerando el conjunto de desplazamientos entre masas (deformaciones). Dicha expresión es

$$V = \frac{1}{2} k_s (x_{st} - x_g)^2 + \frac{1}{2} k_1 (x_{1t} - x_{st})^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_{2t} - x_{1t})^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_{3t} - x_{2t})^2 + \dots$$

$$+\frac{1}{2}k_{n-1}(x_{n-1t} - x_{n-2t})^2 + \frac{1}{2}k_n(x_{nt} - x_{n-1t})^2 + \frac{1}{2}k_A(x_{At} - x_{nt})^2 + \frac{1}{2}k_B(x_{Bt} - x_{At})^2$$

sustituyendo el conjunto de desplazamientos entre masas

$$V(x_s, x_1, x_2, \dots, x_n, x_A, x_B) = \frac{1}{2}k_s x_s^2 + \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2 + \dots \quad (4.28)$$

$$+\frac{1}{2}k_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2})^2 + \frac{1}{2}k_n(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{1}{2}k_A(x_A^2 - x_n^2) + \frac{1}{2}k_B(x_B - x_A)^2$$

Asimismo, la función de disipación de energía de Rayleigh se define de manera similar utilizando el conjunto de velocidades relativas. Estas velocidades están directamente relacionadas con los parámetros de amortiguamiento. De esta manera la función D queda como;

$$D(\dot{x}_s, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \dot{x}_A, \dot{x}_B) = \frac{1}{2}C_s \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}C_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}C_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 + \dots \quad (4.29)$$

$$+\frac{1}{2}C_{n-1}(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2})^2 + \frac{1}{2}C_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})^2 + \frac{1}{2}C_B(\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2$$

Considerando las funciones 4.27 y 4.28, el Lagrangiano queda como sigue:

$$L = \frac{1}{2}M_s(\dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}M_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}M_2(\dot{x}_2 + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \dots$$

$$+\frac{1}{2}M_{n-1}(\dot{x}_{n-1} + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}M_n(\dot{x}_n + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_A + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 \quad (4.30)$$

$$+\frac{1}{2}m_B(\dot{x}_B + \dot{x}_s + \dot{x}_g)^2 + \frac{1}{2}b(\dot{x}_B - \dot{x}_i)^2 - \frac{1}{2}k_s x_s^2 - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

$$-\frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2 \dots - \frac{1}{2}k_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2})^2 - \frac{1}{2}k_n(x_n - x_{n-1})^2 - \frac{1}{2}k_A(x_A - x_n)^2$$

$$-\frac{1}{2}k_B(x_B - x_A)^2$$

$$i = s, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Siguiendo los mismos pasos que en la Sección 4.1 se obtienen las ecuaciones diferenciales de movimiento para $q = x$ e $i = s, A, B, 1, 2, 3, \dots, n$. Calculando las derivadas parciales de las funciones 4.29 y 4.30, dadas por la ecuación 3.4 para $i = s$ ($q_s = x_s$), considerando $Q_s(t) = 0$, sustituyendolas en 3.4, realizando simplificaciones algebraicas y ordenando se obtiene;

$$\begin{aligned}
& (M_s + \sum_{i=1}^n M_i + m_A + m_B + b_i)\ddot{x}_s + \sum_{i=1}^n M_i\ddot{x}_i + m_A\ddot{x}_A + (m_B - b_i)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s \\
& = -(M_s + \sum_{i=1}^n M_i + m_A + m_B)\ddot{x}_g
\end{aligned}$$

considerando el término $M_s + \sum_{i=1}^n M_i$ como M_t

$$\begin{aligned}
(M_t + m_A + m_B + b_i)\ddot{x}_s + \sum_{i=1}^n M_i\ddot{x}_i + m_A\ddot{x}_A + (m_B - b_i)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = -(M_t + \\
m_A + m_B)\ddot{x}_g
\end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\text{donde } b_i = \begin{cases} 0 & i \neq s \\ b & i = s \end{cases}$$

La ecuación 4.31, es la ecuación diferencial de movimiento correspondiente a la coordenada x_s cuando la estructura se conecta al IDVA propuesto en la parte superior. Note que la inercia puede afectar esta expresión en caso de que el inersor se conecte en la base aislada. Es decir si y solo si $i = s$. De la misma manera, se obtienen las ecuaciones diferenciales para las coordenadas x_A y x_B . Estas ecuaciones se definen en 4.32 y 4.33

$$m_A\ddot{x}_A + m_A\ddot{x}_s + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B - k_A x_n + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A\ddot{x}_g \quad (4.32)$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + m_B\ddot{x}_s - b\ddot{x}_i - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B = -m_B\ddot{x}_g \quad (4.33)$$

$i = s, 1, 2, 3, \dots, n$.

Para obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes a cada coordenada, desde $i = 1$ hasta n , se sigue el mismo procedimiento. Es necesario que el término $b(\dot{x}_B - \dot{x}_i)$ que aparece en la función 4.30, sea considerado en la derivación con respecto a $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ hasta \dot{x}_n , puesto que \dot{x}_i puede representar cada una de estas velocidades. Entonces, se obtiene:

- ecuación diferencial de movimiento considerando x_1

$$M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s) + b_i(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_B) + (C_1 + C_2)\dot{x}_1 - C_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = -M_1\ddot{x}_g \quad (4.34)$$

$$\text{donde } b_i = \begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ b & i = 1 \end{cases}$$

- ecuación diferencial de movimiento considerando x_2

$$M_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_s) + b_i(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_B) - C_2\dot{x}_1 + (C_2 + C_3)\dot{x}_2 - C_3\dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 \quad (4.35)$$

$$= -M_2\ddot{x}_g$$

$$\text{donde } b_i = \begin{cases} 0 & i \neq 2 \\ b & i = 2 \end{cases}$$

- ecuación diferencial de movimiento considerando x_3

$$M_3(\ddot{x}_3 + \ddot{x}_s) + b_i(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_B) - C_3\dot{x}_2 + (C_3 + C_4)\dot{x}_3 - C_4\dot{x}_4 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4 \quad (4.36)$$

$$= -M_3\ddot{x}_g$$

$$\text{donde } b_i = \begin{cases} 0 & i \neq 3 \\ b & i = 3 \end{cases}$$

⋮

- ecuación diferencial de movimiento considerando x_{n-1}

$$M_{n-1}(\ddot{x}_{n-1} + \ddot{x}_s) + b_i(\ddot{x}_{n-1} - \ddot{x}_B) - C_{n-1}\dot{x}_{n-2} + (C_{n-1} + C_n)\dot{x}_{n-1} - C_n\dot{x}_n \quad (4.37)$$

$$- k_{n-1}x_{n-2} + (k_{n-1} + k_n)x_{n-1} - k_nx_n = -M_{n-1}\ddot{x}_g$$

$$\text{donde } b_i = \begin{cases} 0 & i \neq n-1 \\ b & i = n-1 \end{cases}$$

- ecuación diferencial de movimiento considerando x_n

$$M_n(\ddot{x}_n + \ddot{x}_s) + b_i(\ddot{x}_n - \ddot{x}_B) - C_n\dot{x}_{n-1} + C_n\dot{x}_n - k_nx_{n-1} + (k_n + k_A)x_n - k_Ax_A \quad (4.38)$$

$$= -M_n\ddot{x}_g$$

$$\text{donde } b_i = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ b & i = n \end{cases}$$

Se puede ver que la ecuación 4.31 y el conjunto 4.34 - 4.38 contienen el término $b_i\ddot{x}_i$, indicando que el efecto del inersor influye en la base aislada o en alguna de las n masas ($i = s, 1, 2, 3, \dots, n$). Si se escribe a b_i como b_z en la ecuación 4.31 y en el conjunto 4.34-4.38, este término en particular, se puede generalizar como sigue:

$$b_z\ddot{x}_i \longrightarrow i = s, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$b_z = \begin{cases} 0 & z \neq i \\ b & z = i \end{cases} \quad (4.39)$$

$$i = s, 1, 2, 3, \dots, n$$

El valor que se le asigne a z , dependerá del número de masa a la cual el inersor se encuentre conectado.

Por otro lado, el conjunto de ecuaciones 4.34 - 4.38 se puede escribir en forma matricial como sigue;

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{X}} + \ddot{\mathbf{X}}_s) + \mathbf{M}_{in}(\ddot{\mathbf{X}} - \ddot{\mathbf{X}}_B) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_g \quad (4.40)$$

las matrices y vectores de la ecuación 4.40 están dados por;

$$\mathbf{M}_{n \times (n+1)} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{in(n) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} b_z & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_z & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_z & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{n \times (n+1)} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1} + C_n & -C_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -C_n & C_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{n \times (n+1)} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1} + k_n & -k_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n + k_A & -k_A \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{s(n+1) \times 1} = \ddot{x}_s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_{(n+1) \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_A \end{pmatrix}, \ddot{\mathbf{X}}_{B(n+1) \times 1} = \ddot{x}_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } \mathbf{F}_{gn \times 1} = -\ddot{x}_g \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el modelo dinámico del edificio MDOF conectado al IDVA propuesto en el n ésimo piso y a cualquiera de los pisos inferiores al n ésimo (caso 2), se define por el conjunto de $n + 3$ ecuaciones diferenciales obtenidas en 4.31, 4.32, 4.33 y 4.40. Este conjunto de ecuaciones se generalizan considerando la restricción definida en 4.39 y cambiando el subíndice i por z en la ecuación 4.33, quedando como sigue:

$$(M_t + m_A + m_B + b_z)\ddot{x}_s + \sum_{i=1}^n M_i \ddot{x}_i + m_A \ddot{x}_A + (m_B - b_z)\ddot{x}_B + C_s \dot{x}_s + k_s x_s = \dots \quad (4.41)$$

$$-(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g$$

$$m_A \ddot{x}_A + m_A \ddot{x}_s + C_B \dot{x}_A - C_B \dot{x}_B - k_A x_n + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A \ddot{x}_g \quad (4.42)$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + m_B \ddot{x}_s - b \ddot{x}_z - C_B \dot{x}_A + C_B \dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B = -m_B \ddot{x}_g \quad (4.43)$$

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{X}} + \ddot{\mathbf{X}}_s) + \mathbf{M}_{in}(\ddot{\mathbf{X}} - \ddot{\mathbf{X}}_B) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_g \quad (4.44)$$

$$b_z = \begin{cases} 0 & z \neq i \\ b & z = i \end{cases} \quad i = s, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Para entender mejor como funcionan las ecuaciones 4.41-4.44 y los arreglos matriciales planteados, se muestra un ejemplo para obtener el modelo matemático de un edificio de dos pisos, en el cuál, el inersor se conecta al piso número 1. Puesto que n es el número de pisos y z el número de piso al cuál el inersor es conectado, se tiene $n = 2$, mientras que $z = 1$. De esta manera, las ecuaciones 4.41-4.44 quedan como sigue

$$\begin{aligned}
& (M_t + m_A + m_B + b_1)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + m_A\ddot{x}_A + (m_B - b_1)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = \dots \\
& \quad - (M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g \\
& \quad m_A(\ddot{x}_A + \ddot{x}_s) + C_B(\dot{x}_A - \dot{x}_B) - k_A x_2 + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A\ddot{x}_g \\
& \quad (m_B + b)\ddot{x}_B + m_B\ddot{x}_s - b\ddot{x}_1 - C_B(\dot{x}_A - \dot{x}_B) - k_B x_A + k_B x_B = -m_B\ddot{x}_g \\
& \left(\begin{array}{ccc} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_A \end{array} \right] + \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_s \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \left] + \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_A \end{array} \right] - \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \ddot{x}_B \\ \ddot{x}_B \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (4.45) \\
& + \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_A \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_A & -k_A \end{array} \right) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_A \end{array} \end{array} = -\ddot{x}_g \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \\
& b_1 = \begin{cases} 0 & 1 \neq i \\ b & 1 = i \end{cases} \quad i = s, 1, 2.
\end{aligned}$$

A continuación, se escriben nuevamente las primeras tres ecuaciones y se desarrollan las operaciones matriciales de la ecuación 4.45.

$$(M_t + m_A + m_B + b_1)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + m_A\ddot{x}_A + (m_B - b_1)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = \dots \quad (4.46)$$

$$- (M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g$$

$$m_A(\ddot{x}_A + \ddot{x}_s) + C_B(\dot{x}_A - \dot{x}_B) - k_A x_2 + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A\ddot{x}_g \quad (4.47)$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + m_B\ddot{x}_s - b\ddot{x}_1 - C_B(\dot{x}_A - \dot{x}_B) - k_B x_A + k_B x_B = -m_B\ddot{x}_g \quad (4.48)$$

$$M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s) + b_1(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_B) + (C_1 + C_2)\dot{x}_1 - C_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = -M_1\ddot{x}_g \quad (4.49)$$

$$M_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_s) + b_1(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_B) - C_2\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_A)x_2 - k_A x_A = -M_2\ddot{x}_g \quad (4.50)$$

$$b_1 = \begin{cases} 0 & 1 \neq i \\ b & 1 = i \end{cases} \quad (4.51) \\
i = s, 1, 2.$$

Se puede ver que la restricción 4.51 afecta directamente a las ecuaciones 4.46, 4.49 y 4.50, al contener en cada una de ellas el término b_1 .

Por otro lado, la ecuación 4.46 corresponde a la coordenada generalizada con subíndice $i = s$ y $1 \neq s$, por lo tanto, $b_1 = 0$ en la ecuación 4.46. Luego, esta ecuación se escribe como sigue

$$(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + m_A\ddot{x}_A + m_B\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_sx_s = \dots \quad (4.52)$$

$$-(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g$$

después, la ecuación 4.49 corresponde a la coordenada generalizada con subíndice $i = 1$ y $1 = 1$, por lo tanto, $b_1 = b$ en la ecuación 4.49.

$$M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s) + b(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_B) + (C_1 + C_2)\dot{x}_1 - C_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = -M_1\ddot{x}_g \quad (4.53)$$

luego, la ecuación 4.50 corresponde a la coordenada generalizada con subíndice $i = 2$ y $1 \neq 2$, por lo tanto, $b_1 = 0$ en la ecuación 4.50.

$$M_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_s) - C_2\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_A)x_2 - k_Ax_A = -M_2\ddot{x}_g \quad (4.54)$$

Finalmente, las ecuaciones 4.52, 4.47, 4.48, 4.53 y 4.54 conforman el modelo matemático de un edificio de dos pisos cuando el inersor es conectado al primer piso. Se puede observar que este conjunto de ecuaciones coincide con las ecuaciones obtenidas de manera independiente a lo largo de esta Sección.

Capítulo 5

Modelado matemático en el dominio de la frecuencia

Después de haber obtenido los modelos matemáticos del edificio MDOF de marco plano con aislamiento en la base en el dominio del tiempo, conectado al absorbedor propuesto tanto en la base aislada como en el enésimo piso, es necesario representar estos modelos en el dominio de la frecuencia. Esto se logra utilizando la transformada de Fourier o la transformada de Laplace, definidas en la Sección 3.2. El uso del operador de Laplace o de Fourier, dependerá del tipo de análisis que se requiera realizar en el sistema mecánico. Sin embargo, antes de obtener los modelos matemáticos en el dominio de la frecuencia, es necesario establecer relaciones adimensionales de masa, amortiguamiento y frecuencia, con la finalidad de poder obtener un modelo matemático sin dimensión, y en consecuencia una función de respuesta en frecuencia, conocida como FRF por sus siglas en inglés (frequency response function), también en forma adimensional. Más adelante se podrá ver la utilidad de establecer estas variables adimensionales. Sobre todo, en la parte de optimización.

5.1. Modelo matemático en el dominio de la frecuencia del edificio SDOF conectado al IDVA propuesto en la base aislada

El modelo que se obtiene en esta Sección es el correspondiente al caso uno definido en el Capítulo 4. Para lograrlo, se escriben nuevamente las ecuaciones diferenciales de movimiento obtenidas en la Sección 4.1,

$$(M_t + m_A + m_B + b)\ddot{x}_s + \sum_{i=1}^n M_i \ddot{x}_i + m_A \ddot{x}_A + (m_B + b)\ddot{x}_B + C_s \dot{x}_s + k_s x_s = -(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g$$

$$m_A \ddot{x}_A + m_A \ddot{x}_s + C_B \dot{x}_A - C_B \dot{x}_B + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A \ddot{x}_g$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + (m_B + b)\ddot{x}_s - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_Bx_A + k_Bx_B = -m_B\ddot{x}_g$$

$$M_i\ddot{x}_i + M_i\ddot{x}_s + \sum_{j=1}^n C_{ij}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij}x_j = -M_i\ddot{x}_g(t)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $M_t = M_s + \sum_{i=1}^n M_i$.

Considerando la primer planta del edificio, este sistema de múltiples grados de libertad se reduce a uno de cuatro grados de libertad. Este nuevo sistema queda como sigue:

$$(M_t + m_A + m_B + b)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + m_A\ddot{x}_A + (m_B + b)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_sx_s = -(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g$$

$$m_A\ddot{x}_A + m_A\ddot{x}_s + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B + (k_A + k_B)x_A - k_Bx_B = -m_A\ddot{x}_g$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + (m_B + b)\ddot{x}_s - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_Bx_A + k_Bx_B = -m_B\ddot{x}_g$$

$$M_1\ddot{x}_1 + M_1\ddot{x}_s + C_{11}\dot{x}_1 + k_{11}x_1 = -M_1\ddot{x}_g(t)$$

Considerando que $C_{11} = C_1$ y $k_{11} = k_1$ (de acuerdo con las matrices definidas en la Sección 4.1) y agrupando con respecto a las constantes de masa rigidez y amortiguamiento;

$$(M_t + m_A + m_B + b)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + m_A\ddot{x}_A + (m_B + b)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_sx_s = -(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g \quad (5.1)$$

$$m_A(\ddot{x}_A + \ddot{x}_s) + C_B(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + k_Ax_A + k_B(x_A - x_B) = -m_A\ddot{x}_g \quad (5.2)$$

$$(m_B + b)(\ddot{x}_B + \ddot{x}_s) + C_B(\dot{x}_B - \dot{x}_A) + k_B(x_B - x_A) = -m_B\ddot{x}_g \quad (5.3)$$

$$M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s) + C_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = -M_1\ddot{x}_g \quad (5.4)$$

dividiendo las ecuaciones 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 entre M_t , m_A , m_B , y M_1 respectivamente resulta;

$$\left(1 + \frac{m_A + m_B + b}{M_t}\right)\ddot{x}_s + \frac{M_1}{M_t}\ddot{x}_1 + \frac{m_A}{M_t}\ddot{x}_A + \left(\frac{m_B + b}{M_t} + \frac{b}{M_t}\right)\ddot{x}_B + \frac{C_s}{M_t}\dot{x}_s + \frac{k_s}{M_t}x_s = -\left(1 + \frac{m_A + m_B}{M_t}\right)\ddot{x}_g \quad (5.5)$$

$$\ddot{x}_A + \ddot{x}_s + \frac{C_B}{m_A}(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + \frac{k_A}{m_A}x_A + \frac{k_B}{m_A}(x_A - x_B) = -\ddot{x}_g \quad (5.6)$$

$$\left(1 + \frac{b}{m_B}\right)(\ddot{x}_B + \ddot{x}_s) + \frac{C_B}{m_B}(\dot{x}_B - \dot{x}_A) + \frac{k_B}{m_B}(x_B - x_A) = -\ddot{x}_g \quad (5.7)$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s + \frac{C_1}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{k_1}{M_1}x_1 = -\ddot{x}_g \quad (5.8)$$

Por otro lado, se definen las siguientes relaciones adimensionales de masa y amortiguamiento, así como las rigideces correspondientes a cada masa:

$$m_A = \frac{\beta M_t}{1 + \mu}, m_B = \mu m_A, b = \delta m_B, M_1 = \mu_1 M_t, C_s = 2M_t \zeta_s \omega_s, C_B = 2m_B \zeta_B \omega_B, C_1 = 2M_1 \zeta_1 \omega_1, k_s = M_t \omega_s^2, k_A = m_A \omega_A^2, k_B = m_B \omega_B^2 \text{ y } k_1 = M_1 \omega_1^2.$$

Las variables $\beta, \mu, \delta, \mu_1, \zeta_s, \zeta_B$ y ζ_1 representan números sin dimensión y son utilizadas para facilitar el análisis de este sistema. Más adelante, en la Sección 5.1.1, se justifica el uso de estas variables. Por otro lado, sustituyendo las relaciones de m_A, m_B, b, M_1, C_s y k_s en 5.5 resulta:

$$\left(1 + \beta + \frac{\delta \mu \beta}{1 + \mu}\right) \ddot{x}_s + \mu_1 \ddot{x}_1 + \frac{\beta}{1 + \mu} \ddot{x}_A + \frac{\beta \mu}{1 + \mu} (1 + \delta) \ddot{x}_B + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + \omega_s^2 x_s = \quad (5.9)$$

$$-(1 + \beta) \ddot{x}_g,$$

sustituyendo las relaciones C_B, k_A, k_B y m_B en 5.6

$$\ddot{x}_A + \ddot{x}_s + 2\mu \zeta_B \omega_B (\dot{x}_A - \dot{x}_B) + \omega_A^2 x_A + \mu \omega_B^2 (x_A - x_B) = -\ddot{x}_g \quad (5.10)$$

sustituyendo las relaciones de b, C_B y k_B en 5.7

$$(1 + \delta)(\ddot{x}_B + \ddot{x}_s) + 2\zeta_B \omega_B (\dot{x}_B - \dot{x}_A) + \omega_B^2 (x_B - x_A) = -\ddot{x}_g \quad (5.11)$$

finalmente, sustituyendo las relaciones de C_1 y k_1 en 5.8

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = -\ddot{x}_g \quad (5.12)$$

.

Considerando las siguientes dos relaciones de frecuencia, donde ν y η también son variables adimensionales:

$$\omega_A = \nu \omega_s \quad (5.13)$$

$$\omega_B = \eta \omega_s \quad (5.14)$$

sustituyendo 5.13 y 5.14 en 5.10 y 5.11

$$\ddot{x}_A + \ddot{x}_s + 2\mu \zeta_B \eta \omega_s (\dot{x}_A - \dot{x}_B) + \nu^2 \omega_s^2 x_A + \mu \eta^2 \omega_s^2 (x_A - x_B) = -\ddot{x}_g \quad (5.15)$$

y

$$(1 + \delta)(\ddot{x}_B + \ddot{x}_s) + 2\zeta_B \eta \omega_s (\dot{x}_B - \dot{x}_A) + \eta^2 \omega_s^2 (x_B - x_A) = -\ddot{x}_g \quad (5.16)$$

.

Las ecuaciones 5.9, 5.15, 5.16 y 5.12 son el modelo matemático sin dimensión en el dominio del tiempo. Para escribirlo en el dominio de la frecuencia se utiliza la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas. Utilizando la definición mostrada en la Sección 3.2 y tomando en cuenta que $X_s = X_s(s)$, $X_A = X_A(s)$, $X_B = X_B(s)$, $X_1 = X_1(s)$ y $\ddot{X}_g = \ddot{X}_g(s)$.

Aplicando la transformada de Laplace en la ecuación 5.9;

$$\left(1 + \beta + \frac{\delta\mu\beta}{1 + \mu}\right) s^2 X_s + \mu_1 s^2 X_1 + \frac{\beta}{1 + \mu} s^2 X_A + \frac{\beta\mu}{1 + \mu} (1 + \delta) s^2 X_B + 2\zeta_s \omega_s s X_s \quad (5.17)$$

$$+ \omega_s^2 X_s = -(1 + \beta) \ddot{X}_g,$$

transformando la ecuación 5.15

$$s^2 (X_A + X_s) + 2\mu\zeta_B \eta \omega_s s (X_A - X_B) + \nu^2 \omega_s^2 X_A + \mu \eta^2 \omega_s^2 (X_A - X_B) = -\ddot{X}_g \quad (5.18)$$

transformando la ecuación 5.16

$$(1 + \delta) s^2 (X_B + X_s) + 2\zeta_B \eta \omega_s s (X_B - X_A) + \eta^2 \omega_s^2 (X_B - X_A) = -\ddot{X}_g \quad (5.19)$$

finalmente transformando la ecuación 5.12

$$s^2 (X_1 + X_s) + 2\zeta_1 \omega_1 s X_1 + \omega_1^2 X_1 = -\ddot{X}_g \quad (5.20)$$

La transformada de Laplace del término \ddot{x}_g se tomó como \ddot{X}_g debido a que la excitación de este sistema es una aceleración como función del tiempo y no una función de posición. Por lo tanto, no se toma como segunda derivada. Por otro lado, dividiendo las ecuaciones 5.17 - 5.20, por la frecuencia natural ω_s^2 y transformandolas al dominio de Fourier considerando la parte estable del sistema utilizando $s = j\omega$, resulta:

Primero la ecuación 5.17

$$-\left(1 + \beta + \frac{\delta\mu\beta}{1 + \mu}\right) \frac{\omega^2}{\omega_s^2} X_s - \mu_1 \frac{\omega^2}{\omega_s^2} X_1 - \frac{\beta\omega^2}{(1 + \mu)\omega_s^2} X_A - \frac{\beta\mu}{1 + \mu} (1 + \delta) \frac{\omega^2}{\omega_s^2} X_B + \quad (5.21)$$

$$2j\zeta_s \frac{\omega}{\omega_s} X_s + X_s = -(1 + \beta) \frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2}$$

ahora la ecuación 5.18

$$-\frac{\omega^2}{\omega_s^2} (X_A + X_s) + 2j\mu\zeta_B \eta \frac{\omega}{\omega_s} (X_A - X_B) + \nu^2 X_A + \mu \eta^2 (X_A - X_B) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.22)$$

continuando con la ecuación 5.19

$$-(1 + \delta) \frac{\omega^2}{\omega_s^2} (X_B + X_s) + 2j\zeta_B \eta \frac{\omega}{\omega_s} (X_B - X_A) + \eta^2 (X_B - X_A) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.23)$$

finalmente se transforma la ecuación 5.20

$$-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}(X_1 + X_s) + 2j\zeta_1\omega_1\frac{\omega}{\omega_s^2}X_1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_s^2}X_1 = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.24)$$

Para lograr que las ecuaciones 5.21-5.24 sean totalmente adimensionales, se define la relación de frecuencias forzada $\omega = \Omega\omega_s$ y se sustituye en el conjunto 5.21-5.24 (considerando que Ω también es una variable adimensional).

$$\begin{aligned} & -\left(1 + \beta + \frac{\delta\mu\beta}{1 + \mu}\right)\Omega^2 X_s - \mu_1\Omega^2 X_1 - \frac{\beta\Omega^2}{1 + \mu}X_A - \frac{\beta\mu(1 + \delta)}{1 + \mu}\Omega^2 X_B + 2j\zeta_s\Omega X_s + X_s \quad (5.25) \\ & = -(1 + \beta)\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \end{aligned}$$

$$-\Omega^2(X_A + X_s) + 2j\mu\zeta_B\eta\Omega(X_A - X_B) + \nu^2 X_A + \mu\eta^2(X_A - X_B) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.26)$$

$$-(1 + \delta)\Omega^2(X_B + X_s) + 2j\zeta_B\eta\Omega(X_B - X_A) + \eta^2(X_B - X_A) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.27)$$

$$-\Omega^2(X_1 + X_s) + 2j\zeta_1\omega_1\frac{\Omega}{\omega_s}X_1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_s^2}X_1 = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.28)$$

Las ecuaciones 5.25-5.28 son el modelo matemático sin dimensión en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, este modelo de cuatro ecuaciones se puede simplificar aun más considerando que los desplazamientos de los pisos de la estructura principal son pequeños al grado de ser despreciables con respecto a los de la base aislada. Con esto en mente, se ha demostrado que un edificio con base aislada tiende a comportarse como un cuerpo rígido cuando está sujeto a excitación sísmica y a otro tipo de fuerzas y/o aceleraciones externas (Love et al., 2010), (Ismail, 2018), (Garevski et al., 2000). Con base en esto, es posible escribir este conjunto de cuatro ecuaciones en un sistema de tres grados de libertad. El nuevo modelo matemático esta dado en las ecuaciones 5.29, 5.30 y 5.31 y queda como sigue;

$$\begin{aligned} & -\left(1 + \beta + \frac{\delta\mu\beta}{1 + \mu}\right)\Omega^2 X_s - \frac{\beta\Omega^2}{1 + \mu}X_A - \frac{\beta\mu(1 + \delta)}{1 + \mu}\Omega^2 X_B + 2j\zeta_s\Omega X_s + X_s = \quad (5.29) \\ & -(1 + \beta)\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \end{aligned}$$

$$-\Omega^2(X_A + X_s) + 2j\mu\zeta_B\eta\Omega(X_A - X_B) + \nu^2 X_A + \mu\eta^2(X_A - X_B) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.30)$$

$$-(1 + \delta)\Omega^2(X_B + X_s) + 2j\zeta_B\eta\Omega(X_B - X_A) + \eta^2(X_B - X_A) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.31)$$

Las ecuaciones 5.29-5.31 conforman un sistema de tres grados de libertad que corresponde a la Figura 5.1. Estas ecuaciones se pueden obtener detalladamente considerando el edificio simplificado de la Figura 5.1 junto con la nomenclatura de posiciones absolutas y relativas definidas en la sección 4.1, utilizando la formulación de Euler-Lagrange y finalmente utilizando el procedimiento descrito en esta Sección. En otras palabras el edificio se modela como un sistema SDOF de masa M_t , cuyo desplazamiento es X_s .

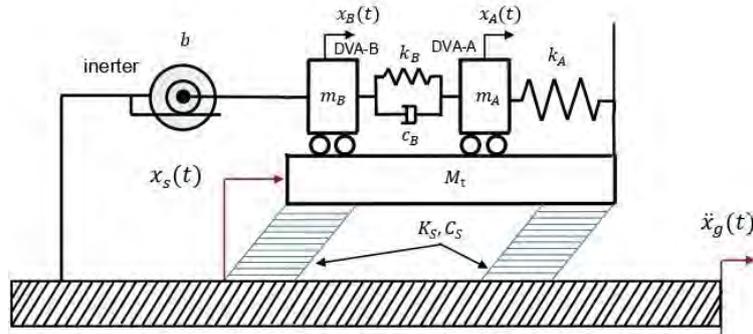


Figura 5.1: Estructura rígida SDOF de base aislada conectada al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional desde la base aislada.

El diagrama mostrado en la Figura 5.1 es una simplificación de la Figura 4.2. Si se comparan ambas Figuras, se podrá ver que al controlar los niveles de vibración de la base aislada de masa M_s (Figura 4.2), consecuentemente se está controlando la misma vibración en cualquiera de los n pisos del edificio de masa M_i (considerando el comportamiento de cuerpo rígido). En otras palabras, la posición de cada una de las plantas estaría descrita por la coordenada x_s de la base aislada. Es por eso que las $n + 1$ masas del edificio se reducen a una sola masa denotada como M_t cuya posición es x_s .

5.1.1. FRF del edificio SDOF conectado al IDVA propuesto en la base aislada

La función de respuesta en frecuencia en el dominio de Fourier que relaciona el desplazamiento de la base aislada X_s con la excitación de entrada del sistema, la aceleración del suelo \ddot{X}_g . Se expresa como sigue:

$$X_s(\omega) = H(\omega)\ddot{X}_g(\omega) \quad (5.32)$$

o bien

$$\frac{X_s(\omega)}{\ddot{X}_g(\omega)} = H(\omega).$$

Sin embargo, debido a que previamente se estableció una relación de frecuencias forzada denotada como Ω . La función de transferencia debe expresarse como:

$$\frac{X_s(\Omega)}{\ddot{X}_g(\Omega)} = H(\Omega)$$

considerando que esta función debe darse en forma adimensional

$$\frac{X_s(\Omega)\omega_s^2}{\ddot{X}_g(\Omega)} = \omega_s^2 H(\Omega).$$

Es importante notar que al multiplicar el desplazamiento X_s por la frecuencia natural o velocidad angular ω_s elevada al cuadrado se obtienen unidades de aceleración en el numerador del miembro izquierdo de la igualdad. Mientras que en el denominador se obtienen estas mismas unidades por tratarse de la aceleración del suelo \ddot{X}_g . Adicionalmente, debe observarse que si se desarrolla el extenso procedimiento algebraico para hallar la función de transferencia, esta quedará definida en términos de las variables adimensionales definidas en la Sección 5.1. En otras palabras;

$$H_s = \frac{X_s\omega_s^2}{\ddot{X}_g} = H(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta, \zeta_B, \zeta_s, \Omega) \quad (5.33)$$

cuyas variables $\nu, \eta, \mu, \delta, \beta, \zeta_B$ y ζ_s se toman del conjunto de relaciones definidas para m_A, m_B, b, C_B, C_s , las ecuaciones 5.13 y 5.14 y la relación de frecuencias forzada $\omega = \Omega\omega_s$, todas ellas dadas en la Sección 5.1. Estas relaciones se pueden escribir nuevamente en términos de los parámetros estructurales y del absorbedor como se muestra en el conjunto C_1 (ecuaciones 5.34):

$$C_1 \left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{\omega_A}{\omega_s} \\ \eta = \frac{\omega_B}{\omega_s} \\ \mu = \frac{m_B}{m_A} \\ \delta = \frac{b}{m_A + m_B} \\ \beta = \frac{M_t}{C_B} \\ \zeta_B = \frac{C_s}{2m_B\omega_B} \\ \zeta_s = \frac{C_s}{2M_t\omega_s} \\ \Omega = \frac{\omega}{\omega_s} \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Si se realiza el análisis dimensional de las 8 variables propuestas en el conjunto C_1 , se verá que, en efecto, son variables sin dimensión, lo cuál prueba que se han tomado las variables correctas. Sin embargo, esto se puede demostrar de manera más formal utilizando el teorema Pi de Buckingham, que establece que para representar una variable física dependiente de otras variables físicas en forma adimensional, es necesario contabilizar el número de variables participantes en el sistema definido como n (considerando también la variable dependiente) y luego restarle el número k de unidades físicas fundamentales involucradas: tiempo (T), masa (M) y longitud (L). Esta diferencia se denota como;

$\pi = n - k$, donde π es el número de variables adimensionales obtenidas. Para visualizar mejor esto, se considera la siguiente función donde x_n es la variable dependiente:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) \quad (5.35)$$

escribiendo 5.35 en forma implícita

$$x_n - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = 0$$

o bien

$$g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = 0 \quad (5.36)$$

el teorema Pi de Buckingham dice que es posible expresar las x_n variables físicas en π_i variables adimensionales donde $i < n$. Por lo tanto, la función 5.36 queda como sigue:

$$G(\pi_i, \pi_{i-1}, \dots, \pi_1) = 0 \quad (5.37)$$

.

La ecuación 5.35 considera a x_n dependiente de las otras, entonces una de las variables π_i debe mantenerse dependiente del resto, por lo tanto, la ecuación 5.37 es:

$$\pi_i = h(\pi_{i-1}, \pi_{i-2}, \dots, \pi_1) \quad (5.38)$$

.

La ecuación 5.32, se puede relacionar con la ecuación 5.35 considerando que la expresión $H(\omega)$ es función de los parámetros del sistema propuesto en la Figura 5.1, esto es:

$$X_s(\omega) = H(\omega)\ddot{X}_g(\omega) \Leftrightarrow X_s = f(k_s, k_A, k_B, M_t, m_A, m_B, b, C_s, C_B, \omega, \ddot{X}_g)$$

si se toma en consideración tanto a la variable dependiente como a las independientes, resulta un total de $n = 12$. Por otro lado, la rigidez tiene unidades de $\frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$, los elementos inerciales tienen unidades de kg , el amortiguamiento posee unidades de $\frac{N}{m/s} = \frac{kg}{s}$, la frecuencia de excitación ω tiene unidades de $\frac{rad}{s}$ o $\frac{1}{s}$ mientras que la aceleración \ddot{X}_g posee unidades de $\frac{m}{s^2}$. Como puede verse, en este sistema se utilizan las tres unidades fundamentales; tiempo, masa y longitud, entonces $k = 3$. Por lo tanto;

$$\pi = n - k = 12 - 3 = 9$$

lo cuál indica que se deben utilizar nueve variables adimensionales, una dependiente y ocho independientes. Las ocho variables independientes son ν , η , μ , δ , β , ζ_B , ζ_s y Ω

dadas en el conjunto 5.34, mientras que la variable adimensional dependiente puede verse en la ecuación 5.33 en la igualdad: $H_s = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g}$. El teorema Pi de Buckingham también proporciona un método para obtener el total de las variables adimensionales del sistema, que pueden ser las mismas que las definidas en el conjunto 5.34, o bien ser distintas pero equivalentes a las propuestas e igualmente válidas para el sistema de la Figura 5.1. Finalmente la función adimensional 5.38 del teorema de Pi, se puede ver en la función 5.33.

En las estructuras aisladas en la base existe la influencia del amortiguamiento ζ_s . Sin embargo, esta variable puede ser considerada aproximadamente igual a cero al implementar el IDVA propuesto en la base del edificio. Esto se debe a que el efecto del amortiguamiento interno del material ζ_s se ve desvanecido frente al efecto del amortiguamiento del absorbedor propuesto ζ_B , produciendo cambios no significativos en la FRF de la estructura y de la optimización de las variables adimensionales. En el control pasivo de vibraciones esta simplificación ha sido considerada por varios investigadores, produciendo el caso de estructuras no amortiguadas y simplificando el diseño óptimo de los dispositivos de absorción de vibración (Marian & Giaralis, 2014). De esta manera, la expresión 5.33, se escribe como:

$$H_s = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g} = H(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta, \zeta_B, \Omega) \quad (5.39)$$

En donde las variables ν , η , μ y ζ_B deben optimizarse en función de δ y β .

Para llegar a una expresión como la que se muestra en 5.39, es necesario resolver el sistema de ecuaciones definido en 5.29 - 5.31. En donde se puede observar que las variables X_s , X_A y X_B tienen coeficientes algebraicos definidos en función de las variables adimensionales del conjunto 5.34. Sin embargo, unicamente es necesario hallar el desplazamiento X_s como función de la aceleración \ddot{X}_g . Con base en esto, se resuelve este sistema por algún método del algebra lineal, y luego se obtiene la función de transferencia en forma adimensional como se muestra en la expresión 5.40

$$H_s = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{N_{s4} \Omega^4 + i N_{s3} \Omega^3 + N_{s2} \Omega^2 + i N_{s1} \Omega + N_{s0}}{D_{s6} \Omega^6 + i D_{s5} \Omega^5 + D_{s4} \Omega^4 + i D_{s3} \Omega^3 + D_{s2} \Omega^2 + i D_{s1} \Omega + D_{s0}} \quad (5.40)$$

donde

$$N_{s4} = (\delta + 1)(\mu + 1),$$

$$N_{s3} = -2\eta [(\delta + 1)\mu + 1] (\mu + 1)\zeta_B,$$

$$N_{s2} = - [(\delta + 1)\mu + 1] (\mu + 1)\eta^2 - \nu^2(\delta + 1)(\mu + \beta + 1),$$

$$N_{s1} = 2\eta \nu^2(1 + \beta)(\mu + 1)\zeta_B,$$

$$N_{s0} = \eta^2 \nu^2 (1 + \beta)(\mu + 1),$$

$$D_{s6} = (\delta + 1)(\mu + 1),$$

$$D_{s5} = -2\eta [(\delta + 1)\mu + 1] (\mu + 1)\zeta_B,$$

$$D_{s4} = - [(\delta + 1)\mu + 1] (\mu + 1)\eta^2 - [(\nu^2 + 1)\mu + 1 + (1 + \beta)\nu^2] (\delta + 1),$$

$$D_{s3} = 2 \{(\delta + 1)\mu^2 + [(\beta\delta + \beta + 1)\nu^2 + \delta + 2] \mu + 1 + (1 + \beta)\nu^2\} \zeta_B \eta,$$

$$D_{s2} = \{(\delta + 1)\mu^2 + [(\beta\delta + \beta + 1)\nu^2 + \delta + 2] \mu + 1 + (1 + \beta)\nu^2\} \eta^2 + \nu^2(\delta + 1)(\mu + 1),$$

$$D_{s1} = -2\eta \nu^2 \zeta_B (\mu + 1)$$

y

$$D_{s0} = -\eta^2 \nu^2 (\mu + 1).$$

Debido a que a lo largo de este trabajo se analizan otras funciones de transferencia, en la ecuación 5.40 se utiliza el subíndice s para hacer referencia a la respuesta X_s del edificio rígido de base aislada de la Figura 5.1. Por otro lado, la ecuación 5.40 esta dada en términos de variable compleja, si se agrupan sus partes reales e imaginarias queda definida como sigue;

$$H_s = \frac{A_s + B_s i}{C_s + D_s i} \quad (5.41)$$

donde

$$A_s = N_{s4}\Omega^4 + N_{s2}\Omega^2 + N_{s0},$$

$$B_s = N_{s3}\Omega^3 + N_{s1}\Omega,$$

$$C_s = D_{s6}\Omega^6 + D_{s4}\Omega^4 + D_{s2}\Omega^2 + D_{s0}$$

y

$$D_s = D_{s5}\Omega^5 + D_{s3}\Omega^3 + D_{s1}\Omega.$$

Para obtener la función de transferencia en términos de variable real se obtiene la magnitud de la función 5.41 (omitiendo el subíndice s) de la siguiente manera:

$$H = \frac{A + Bi}{C + Di} \cdot \frac{C - Di}{C - Di} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} i$$

luego

$$H^2 = \left(\frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \right)^2 + \left(\frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \right)^2$$

sumando ambos quebrados

$$H^2 = \frac{A^2 C^2 + B^2 D^2 + B^2 C^2 + A^2 D^2}{(C^2 + D^2)^2}$$

factorizando por agrupación

$$H^2 = \frac{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}{(C^2 + D^2)^2}$$

simplificando

$$H^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}$$

extrayendo raíz cuadrada

$$H = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad (5.42)$$

utilizando el subíndice s

$$H_s = \sqrt{\frac{A_s^2 + B_s^2}{C_s^2 + D_s^2}} \quad (5.43)$$

Para obtener la magnitud de la función de transferencia correspondiente a la Figura 5.1, basta con sustituir las expresiones A_s , B_s , C_s y D_s en 5.43.

5.2. Modelo matemático en el dominio de la frecuencia del edificio SDOF conectado al IDVA propuesto en el n ésimo piso

En esta Sección se obtiene el modelo matemático en el dominio de la frecuencia del caso dos definido en el Capítulo 4. Para esto, se consideran las ecuaciones dinámicas obtenidas en la Sección 4.2 y se escriben nuevamente.

$$(M_t + m_A + m_B + b_z)\ddot{x}_s + \sum_{i=1}^n M_i \ddot{x}_i + m_A \ddot{x}_A + (m_B - b_z)\ddot{x}_B + C_s \dot{x}_s + k_s x_s = -(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g$$

$$m_A \ddot{x}_A + m_A \ddot{x}_s + C_B \dot{x}_A - C_B \dot{x}_B - k_A x_n + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A \ddot{x}_g$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + m_B \ddot{x}_s - b\ddot{x}_z - C_B \dot{x}_A + C_B \dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B = -m_B \ddot{x}_g$$

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{X}} + \ddot{\mathbf{X}}_s) + \mathbf{M}_{in}(\ddot{\mathbf{X}} - \ddot{\mathbf{X}}_B) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_g$$

$$b_z = \begin{cases} 0 & z \neq i \\ b & z = i \end{cases} \quad i = s, 1, 2, 3, \dots, n$$

Donde $M_t = M_s + \sum_{i=1}^n M_i$.

Considerando un edificio de un piso y que el inersor se conecta en la base aislada de masa M_s , se determina que $n = 1$ y $z = s$, tal y como se hizo en el ejemplo de la Sección 4.2. Por lo tanto, el sistema de $n + 3$ grados de libertad se reduce a uno de 4 grados de libertad y queda como sigue;

$$\begin{aligned}
(M_t + m_A + m_B + b_s)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + m_A\ddot{x}_A + (m_B - b_s)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s &= -(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g \\
m_A\ddot{x}_A + m_A\ddot{x}_s + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B - k_A x_1 + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B &= -m_A\ddot{x}_g \\
(m_B + b)\ddot{x}_B + (m_B - b)\ddot{x}_s - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B &= -m_B\ddot{x}_g \\
\begin{pmatrix} M_1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{x}_s \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} b_s & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ddot{x}_B \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
+ \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_A & -k_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_A \end{pmatrix} &= -\ddot{x}_g \begin{pmatrix} M_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$b_s = \begin{cases} 0 & s \neq i \\ b & s = i \end{cases} \quad i = s, 1.$$

Desarrollando las operaciones matriciales se obtiene:

$$(M_t + m_A + m_B + b_s)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + m_A\ddot{x}_A + (m_B - b_s)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = \dots \tag{5.45}$$

$$-(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g$$

$$\begin{aligned}
m_A\ddot{x}_A + m_A\ddot{x}_s + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B - k_A x_1 + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B &= -m_A\ddot{x}_g \\
(m_B + b)\ddot{x}_B + (m_B - b)\ddot{x}_s - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B &= -m_B\ddot{x}_g \\
M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s) + b_s(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_B) + C_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_A)x_1 - k_A x_A &= -M_1\ddot{x}_g.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$b_s = \begin{cases} 0 & s \neq i \\ b & s = i \end{cases} \tag{5.47}$$

$$i = s, 1.$$

Se puede ver que el término b_s afecta a las ecuaciones 5.45 y 5.46, al contener el término b_s . De la misma manera que en la Sección 4.2, se determina que $b_s = b$ en la ecuación 5.45 y $b_s = 0$ en 5.46. Por lo tanto, el modelo matemático queda como sigue

$$\begin{aligned}
(M_t + m_A + m_B + b)\ddot{x}_s + M_1\ddot{x}_1 + m_A\ddot{x}_A + (m_B - b)\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s &= -(M_t + m_A \\
&+ m_B)\ddot{x}_g
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$m_A\ddot{x}_A + m_A\ddot{x}_s + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B - k_A x_1 + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A\ddot{x}_g \tag{5.49}$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + (m_B - b)\ddot{x}_s - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B = -m_B\ddot{x}_g \tag{5.50}$$

$$M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_s) + C_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_A)x_1 - k_A x_A = -M_1\ddot{x}_g. \tag{5.51}$$

El sistema de ecuaciones 5.48-5.51 se simplifica en un sistema de tres grados de libertad considerando que las estructuras con aislamiento en la base tienden a comportarse como

un cuerpo rígido (Love et al., 2011). Este nuevo sistema esta definido por las siguientes ecuaciones;

$$(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_s + m_A\ddot{x}_A + m_B\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = -(M_t + m_A + m_B)\ddot{x}_g \quad (5.52)$$

$$m_A\ddot{x}_A + m_A\ddot{x}_s + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A\ddot{x}_g \quad (5.53)$$

$$(m_B + b)\ddot{x}_B + m_B\ddot{x}_s - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B = -m_B\ddot{x}_g \quad (5.54)$$

El edificio de la Figura 4.3 (caso dos), se simplifica en el que se muestra en la Figura 5.2, que corresponde a las ecuaciones diferenciales 5.52 - 5.54. Dichas ecuaciones, se obtienen utilizando la nomenclatura de las posiciones absolutas y relativas definidas en la Sección 4.2 y aplicando la formulación de Euler - Lagrange en el diagrama de la Figura 5.2. En la Figura 5.2, se puede ver que una de las terminales del inersor se conecta en la masa M_t , esto se debe a que si el edificio MDOF tiende a comportarse como un cuerpo rígido (SDOF), las masas M_s y M_i para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ tendrán el mismo desplazamiento, independientemente de a cual de ellas se conecte. En otras palabras, al controlar los niveles de vibración en cualquiera de los pisos, se obtendrán los mismos resultados para cada una de las $n + 1$ masas del edificio.

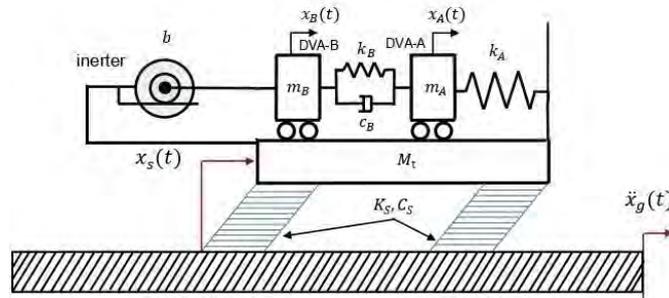


Figura 5.2: Estructura rígida SDOF de base aislada conectada al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional desde el n ésimo piso.

También se puede ver que al conectar el inersor a cualquier planta del edificio, implícitamente se está controlando la misma vibración en la base de la estructura. Es decir, se está controlando el desplazamiento de M_s (con coordenada x_s) como en el caso uno de la Figura 5.1 en la Sección 5.1, pero ahora desde la parte superior del edificio y con el inersor conectado a M_t en lugar de conectarlo a tierra. Por otro lado, las ecuaciones 5.52-5.54 se representan en el dominio de la frecuencia con coeficientes adimensionales siguiendo el mismo procedimiento de la Sección 5.1, tomando en cuenta las variables adimensionales del conjunto C_1 definido en 5.34. Estas ecuaciones son

$$-(1 + \beta)\Omega^2 X_s - \frac{\beta \Omega^2}{1 + \mu} X_A - \frac{\mu \beta \Omega^2}{1 + \mu} X_B + 2i\zeta_s \Omega X_s + X_s = -\frac{1 + \beta}{\omega_s^2} \ddot{X}_g \quad (5.55)$$

$$-\Omega^2(X_A + X_s) + 2i\mu\eta\zeta_B\Omega(X_A - X_B) + \nu^2 X_A + \mu\eta^2(X_A - X_B) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.56)$$

$$-(1 + \delta)\Omega^2 X_B - \Omega^2 X_s + 2i\eta\zeta_B\Omega(X_B - X_A) + \eta^2(X_B - X_A) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (5.57)$$

5.2.1. FRF del edificio SDOF conectado al IDVA propuesto en el enésimo piso

Para encontrar la función de respuesta en frecuencia sin dimensión de este sistema, se resuelve simultáneamente el sistema dado en 5.55-5.57 para el desplazamiento X_s , se utilizan las variables adimensionales del conjunto C_1 definido en 5.34 y la misma metodología descrita en la Subsección 5.1.1. Al hacerlo, resulta la siguiente expresión en función de ν , η , μ , δ , β , ζ_B y Ω .

$$H_n = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{N_{n4}\Omega^4 + iN_{n3}\Omega^3 + N_{n2}\Omega^2 + iN_{n1}\Omega + N_{n0}}{D_{n6}\Omega^6 + iD_{n5}\Omega^5 + D_{n4}\Omega^4 + iD_{n3}\Omega^3 + D_{n2}\Omega^2 + iD_{n1}\Omega + D_{n0}} \quad (5.58)$$

donde

$$N_{n4} = [1 + (1 + \beta)\delta] \mu + \delta + 1,$$

$$N_{n3} = -2 \{1 + [1 + (1 + \beta)\delta] \mu\} \eta(1 + \mu)\zeta_B,$$

$$N_{n2} = -\{1 + [1 + (1 + \beta)\delta] \mu\} (1 + \mu)\eta^2 - \{[1 + (1 + \beta)\delta] \mu + (1 + \delta)(1 + \beta)\} \nu^2,$$

$$N_{n1} = 2(1 + \beta)\eta\nu^2(1 + \mu)\zeta_B,$$

$$N_{n0} = \eta^2\nu^2(1 + \beta)(1 + \mu),$$

$$D_{n6} = [1 + (1 + \beta)\delta] \mu + \delta + 1,$$

$$D_{n5} = -2 \{1 + [1 + (1 + \beta)\delta] \mu\} \eta(1 + \mu)\zeta_B,$$

$$D_{n4} = -\{1 + [1 + (1 + \beta)\delta] \mu\} (1 + \mu)\eta^2 + \{[-1 + (-\beta - 1)\nu^2] \delta - \nu^2 - 1\} \mu - (1 + \delta) [1 + (1 + \beta)\nu^2],$$

$$D_{n3} = 2 [(1 + \delta)\mu + 1 + (1 + \beta)\nu^2] \zeta_B \eta(1 + \mu),$$

$$D_{n2} = (1 + \mu) \{[(1 + \delta)\mu + 1 + (1 + \beta)\nu^2] \eta^2 + \nu^2(1 + \delta)\},$$

$$D_{n1} = -2\zeta_B \eta \nu^2(1 + \mu)$$

y

$$D_{n0} = -\eta^2\nu^2(1 + \mu).$$

El subíndice n se utiliza para referirse al sistema de la Figura 5.2. Agrupando las partes reales e imaginarias de esta función queda como;

$$H_n = \frac{A_n + B_n i}{C_n + D_n i} \quad (5.59)$$

donde

$$A_n = N_{n4}\Omega^4 + N_{n2}\Omega^2 + N_{n0},$$

$$B_n = N_{n3}\Omega^3 + N_{n1}\Omega,$$

$$C_n = D_{n6}\Omega^6 + D_{n4}\Omega^4 + D_{n2}\Omega^2 + D_{n0}$$

y

$$D_n = D_{n5}\Omega^5 + D_{n3}\Omega^3 + D_{n1}\Omega.$$

La magnitud de la función 5.59 se obtiene utilizando la función 5.42 y el subíndice n

$$H_n = \sqrt{\frac{A_n^2 + B_n^2}{C_n^2 + D_n^2}} \quad (5.60)$$

Hasta este momento se obtuvieron dos funciones de respuesta en frecuencia, dadas en 5.43 y 5.60 correspondientes al caso uno y dos definidos en el Capítulo 4 y considerando el edificio MDOF como un sistema SDOF. En ambos casos, al controlar los niveles de vibración de la base aislada del edificio, implícitamente se controlan los desplazamientos de las n plantas, debido a que se desplazan en la misma magnitud. Es por eso que resulta innecesario estudiar el caso dos definido en la Figura 4.3. Por lo tanto, de este Capítulo en adelante, se trabaja únicamente con el absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional conectado como se muestra en la Figura 5.1 (caso uno simplificado), considerando las funciones 5.40 y 5.43.

Capítulo 6

Diseño óptimo de las variables adimensionales

En este capítulo se aplican tres métodos para la optimización de las variables adimensionales definidas en el conjunto de ecuaciones 5.34 (ν , η , μ , δ , β y ζ_B), que fueron utilizadas para obtener la FRF correspondiente al caso uno simplificado (Función 5.43). Para lograrlo, primero se aplica una extensión de la teoría de Den Hartog descrita en la Sección 3.3. Esta extensión del método de Hartog, es conocida como la técnica de los puntos fijos extendida, desarrollada por Barredo et al, (2018). Esta técnica sirve para encontrar soluciones analíticas de ajuste para las variables adimensionales propuestas en función de la o las relaciones de masa y/o inercia. En ocasiones, al aplicar esta técnica no es posible encontrar una solución analítica para la relación de amortiguamiento. Esta técnica sigue el mismo principio de los puntos invariantes existentes en la función de respuesta en frecuencia e independientes de la relación de amortiguamiento, como se describe en (Barredo et al, 2018) y (Barredo et al, 2020).

Después de utilizar esta técnica, se hacen las modificaciones necesarias al dispositivo propuesto y se aplican las Normas de rendimiento H_∞ y H_2 en el sistema modificado. El primer caso, es una formulación matemática utilizada para encontrar las variables adimensionales óptimas que minimizan la amplitud de vibración en los puntos resonantes del sistema. En el segundo caso se obtiene una función de respuesta de la varianza de desplazamiento del sistema en términos de las variables adimensionales, al obtener esta función (utilizando la norma H_2), se debe minimizar la varianza de desplazamiento utilizando los métodos de optimización descritos en la Sección 3.4 obteniendo resultados numéricos óptimos. Al minimizar la varianza de desplazamiento también se minimiza la energía total de vibración. Generalmente, la norma H_2 se utiliza cuando la masa de la estructura principal (en este caso M_t) está sujeta a excitación de aceleración estocástica, específicamente, de ruido blanco Gaussiano (Cheung & Wong, 2011). Sin embargo, para tener un punto de partida en la aplicación de la norma H_2 y para fines de comparación también se aplica la norma H_∞ en el mismo sistema del caso uno modificado.

6.1. Técnica de los puntos fijos extendida aplicada en el edificio SDOF conectado al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional

Como el nombre del método lo indica, esta técnica es una extensión del método de Den Hartog. En general, esta técnica es complicada al desarrollarla analíticamente, y es posible aplicarla siempre y cuando las funciones involucradas posean un comportamiento continuo en un intervalo particular de β y δ perteneciente a los números reales. Este método, se utiliza para sintonizar o ajustar los parámetros del absorbedor propuesto, previo a la aplicación de la Norma H_∞ y H_2 . A continuación, se muestra la aplicación de este método en la función de transferencia obtenida en 5.43 que corresponde al caso uno simplificado: estructura rígida conectada en la base aislada al absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional (ver Figura 5.1).

La ecuación 5.43 se definió como;

$$H_s = \sqrt{\frac{A_s^2 + B_s^2}{C_s^2 + D_s^2}}$$

donde

$$A_s = N_{4s}\Omega^4 + N_{2s}\Omega^2 + N_{0s},$$

$$B_s = N_{3s}\Omega^3 + N_{1s}\Omega,$$

$$C_s = D_{6s}\Omega^6 + D_{4s}\Omega^4 + D_{2s}\Omega^2 + D_{0s}$$

y

$$D_s = D_{5s}\Omega^5 + D_{3s}\Omega^3 + D_{1s}\Omega.$$

Los coeficientes N_{is} ($i = 0, 1, \dots, 4$) y D_{is} ($i = 0, 1, \dots, 6$) se definieron en la Sección 5.1.1.

La técnica consiste en utilizar dos condiciones de operación del absorbedor. La primera, se obtiene al hacer que la relación de amortiguamiento ζ_B sea infinitamente pequeña $\zeta_B \rightarrow 0$ y luego haciendo que sea infinitamente grande $\zeta_B \rightarrow \infty$ en la ecuación 5.43. En otras palabras;

$$H_{s\zeta_B \rightarrow 0} = \lim_{\zeta_B \rightarrow 0} H_s = \lim_{\zeta_B \rightarrow 0} \sqrt{\frac{A_s^2 + B_s^2}{C_s^2 + D_s^2}} = \sqrt{\frac{A_s^2}{C_s^2}} = \pm \frac{A_s}{C_s} \quad (6.1)$$

y

$$H_{s\zeta_B \rightarrow \infty} = \lim_{\zeta_B \rightarrow \infty} H_s = \lim_{\zeta_B \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{A_s^2 + B_s^2}{C_s^2 + D_s^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{B_s}{\zeta_B}\right)^2}{\left(\frac{D_s}{\zeta_B}\right)^2}} = \pm \frac{\frac{B_s}{\zeta_B}}{\frac{D_s}{\zeta_B}} = \pm \frac{B_s}{D_s}. \quad (6.2)$$

En la ecuación 6.2, se verá que el factor ζ_B se elimina al estar presente en el numerador y denominador de la expresión $\frac{B_s}{D_s}$. Por otro lado, las funciones 6.1 y 6.2 pasan por los puntos invariantes de la ecuación 5.43. Es decir, se intersectan en esos puntos. Al igualar 6.1 con 6.2 se obtiene una ecuación polinómica cuyas raíces son los puntos invariantes (intersección de ambas funciones), esto es;

$$\begin{aligned} H_{s\zeta_B \rightarrow 0} &= H_{s\zeta_B \rightarrow \infty} \\ \frac{A_s}{C_s} &= \pm \frac{B_s}{D_s} \end{aligned} \quad (6.3)$$

al tomar la raíz positiva de 6.3 y después de simplificaciones, se verá que se obtiene un polinomio de grado 6 con respecto a Ω , esta ecuación conduce a un resultado trivial. Al tomar la raíz negativa se obtiene una ecuación polinómica de grado 8, que es la ecuación de interés en este método.

$$\begin{aligned} \frac{A_s}{C_s} &= -\frac{B_s}{D_s} \\ A_s D_s + B_s C_s &= 0 \end{aligned}$$

después de simplificaciones

$$f_4(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)\Omega^8 + f_3(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)\Omega^6 + f_2(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)\Omega^4 + f_1(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)\Omega^2 + f_0(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta) = 0$$

convirtiendo esta expresión en un polinomio mónico al dividir por el coeficiente de Ω^8 y estableciendo el cambio de variable $\lambda = \Omega^2$

$$\lambda^4 + \frac{f_3(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)}{f_4(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)}\lambda^3 + \frac{f_2(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)}{f_4(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)}\lambda^2 + \frac{f_1(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)}{f_4(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)}\lambda + \frac{f_0(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)}{f_4(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)} = 0.$$

Se puede ver que los coeficientes de λ son funciones de cinco de las variables adimensionales propuestas. Esta ecuación puede escribirse como:

$$\lambda^4 + g_1(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)\lambda^3 + g_2(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)\lambda^2 + g_3(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta)\lambda + g_4(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta) = 0. \quad (6.4)$$

Por otro lado, se toma la raíz positiva de la ecuación 6.2 y se iguala con cero

$$\begin{aligned} H_{s\zeta_B \rightarrow \infty} &= \frac{B_s}{D_s} \\ H_{s\zeta_B \rightarrow \infty} D_s - B_s &= 0 \end{aligned}$$

desarrollando y ordenando esta expresión con respecto a Ω , se verá que se obtiene una ecuación polinómica de grado 8, igual que en la ecuación 6.4. Esta ecuación, también se

convierte en un polinomio mónico y se establece el mismo cambio de variable $\lambda = \Omega^2$, de esta manera se obtiene la ecuación 6.5

$$\lambda^4 + h_1(\nu, \mu, \delta, \beta)\lambda^3 + h_2(\nu, \mu, \delta, \beta, H)\lambda^2 + h_3(\nu, \mu, \delta, \beta, H)\lambda + h_4(\nu, \mu, \delta, \beta, H) = 0. \quad (6.5)$$

Inicialmente los polinomios definidos en 6.4 y 6.5 eran de grado 8. Es decir, polinomios con 8 raíces. No obstante, estas ecuaciones se transformaron en ecuaciones cuárticas mediante el cambio de variable $\lambda = \Omega^2$. Aún así, no dejan de ser 8 raíces para Ω (al hacer $\Omega = \sqrt{\lambda}$), de las cuáles se desprecian cuatro por ser negativas.

Las raíces de las ecuaciones 6.4 y 6.5 deben ser las mismas si se igualan sus coeficientes utilizando el teorema de vieta. Esto, debido a que la función 6.2 contiene estas raíces dentro de su dominio. De esta manera, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales;

$$g_1(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta) - h_1(\nu, \mu, \delta, \beta) = 0 \quad (6.6)$$

$$g_2(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta) - h_2(\nu, \mu, \delta, \beta, H_s) = 0 \quad (6.7)$$

$$g_3(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta) - h_3(\nu, \mu, \delta, \beta, H_s) = 0 \quad (6.8)$$

$$g_4(\nu, \eta, \mu, \delta, \beta) - h_4(\nu, \mu, \delta, \beta, H_s) = 0 \quad (6.9)$$

pareciera que el sistema de ecuaciones 6.6 - 6.9, se originó de una simple igualación de coeficientes. Sin embargo, se trata de una igualación de coeficientes variables, o de una igualación de funciones de más de una variable. Por ello, es necesario tener extremo cuidado al solucionar este sistema. En las ecuaciones 6.6 - 6.9 las variables β y δ se consideran independientes. Luego el sistema debe solucionarse para ν , η , μ y H . En este caso, la amplitud de vibración H_s se encuentra en función de β , δ , μ y η . Mientras que ν , η y μ se encuentran en términos de β y δ . Es decir, se encuentran cuatro funciones analíticas, al hacerlo, se está restringiendo el valor de las variables adimensionales para que produzcan la misma amplitud de vibración H_s en los puntos invariantes para determinados valores de β y δ (variables independientes).

Después de realizar el extenso desarrollo algebraico y de analizar las funciones que satisfacen el sistema de ecuaciones 6.6 - 6.9. Se encuentra que las soluciones para ν , η , μ y H están dadas por las siguientes funciones:

$$\mu(\beta, \delta) = \frac{(2\beta^2 + \beta - 1)\delta + 2\beta^2 + 2\beta - 1}{2(\delta + 1)} + \dots \quad (6.10)$$

$$\frac{\sqrt{4(\beta - \frac{1}{2})^2(\beta + 1)^2\delta^2 + 2(4\beta^4 + 6\beta^3 + 2\beta^2 + \beta + 1)\delta + 4(\beta^2 + \beta + \frac{1}{2})^2}}{2(\delta + 1)}$$

por otro lado, para el parámetro η se obtuvo

$$\eta(\beta, \delta, \mu(\beta, \delta)) = \sqrt{\frac{(A_0 + 4\sqrt{A_1A_2})(\delta + 1)}{A_3}} \quad (6.11)$$

donde

$$\begin{aligned}
A_0 &= 4(\delta + 1)^2 \mu^3 - 4(\delta + 1)[(\beta^2 + 2\beta - 2)\delta + \beta^2 + 3\beta] \mu^2 \dots \\
&+ [(-3\beta^2 - 8\beta + 4)\delta^2 + (2\beta^3 - 6\beta^2 - 28\beta - 8)\delta - 8\beta^2 - 24\beta - 12] \mu \dots \\
&+ (2\beta^3 + 2\beta^2 - 8\beta - 8)\delta - 4\beta^2 - 12\beta - 8, \\
A_1 &= [(\mu - \frac{\beta}{2} + 1)\delta + \mu + 1]^2, \\
A_2 &= \mu^2 [(-2\mu - \frac{7}{4})\beta^2 + (-\mu - 1)\beta + (\mu + 1)^2] \delta^2 + \dots \\
&2 [\frac{1}{2}\beta^3 + (-2\mu - \frac{1}{2})\beta^2 + (-\frac{3}{2}\mu - 1)\beta + \mu^2 + \mu] \mu (\mu + 1)\delta + (\mu + 1)^2 (-\beta^2 - \beta + \mu)^2 \\
&y \\
A_3 &= -4 \{(\delta + 1)(\beta\delta + 2\beta + 2)\mu - [-2 + (\beta - 2)\delta](\beta + 1)\} (\beta + 1) \dots \\
&[1 + (\delta + 1)\mu] (\mu + 1)
\end{aligned}$$

la función que se encontró para el parámetro ν es;

$$\nu(\beta, \delta, \mu(\beta, \delta), \eta(\beta, \delta)) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(\delta\eta^2\mu + \eta^2\mu + \eta^2 - \delta - 1)(\mu + 1)(\delta\mu + \mu + 1)}{(\delta + 1)\mu(\beta\delta - 2\delta\mu - 2\delta - 2\mu - 2)}} \quad (6.12)$$

finalmente, se encontró la amplitud de vibración H_s en los puntos invariantes en función de las variables adimensionales

$$H_s(\beta, \delta, \eta, \mu) = \sqrt{-\frac{(\beta + 1)^2(\delta + 1)}{(\beta + 1)(\delta\mu + \mu + 1)\eta^2 - \delta - 1}} \quad (6.13)$$

Como se ve en las ecuaciones 6.10 - 6.13, es necesario utilizar la composición de funciones para que los parámetros η y ν queden definidos en función de dos variables. Finalmente, es necesario analizar el dominio que restringe estas funciones, hacer un análisis matemático de las mismas para hacer las modificaciones necesarias y después aplicar la Norma H_∞ y H_2 .

Por otra parte, no es posible encontrar el factor de amortiguamiento ζ_B analíticamente. Por lo tanto, se encuentra un valor particular de esta variable utilizando valores numéricos previamente definidos y calculados de β , δ , μ , ν , η y de la amplitud de vibración H_s .

6.1.1. Cálculo del factor de amortiguamiento ζ_B para un edificio de cinco pisos con aislamiento en la base

Di Matteo et al (2019), trabajaron en el diseño óptimo del TMDI conectado a un edificio MDOF de base aislada como el que se muestra en la Figura 4.1, obtuvieron soluciones analíticas óptimas para la relación de frecuencias y de amortiguamiento del TMDI utilizando el índice de rendimiento H_2 . En su investigación, se reporta la aplicación de sus soluciones analíticas en un edificio de base aislada de cinco pisos como el que se describe en el Apéndice A en las Figuras 8.20 8.21. Para hallar el factor de amortiguamiento ζ_B del IDVA propuesto, se utiliza esta información y los siguientes valores iniciales $\beta = 0.01$ y $\delta = 5$.

Se seleccionaron estos valores debido a que normalmente los absorbedores utilizados en el control de vibración de estructuras son diseñados de manera que la relación entre la masa del absorbedor y de la estructura se encuentre en el intervalo $0 < \beta < 0.1$ y valores de inercia ligeramente altos. Reemplazando estos valores en las ecuaciones 6.10 - 6.13 se obtienen los siguientes parámetros y amplitud H ; $\mu_{op} = 0.003395430166$, $\eta_{op} = 2.400682772$, $\nu_{op} = 1.000049832$ y $H = 10.05797164$.

Ahora se deben tomar en consideración los denominadores de las ecuaciones 6.1 y 6.2 e igualarse con cero. Esto se hace, con la finalidad de encontrar las frecuencias invariantes (valores de Ω en los cuáles existen asíntotas verticales conocidas como polos). Al hacerlo, se verá que el denominador de la ecuación 6.1 y de la ecuación 6.2, producen ecuaciones polinómicas de grados 6 y 4 respectivamente. Al obtener estas ecuaciones polinómicas se reemplazan los valores de β , δ , μ_{op} , η_{op} y ν_{op} obteniendo;

$$6.020372580\Omega^6 - 18.00200926\Omega^4 + 17.76386639\Omega^2 - 5.783422928 = 0 \quad (6.14)$$

$$1.023837185\Omega^4 - 2.037537362\Omega^2 + 1.003495434 = 0 \quad (6.15)$$

las ecuaciones 6.14 y 6.15 se resuelven utilizando el método de Newton-Raphson y sus soluciones son;

$$\Omega = \{\pm 0.9087933871, \pm 0.9966644212, \pm 1.082098209\}$$

y

$$\Omega = \{\pm 0.9460925975, \pm 1.046426204\}$$

respectivamente.

Del primer conjunto de soluciones se desprecian las raíces negativas, debido a que se encuentran en el eje negativo de Ω . De las tres raíces positivas restantes, se toma el valor intermedio. Por otra parte, en el segundo conjunto de ecuaciones se desprecian las raíces negativas por la misma razón y se toman en cuenta las dos positivas. Por lo tanto, las raíces útiles son;

$$\Omega_1 = 0.9460925975$$

$$\Omega_2 = 0.9966644212$$

$$\Omega_3 = 1.046426204$$

por otro lado, tomando la función de transferencia dada en la ecuación 5.43

$$H_s(\Omega) = \sqrt{\frac{A_s^2 + B_s^2}{C_s^2 + D_s^2}}$$

igualando con cero

$$H_s^2(\Omega) (C_s^2 + D_s^2) - (A_s^2 + B_s^2) = 0.$$

En esta ecuación se reemplazan los valores iniciales de $\beta = 0.01$ y $\delta = 5$, las variables óptimas calculadas ν_{op} , η_{op} , μ_{op} y la amplitud de vibración H_s en los puntos invariantes producida por β , δ , ν_{op} , η_{op} y μ_{op} . En la ecuación resultante, se reemplazan cada una de las tres raíces de omega: Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 . De esta manera, se obtienen tres ecuaciones en función del amortiguamiento.

Utilizando el valor de Ω_1

$$H_s^2(\Omega_1)(C_s^2 + D_s^2) - (A_s^2 + B_s^2) = 0$$

simplificando

$$-0.1945627620\zeta_B^2 + 0.009297164926 = 0$$

resolviendo

$$\zeta_{B1}^2 = 0.04778491439,$$

utilizando el valor de Ω_2

$$H_s^2(\Omega_2)(C_s^2 + D_s^2) - (A_s^2 + B_s^2) = 0$$

simplificando

$$0.2420090835\zeta_B^2 - 0.01443207128 = 0$$

resolviendo

$$\zeta_{B2}^2 = 0.05963441980$$

finalmente utilizando el valor de Ω_3

$$H_s^2(\Omega_3)(C_s^2 + D_s^2) - (A_s^2 + B_s^2) = 0$$

simplificando

$$-0.2921489352\zeta_B^2 + 0.01221693776 = 0$$

resolviendo

$$\zeta_{B3}^2 = 0.04181749884.$$

Como se ve, se acaba de obtener una relación de amortiguamiento para cada frecuencia invariante Ω_i $i = 1, 2, 3$, que son los puntos donde se ubican los polos de las ecuaciones 6.1 y 6.2. La relación de amortiguamiento óptima se obtiene calculando la media cuadrática de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia invariante. En otras palabras;

$$\zeta_B = \sqrt{\frac{\zeta_{B1}^2 + \zeta_{B2}^2 + \zeta_{B3}^2}{3}} \quad (6.16)$$

sustituyendo los tres valores de ζ_B en 6.16 se obtiene un valor de $\zeta_{Bop} = 0.2230372413$. Este es el factor de amortiguamiento óptimo correspondiente a los valores independientes de $\beta = 0.01$, $\delta = 5$ y al resto de los parámetros óptimos calculados. A continuación, se muestra la gráfica de respuesta en frecuencia de M_t utilizando las variables óptimas encontradas y los valores iniciales de $\beta = 0.01$ y $\delta = 5$.

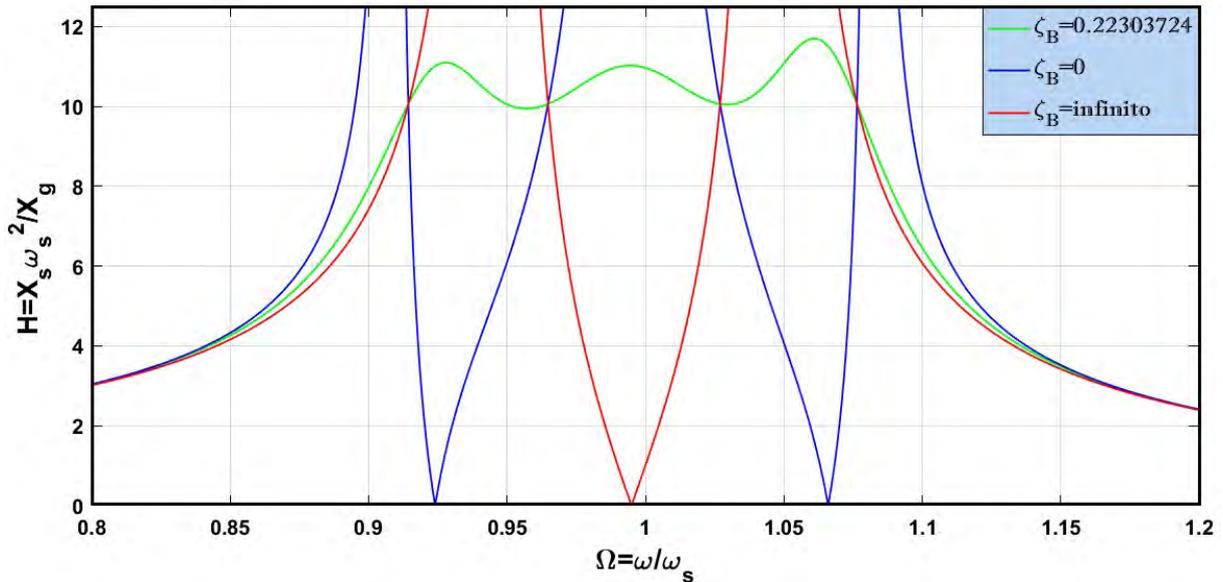


Figura 6.1: Curva de respuesta óptima utilizando la técnica de los puntos fijos extendida con las variables $\beta = 0.01$, $\delta = 5$, $\nu_{op} = 1.0000$, $\eta_{op} = 2.4006$, $\mu_{op} = 0.0033$ y $\zeta_{Bop} = 0.2230$.

En la Figura 6.1, se muestra la amplitud de vibración H_s de la estructura considerando excitación de aceleración en la base. Se puede ver que la curva pasa por los puntos invariantes de amplitud $H_s = 10.0579$ y que la amplitud de vibración no es muy elevada en las frecuencias invariantes.

Finalmente, utilizando las variables adimensionales del conjunto C_1 definidas en 5.34 en la Sección 5.1.1, las características del edificio de la Figura 8.21 y los parámetros

óptimos μ_{op} , η_{op} , ν_{op} y ζ_{Bop} calculados en esta Sección, se determinan las propiedades del absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional cuando está ajustado para producir la misma amplitud de vibración en los puntos invariantes mediante la técnica de los puntos fijos extendida. Estas propiedades quedan definidas como sigue.

Propiedades de masa; $m_A = 3388.494604kg$, $m_B = 11.50539680kg$ y $b = 57.52698398kg$.

Propiedades de rigidez; $k_A = 33446.59081\frac{N}{m}$ y $k_B = 654.4446614\frac{N}{m}$.

Constante de amortiguamiento; $C_B = 38.70745750\frac{Ns}{m}$.

Frecuencias naturales; $\omega_A = 3.141756552\frac{rad}{s}$ y $\omega_B = 7.541984997\frac{rad}{s}$.

6.1.2. Análisis de las soluciones analíticas obtenidas de la técnica de los puntos fijos extendida

Con la finalidad de comparar el rendimiento del IDVA propuesto con los reportados en la literatura, se aplicó la técnica de Den Hartog en el caso estudiado por Matteo et al (2019). En la Figura 6.2, se muestran las FRFs del TMDI y del IDVA propuesto utilizándolos en la misma estructura. Para que esta comparación sea válida, en ambas FRFs se utilizaron relaciones de masa e inercia independientes y equivalentes entre sí, utilizando las propiedades encontradas en la Subsección 6.1.1 ($m_A = 3388.494Kg$, $m_B = 11.505Kg$, $M_t = 340,000Kg$ y $b = 57.526Kg$). En la Figura 6.2, se puede ver una disminución significativa de la amplitud de vibración de la estructura al utilizar el absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional frente a la FRF producida al utilizar el TMDI en esta misma estructura. Además, también se observa una ligera ampliación en el ancho de banda de frecuencias de operación del IDVA propuesto.

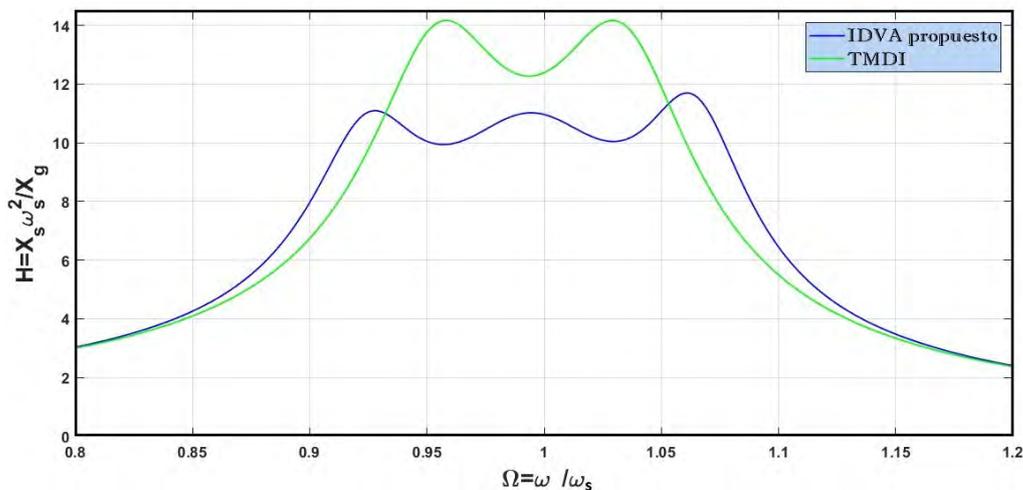


Figura 6.2: Curva verde: respuesta en frecuencia de M_t utilizado el TMDI. Curva azul: respuesta en frecuencia de M_t utilizando el IDVA propuesto.

Por otro lado, la disminución de vibración de la estructura de base aislada de la Figura 5.1, depende de los parámetros inerciales δ y β . Particularmente, si se considera el límite de la ecuación 6.13 (después de escribirla en función de δ y β) cuando δ tiende a cero, se obtiene la amplitud de vibración del DVA de doble masa conectado en serie estudiado por Asami T., (2017). Sin embargo, al hacer que $\delta \rightarrow \infty$ se obtiene el mejor rendimiento del absorbedor propuesto. En este último caso, se puede ver tanto analítica como gráficamente que el parámetro μ es despreciable cuando la relación de inercia δ es alta. En consecuencia, el efecto de la masa m_B es despreciable para valores altos de b .

Al considerar esta observación, se analiza la respuesta en frecuencia del sistema mostrado en la Figura 5.1 pero ahora despreciando el efecto de la masa m_B . En la Figura 6.3, se muestra este nuevo sistema que corresponde al caso uno definido en el Capítulo 4, pero ahora simplificado y sin el efecto de m_B .

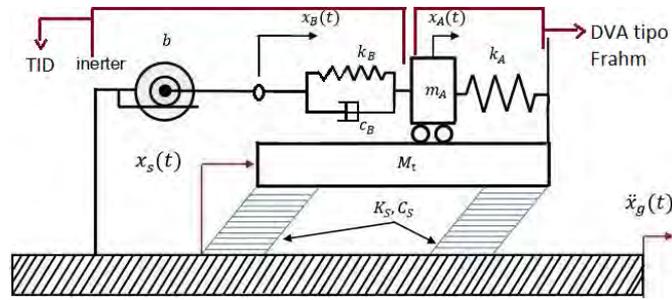


Figura 6.3: Estructura rígida SDOF de base aislada conectada al dispositivo propuesto sin la masa m_B (DVA tipo Frahm acoplado con TID).

En la Figura 6.3 se puede observar la conexión directa en serie de una de las terminales del inersor con la terminal del amortiguador C_B y del resorte k_B conectados en paralelo. Esta red mecánica es conocida como amortiguador-sintonizado-inersor, por sus siglas en inglés conocido como TID. El TID es un sistema de amortiguamiento que ha sido estudiado por diversos investigadores y surge de la desconexión de la masa convencional del TMDI propuesto por Marian y Giaralis Agathoklis (2014).

Al hacer esta modificación, el dispositivo propuesto puede ser nombrado como DVA tipo Frahm acoplado con TID o DVA tipo Frahm sintonizado con TID. En la Figura 6.3, se puede ver que nuevamente se trata de un sistema de tres grados de libertad. El desplazamiento traslacional horizontal de la masa M_t , el de la masa m_A y el del nodo formado por la conexión del TID. A continuación, se aplica la técnica de los puntos fijos extendida en este nuevo sistema, siguiendo la misma metodología que en el caso del absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional conectado al edificio rígido de base aislada (Figuras 4.2 y 5.1) desarrollada en la Sección 6.1. Las ecuaciones de movimiento del sistema de la Figura 6.3 se definen como sigue;

$$(M_t + m_A + b)\ddot{x}_s + m_A\ddot{x}_A + b\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = -(M_t + m_A)\ddot{x}_g \quad (6.17)$$

$$M_t = M_s + \sum_{i=1}^n M_i$$

$$m_A(\ddot{x}_A + \ddot{x}_s) + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B + (k_A + k_B)x_A - k_Bx_B = -m_A\ddot{x}_g \quad (6.18)$$

$$b(\ddot{x}_B + \ddot{x}_s) - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_Bx_A + k_Bx_B = 0 \quad (6.19)$$

obtenidas a partir de la formulación de Euler-Lagrange o haciendo $m_B = 0$ y considerando el edificio MDOF como un cuerpo rígido en las ecuaciones 4.8, 4.12 y 4.16. Por otra parte, algunas de las variables adimensionales del conjunto C_1 dado en 5.34, sufren algunos cambios quedando como se muestra en el conjunto C_2 ;

$$C_2 \left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{\omega_A}{\omega_s} \\ \eta = \frac{\omega_B}{\omega_s} \\ \alpha = \frac{b}{b} \\ \beta = \frac{m_A}{m_A} \\ \zeta_B = \frac{C_B}{2b\omega_B} \\ \zeta_s = \frac{C_s}{2M_t\omega_s} \\ \Omega = \frac{\omega}{\omega_s} \end{array} \right. \quad (6.20)$$

El uso de las variables del conjunto C_2 se justifica con el teorema Pi de Buckingham al igual que se hizo con el conjunto C_1 en la Subsección 5.1.1. Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 5.1 se obtiene el siguiente modelo en frecuencia sin dimensión en términos de las nuevas variables adimensionales del conjunto C_2 definido en 6.20.

$$-(1 + \beta + \alpha\beta)\Omega^2 X_s - \beta\Omega^2 X_A - \alpha\beta\Omega^2 X_B + 2j\zeta_s\Omega X_s + X_s = -(1 + \beta) \frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (6.21)$$

$$-\Omega^2 (X_A + X_s) + 2j\alpha\zeta_B\eta\Omega (X_A - X_B) + \nu^2 X_A + \alpha\eta^2 (X_A - X_B) = -\frac{\ddot{X}_g}{\omega_s^2} \quad (6.22)$$

$$-\Omega^2 (X_B + X_s) + 2j\zeta_B\eta\Omega (X_B - X_A) + \eta^2 (X_B - X_A) = 0 \quad (6.23)$$

donde $\Omega = \frac{\omega}{\omega_s}$ es la relación de frecuencias forzada.

Aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.1.1, se obtiene la función de respuesta en frecuencia del edificio rígido SDOF de la Figura 6.3. En otras palabras, la FRF descrita en la ecuación 5.40 se transforma en la función 6.24 en términos de las nuevas variables definidas en 6.20.

$$H_a = \frac{X_s\omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{N_{a4}\Omega^4 + iN_{a3}\Omega^3 + N_{a2}\Omega^2 + iN_{a1}\Omega + N_{a0}}{D_{a6}\Omega^6 + iD_{a5}\Omega^5 + D_{a4}\Omega^4 + iD_{a3}\Omega^3 + D_{a2}\Omega^2 + iD_{a1}\Omega + D_{a0}} \quad (6.24)$$

donde

$$\begin{aligned}
N_{a4} &= -1, & N_{a3} &= 2\eta(\alpha + 1)\zeta_B, & N_{a2} &= (\alpha + 1)\eta^2 + \nu^2(1 + \beta), \\
N_{a1} &= -2(1 + \beta)\eta\nu^2\zeta_B, & N_{a0} &= -\eta^2\nu^2(1 + \beta), \\
D_{a6} &= -1, & D_{a5} &= 2\eta(\alpha + 1)\zeta_B, & D_{a4} &= (\alpha + 1)\eta^2 + 1 + \nu^2(1 + \beta), \\
D_{a3} &= -2\zeta_B[(\alpha\beta + \beta + 1)\nu^2 + \alpha + 1]\eta, & D_{a2} &= [(-\alpha\beta - \beta - 1)\nu^2 - \alpha - 1]\eta^2 - \nu^2, \\
D_{a1} &= 2\eta\nu^2\zeta_B, & \text{y} & & D_{a0} &= \eta^2\nu^2. \text{ Considerando } \zeta_s = 0.
\end{aligned}$$

El subíndice a se utiliza para referirse a la FRF del caso uno simplificado sin el efecto de m_B del sistema sujeto a aceleración estocástica. Luego, la magnitud de la función 6.24 queda como sigue:

$$H_a = \sqrt{\frac{A_a^2 + B_a^2}{C_a^2 + D_a^2}} \quad (6.25)$$

donde

$$\begin{aligned}
A_a &= N_{a4}\Omega^4 + N_{a2}\Omega^2 + N_{a0}, & B_a &= N_{a3}\Omega^3 + N_{a1}\Omega, \\
C_a &= D_{a6}\Omega^6 + D_{a4}\Omega^4 + D_{a2}\Omega^2 + D_{a0} & \text{y} & & D_a &= D_{a5}\Omega^5 + D_{a3}\Omega^3 + D_{a1}\Omega.
\end{aligned}$$

A partir de este momento, se hará referencia al dispositivo propuesto sin el elemento m_B como; DVA tipo Frahm acoplado con TID o simplemente DVA - TID. Finalmente, aplicando la técnica descrita en la Sección 6.1 en la función 6.25, se obtienen las siguientes funciones óptimas de una variable para ν , η , α y la amplitud de vibración H en términos de β

$$\nu(\beta) = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} \quad -1 < \beta < 1 \quad (6.26)$$

$$\eta(\beta) = \sqrt{\frac{(2\beta - 1)^2}{1 - \beta^2}} \quad -1 < \beta < 1 \quad (6.27)$$

$$\alpha(\beta) = \frac{2\beta}{1 - 2\beta} \quad \beta \neq \frac{1}{2} \quad (6.28)$$

$$H_a(\beta) = (\beta + 1)\sqrt{\frac{1 - \beta}{\beta}} \quad (-\infty, 0) \cup (0, 1] \quad (6.29)$$

Como puede verse, las funciones 6.26 - 6.29 son continuas en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$. Por lo tanto, es posible aplicarlas en el diseño óptimo del DVA tipo Frahm acoplado con TID conectado al edificio de base aislada cuando se desee producir la misma amplitud de vibración en los puntos invariantes. Por otro lado, si se selecciona un valor de $\beta = 0.01$ y

se aplica el mismo procedimiento que en la Sección 6.1.1 para el mismo edificio de cinco pisos (ver Apéndice A), se encuentra el valor numérico del factor de amortiguamiento ζ_B así como del resto de los parámetros;

$$\begin{aligned}\beta &= 0.01 \\ \nu(0.01) &= 1.00005 \\ \eta(0.01) &= 0.980049 \\ \alpha(0.01) &= 0.0204081 \\ H_a(0.01) &= 10.0493 \\ \zeta_B &= 0.0911165\end{aligned}$$

utilizando estos parámetros se obtienen las siguientes propiedades del absorbedor propuesto sin la masa m_B (DVA acoplado con TID) mostrado en la Figura 6.3;

$$\begin{aligned}m_A &= 3400kg & b &= 69.3877kg & \omega_A &= 3.1417\frac{rad}{s} & \omega_B &= 3.0789\frac{rad}{s} & C_B &= 38.9321\frac{Ns}{m} \\ k_A &= 33560.1679\frac{N}{m} & k_B &= 657.7792\frac{N}{m}.\end{aligned}$$

Finalmente, en la Figura 6.4 se muestra la curva de respuesta en frecuencia del edificio rígido de la Figura 6.3 (curva azul punteada), comparándola con la curva de respuesta del sistema de la Figura 5.1 (curva verde continua). Es posible ver tanto en la amplitud de los puntos invariantes ($H_s \approx H_a \longleftrightarrow 10.057 \approx 10.049$) como en el valor de las frecuencias invariantes ($\Omega_1 = 0.946$, $\Omega_2 = 0.996$, y $\Omega_3 = 1.046$), que la respuesta de ambos sistemas es aproximadamente igual. Es por eso que se decide cambiar el diseño del absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional en el de la Figura 6.3. Este nuevo sistema mecánico implicaría menos costos de producción en caso de realizar trabajos futuros con este dispositivo, denominado como absorbedor de vibración dinámico tipo Frahm acoplado con TID.

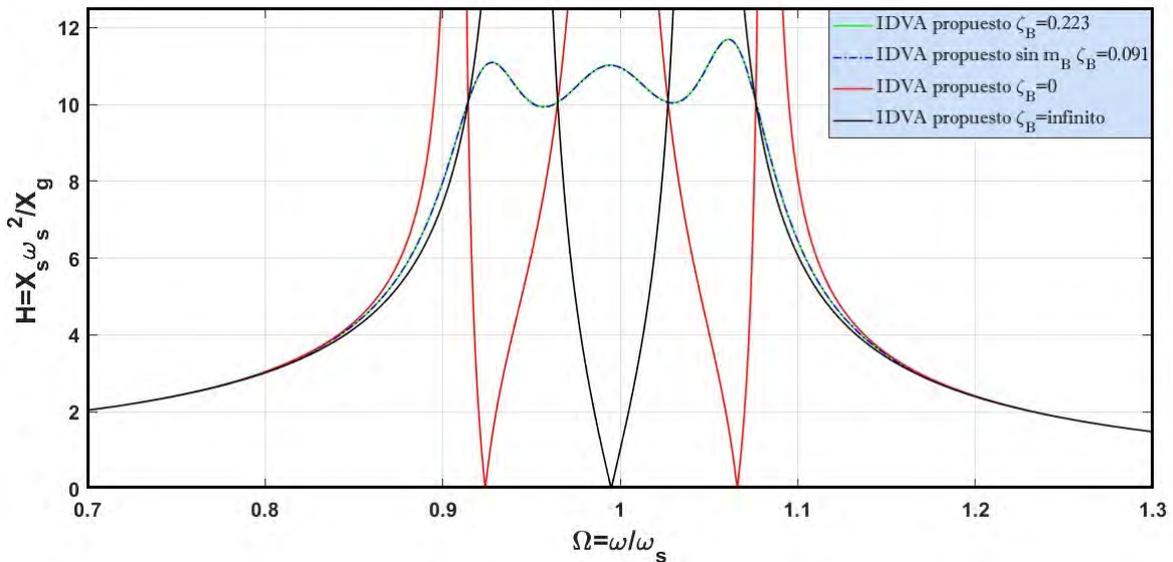


Figura 6.4: Curvas de respuesta del edificio SDOF con y sin el efecto de m_B .

Una de las observaciones positivas del sistema de la Figura 6.3 es que el factor de amortiguamiento ζ_B no es muy alto cuando la inertancia es elevada, a diferencia del absorbedor de doble masa propuesto al inicio de este trabajo (ver Figuras 4.2 y 5.1). Por otro lado, en todas las curvas de respuesta mostradas en la Figura 6.4, se utilizó el mismo valor de β independiente (0.01), que es el parámetro que define la razón de la masa del absorbedor con respecto a la masa total del edificio. Después de haber obtenido este buen resultado al eliminar la masa m_B del absorbedor propuesto al inicio de este trabajo, se aplican las medidas de rendimiento H_∞ y H_2 para obtener valores numéricos óptimos de las variables del conjunto dado en 6.20 al minimizar la amplitud de los puntos resonantes y la energía total de vibración respectivamente.

6.2. Optimización H_∞ aplicada en el edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID

En esta Sección se minimiza la magnitud de los puntos resonantes de la función 6.25 optimizando cuatro de las seis variables del absorbedor propuesto sin el efecto de m_B , que es la modificación del caso uno definido en el Capítulo 4 (ver Figura 6.3). Estas variables son ν , η , α , y ζ_B y están definidas en el conjunto C_2 . Asimismo, no debe perderse de vista que la variable β , en este caso, será tratada como una constante. Para lograr esto, se utiliza la formulación H_∞ desarrollada y aplicada por el investigador Toshihiko Asami (2002). Escribiendo nuevamente la función de respuesta en frecuencia correspondiente al sistema de la Figura 6.3 definida en la ecuación 6.25;

$$H_a = \sqrt{\frac{A_a^2 + B_a^2}{C_a^2 + D_a^2}}$$

$$\text{donde } A_a = N_{a4}\Omega^4 + N_{a2}\Omega^2 + N_{a0}, \quad B_a = N_{a3}\Omega^3 + N_{a1}\Omega,$$

$$C_a = D_{a6}\Omega^6 + D_{a4}\Omega^4 + D_{a2}\Omega^2 + D_{a0} \quad \text{y} \quad D_a = D_{a5}\Omega^5 + D_{a3}\Omega^3 + D_{a1}\Omega,$$

luego se sigue el método descrito en (Asami et al, 2018), comenzando por igualar con cero la ecuación 6.25

$$H_a^2 - \frac{A_a^2 + B_a^2}{C_a^2 + D_a^2} = 0$$

considerando que: $A_a^2 + B_a^2 = Num_a$, $C_a^2 + D_a^2 = Den_a$ y $H_a^2 = h^2$ resulta:

$$h^2 - \frac{Num_a}{Den_a} = 0$$

multiplicando ambos miembros por $\frac{Den_a}{h^2}$

$$Den_a - \frac{Num_a}{h^2} = 0 \quad (6.30)$$

La norma H_∞ se refiere al valor máximo de la amplitud de vibración h . En este caso, en la función de transferencia (H_a) o en la ecuación 6.30. Por otro lado, se considera la siguiente función

$$h = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (6.31)$$

sustituyendo 6.31 en 6.30

$$Den_a - (1-r^2) Num_a = 0 \quad (6.32)$$

al desarrollar algebraicamente la ecuación 6.32, se podrá ver que se obtiene un polinomio de grado doce con respecto a Ω como se muestra a continuación

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0$$

utilizando el cambio de variable $\Omega^2 = \lambda$ se obtiene

$$\lambda^6 + c_1\lambda^5 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_4\lambda^2 + c_5\lambda + c_6 = 0 \quad (6.33)$$

donde los coeficientes c_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) están en función de las variables adimensionales y del factor r . Es decir; $c_1 = c_1(\beta, \alpha, \nu, \eta, \zeta_B)$, $c_2 = c_2(\beta, \alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r)$, $c_3 = c_3(\beta, \alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r)$, $c_4 = c_4(\beta, \alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r)$, $c_5 = c_5(\beta, \alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r)$ y $c_6 = c_6(\nu, \eta, r)$.

La ecuación 6.33 puede expresarse como

$$(\lambda - \lambda_A)^2(\lambda - \lambda_B)^2(\lambda - \lambda_C)^2 = 0 \quad (6.34)$$

donde λ_A , λ_B y λ_C son las tres frecuencias resonantes del sistema.

Desarrollando la ecuación 6.34, utilizando el teorema de Vieta y comparando con los coeficientes de la ecuación 6.33, se obtienen las siguientes relaciones:

$$f_1 = (-c_1^2 + 4c_2)\sqrt{c_6} + 4c_5 = 0 \quad (6.35)$$

$$f_2 = c_1 c_5 + 4c_6 + 2c_3 \sqrt{c_6} = 0 \quad (6.36)$$

$$f_3 = 4c_6 (c_1 \sqrt{c_6} + c_4) - c_5^2 = 0 \quad (6.37)$$

Las ecuaciones 6.35 - 6.37 conforman un sistema algebraico no lineal de 5 incógnitas: α , ν , η , ζ_B y r , y pueden expresarse como sigue:

$$(-c_1(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B)^2 + 4c_2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r)) \sqrt{c_6(\nu, \eta, r)} + 4c_5(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r) = 0 \quad (6.38)$$

$$c_1(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B) c_5(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r) + 4c_6(\nu, \eta, r) + 2c_3(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r) \sqrt{c_6(\nu, \eta, r)} = 0 \quad (6.39)$$

$$4c_6(\nu, \eta, r) \left(c_1(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B) \sqrt{c_6(\nu, \eta, r)} + c_4(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r) \right) - c_5(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B, r)^2 = 0 \quad (6.40)$$

las ecuaciones 6.38 - 6.40 son una condición necesaria pero no suficiente para que la amplitud H_a en los puntos resonantes de la FRF 6.25 sea la misma, debido a que conforman un sistema sobredeterminado. Por lo tanto, no es posible solucionarlas numéricamente. Estas ecuaciones no consideran el término β (relación de masas) como una variable, debido a que es el parámetro que toma valores según la masa porcentual deseada del absorbedor con respecto a la masa total de la estructura del sistema de la Figura 6.3.

Para solucionar el conjunto 6.38 - 6.40 se formulan otras dos ecuaciones para completar un sistema de ecuaciones algebraico no lineal de 5×5 . Esta formulación se desarrolla observando que en la ecuación 6.31 es posible minimizar la amplitud de vibración h al minimizar el parámetro r . Para minimizar r , se considera el diferencial total dr de este parámetro con respecto a α , ν , η y ζ_B y se iguala con cero (debido a que este diferencial es infinitamente pequeño);

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial r}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial r}{\partial \zeta_B} d\zeta_B + \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (6.41)$$

esto es posible porque r esta incluido en las ecuaciones 6.38 - 6.40. Luego, escribiendo 6.41 en forma matricial

$$\begin{pmatrix} dr \\ dr \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial f_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial r}{\partial f_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial r}{\partial f_3} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \nu} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_B} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \nu} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_B} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \nu} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_B} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \end{pmatrix}}_{\text{matriz Jacobiana}} \begin{pmatrix} d\nu \\ d\eta \\ d\zeta_B \\ d\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

la ecuación 6.42 se satisface cuando algún determinante menor de 3×3 de la matriz Jacobiana es nulo, por ejemplo;

$$f_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \nu} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \nu} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_B} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \nu} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_B} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.43)$$

y

$$f_5 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \nu} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \nu} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_B} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \nu} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_B} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.44)$$

las ecuaciones 6.38 - 6.40, 6.43 y 6.44 conforman un sistema algebraico no lineal de 5×5 , su desarrollo con lleva a una cantidad extensa de términos y su solución se realiza numéricamente para las cinco variables α , ν , η , ζ_B y r , utilizando el método de Newton-Raphson mediante el comando "fsolve" del programa Maple-Soft para diferentes valores de β definidos en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$. El intervalo definido para β considera que la masa m_A del absorbedor toma determinados valores sin exceder a una masa mayor al 10 % con respecto a la masa total de la estructura. Las variables óptimas para minimizar y producir la misma amplitud de vibración en los puntos resonantes de la FRF 6.25 se muestran en la Tabla 6.1. Asimismo, en la Figura 6.5 se muestran los resultados gráficos correspondientes a la Tabla 6.1 para $\beta = 0.01, \dots, 0.05$.

Variables óptimas del DVA tipo Frahm acoplado con TID obtenidas a partir de la norma H_∞ correspondientes a la FRF $H_a = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g}$						
Valor constante	Variables óptimas dependientes				Norma H_∞	
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\alpha = \frac{b}{m_A}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\eta = \frac{\omega_B}{\omega_s}$	$\zeta_B = \frac{C_B}{2b\omega_B}$	r_{min}	h_{min} en los puntos resonantes
0.01	0.025110	1.004389	0.980009	0.111417	0.995873	11.018706
0.02	0.052407	1.009540	0.959728	0.160039	0.991769	7.810371
0.03	0.082370	1.015628	0.939052	0.199470	0.987676	6.389360
0.04	0.115681	1.022907	0.917828	0.234984	0.983578	5.540695
0.05	0.153371	1.031768	0.895833	0.268933	0.979456	4.958933
0.06	0.197147	1.042875	0.872695	0.303026	0.975286	4.526034
0.07	0.250272	1.057522	0.847706	0.339273	0.971033	4.185111
0.08	0.320938	1.079042	0.819079	0.381737	0.966640	3.904171
0.09	0.470435	1.133226	0.773305	0.459326	0.961961	3.660534

Tabla 6.1: Variables α , ν , η , ζ_B óptimas y amplitud de vibración mínima $h_{min} = H_{a_{min}}$ considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$.

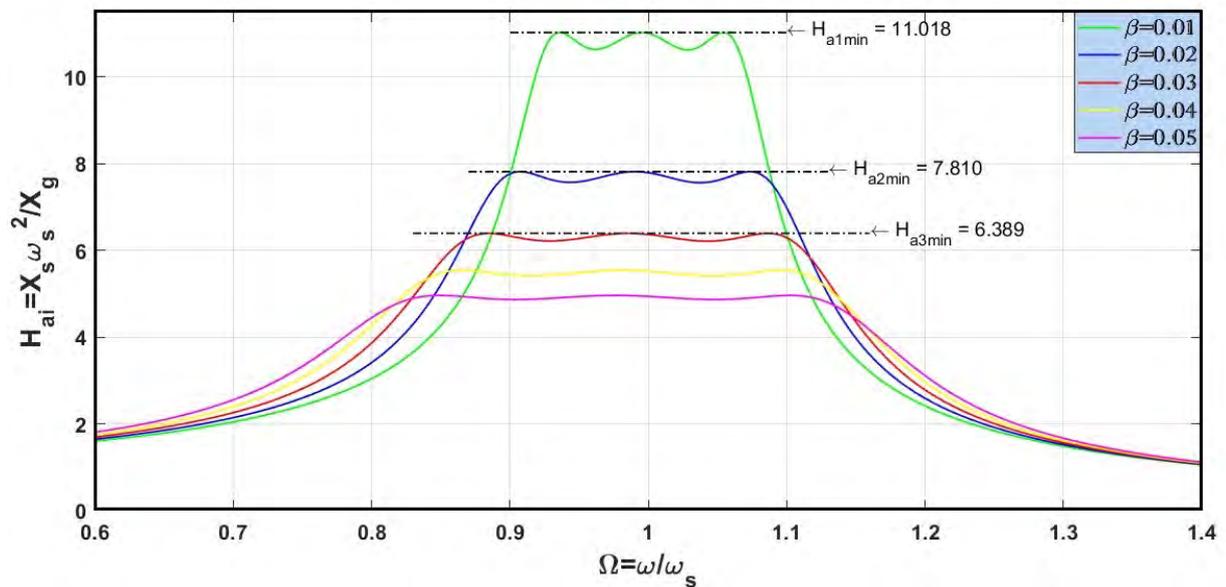


Figura 6.5: Curvas de respuesta en frecuencia H_{a_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID utilizando la norma H_∞ .

En la Tabla 6.1, se puede apreciar que a medida que β crece, las variables α , ν y ζ_B también aumentan, mientras que la variable η decrece. Asimismo, se esperaba el comportamiento de h_{min} en la última columna, debido a que el elemento m_A produce fuerzas inerciales disminuyendo la amplitud de vibración a medida que β aumenta. Por otro lado, en la Figura 6.5 el subíndice $i = 1, \dots, 5$ corresponde al valor de β utilizado en la FRF. De

esta manera, la función H_{a1} corresponde al valor de $\beta = 0.01$, $H_{a2} \rightarrow \beta = 0.02$ y así sucesivamente.

6.3. Optimización H_2 aplicada en el edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID

La norma H_2 es una medida de rendimiento normalmente utilizada cuando los sistemas mecánicos están sujetos a vibración estocástica. Esta medida de rendimiento, ha sido aplicada por diversos investigadores para minimizar la varianza de desplazamiento σ_x^2 o la energía total de vibración $E[x^2]$ de la respuesta de estos sistemas (Hu & Chen, 2015), (Barredo et al., 2020), (Matteo et al., 2019), (Cheung & Wong, 2011), (Asami, Nishihara & Baz, 2002). En este caso, se considera que la excitación $\ddot{x}_g(t)$ tiene una densidad espectral de potencia S_0 (con unidades de $m^2/(s^3rad)$), considerada constante en toda la gama de frecuencias. A este caso también se le conoce como un proceso estocástico estacionario de ruido blanco Gaussiano con media cero.

Esta medida de rendimiento se aplica en la FRF 6.24 definida en función de $(j\Omega)$ que corresponde al DVA tipo Frahm acoplado con TID. Este sistema se muestra en la Figura 6.3, y su salida energética es definida como sigue;

$$S_{x_s}(\omega) = |H_a(\omega)|^2 S_0$$

luego, la energía total de vibración se obtiene integrando la salida en toda la gama de frecuencias

$$E[x_s^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(\omega)|^2 S_0 d\omega = S_0 \omega_s \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |H_a(\Omega)|^2 d\Omega}_{\text{FRF sin dimensión}} \quad (6.45)$$

por otro lado el índice de rendimiento H_2 se define en (Asami et al., 2002) como sigue;

$$I = \frac{E[x_s^2]}{2\pi S_0 \omega_s} = \|H_a(\Omega)\|_2^2 \quad (6.46)$$

el término $2\pi\omega_s$ aparece en el denominador debido al uso de variables adimensionales. Sustituyendo 6.45 en 6.46 se obtiene

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(\Omega)|^2 d\Omega = \|H_a(\Omega)\|_2^2 \quad (6.47)$$

Por otro lado, la magnitud de la función de respuesta en frecuencia del sistema de la Figura 6.3 se definió en la ecuación 6.25 en la Sección 6.1.2. Esta FRF se sustituye en la ecuación 6.47. De esta manera resulta;

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_a^2 + B_a^2}{C_a^2 + D_a^2} d\Omega \quad (6.48)$$

la función 6.48 también representa la varianza de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$. Esta ecuación, es complicada de integrar y puede resolverse mediante integración numérica por computadora. Sin embargo, considerando que el sistema propuesto en la Figura 6.3 es estable. La norma de rendimiento H_2 , se puede calcular utilizando la siguiente ecuación (Hu & Chen, 2015);

$$I = \| H_a(s) \|_2^2 = \| \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \| = \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{C}^T$$

o bien

$$I = \sigma_{x_s}^2 = \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{C}^T \quad (6.49)$$

donde $H_a(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ es la ecuación para obtener la función de transferencia en términos de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , que son definidas en el análisis en espacio de estados. Mientras que s es la variable de Laplace y \mathbf{L} es la solución única que satisface la ecuación de Lyapunov definida como sigue:

$$\mathbf{A} \mathbf{L} + \mathbf{L} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0 \quad (6.50)$$

La función de transferencia $H(s)$, en el dominio de Laplace en forma general es

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s^1 + a_0}$$

en el sistema propuesto simplificado sin el elemento m_B $n = 6$. Entonces;

$$H_a(s) = \frac{X_s(s)}{\ddot{X}_g(s)} = \frac{b_5s^5 + b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s^1 + a_0} \quad (6.51)$$

donde

$$b_5 = 0, b_4 = -1, b_3 = -2\eta(\alpha + 1)\zeta_B\omega_s, b_2 = -[(\alpha + 1)\eta^2 + \nu^2(1 + \beta)]\omega_s^2,$$

$$b_1 = -2(1 + \beta)\eta\nu^2\zeta_B\omega_s^3, b_0 = -\eta^2\nu^2(1 + \beta)\omega_s^4, a_5 = 2\eta(\alpha + 1)\zeta_B\omega_s,$$

$$a_4 = [(\alpha + 1)\eta^2 + 1 + \nu^2(1 + \beta)]\omega_s^2, \quad a_3 = 2\zeta_B [(\alpha\beta + \beta + 1)\nu^2 + \alpha + 1]\eta\omega_s^3,$$

$$a_2 = \{[(\alpha\beta + \beta + 1)\nu^2 + \alpha + 1]\eta^2 + \nu^2\}\omega_s^4, \quad a_1 = 2\eta\nu^2\zeta_B\omega_s^5 \text{ y } a_0 = \eta^2\nu^2\omega_s^6.$$

La ecuación 6.51 se escribe en el dominio de Fourier y en forma adimensional reemplazando la variable s por $i\Omega\omega_s$, obteniendo;

$$H_a(\Omega) = \frac{X_s\omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{b_5(i\Omega)^5 + b_4(i\Omega)^4 + b_3(i\Omega)^3 + b_2(i\Omega)^2 + b_1(i\Omega) + b_0}{(i\Omega)^6 + a_5(i\Omega)^5 + a_4(i\Omega)^4 + a_3(i\Omega)^3 + a_2(i\Omega)^2 + a_1(i\Omega) + a_0}$$

al hacerlo se vera que el factor ω_s^n ($n = 0, 1, \dots, 6$) desaparece de los coeficientes b_i y a_i ($i = 0, \dots, 5$). Los coeficientes b_i y a_i también se pueden obtener directamente de la FRF definida en 6.24, ordenandola por factorización en términos de $i\Omega$. Por otro lado, la forma canónica controlable en espacio de estados de este sistema esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} se definen como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

Para encontrar la matriz L se sustituyen las matrices 6.52 y 6.53 en la ecuación matricial 6.50. La solución única que satisface esta ecuación es una matriz simétrica \mathbf{L} de 6×6 que tiene por elementos I_{1i} ($i = 1, \dots, 6$), I_{2i} ($i = 2, \dots, 6$), I_{3i} ($i = 3, \dots, 6$), I_{4i} ($i = 4, 5, 6$), I_{5i} ($i = 5, 6$) e I_{66} . Al desarrollar matricialmente la ecuación 6.50 resulta un sistema de ecuaciones escalares lineales de 21 ecuaciones con 21 incógnitas, en el cual se encuentran

los 21 elementos de \mathbf{L} en función de las variables adimensionales β , α , ν , η y ζ_B definidas en el conjunto 6.20.

Después de solucionar la ecuación de Liapunov, se calcula la norma de rendimiento H_2 definida en 6.49, de esta manera resulta;

$$I = \sigma_{x_s}^2(\beta, \alpha, \nu, \eta, \zeta_B) = \mathbf{CLC}^T$$

considerando que la relación de masas β es una constante se obtiene;

$$\sigma_{x_s}^2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B) = \mathbf{CLC}^T$$

sustituyendo las matrices \mathbf{C} (6.54) y \mathbf{L} (solución de la ecuación 6.50):

$$\sigma_{x_s}^2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} & I_{15} & I_{16} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} & I_{24} & I_{25} & I_{26} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} & I_{34} & I_{35} & I_{36} \\ I_{14} & I_{24} & I_{34} & I_{44} & I_{45} & I_{46} \\ I_{15} & I_{25} & I_{35} & I_{45} & I_{55} & I_{56} \\ I_{16} & I_{26} & I_{36} & I_{46} & I_{56} & I_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta que todos los elementos de las matrices \mathbf{C} y \mathbf{L} están en términos de las variables adimensionales del conjunto C_2 definido en 6.20 y desarrollando el procedimiento algebraico matricial, resulta la siguiente función escalar de cuatro variables independientes considerando que β es constante:

$$\sigma_{x_s}^2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B) = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{4\eta\nu^4\alpha\beta\zeta_B} \quad (6.55)$$

$$P_1 = \{(1 + \beta)^2 [1 + (\alpha + 1)\beta]^2 \nu^4 + [(\alpha + 1)\beta^2 + (-\alpha - 1)\beta - 2] (1 + \beta)(\alpha + 1)\nu^2 + (\alpha + 1)^2\}\eta^4$$

$$P_2 = \{4(1 + \beta)^2 [(\alpha\zeta_B^2 + \zeta_B^2 - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2})\beta + \zeta_B^2 - \frac{1}{2}] \nu^4 - 8(\alpha\zeta_B^2 + \zeta_B^2 - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2})(1 + \beta)\nu^2 + 4(\alpha\zeta_B^2 + \zeta_B^2 - \frac{1}{2})(\alpha + 1)\}\eta^2$$

$$P_3 = 1 + (1 + \beta)^2\nu^4 + (-\beta - 2)\nu^2.$$

La ecuación 6.55 define la varianza de desplazamiento del edificio en función de las variables adimensionales y se define como la función objetivo. Luego, se debe minimizar esta función utilizando el criterio para funciones de más de una variable descrito en la Sección 3.4, asumiendo que las primeras derivadas parciales de $\sigma_{x_s}^2$ existen en sus extremos

relativos incluyendo el mínimo absoluto $(\alpha_0, \nu_0, \eta_0, \zeta_{B_0})$. Con base en esto, se formula el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\frac{\partial \sigma_{x_s}^2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B)}{\partial \alpha} = 0 \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial \sigma_{x_s}^2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B)}{\partial \nu} = 0 \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial \sigma_{x_s}^2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B)}{\partial \eta} = 0 \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial \sigma_{x_s}^2(\alpha, \nu, \eta, \zeta_B)}{\partial \zeta_B} = 0 \quad (6.59)$$

las ecuaciones 6.56 - 6.59 se solucionan numéricamente para las cuatro variables α , ν , η y ζ_B , utilizando el método de Newton-Raphson mediante el comando "fsolve" del programa Maple-Soft para diferentes valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$, siempre y cuando el sistema sea convergente en los valores de β asignados. Al igual que en la optimización H_∞ , el intervalo definido para β considera que la masa m_A del absorbedor toma determinados valores sin exceder a una masa mayor al 10 % con respecto a la masa total de la estructura. Las variables óptimas para minimizar la energía total de vibración se muestran en la Tabla 6.2.

Variables óptimas del DVA tipo Frahm acoplado con TID obtenidas a partir de la norma H_2 correspondientes a la FRF $H_\alpha = \frac{x_s \omega_s^2}{\ddot{x}_g}$					
Valor constante	Variables óptimas dependientes				Norma H_2
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\alpha = \frac{b}{m_A}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\eta = \frac{\omega_B}{\omega_s}$	$\zeta_B = \frac{C_B}{2b\omega_B}$	Varianza mínima de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$
0.01	0.020824	1.002848	0.982413	0.088718	8.738124
0.02	0.043702	1.006599	0.964557	0.129398	6.231325
0.03	0.069715	1.011810	0.946191	0.165393	5.128104
0.04	0.102111	1.020235	0.926665	0.205193	4.472501
0.05	0.140505	1.031709	0.906951	0.246025	4.023030
0.07	0.221231	1.055636	0.870509	0.309191	3.425438
0.08	0.258681	1.065293	0.853836	0.329348	3.215015
0.1	0.324139	1.078452	0.823105	0.353228	2.900862

Tabla 6.2: Variables α , ν , η , ζ_B óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$.

En la Tabla 6.2, se puede observar que a medida que β crece, las variables α , ν y ζ_B también aumentan, mientras que la variable η decrece. Por otro lado, de manera análoga al caso de la norma H_∞ , la varianza mínima de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$ disminuye conforme β aumenta.

Es importante notar que al minimizar la varianza de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$ también se minimiza la energía total de vibración $E[x_s^2]$, debido a que estas variables están relacionadas mediante el índice de rendimiento H_2 en la ecuación 6.46. Cada uno de los valores obtenidos de $\sigma_{x_s}^2$ corresponden a un valor determinado de la energía mínima de vibración de la estructura para cada valor asignado a β . Esta energía, se puede calcular mediante la ecuación 6.46

$$I = \frac{E[x_s^2]}{2\pi S_0 \omega_s} = \sigma_{x_s}^2$$

o bien

$$E[x_s^2] = 2\pi S_0 \omega_s \sigma_{x_s}^2$$

Por otro lado, en la Figura 6.6 se muestran los resultados gráficos correspondientes a las variables de la Tabla 6.2 para $\beta = 0.01, \dots, 0.05$. Donde el subíndice i hace la misma función que en la Figura 6.5.

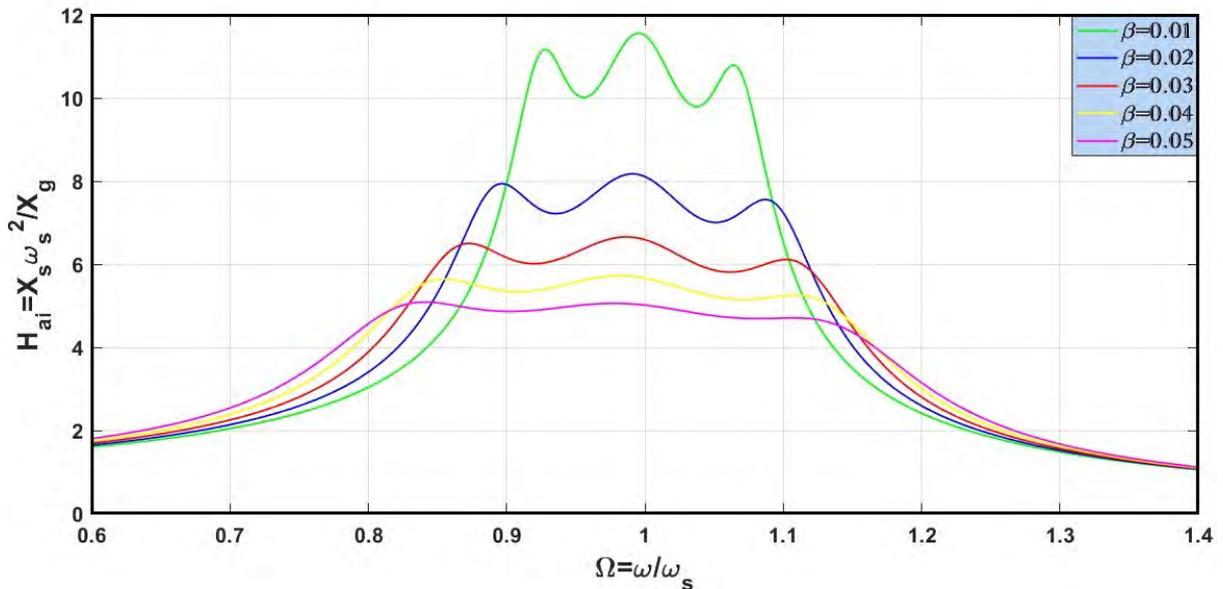


Figura 6.6: Curvas de respuesta en frecuencia H_{a_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID utilizando la norma H_2 .

6.4. Análisis comparativo de las variables óptimas del DVA tipo Frahm acoplado con TID

Después de haber determinado las variables óptimas del dispositivo propuesto sin el elemento m_B (DVA tipo Frahm acoplado con TID), resulta importante comparar estos resultados con los que podrían obtenerse a partir de la optimización de los parámetros de otros dispositivos de control pasivo de vibraciones mecánicas reportados en la literatura. En esta Sección, se acoplan otros dispositivos de control de vibración y sistemas de amortiguamiento (denominados como redes mecánicas basadas en inersores) en el mismo edificio con aislamiento en la base, aplicándoles tanto la norma H_∞ como la norma H_2 .

Barredo et al. (2020), compararon el rendimiento dinámico de tres redes mecánicas basadas en inersores distintas acopladas al DVA clásico. Estas redes mecánicas son las siguientes: (1) El amortiguador inersor sintonizado conocido como TID, (2) el amortiguador sintonizado con masa viscosa por sus siglas en el inglés conocido como TVMD y (3) la conexión en serie de un amortiguador, un inersor y un resorte. En su investigación, denominan a estas tres redes mecánicas como red mecánica C-4, C-6 y C-3 respectivamente. Por otro lado, es importante notar que la eliminación de la masa m_B en el dispositivo propuesto, dio origen a la conexión en serie de un DVA tipo Frahm (masa m_A y rigidez k_A) con un TID, al mismo tiempo que se conectan al edificio SDOF con aislamiento en la base. Es por eso que únicamente se compara el rendimiento de las redes mecánicas C-6 y C-3 con el del dispositivo propuesto sin el elemento m_B .

6.4.1. Diseño óptimo del edificio SDOF con aislamiento en la base conectado a diferentes dispositivos de absorción de vibraciones mecánicas

Con fines de comparación de rendimiento dinámico, se muestran cuatro sistemas mecánicos en donde se utilizan absorbedores de vibración dinámicos distintos conectados al mismo edificio SDOF con aislamiento en la base. Adicionalmente, se añaden sus respectivas ecuaciones de movimiento (obtenidas mediante la Formulación de Euler-Lagrange), variables adimensionales, funciones de transferencia y resultados óptimos tanto en tablas como gráficamente utilizando los índices de rendimiento H_∞ y H_2 .

1. Amortiguador sintonizado con masa viscosa (TVMD).

El primer dispositivo que será acoplado al edificio SDOF contiene el TVMD, conectado por un extremo al suelo (tierra mecánica) y por el otro al elemento inercial m_A del absorbedor de vibración dinámico más simple (DVA tipo Frahm). El TVMD propuesto por Ikago, Saito & Inoue (2011), ha mostrado un buen rendimiento dinámico y ha sido utilizado con frecuencia en la literatura para el control de vibraciones en estructuras

mecánicas (Barredo et al, 2019), (Barredo et al, 2020). En este caso, se acopla en el edificio de base aislada SDOF como se muestra en la Figura 6.7.

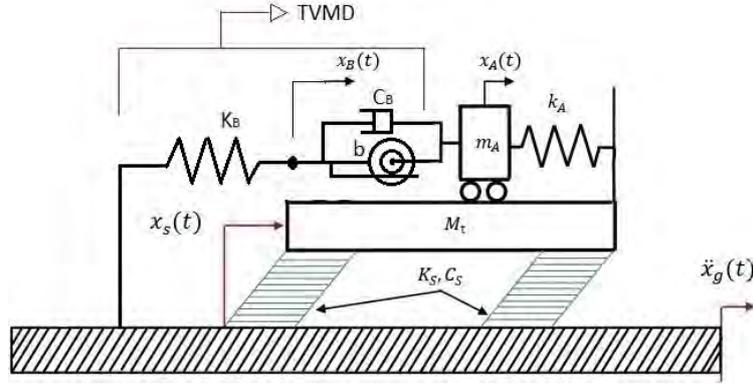


Figura 6.7: TVMD conectado entre el suelo y la masa m_A utilizado para controlar la vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema de tres grados de libertad pueden ser escritas como sigue:

$$\begin{aligned} (M_t + m_A) \ddot{x}_s + m_A \ddot{x}_A + C_s \dot{x}_s + k_s x_s + k_B(x_B + x_s) &= -(M_t + m_A) \ddot{x}_g \\ (m_A + b) \ddot{x}_A - b \ddot{x}_B + m_A \ddot{x}_s + C_B(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + k_A x_A &= -m_A \ddot{x}_g \\ b(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) + C_B(\dot{x}_B - \dot{x}_A) + k_B(x_B + x_s) &= 0 \end{aligned}$$

las variables adimensionales utilizadas en la obtención de la función de respuesta en frecuencia respectiva a este sistema son las mismas que las del conjunto 6.20. Esta función es:

$$H_b = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{N_{b4} \Omega^4 + i N_{b3} \Omega^3 + N_{b2} \Omega^2 + i N_{b1} \Omega + N_{b0}}{D_{b6} \Omega^6 + i D_{b5} \Omega^5 + D_{b4} \Omega^4 + i D_{b3} \Omega^3 + D_{b2} \Omega^2 + i D_{b1} \Omega + D_{b0}} \quad (6.60)$$

donde

$$N_{b4} = -1, \quad N_{b3} = 2\eta \zeta_B, \quad N_{b2} = (\alpha + 1)\eta^2 + \nu^2(1 + \beta),$$

$$N_{b1} = -2[\alpha \eta^2 + \nu^2(1 + \beta)]\eta \zeta_B, \quad N_{b0} = -\eta^2 \nu^2(1 + \beta), \quad D_{b6} = -1, \quad D_{b5} = 2\eta \zeta_B,$$

$$D_{b4} = (\alpha + 1)\eta^2 + 1 + \nu^2(1 + \beta), \quad D_{b3} = -2\alpha \eta^3 \zeta_B - 2[1 + \nu^2(1 + \beta)]\zeta_B \eta,$$

$$D_{b2} = [(-\alpha \beta - \beta - 1)\nu^2 - \alpha - 1]\eta^2 - \nu^2, \quad D_{b1} = 2\eta[\alpha \zeta_B(\beta \nu^2 + 1)\eta^2 + \nu^2 \zeta_B],$$

$$y \quad D_{b0} = \eta^2 \nu^2.$$

El subíndice b se utiliza para hacer referencia al sistema acoplado con TVMD de la Figura 6.7. La magnitud de la función 6.60 queda como:

$$H_b = \sqrt{\frac{A_b^2 + B_b^2}{C_b^2 + D_b^2}} \quad (6.61)$$

donde

$$A_b = N_{b4}\Omega^4 + N_{b2}\Omega^2 + N_{b0}, \quad B_b = N_{b3}\Omega^3 + N_{b1}\Omega,$$

$$C_b = D_{b6}\Omega^6 + D_{b4}\Omega^4 + D_{b2}\Omega^2 + D_{b0} \quad \text{y} \quad D_b = D_{b5}\Omega^5 + D_{b3}\Omega^3 + D_{b1}\Omega.$$

Los índices de rendimiento H_∞ y H_2 se aplican en las funciones de transferencia 6.60 y 6.61, obteniendo los resultados óptimos que se muestran en las Tablas 6.3 y 6.4 correspondientes a los índices H_∞ y H_2 respectivamente.

Variables óptimas obtenidas al utilizar el TVMD a partir de la norma H_∞						
Valor constante	Variables óptimas dependientes				Norma H_∞	
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\alpha = \frac{b}{m_A}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\eta = \frac{\omega_B}{\omega_s}$	$\zeta_B = \frac{C_B}{2b\omega_B}$	r_{min}	h_{min} en los puntos resonantes
0.01	0.022732	0.992338	1.006242	0.106765	0.995977	11.159836
0.02	0.043104	0.985285	1.011878	0.147332	0.992171	8.007467
0.03	0.061621	0.978726	1.017076	0.176622	0.988555	6.628877
0.04	0.078625	0.972580	1.021947	0.200113	0.985109	5.816360
0.05	0.094361	0.966788	1.026571	0.219961	0.981814	5.267531
0.06	0.109014	0.961307	1.031004	0.237277	0.978657	4.866190
0.07	0.122724	0.956101	1.035291	0.252720	0.975624	4.556961
0.08	0.135604	0.951142	1.039465	0.266719	0.972707	4.309700
0.09	0.147746	0.946406	1.043553	0.279566	0.969895	4.106426
0.1	0.159223	0.941875	1.047578	0.291475	0.967181	3.935672

Tabla 6.3: Variables α , ν , η , ζ_B óptimas y amplitud de vibración mínima $h_{min} = H_{b_{min}}$ utilizando el TVMD y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$.

Variables óptimas obtenidas al utilizar el TVMD a partir de la norma H_2					
Valor constante	Variables óptimas dependientes				Norma H_2
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\alpha = \frac{b}{m_A}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\eta = \frac{\omega_B}{\omega_s}$	$\zeta_B = \frac{C_B}{2b\omega_B}$	Varianza mínima de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$
0.01	0.018933	0.995202	1.004597	0.083704	8.802169
0.02	0.036130	0.990743	1.008599	0.115162	6.321462
0.03	0.051996	0.986552	1.012209	0.137834	5.239007
0.04	0.066790	0.982587	1.015549	0.156053	4.602840
0.05	0.080688	0.978817	1.018695	0.171509	4.174573
0.06	0.093819	0.975219	1.021704	0.185065	3.862595
0.07	0.106282	0.971778	1.024615	0.197230	3.623237
0.08	0.118152	0.968481	1.027459	0.208329	3.432722
0.09	0.129492	0.965317	1.030261	0.218586	3.276869
0.1	0.140351	0.962279	1.033039	0.228163	3.146632

Tabla 6.4: Variables α , ν , η , ζ_B óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando el TVMD y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$.

Los resultados gráficos correspondientes a la Tabla 6.3 se muestran en las funciones de la Figura 6.8 utilizando los valores fijos de β ; 0.01, ..., 0.05.

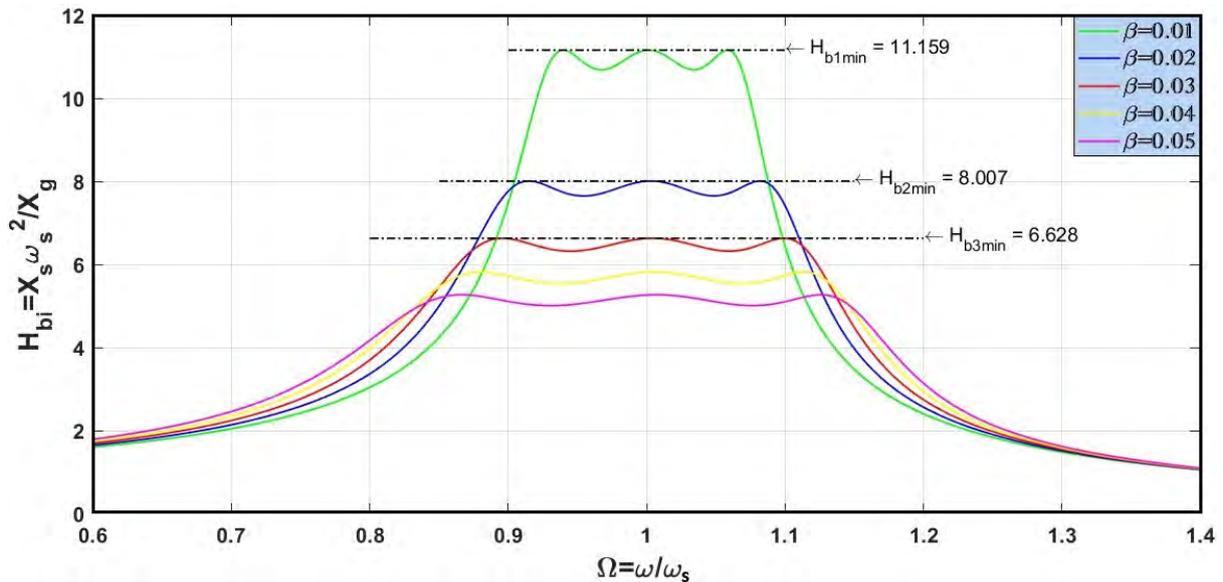


Figura 6.8: Curvas de respuesta en frecuencia H_{b_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar el TVMD utilizando la norma H_∞ .

Asimismo, las curvas de respuesta en frecuencia correspondientes a la Tabla 6.4 son las que se muestran en la Figura 6.9. El uso del subíndice i en las gráficas 6.8 y 6.9 hace la misma función que en la Figura 6.5.

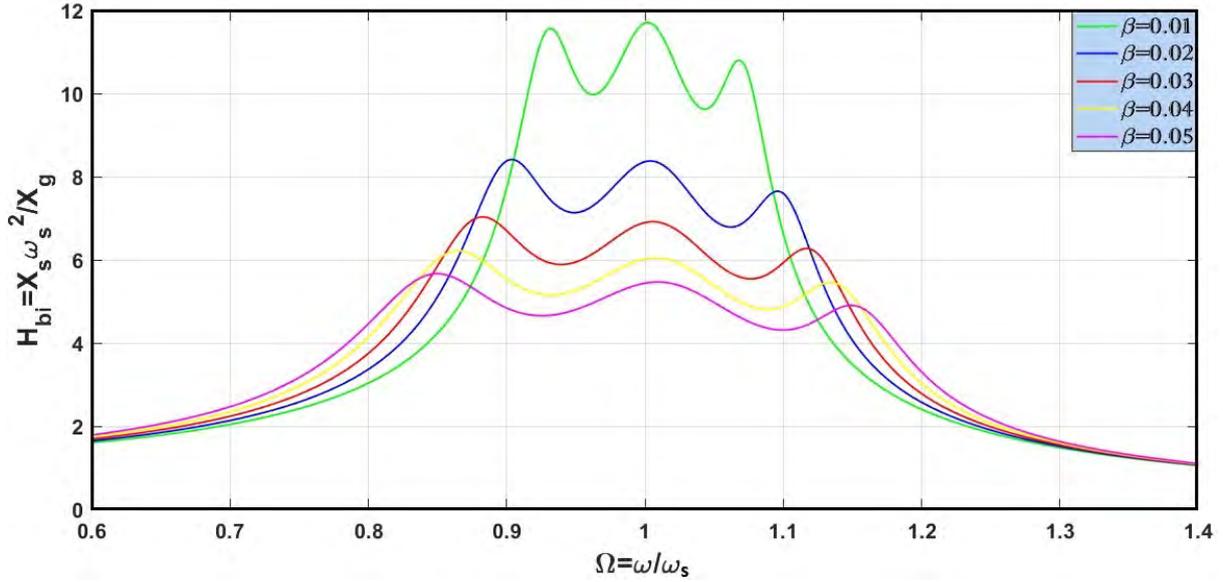


Figura 6.9: Curvas de respuesta en frecuencia H_{b_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar el TVMD utilizando la norma H_2 .

2. Red mecánica en serie: amortiguador - inersor - resorte.

A continuación se muestran los resultados de las funciones de respuesta en frecuencia obtenidas al acoplar el edificio SDOF con aislamiento en la base con la red mecánica en serie de un amortiguador, un inersor y un resorte. Esta red mecánica se denomina como red mecánica C-3 en (Barredo et al, 2019). El sistema global conectado al edificio SDOF es de cuatro grados de libertad y queda como el que se muestra en la Figura 6.10.

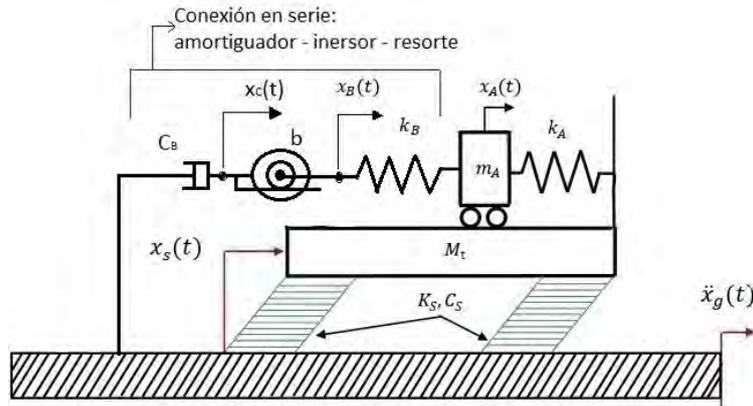


Figura 6.10: Red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte conectada entre el suelo y la masa m_A para controlar la vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.

El modelo matemático de este sistema está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (M_t + m_A) \ddot{x}_s + m_A \ddot{x}_A + C_s \dot{x}_s + C_B(\dot{x}_C + \dot{x}_s) + k_s x_s &= -(M_t + m_A) \ddot{x}_g \\ m_A \ddot{x}_A + m_A \ddot{x}_s + k_A x_A + k_B(x_A - x_B) &= -m_A \ddot{x}_g \end{aligned}$$

$$b(\ddot{x}_B - \ddot{x}_C) + k_B(x_B - x_A) = 0$$

$$b(\ddot{x}_C - \ddot{x}_B) + C_B(\dot{x}_C + \dot{x}_s) = 0$$

las variables adimensionales utilizadas en este sistema son las mismas que se muestran en el conjunto de ecuaciones 6.20 y su función de transferencia es:

$$H_c = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{iN_{c4}\Omega^4 + N_{c3}\Omega^3 + iN_{c2}\Omega^2 + N_{c1}\Omega + iN_{c0}}{iD_{c6}\Omega^6 + D_{c5}\Omega^5 + iD_{c4}\Omega^4 + D_{c3}\Omega^3 + iD_{c2}\Omega^2 + D_{c1}\Omega + iD_{c0}} \quad (6.62)$$

donde

$$N_{c4} = 2\zeta_B, \quad N_{c3} = \eta, \quad N_{c2} = -2[(\alpha + 1)\eta^2 + \nu^2(1 + \beta)]\zeta_B, \quad N_{c1} = -\nu^2\eta(1 + \beta),$$

$$N_{c0} = 2(1 + \beta)\eta^2\nu^2\zeta_B, \quad D_{c6} = 2\zeta_B, \quad D_{c5} = \eta,$$

$$D_{c4} = [(-2\alpha - 2)\eta^2 - 2 + (-2\beta - 2)\nu^2]\zeta_B, \quad D_{c3} = -\eta[1 + \nu^2(1 + \beta)],$$

$$D_{c2} = \{[(2 + (2\alpha + 2)\beta)\nu^2 + 2\alpha + 2]\eta^2 + 2\nu^2\}\zeta_B, \quad D_{c1} = \nu^2\eta,$$

$$\text{y } D_{c0} = -2\eta^2\nu^2\zeta_B.$$

El subíndice c se utiliza para hacer referencia al sistema acoplado con la red mecánica de la Figura 6.10. La magnitud de la función 6.62 queda como sigue:

$$H_c = \sqrt{\frac{A_c^2 + B_c^2}{C_c^2 + D_c^2}} \quad (6.63)$$

donde

$$A_c = N_{c3}\Omega^3 + N_{c1}\Omega, \quad B_c = N_{c4}\Omega^4 + N_{c2}\Omega^2 + N_{c0},$$

$$C_c = D_{c5}\Omega^5 + D_{c3}\Omega^3 + D_{c1}\Omega \quad \text{y} \quad D_c = D_{c6}\Omega^6 + D_{c4}\Omega^4 + D_{c2}\Omega^2 + D_{c0}.$$

Las índices de rendimiento H_∞ y H_2 se aplican en las funciones de transferencia 6.62 y 6.63, obteniendo los resultados óptimos que se muestran en las Tablas 6.5 y 6.6 correspondientes a los índices H_∞ y H_2 respectivamente.

Variables óptimas obtenidas al utilizar en serie un amortiguador-inersor-resorte a partir de la norma H_∞						
Valor constante	Variables óptimas dependientes				Norma H_∞	
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\alpha = \frac{b}{m_A}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\eta = \frac{\omega_B}{\omega_s}$	$\zeta_B = \frac{C_B}{2b\omega_B}$	r_{min}	h_{min} en los puntos resonantes
0.01	0.024563	0.998067	0.993414	2.249971	0.995907	11.064962
0.02	0.050005	0.996236	0.986907	1.572785	0.991912	7.878919
0.03	0.076377	0.994509	0.980478	1.269177	0.988011	6.477500
0.04	0.103739	0.992890	0.974127	1.086012	0.984200	5.647798
0.05	0.132156	0.991383	0.967855	0.959480	0.980475	5.085338
0.06	0.161702	0.989993	0.961663	0.864903	0.976832	4.672823
0.07	0.192457	0.988726	0.955553	0.790443	0.973270	4.354219
0.08	0.224511	0.987588	0.949527	0.729615	0.969784	4.098949
0.09	0.257966	0.986587	0.943587	0.678524	0.966370	3.888729
0.1	0.292938	0.985733	0.937737	0.634670	0.963026	3.711873

Tabla 6.5: Variables α , ν , η , ζ_B óptimas y amplitud de vibración mínima $h_{min} = H_{c_{min}}$ utilizando la conexión en serie amortiguador-inersor-resorte y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$.

Variables óptimas obtenidas al utilizar en serie un amortiguador-inersor-resorte a partir de la norma H_2					
Valor constante	Variables óptimas dependientes				Norma H_2
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\alpha = \frac{b}{m_A}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\eta = \frac{\omega_B}{\omega_s}$	$\zeta_B = \frac{C_B}{2b\omega_B}$	Varianza mínima de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$
0.01	0.020321	0.998802	0.993817	2.849555	8.759372
0.02	0.041322	0.997717	0.987777	1.987835	6.263733
0.03	0.063071	0.996758	0.981894	1.600152	5.171239
0.04	0.085646	0.995943	0.976190	1.365125	4.527562
0.05	0.109151	0.995295	0.970692	1.201655	4.093363
0.06	0.133718	0.994845	0.965440	1.078287	3.776513
0.07	0.159528	0.994638	0.960494	0.979821	3.533034
0.08	0.186844	0.994743	0.955950	0.897755	3.338939
0.09	0.216077	0.995272	0.951968	0.826698	3.179884
0.1	0.247968	0.996434	0.948867	0.762599	3.046686

Tabla 6.6: Variables α , ν , η , ζ_B óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando la conexión en serie amortiguador-inersor-resorte y considerando valores constantes de β en el intervalo $0 < \beta \leq 0.1$.

Las FRFs correspondientes a la Tabla 6.5 se muestran en las curvas de la Figura 6.11 utilizando los valores fijos de $\beta = 0.01, \dots, 0.05$.

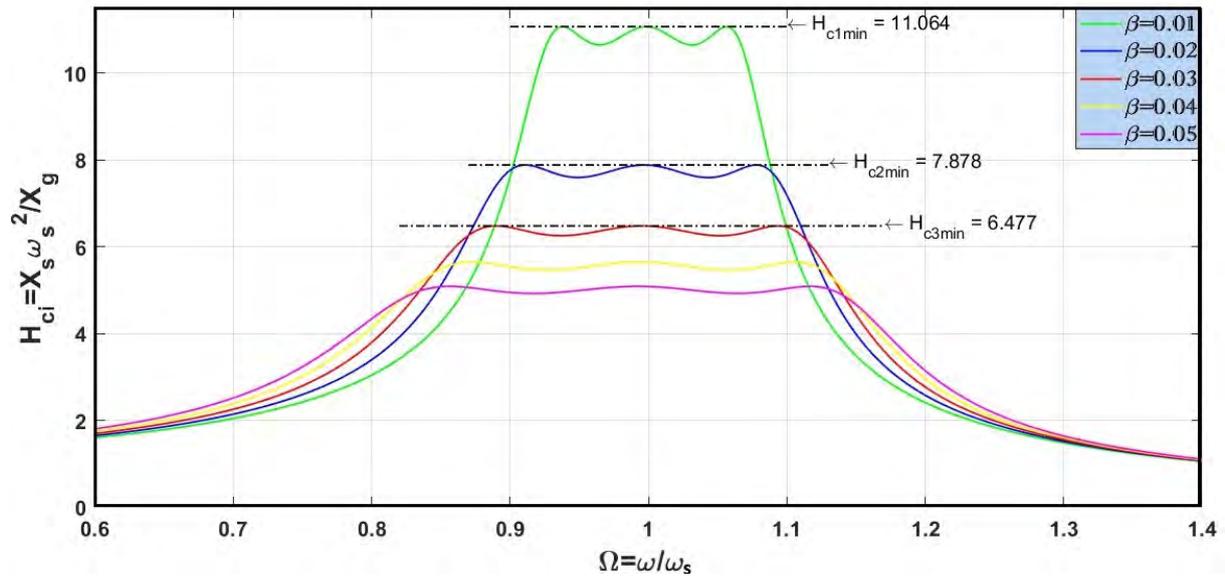


Figura 6.11: Curvas de respuesta en frecuencia H_{c_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte utilizando la norma H_∞ .

Asimismo, las curvas de respuesta en frecuencia correspondientes a la Tabla 6.6 son las que se muestran en la Figura 6.12. El subíndice i en las Figuras 6.11 y 6.12 hace la misma función que en el caso de la Figura 6.5.

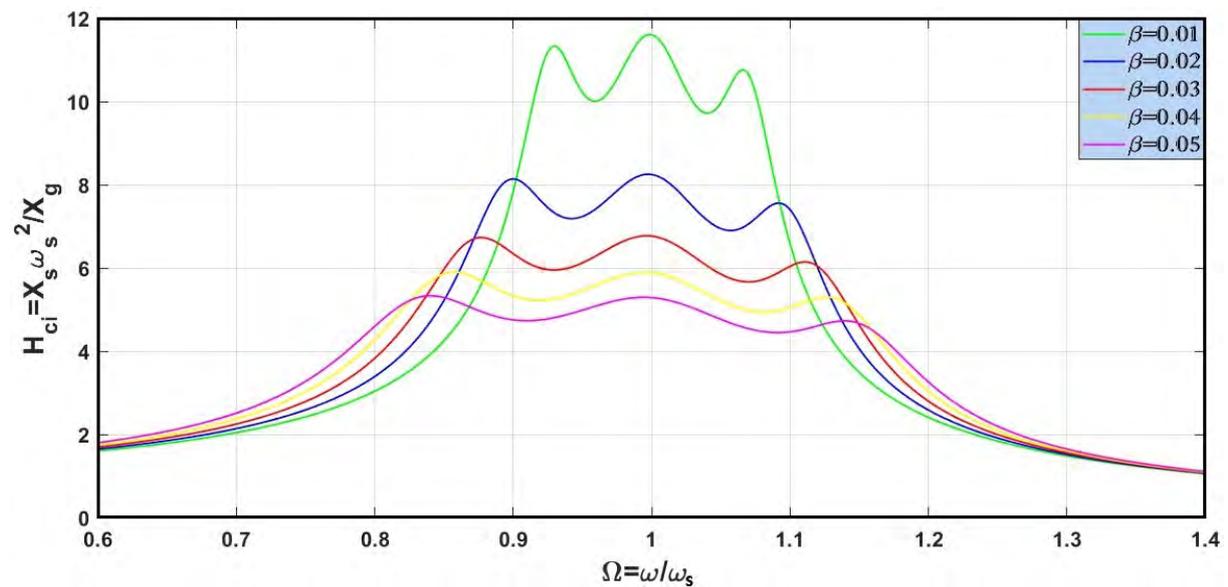


Figura 6.12: Curvas de respuesta en frecuencia H_{c_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al acoplar la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte utilizando la norma H_2 .

3. Absorbedor de vibración dinámico clásico.

El absorbedor de vibración dinámico clásico consta de la adición de un amortiguador de fluido viscoso en el absorbedor tipo Frahm. El DVA clásico ha sido estudiado extensamente en la literatura y es de los dispositivos de control de vibración pasivo más simples de optimizar. En este trabajo se conecta al edificio SDOF de base aislada como se muestra en la Figura 6.13.

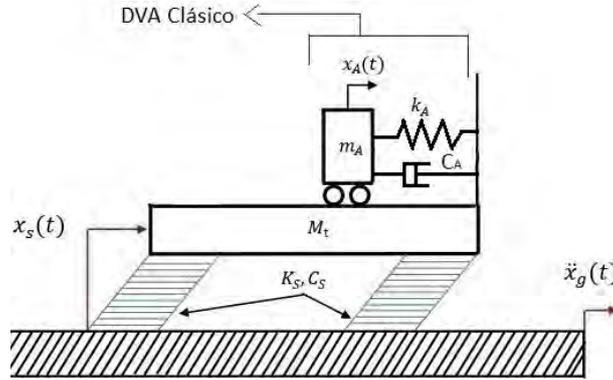


Figura 6.13: Absorbedor dinámico de vibración clásico utilizado para controlar los niveles de vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.

El modelo matemático de este sistema de dos grados de libertad está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (M_t + m_A) \ddot{x}_s + m_A \ddot{x}_A + C_s \dot{x}_s + k_s x_s &= -(M_t + m_A) \ddot{x}_g \\ m_A \ddot{x}_A + m_A \ddot{x}_s + C_A \dot{x}_A + k_A x_A &= -m_A \ddot{x}_g \end{aligned}$$

las variables adimensionales utilizadas en este sistema son: $\beta = \frac{m_A}{M_t}$, $\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$, $\zeta_A = \frac{C_A}{2m_A\omega_A}$ y $\zeta_s = \frac{C_s}{2M_t\omega_s}$. Por otro lado, la FRF de este sistema es:

$$H_d = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{N_{d2} \Omega^2 + i N_{d1} \Omega + N_{d0}}{D_{d4} \Omega^4 + i D_{d3} \Omega^3 + D_{d2} \Omega^2 + i D_{d1} \Omega + D_{d0}} \quad (6.64)$$

donde

$$N_{d2} = -1, \quad N_{d1} = 2\beta \nu \zeta_A + 2\nu \zeta_A, \quad N_{d0} = \nu^2 \beta + \nu^2, \quad D_{d4} = -1,$$

$$D_{d3} = 2\beta \nu \zeta_A + 2\nu \zeta_A, \quad D_{d2} = \beta \nu^2 + \nu^2 + 1, \quad D_{d1} = -2\nu \zeta_A, \quad \text{y} \quad D_{d0} = -\nu^2.$$

Las variables adimensionales óptimas se obtienen al aplicar el índice de rendimiento H_2 en la función 6.64 y se muestran en la Tabla 6.7. Estas variables se obtuvieron a partir de las soluciones analíticas óptimas calculadas y definidas en las ecuaciones 6.65 y 6.66.

$$\nu(\beta) = \frac{\sqrt{4 - 2\beta}}{2(\beta + 1)} \quad (6.65)$$

$$\zeta_A(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{\beta(\beta - 4)}{(\beta + 1)(\beta - 2)}} \quad (6.66)$$

Variables óptimas obtenidas al utilizar el DVA clásico a partir de la norma H_2			
Valor constante	Variables óptimas dependientes		Norma H_2
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\zeta_A = \frac{C_A}{2m_A\omega_A}$	Varianza mínima de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$
0.01	0.987620	0.049814	10.13767846
0.02	0.975477	0.070190	7.266023536
0.03	0.963564	0.085656	6.012574455
0.04	0.951874	0.098557	5.276398770
0.05	0.940400	0.109806	4.781536754
0.06	0.929137	0.119873	4.421822324
0.07	0.918078	0.129041	4.146607472
0.08	0.907218	0.137492	3.928291232
0.09	0.896551	0.145356	3.750393829
0.1	0.886072	0.152726	3.602395019

Tabla 6.7: Variables ν y ζ_A óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando el DVA clásico y considerando valores constantes de β en el intervalo $(0, 0.1]$.

Las FRFs correspondientes a la Tabla 6.7 para los valores de $\beta = 0.01, \dots, 0.05$ se muestran en la Figura 6.14, recordando que el subíndice i hace la misma función que en el caso de la Figura 6.5.

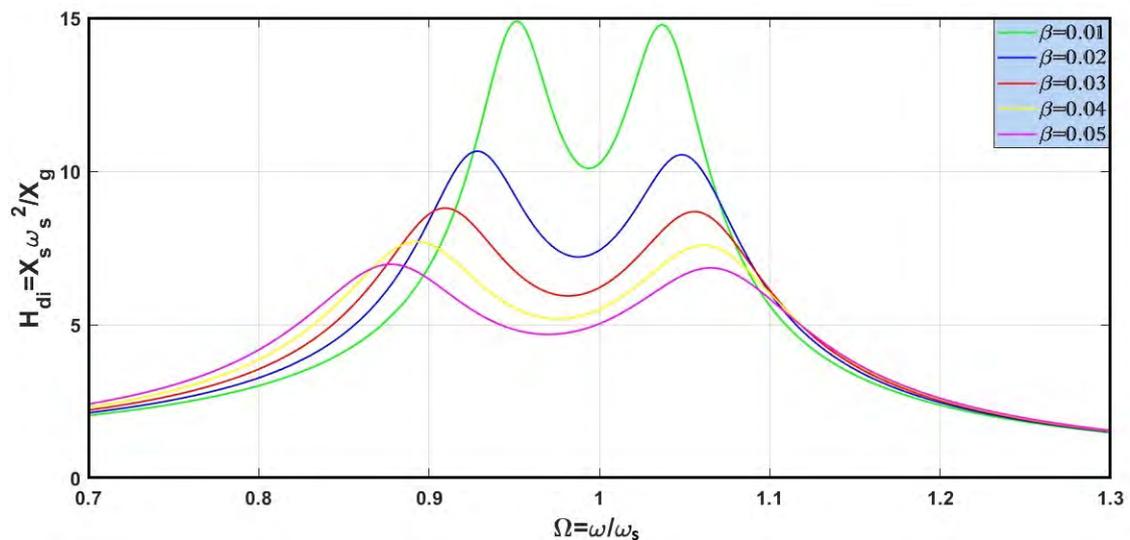


Figura 6.14: Curvas de respuesta en frecuencia H_{d_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al utilizar el DVA clásico y la norma H_2 .

4. Amortiguador de masa sintonizada con inersor (TMDI).

El TMDI ha sido estudiado por diversos investigadores, y su rendimiento dinámico ha sido notable en el control pasivo de vibraciones mecánicas de diversos sistemas mecánicos. Entre estos sistemas, se encuentran los edificios altos de sección transversal regular con o sin aislamiento en la base. El TMDI se origina al adicionar un inersor conectado entre la masa física del DVA clásico y la tierra mecánica. En este trabajo no se optimizan los parámetros de este dispositivo, debido a que este caso fue estudiado recientemente por Matteo et al. (2019). Es por eso que en la Figura 6.15 se muestra únicamente el TMDI acoplado en el edificio SDOF con base aislada, el modelado matemático y los resultados óptimos obtenidos al utilizar las soluciones analíticas óptimas calculadas por Matteo et al. (2019).

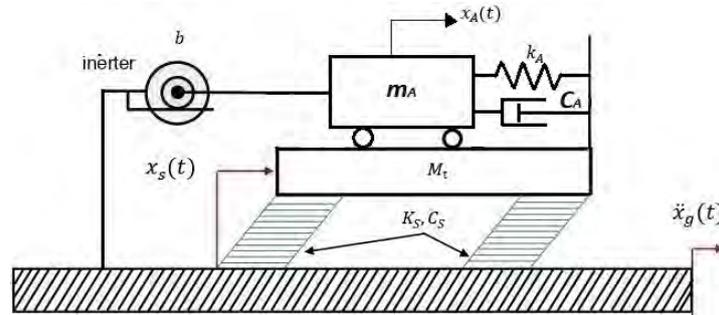


Figura 6.15: Amortiguador de masa sintonizada con inersor utilizado para controlar los niveles de vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base.

El modelo matemático de este sistema de dos grados de libertad está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (M_t + m_A + b)\ddot{x}_s + (m_A + b)\ddot{x}_A + C_s\dot{x}_s + k_s x_s &= -(M_t + m_A)\ddot{x}_g \\ (m_A + b)\ddot{x}_s + (m_A + b)\ddot{x}_A + C_A\dot{x}_A + k_A x_A &= -m_A\ddot{x}_g \end{aligned}$$

Las variables adimensionales utilizadas en este sistema son por definición, las mismas que se utilizan en (Matteo et al, 2019) pero denotadas con letras del alfabeto griego distintas. Estas variables se definen como sigue: $\beta = \frac{m_A}{M_t}$, $\alpha = \frac{b}{M_t}$, $\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$, $\zeta_A = \frac{C_A}{2(m_A + b)\omega_A}$ y $\zeta_s = \frac{C_s}{2M_t\omega_s}$. Por otro lado, la FRF de este sistema es:

$$H_e = \frac{X_s \omega_s^2}{\ddot{X}_g} = \frac{N_{e2}\Omega^2 + iN_{e1}\Omega + N_{e0}}{D_{e4}\Omega^4 + iD_{e3}\Omega^3 + D_{e2}\Omega^2 + iD_{e1}\Omega + D_{e0}} \quad (6.67)$$

donde

$$N_{e2} = 1, \quad N_{e1} = -2\nu\zeta_A(1 + \beta), \quad N_{e0} = -\nu^2(1 + \beta), \quad D_{e4} = 1,$$

$$D_{e3} = -2\zeta_A\nu(1 + \beta + \alpha), \quad D_{e2} = -1 + (-\beta - \alpha - 1)\nu^2, \quad D_{e1} = 2\nu\zeta_A, \quad y \quad D_{e0} = \nu^2.$$

Al igual que en el caso del DVA clásico únicamente se calculan las variables óptimas utilizando el índice de rendimiento H_2 . En la Tabla 6.8, se muestran las variables ν y ζ_A óptimas obtenidas a partir de las soluciones analíticas definidas en las ecuaciones 6.68 y 6.69 calculadas por Matteo et al. (2019).

$$\nu(\beta, \alpha) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{(1+\beta)(1+\beta+\alpha)^2}{2+\alpha+\beta(1-\alpha-\beta)}}} \quad (6.68)$$

$$\zeta_A(\beta, \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2 + \frac{1}{\beta+\alpha} + \frac{5+4\alpha+5\beta}{\alpha(\beta-3) + (\beta-4)(1+\beta)}}} \quad (6.69)$$

Variables óptimas obtenidas al utilizar el TMDI a partir de la norma H_2				
Valores constantes		Variables óptimas dependientes		Norma H_2
$\beta = \frac{m_A}{M_t}$	$\alpha = \frac{b}{M_t}$	$\nu = \frac{\omega_A}{\omega_s}$	$\zeta_A = \frac{C_A}{2(m_A + b)\omega_A}$	Varianza mínima de desplazamiento $\sigma_{x_s}^2$
0.01	0.000208	0.987467	0.050325	10.033604
0.02	0.000874	0.974849	0.071684	7.111516
0.03	0.002091	0.962093	0.088524	5.811906
0.04	0.004084	0.949062	0.103315	5.023570
0.05	0.007025	0.935672	0.116977	4.473569
0.07	0.015484	0.908132	0.141848	3.745501
0.08	0.020688	0.894242	0.153178	3.493141
0.1	0.032413	0.866696	0.173888	3.119079

Tabla 6.8: Variables ν y ζ_A óptimas y varianza de desplazamiento mínima $\sigma_{x_s}^2$ utilizando el TMDI y considerando valores de β en el intervalo $(0, 0.1]$ y de α en el intervalo $(0, 0.04]$.

En la Tabla 6.8, las variables adimensionales β y α fueron tratadas como constantes durante la formulación H_2 . Luego, al encontrar las soluciones analíticas $\nu(\beta, \alpha)$ y $\zeta_A(\beta, \alpha)$ funcionan como variables independientes. Por otro lado, el DVA tipo Frahm acoplado con TID es optimizado considerando a β como una constante en la formulación H_2 . Es por eso que para hacer una comparación válida con respecto al TMDI, los valores de $\alpha = \frac{b}{M_t}$ de la segunda columna de la Tabla 6.8 se seleccionaron de manera que fueran equivalentes a los valores óptimos de $\alpha = \frac{b}{m_A}$ en la segunda columna de la Tabla 6.2. Esto se consigue escribiendo la relación de inercia del DVA tipo Frahm acoplado con TID como:

$$\alpha_1 = \frac{b}{m_A}$$

y la relación de inercia del TMDI como

$$\alpha_2 = \frac{b}{M_t}$$

despejando b de ambas relaciones e igualando

$$\alpha_1 m_A = \alpha_2 M_t$$

resolviendo para α_2

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \frac{m_A}{M_t}$$

considerando que $\frac{m_A}{M_t}$ es igual a β tanto en el caso del DVA tipo Frahm acoplado con TID como en el del TMDI:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \beta \quad (6.70)$$

La ecuación 6.70 es útil para encontrar valores numéricos de inercia del TMDI proporcionales a los valores óptimos de inercia del DVA tipo Frahm acoplado con TID. Si bien, estos valores encontrados no son los óptimos para el TMDI, por lo menos proporcionan una comparación válida con respecto al dispositivo propuesto en este trabajo. Por ejemplo, la inercia del TMDI para $\beta = 0.04$ es; $\alpha_2 = (0.102111)(0.04) = 0.004084$.

Las FRFs correspondientes a la Tabla 6.8 para los valores de $\beta = 0.01, \dots, 0.05$ se muestran en la Figura 6.16, donde el subíndice i hace la misma función que en el caso de la Figura 6.5.

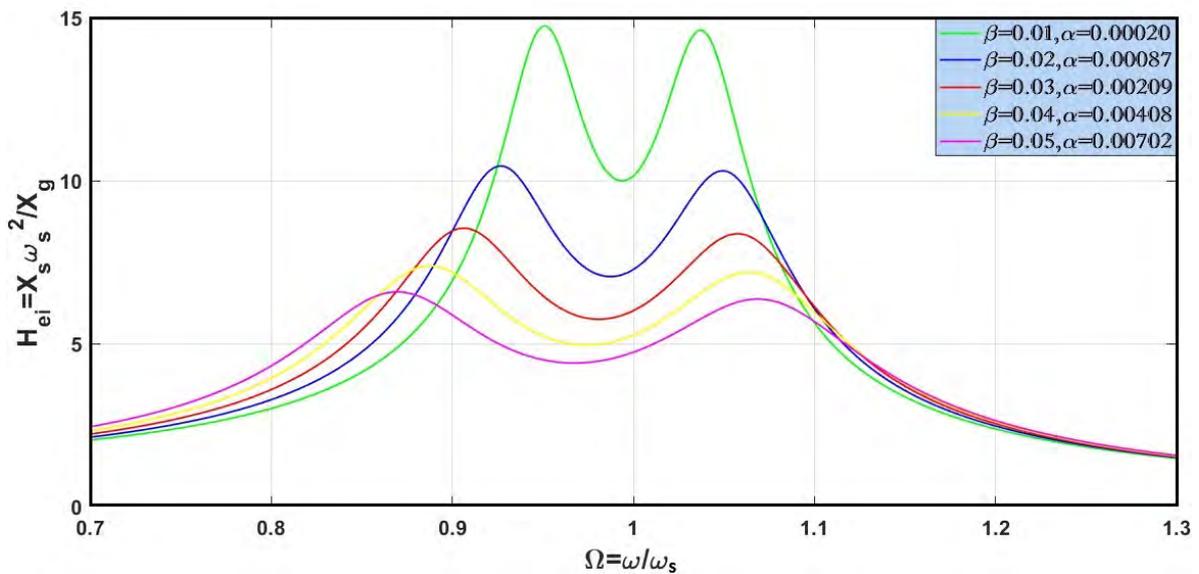


Figura 6.16: Curvas de respuesta en frecuencia H_{e_i} ($i = 1, \dots, 5$) del edificio SDOF al utilizar el TMDI y la norma H_2 .

6.4.2. Comparación de las curvas de respuesta en frecuencia óptimas de los diferentes dispositivos de absorción de vibración

Después de haber determinado las variables óptimas del DVA tipo Frahm acoplado con TID, y de otros dispositivos y redes mecánicas reportados en la literatura que minimizan tanto la amplitud de vibración en las frecuencias resonantes como la energía

total de vibración del edificio SDOF con aislamiento en la base. Es posible hacer comparaciones con las curvas de respuesta en frecuencia respectivas a los sistemas de las Figuras 6.3, 6.7, 6.10, 6.13 y 6.15. Las curvas óptimas con la menor amplitud de vibración posible en las frecuencias resonantes obtenidas al utilizar el DVA tipo Frahm acoplado con TID (dispositivo propuesto sin m_B), al acoplar el TVMD y la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte en el edificio SDOF con aislamiento en la base, se muestran en la Figura 6.17. Asimismo, en la Figura 6.18 se muestran estas mismas curvas con una ampliación centrada en la amplitud de los puntos resonantes.

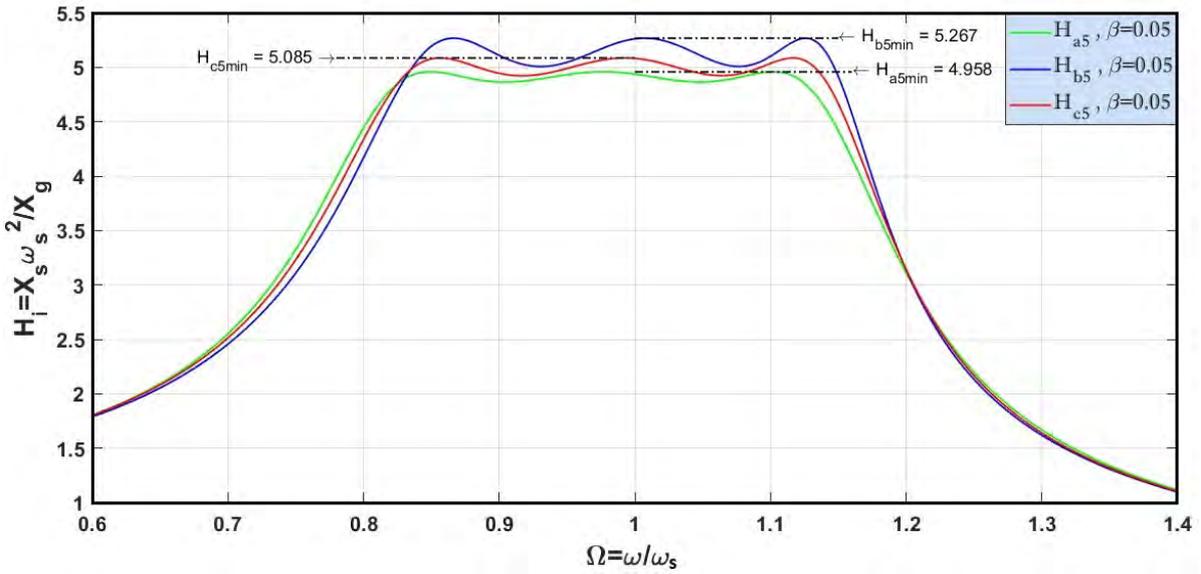


Figura 6.17: FRFs H_i ($i = a5, b5, c5$) del edificio SDOF utilizando la norma H_∞ . Curva verde: DVA tipo Frahm acoplado con TID. Curva azul: Utilizando el TVMD. Curva roja: Utilizando la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte.

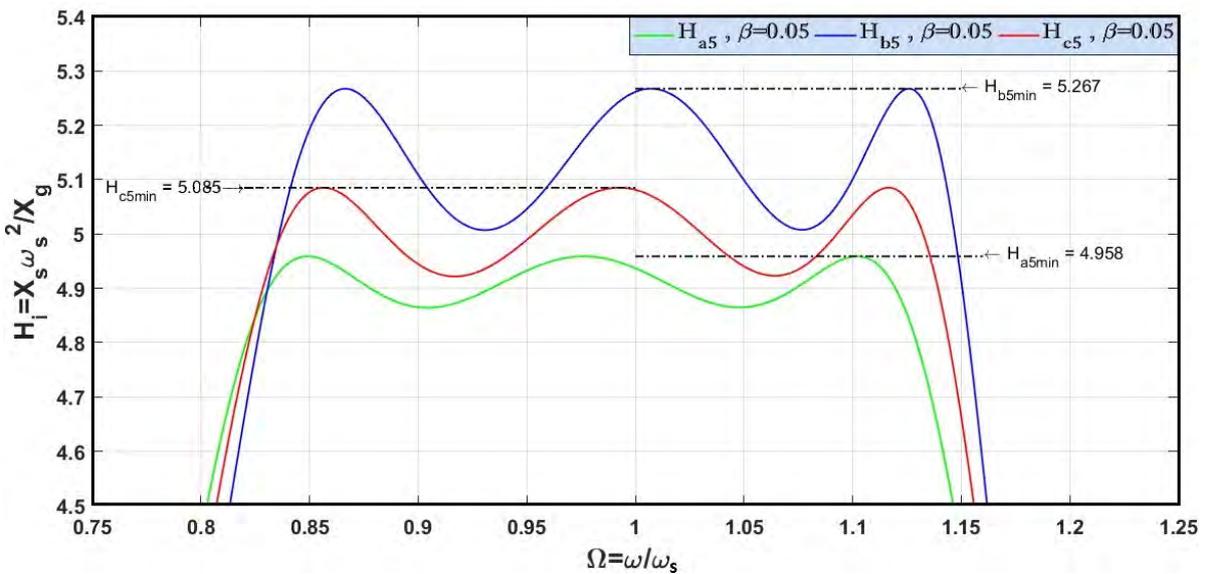


Figura 6.18: Acercamiento visual de las FRFs H_i ($i = a5, b5, c5$) del edificio SDOF utilizando la norma H_∞ .

Por otro lado, las curvas que se originan a partir de la optimización de los parámetros

de los dispositivos de las Figuras 6.3, 6.7, 6.10, 6.13 y 6.15 para minimizar la energía total de vibración de la estructura principal son las que se muestran en la Figura 6.19 para un valor específico $\beta = 0.05$. Además, si se generan las FRFs correspondientes a cada uno de los valores de β mostrados en las Tablas 6.2, 6.4, 6.6, 6.7 y 6.8 se podrá ver que en todos los casos, la curva más plana y que muestra menores amplitudes de vibración son las producidas por el DVA - TID propuesto en este trabajo (Figura 6.3).

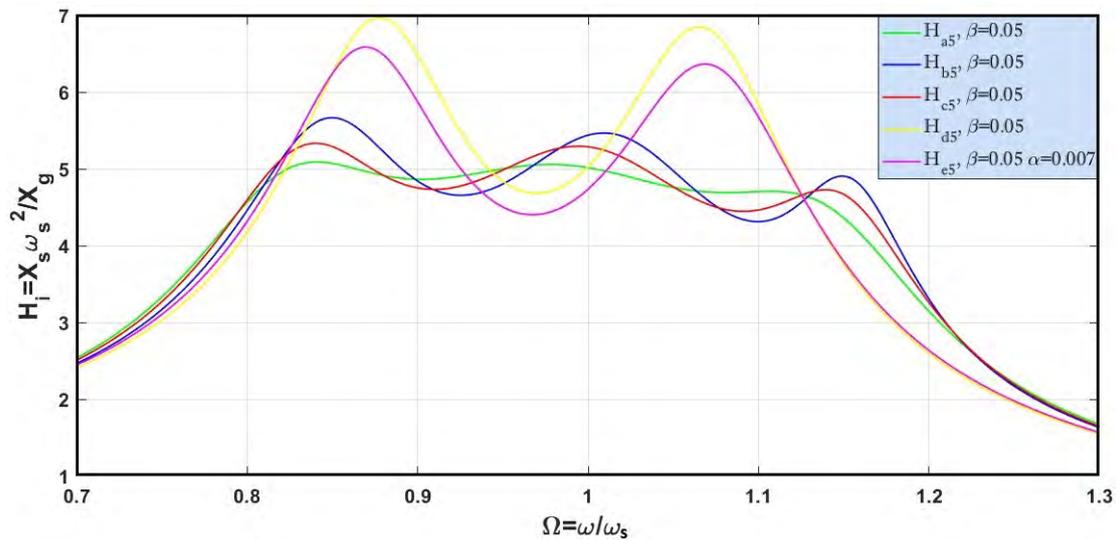


Figura 6.19: FRFs H_i ($i = a5, b5, c5, d5, e5$) del edificio SDOF utilizando la norma H_2 . Curva verde: DVA-TID. Curva azul: TVMD. Curva roja: Amortiguador-inersor-resorte. Curva amarilla: DVA clásico. Curva morada: TMDI.

Adicionalmente, en la Figura 6.20 se muestran las funciones de respuesta en frecuencia al utilizar los mismos dispositivos y la norma H_2 en el edificio SDOF, pero ahora para un valor de $\beta = 0.1$.

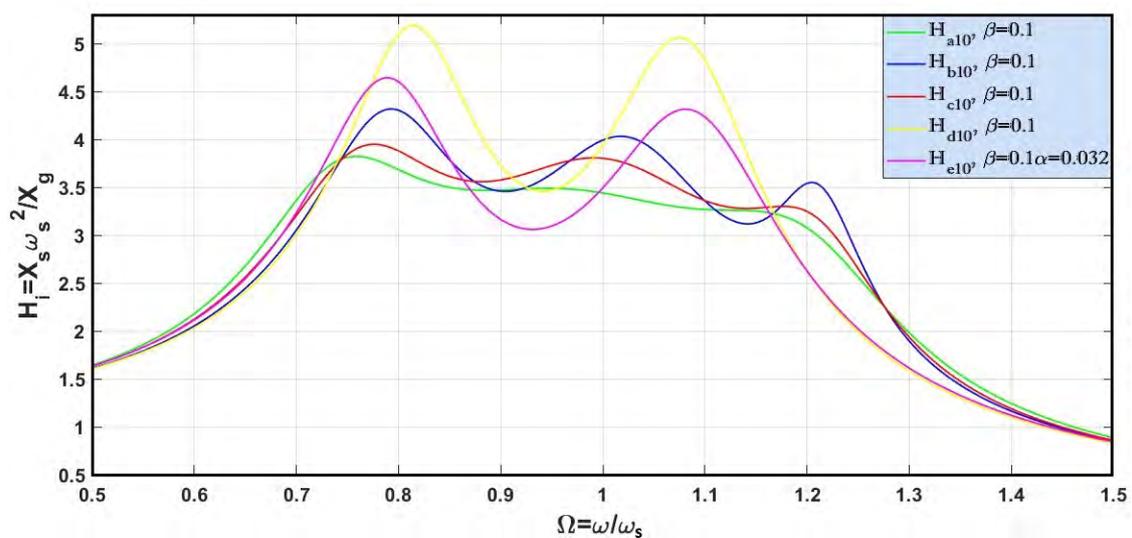


Figura 6.20: FRFs H_i ($i = a10, b10, c10, d10, e10$) del edificio SDOF utilizando la norma H_2 . Curva verde: DVA-TID. Curva azul: TVMD. Curva roja: Amortiguador-inersor-resorte. Curva amarilla: DVA clásico. Curva morada: TMDI.

En la Figura 6.20, se puede ver que el ancho de banda de frecuencias del DVA tipo Frahm acoplado con TID y de los DVAs conectados con el TVMD y la red mecánica amortiguador-inersor-resorte son aproximadamente iguales. No obstante, la curva más plana se genera al utilizar el dispositivo propuesto en este trabajo. Por otro lado, el comportamiento dinámico del DVA clásico y del TMDI es semejante. Sin embargo, debido al efecto del inersor, el TMDI muestra ser más eficiente que el DVA clásico, sobre todo cuando se incrementan los niveles de inertancia. También es posible ver que el acoplamiento de la red mecánica en serie amortiguador-inersor-resorte en el edificio SDOF, genera un comportamiento bastante aproximado al del dispositivo propuesto. Podría decirse, que de acuerdo con los resultados gráficos de las Figuras 6.17, 6.19 y 6.20, muestra un buen rendimiento dinámico pero no superior al del dispositivo propuesto al emplear tanto la norma H_∞ como la norma H_2 .

Con base en estos resultados, se puede decir que el DVA tipo Frahm acoplado con TID puede disminuir eficientemente la amplitud de vibración de un edificio SDOF con aislamiento en la base sujeto a excitación estocástica o armónica. Por lo tanto, su rendimiento dinámico evaluado en el dominio de la frecuencia es superior al del TMDI, dispositivo que ha sido implementado frecuentemente en el control pasivo de vibraciones en este tipo de estructuras mecánicas (De Domenico & Ricciardi, 2018).

Por otro lado, la diferencia de la varianza de desplazamiento mínima de la estructura al utilizar el DVA-TID propuesto, con respecto a la varianza de desplazamiento mínima de la estructura al acoplar los otros cuatro dispositivos tomados de la literatura, son del 3.766 %, 1.748 %, 18.854 % y del 11.198 % frente al acoplamiento de la red mecánica TVMD, de la red mecánica amortiguador-inersor-resorte, el uso del DVA clásico y del TMDI respectivamente. No debe perderse de vista que estos resultados fueron obtenidos al aplicar el índice de rendimiento H_2 utilizando una densidad espectral de potencia de ruido blanco Gaussiano S_0 .

Capítulo 7

Análisis estocástico y respuesta en el dominio del tiempo

En este apartado, se hace un análisis del comportamiento de las señales sísmicas y luego se generan artificialmente mediante Matlab. Estas señales se generan partiendo de que su comportamiento es estocástico y como tal, se considera que cualquier fenómeno de este tipo posee una función de densidad de probabilidad y sus respectivos valores de media y varianza como se muestra en (Clough & Penzien, 2003). Asimismo, la señal sísmica generada en este trabajo, es utilizada para conocer su influencia al excitar al edificio SDOF acelerándolo desde la base aislada. Para lograrlo, se define matemáticamente el comportamiento estocástico de estas señales. Luego, se obtiene la respuesta del edificio SDOF de base aislada sujeto a aceleración sísmica generando simulaciones numéricas en el dominio del tiempo, primero desconectándolo del DVA tipo Frahm acoplado con TID y de cualquier dispositivo de absorción de vibración. Después, conectándolo al DVA tipo Frahm acoplado con TID y a cada uno de los dispositivos estudiados en el dominio de la frecuencia en la Sección 6.4.1. Para realizar estas simulaciones se utilizan las variables óptimas obtenidas a partir de los índices de rendimiento H_∞ y H_2 , sin perder de vista que al utilizar una excitación sísmica las variables más adecuadas para utilizar en estas simulaciones, de acuerdo con la literatura, son las que se obtuvieron a partir de la norma H_2 (Hu & Chen, 2015), (Cheung & Wong, 2011), (Asami et al., 2002) y otros.

7.1. Características de la señal sísmica estocástica

Los procesos estocásticos tienen un comportamiento no definido, es por eso que son definidos como procesos no deterministas. En esta Sección, se muestra el proceso estocástico definido por una señal sísmica, que a lo largo del trabajo se ha denotado como $\ddot{x}_g(t)$ en el dominio del tiempo y como \ddot{X}_g en el dominio de la frecuencia. Esta señal sísmica también se puede ver como la aceleración horizontal del suelo no definida que varía en función

del tiempo, y como tal, posee una función de densidad de probabilidad, un valor medio, una media cuadrática, una varianza y una desviación estándar. Estas cuatro medidas de tendencia central y de dispersión se definen en las ecuaciones 7.2 - 7.5, fueron tomadas de (Clough & Penzien, 2003) y son válidas para un proceso estocástico p , en función de la única variable aleatoria x .

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(u)du \quad (7.1)$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \quad (7.2)$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2P(x)dx \quad (7.3)$$

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2P(x)dx \quad (7.4)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2P(x)dx} \quad (7.5)$$

Las ecuaciones 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5 representan la función de densidad de probabilidad, el valor medio, la media cuadrática, la varianza y la desviación estándar respectivamente. En la función 7.1, se utiliza la variable u para no duplicar la variable x en el integrando y en el límite superior. Sin embargo, de manera general la expresión $p(u)$ representa un proceso o función estocástica arbitraria denotada como $p(x)$. Estas medidas estadísticas de procesos estocásticos de una variable aleatoria son las mismas propiedades que posee la señal sísmica $\ddot{x}_g(t)$.

Todas las señales que representan fenómenos físicos poseen una densidad espectral de potencia, conocida como PSD por sus siglas en el inglés, que suele caracterizar su comportamiento en cuanto a amplitud y período. En el caso de una señal sísmica, este espectro de potencia depende de las propiedades de frecuencia y amortiguamiento del suelo en el que ocurre el evento sísmico y varía con respecto a las componentes frecuenciales de la misma señal. Es por eso que antes de mostrar la señal $\ddot{x}_g(t)$, se muestra y caracteriza la función PSD que contiene la señal utilizada en este trabajo. Las PSDs utilizadas en este tipo de trabajos se obtienen del promedio sobre una serie de terremotos normalizados y suavizados (Buchholdt & Nejad, 2012). Por otro lado, Kanai (1957) y Tajimi (1960), propusieron la siguiente formulación para espectros de potencia suavizados en función de la aceleración máxima esperada, así como del amortiguamiento y frecuencia natural del suelo (Buchholdt & Nejad, 2012). Esta formulación es:

$$S_f(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} S_0 \quad (7.6)$$

donde

$$S_0 = \frac{0.141 \zeta_g \ddot{x}_{gmax}^2}{\omega_g \sqrt{1 + 4\zeta_g^2}} \quad (7.7)$$

en la ecuación 7.6 ζ_g y ω_g representan la relación de amortiguamiento y frecuencia natural del suelo respectivamente, mientras que en la ecuación 7.7 \ddot{x}_{gmax} es la aceleración máxima del suelo. Sin embargo, para valores muy bajos de ω en la ecuación 7.6, se producen valores demasiado altos del espectro $S_f(\omega)$, y en consecuencia en la aceleración del suelo \ddot{x}_g , esto puede demostrarse analíticamente calculando el límite $\lim_{\omega \rightarrow 0} S_f(\omega)$ en la ecuación 7.6. Es por eso que Clough y Penzien (1975) propusieron la siguiente modificación en la función 7.6 (Buchholdt & Nejad, 2012):

$$S_f(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \cdot S_0 \quad (7.8)$$

En la función 7.8 los términos ω_f y ζ_f representan la frecuencia natural y la relación de amortiguamiento del proceso de filtrado de paso alto respectivamente. Los valores de estos parámetros se asignan dependiendo del tipo de espectro que desee generarse. En la Tabla 7.1 se muestran los valores normalmente asignados a estos parámetros. La ecuación 7.8, es conocida como una función de densidad espectral de potencia de ruido no blanco y ha sido utilizada por diversos investigadores con la finalidad de analizar la respuesta en el dominio de tiempo de diferentes estructuras sujetas a excitaciones de ruido no blanco (Zuo, Bi, Hao & Ma, 2021), (Liang, Li & Zhang, 2021), (Matteo et al., 2019) entre otros.

Parámetros de tres condiciones típicas de suelo				
Tipo de suelo	ω_g (rad/s)	ζ_g	ω_f (rad/s)	ζ_f
Firme	15.0	0.6	1.5	0.6
Medio	10.0	0.4	1.0	0.6
Suave	5.0	0.2	0.5	0.6

Tabla 7.1: Parámetros de frecuencia y relación de amortiguamiento del suelo (Zuo et al., 2021) y (Liang et al., 2021).

La información mostrada en la Tabla 7.1 ha sido utilizada por varios investigadores. Asimismo, Liang et al. (2021), reporta la misma información de la Tabla 7.1 y muestra el valor de \ddot{x}_{gmax} cuya magnitud es igual a $0.2g$ donde g es la aceleración de la gravedad. A continuación se muestran las gráficas de las funciones PSDs utilizando las características de los tres tipos de suelo y el valor de $0.2g$ (ver Figura 7.1).

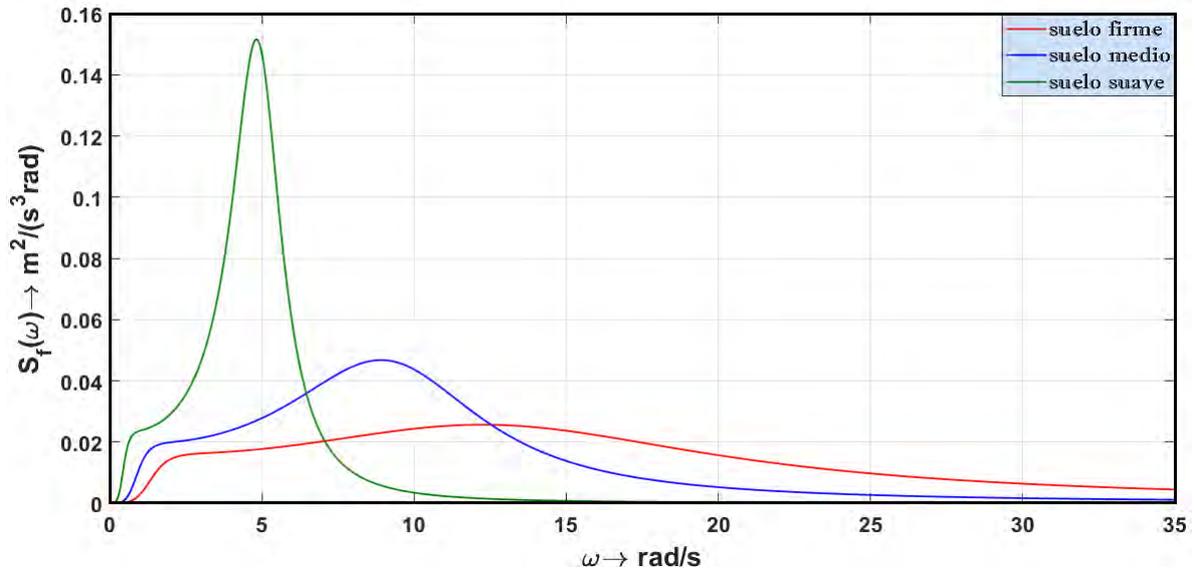


Figura 7.1: Funciones de densidad espectral de potencia de ruido no blanco de diferentes tipos de suelo.

Después de haber definido el espectro de frecuencias sísmico de ruido no blanco, se define la señal sísmica en el dominio del tiempo. Por otro lado, debido a que la amplitud media, varianza y frecuencias de un evento sísmico varían con el tiempo, los sismos y terremotos son considerados procesos estocásticos no estacionarios. Sin embargo, si el proceso sísmico se discretiza en N segmentos suficientemente pequeños, puede considerarse aproximadamente estacionario (Buchholdt & Nejad, 2012). Cada segmento puede ser representado como una señal cosenoidal con amplitud, frecuencia y ángulo de fase no definido. Matemáticamente una señal estocástica puede representarse como la suma de sus diferentes componentes armónicos correspondientes a cada componente frecuencial de la señal como se muestra en la ecuación 7.9.

$$\ddot{x}_g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (7.9)$$

la ecuación 7.9 se define en (Shinozuka & Deodatis, 1991) y en (Buchholdt & Nejad, 2012), y representa una señal estocástica que puede ser utilizada para simular un evento sísmico si se considera que su amplitud A_n y frecuencias ω_n están relacionadas con la función PSD mostrada en la ecuación 7.8. De acuerdo con Shinozuka & Deodatis (1991), la ecuación 7.8 y 7.9 se relacionan considerando que:

$$A_n = \sqrt{2} \sqrt{2S_f(\omega_n) \Delta \omega}$$

entonces

$$\ddot{x}_g(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{2S_f(\omega_n) \Delta \omega} \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (7.10)$$

donde: $\omega_n = n \Delta \omega$, $\Delta \omega = \frac{\omega_c}{N}$, ω_c es la frecuencia de corte de magnitud superior a las del espectro dado en 7.8, utilizada para que $S_f(\omega) \approx 0$, normalmente se le asigna el valor de $\omega_c = 100\pi \frac{rad}{s}$. N es el número de componentes de frecuencia de la señal que se consideran dentro de la simulación. La simulación más real se obtiene Cuando N es suficientemente grande ($N \rightarrow \infty$). En este caso, se utiliza un valor de $N = 10000$. Finalmente, el ángulo de fase aleatorio ϕ_n cuya función de densidad de probabilidad es $P(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ toma valores aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Adicionalmente, deben considerarse las siguientes características de la señal 7.10, que se muestran en las ecuaciones 7.11, 7.12 y 7.13:

$$A_0 = 0 \longrightarrow S_f(\omega_0) = 0 \quad (7.11)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Delta \omega} \quad (7.12)$$

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{2\omega_c} \quad (7.13)$$

la ecuación 7.11 muestra que la amplitud A_0 debe ser forzosamente igual a cero, mientras que las ecuaciones 7.12 y 7.13 sirven para obtener el periodo T y el incremento de tiempo de la simulación de la señal (Shinozuka & Deodatis, 1991). Considerando esta información se encuentra que $\Delta \omega = \frac{\omega_c}{N} = \frac{\pi}{100}$, mientras que:

$$\omega_n = \frac{n}{N} \omega_c = \frac{n}{10000} (100\pi) rad/s = \frac{\pi}{100} n \quad (7.14)$$

Reemplazando 7.14 por ω en la ecuación 7.8 se obtiene la densidad espectral de potencia discretizada $S_f = S_f(\omega_n)$ para $n = 0, 1, 2, \dots, 9999$, que al tener un comportamiento discreto puede ser denotada como $S_{fn}(\omega_n)$. Al hacer esta sustitución, puede verse que la condición dada en 7.11 se cumple al calcular $S_{f0}(\omega_0)$. Por otro lado, utilizando la ecuación 7.12 se encuentra que el periodo fundamental de esta señal es $T = 200s$, mientras que $\Delta t = 0.01$ al utilizar la ecuación 7.13. Finalmente, sustituyendo el valor de N y $\Delta \omega$ en 7.10, y la expresión 7.14 en la ecuación 7.8, se obtiene la ecuación 7.15.

$$\ddot{x}_g(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{9999} \sqrt{\frac{\pi}{50} S_{fn}(\omega_n)} \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (7.15)$$

La ecuación 7.15 es utilizada como excitación de aceleración en este trabajo, y representa un proceso sísmico estocástico de ruido no blanco aproximadamente estacionario

con media aproximadamente igual a cero. El acelerograma correspondiente a la ecuación 7.15 considerando las características de amortiguamiento y frecuencia natural del suelo medio, se muestra en la Figura 7.2.

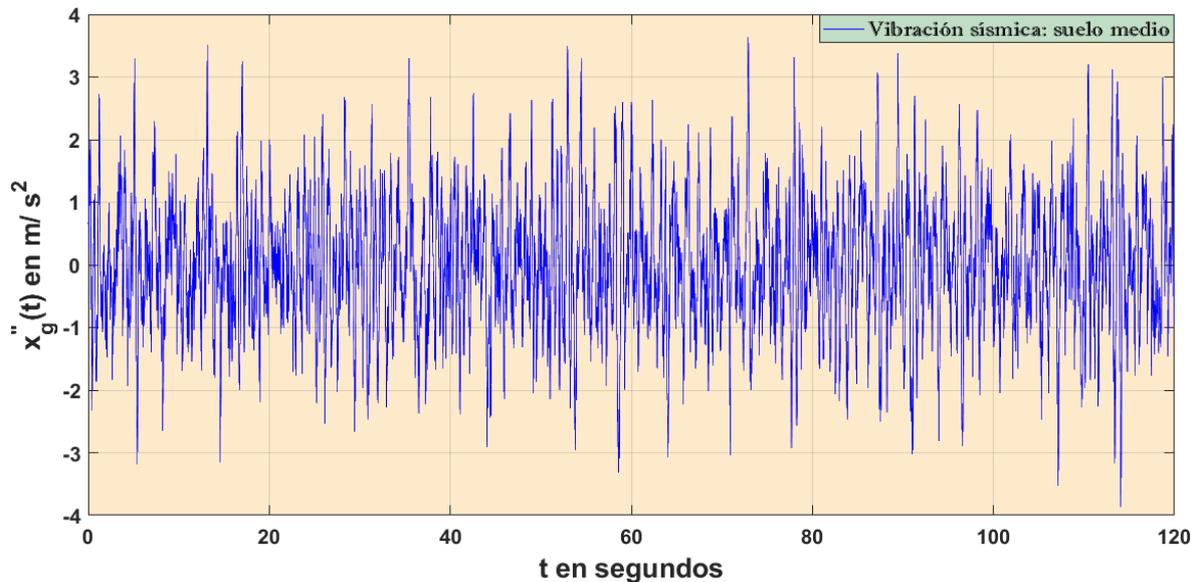


Figura 7.2: Vibración estocástica con densidad espectral de potencia sísmica y media aproximadamente igual a cero.

7.1.1 Vibración estocástica de ruido blanco Gaussiano

Un caso particular de la señal sísmica estocástica de ruido no blanco como la que se muestra en la ecuación 7.10, se obtiene al considerar que la densidad espectral de potencia de la ecuación 7.8 es constante, esto se logra suponiendo que los primeros dos factores de esta expresión referidos a las características del suelo y al proceso de filtrado son aproximadamente iguales a la unidad, de esta manera se obtiene $S_f(\omega) = S_0$. En otras palabras, se asume que la densidad espectral de potencia de la señal sísmica estocástica definida en 7.10 es constante en toda la gama de frecuencias de excitación. A este proceso se le conoce como vibración estocástica estacionaria de ruido blanco Gaussiano con media cero. De hecho, esta consideración se llevó a cabo durante el proceso de optimización al aplicar la norma H_2 en el sistema de la Figura 6.3. Es por eso que los resultados más exactos en el dominio del tiempo se obtienen al considerar la excitación estocástica de ruido blanco Gaussiano que se muestra en la ecuación 7.16;

$$\ddot{x}_g(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{9999} \sqrt{\frac{\pi}{50}} S_0 \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (7.16)$$

donde S_0 se define en la ecuación 7.7 y ω_n en la ecuación 7.14. La ecuación 7.16, se obtuvo considerando la misma frecuencia de corte ω_c y la misma cantidad N de funciones muestra que en el caso de la ecuación 7.15. Por otro lado, debido a que la función PSD

definida en 7.8 proporciona variaciones pequeñas en el dominio de la frecuencia principalmente en el caso del suelo medio y firme, es válido utilizar la señal estocástica definida en la ecuación 7.16 como la excitación del edificio SDOF. Más adelante, se muestran y comparan las respuestas en el dominio del tiempo del edificio SDOF sujeto tanto a excitación sísmica estocástica de ruido no blanco, como a excitación estocástica de ruido blanco Gaussiano. En la Figura 7.3, se muestra el acelerograma correspondiente a la ecuación 7.16.

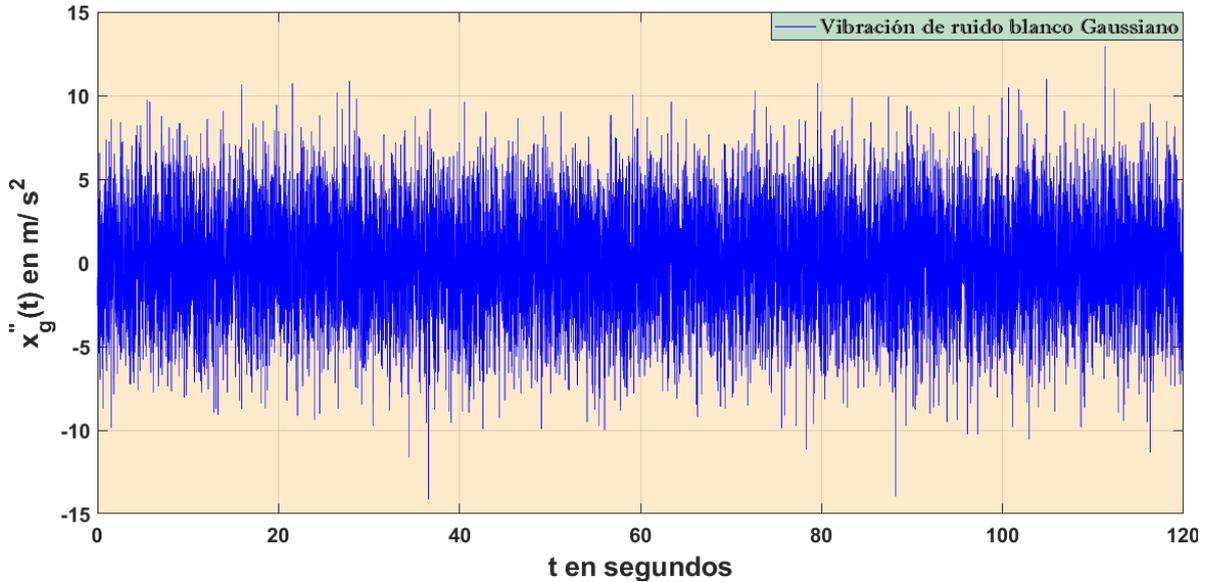


Figura 7.3: Vibración estocástica de ruido blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia constante y media igual a cero.

A diferencia de la ecuación 7.16, si se utiliza la ecuación 7.15 como la aceleración sísmica de excitación, puede obtenerse la respuesta en el tiempo del edificio SDOF considerando los tres tipos de suelo y las tres características del proceso de filtrado definidos en la Tabla 7.1. Por otro lado, el comportamiento de la aceleración en la gráfica de la Figura 7.3, se debe a que la función PSD es S_0 y por lo tanto sus amplitudes no varían conforme a las componentes de frecuencia de la señal. Mientras que en el caso de la Figura 7.2, las amplitudes de vibración varían conforme la función PSD (ecuación 7.8) cambia al tomar diferentes valores de frecuencias.

La función PSD 7.8 pudo haber sido considerada en la optimización H_2 . Sin embargo, esto implicaría minimizar la energía total de vibración de la estructura considerando la ecuación 6.45 de la Sección 6.3

$$E[x_s^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(\omega)|^2 S_f d\omega$$

reemplazando el espectro sísmico de la ecuación 7.8

$$E[x_s^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(\omega)|^2 \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_f^2 \omega_f^2 \omega^2} S_0 d\omega \quad (7.17)$$

se puede ver que la integral 7.17 podría ser resuelta computacionalmente mediante integración numérica, lo cuál es un proceso matemático complicado. Sin embargo, en las simulaciones realizadas en el dominio del tiempo, se verá que el uso de las variables óptimas de la norma H_2 considerando el espectro de ruido blanco Gaussiano S_0 es una formulación suficiente para reducir la varianza de desplazamiento de la estructura.

7.2. Respuesta en el dominio del tiempo del edificio SDOF aislado en la base sujeto a excitación sísmica

En esta sección se obtiene numéricamente la respuesta del edificio SDOF de base aislada en el dominio del tiempo, utilizando el DVA tipo Frahm acoplado con TID propuesto en este trabajo. Después, utilizando los dispositivos y redes mecánicas mostradas en la Sección 6.4.1. Para lograrlo, se utiliza el modelo dinámico definido en las ecuaciones 6.17 - 6.19 obtenido en la Sección 6.1.2 y la excitación sísmica estocástica definida en la ecuación 7.15. De esta manera se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de movimiento sujetas a excitación de ruido no blanco:

$$(M_t + m_A + b)\ddot{x}_s + m_A\ddot{x}_A + b\ddot{x}_B + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = -(M_t + m_A)\sqrt{2} \sum_{n=0}^{9999} \sqrt{\frac{\pi}{50} S_{fn}(\omega_n)} \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (7.18)$$

$$m_A(\ddot{x}_A + \ddot{x}_s) + C_B\dot{x}_A - C_B\dot{x}_B + (k_A + k_B)x_A - k_B x_B = -m_A\sqrt{2} \sum_{n=0}^{9999} \sqrt{\frac{\pi}{50} S_{fn}(\omega_n)} \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (7.19)$$

$$b(\ddot{x}_B + \ddot{x}_s) - C_B\dot{x}_A + C_B\dot{x}_B - k_B x_A + k_B x_B = 0 \quad (7.20)$$

donde $M_t = M_s + \sum_{i=1}^n M_i$, $\omega_n = \frac{\pi}{100}n$ y $S_{fn}(\omega_n)$ se define en la ecuación 7.8.

No debe perderse de vista que la excitación $\ddot{x}_g(t)$ también será considerada como vibración estocástica de ruido blanco Gaussiano utilizando la ecuación 7.16. Por otro lado y sin pérdida de generalidad, el sistema 7.18 - 7.20 puede escribirse despejando las aceleraciones \ddot{x}_s , \ddot{x}_A y \ddot{x}_B

$$\ddot{x}_s = -\frac{k_s}{M_t} x_s - \frac{C_s}{M_t} \dot{x}_s + \frac{k_A}{M_t} x_A - \ddot{x}_g(t)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_A &= \frac{k_s}{M_t}x_s + \frac{C_s}{M_t}\dot{x}_s - \left(\frac{k_A}{M_t} + \frac{k_A + k_B}{m_A}\right)x_A - \frac{C_B}{m_A}\dot{x}_A + \frac{k_B}{m_A}x_B + \frac{C_B}{m_A}\dot{x}_B \\ \ddot{x}_B &= \frac{k_s}{M_t}x_s + \frac{C_s}{M_t}\dot{x}_s + \left(\frac{k_B}{b} - \frac{k_A}{M_t}\right)x_A + \frac{C_B}{b}\dot{x}_A - \frac{k_B}{b}x_B - \frac{C_B}{b}\dot{x}_B + \ddot{x}_g(t)\end{aligned}$$

Para facilitar el uso de las variables óptimas obtenidas en las Secciones 6.2 y 6.3, estas ecuaciones se escriben en términos de las variables adimensionales del conjunto C_2 definido en 6.20, quedando como sigue:

$$a \begin{cases} \ddot{x}_s = -\omega_s^2 x_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + \beta \nu^2 \omega_s^2 x_A - \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{x}_A = \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s - (\nu^2 + \alpha \eta^2 + \beta \nu^2) \omega_s^2 x_A - 2\zeta_B \alpha \eta \omega_s \dot{x}_A \dots \\ + \alpha \eta^2 \omega_s^2 x_B + 2\zeta_B \alpha \eta \omega_s \dot{x}_B \\ \ddot{x}_B = \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + (\eta^2 - \beta \nu^2) \omega_s^2 x_A + 2\zeta_B \eta \omega_s \dot{x}_A - \eta^2 \omega_s^2 x_B \dots \\ - 2\zeta_B \eta \omega_s \dot{x}_B + \ddot{x}_g(t) \end{cases} \quad (7.21)$$

Además, es notable que las unidades físicas del miembro derecho de estas ecuaciones son consistentes considerando que en el miembro izquierdo se tienen unidades de aceleración. Por otro lado, si se eligen las variables de estado; $x_s = x_1$, $\dot{x}_s = x_2$, $x_A = x_3$, $\dot{x}_A = x_4$, $x_B = x_5$ y $\dot{x}_B = x_6$. Es posible representar el sistema de ecuaciones definido en a en un arreglo matricial como el siguiente:

$$\dot{\mathbf{X}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{X}_a + \mathbf{B}_a \quad (7.22)$$

cuya ecuación de transformación es

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{C}_a \mathbf{X}_a \quad (7.23)$$

donde

$$\mathbf{X}_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{x}_g(t),$$

$$\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_s^2 & -2\zeta_s \omega_s & \beta \nu^2 \omega_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_s^2 & 2\zeta_s \omega_s & -(\nu^2 + \alpha \eta^2 + \beta \nu^2) \omega_s^2 & -2\zeta_B \alpha \eta \omega_s & \alpha \eta^2 \omega_s^2 & 2\zeta_B \alpha \eta \omega_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_s^2 & 2\zeta_s \omega_s & (\eta^2 - \beta \nu^2) \omega_s^2 & 2\zeta_B \eta \omega_s & -\eta^2 \omega_s^2 & -2\zeta_B \eta \omega_s \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_a = \begin{pmatrix} x_s \\ x_A \\ x_B \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{C}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema definido en el conjunto a se utiliza para encontrar la respuesta de la estructura en el dominio del tiempo, utilizando la herramienta de Matlab-Simulink. Las ecuaciones 7.22 y 7.23 también pueden utilizarse para el mismo fin mediante un script en Matlab. Sin embargo, para fines prácticos la respuesta de la estructura se obtiene resolviendo las ecuaciones del conjunto a utilizando Matlab-Simulink. Adicionalmente, se obtiene la respuesta de la estructura utilizando los dispositivos analizados en la Subsección 6.4.1. Para lograrlo, se escriben las ecuaciones diferenciales de movimiento de los sistemas de las Figuras 6.7, 6.10, 6.13 y 6.15 en forma explícita para las aceleraciones de cada sistema y en términos de variables adimensionales. Estos sistemas de ecuaciones se definen como sigue:

- Ecuaciones diferenciales correspondientes a la Figura 6.7 utilizando el TVMD:

$$b \begin{cases} \ddot{x}_s = -\omega_s^2 x_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + \beta \nu^2 \omega_s^2 x_A - \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{x}_A = (1 - \alpha \eta^2) \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s - (\beta + 1) \nu^2 \omega_s^2 x_A - \alpha \eta^2 \omega_s^2 x_B \\ \ddot{x}_B = (1 - \alpha \eta^2 - \eta^2) \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s - (\beta + 1) \nu^2 \omega_s^2 x_A + 2\zeta_B \eta \omega_s \dot{x}_A \dots \\ -(\alpha + 1) \eta^2 \omega_s^2 x_B - 2\zeta_B \eta \omega_s \dot{x}_B \end{cases} \quad (7.24)$$

- Ecuaciones diferenciales correspondientes a la Figura 6.10 utilizando la red mecánica amortiguador-inersor-resorte:

$$c \begin{cases} \ddot{x}_s = -\omega_s^2 x_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + \beta \nu^2 \omega_s^2 x_A - \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{x}_A = \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s - (\nu^2 + \alpha \eta^2 + \beta \nu^2) \omega_s^2 x_A + \alpha \eta^2 \omega_s^2 x_B \\ \ddot{x}_B = \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + (\eta^2 - \beta \nu^2) \omega_s^2 x_A + \frac{\eta \omega_s}{2\zeta_B} \dot{x}_A - \eta^2 \omega_s^2 x_B \dots \\ - \frac{\eta \omega_s}{2\zeta_B} \dot{x}_B + \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{x}_C = \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s - \beta \nu^2 \omega_s^2 x_A + \frac{\eta \omega_s}{2\zeta_B} \dot{x}_A - \frac{\eta \omega_s}{2\zeta_B} \dot{x}_B + \ddot{x}_g(t) \end{cases} \quad (7.25)$$

- Ecuaciones diferenciales correspondientes a la Figura 6.13 utilizando el DVA clásico:

$$d \begin{cases} \ddot{x}_s = -\omega_s^2 x_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + \beta \nu^2 \omega_s^2 x_A + 2\beta \zeta_A \nu \omega_s \dot{x}_A - \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{x}_A = \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s - (\beta + 1) \nu^2 \omega_s^2 x_A - 2(1 + \beta) \zeta_A \nu \omega_s \dot{x}_A \end{cases} \quad (7.26)$$

- Ecuaciones diferenciales correspondientes a la Figura 6.15 utilizando el TMDI:

$$e \begin{cases} \ddot{x}_s = -\omega_s^2 x_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s + (\beta + \alpha) \nu^2 \omega_s^2 x_A + 2(\beta + \alpha) \zeta_A \nu \omega_s \dot{x}_A \\ - \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{x}_A = \omega_s^2 x_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_s - (\beta + \alpha + 1) \nu^2 \omega_s^2 x_A - 2(1 + \alpha + \beta) \zeta_A \nu \omega_s \dot{x}_A \\ + \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \ddot{x}_g(t) \end{cases} \quad (7.27)$$

El edificio SDOF aislado en la base se considera ligeramente amortiguado ($\zeta_s \rightarrow 0$) al acoplar un dispositivo de absorción de vibración, produciendo cambios no significativos al despreciar ζ_s en la FRF de la estructura y en la optimización de las variables adimensionales, debido a que el efecto de este parámetro se desvanece totalmente frente al efecto de ζ_B . Es por eso que se obtiene la respuesta del edificio SDOF en el dominio del tiempo conectándolo al DVA tipo Frahm acoplado con TID considerando $\zeta_s = 0$, y se compara con la respuesta del edificio SDOF en el dominio del tiempo desconectándolo de cualquier dispositivo de absorción de vibración, considerando un factor de amortiguamiento en la base aislada de magnitud pequeña ($\zeta_s = 0.01$).

En las simulaciones de las Figuras 7.4 - 7.8 se utilizó como excitación la señal sísmica 7.15, considerando las características de suelo medio definidas en la Tabla 7.1, se utilizaron las variables óptimas obtenidas a partir de la norma H_2 para una relación de masas de $\beta = 0.05$ y una frecuencia natural del edificio SDOF de $\omega_s = \frac{4}{3}\pi rad/s$. En el Apéndice A se describen las características de este edificio. En la Figura 7.4, se muestra el desplazamiento del edificio relativo al suelo (coordenada x_s) conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID y se compara con el desplazamiento del edificio relativo al suelo sin ningún dispositivo de absorción de vibración. Por otro lado, en las Figuras 7.5 - 7.8 se muestra el desplazamiento del edificio x_s relativo al suelo conectado al DVA-TID comparado con el efecto producido por los cuatro dispositivos presentados con anterioridad al conectarlos al edificio SDOF.

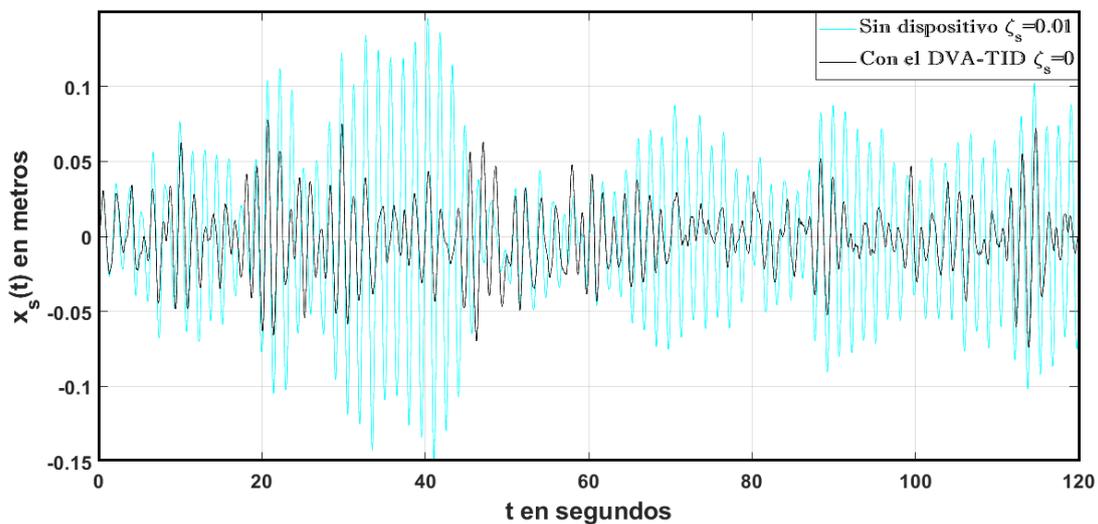


Figura 7.4: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA acoplado con TID.

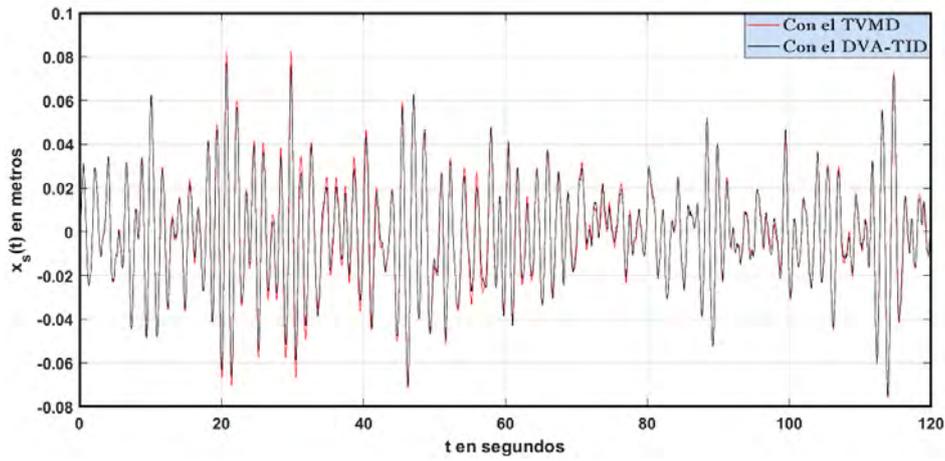


Figura 7.5: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA acoplado con TID.

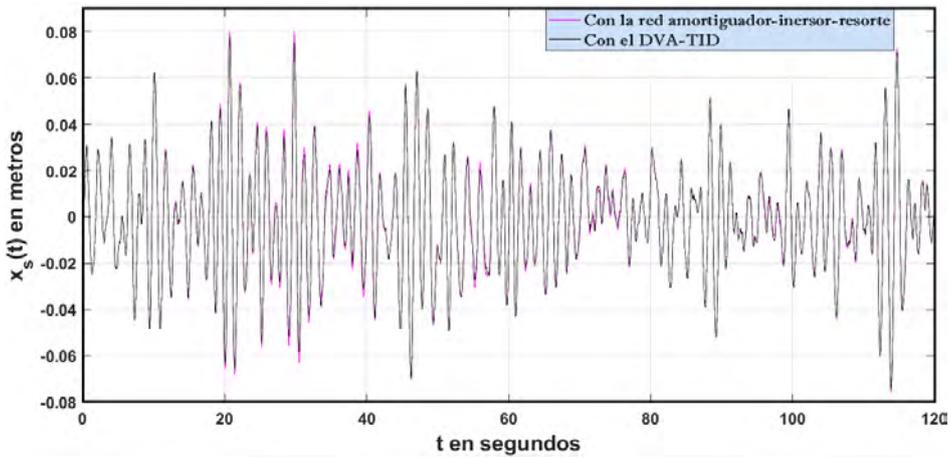


Figura 7.6: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.

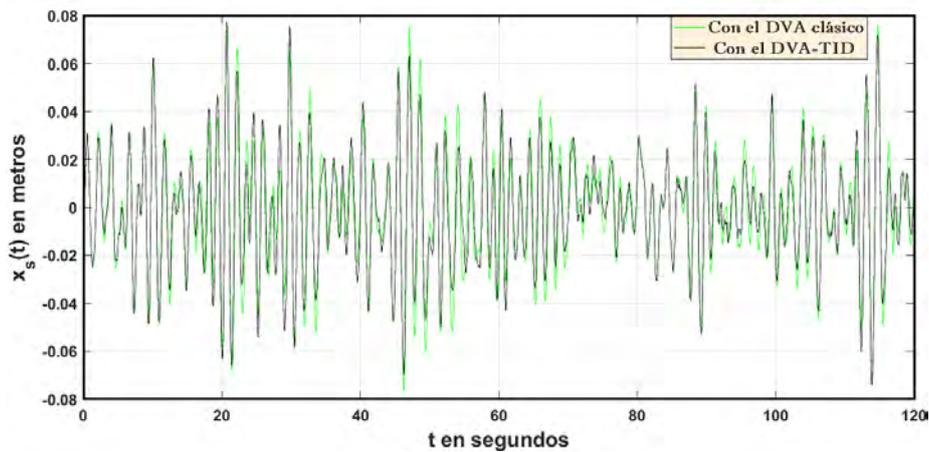


Figura 7.7: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA acoplado con TID.

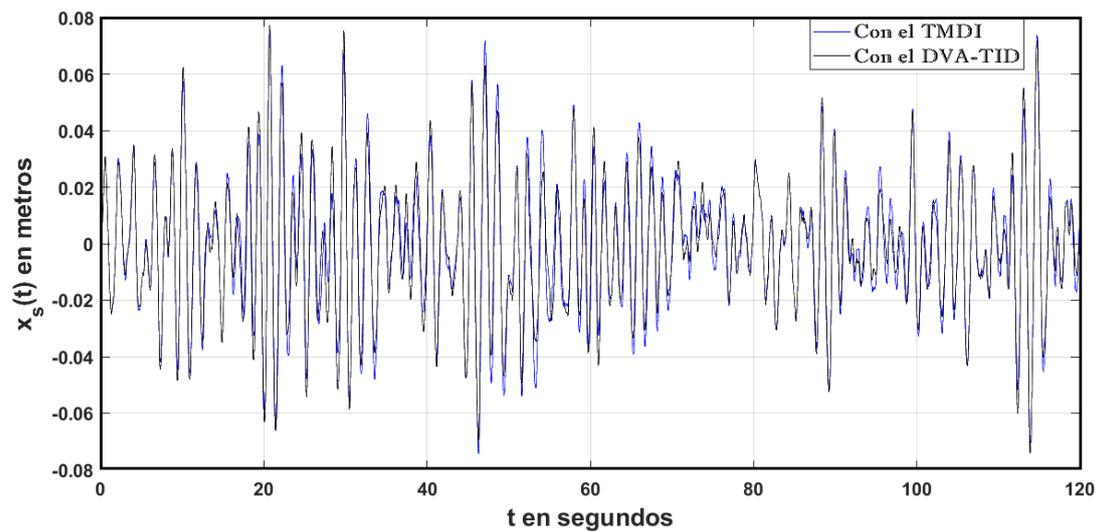


Figura 7.8: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA acoplado con TID.

Por otro lado, el desplazamiento del edificio SDOF de base aislada relativo al suelo en el dominio del tiempo al utilizar las mismas variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$, considerando la misma frecuencia natural en la base aislada, pero ahora considerando excitación estocástica de ruido blanco Gaussiano (ver ecuación 7.16); se muestra en las Figuras 7.9 - 7.13, haciendo las mismas comparaciones que en el caso de las Figuras 7.4 - 7.8.

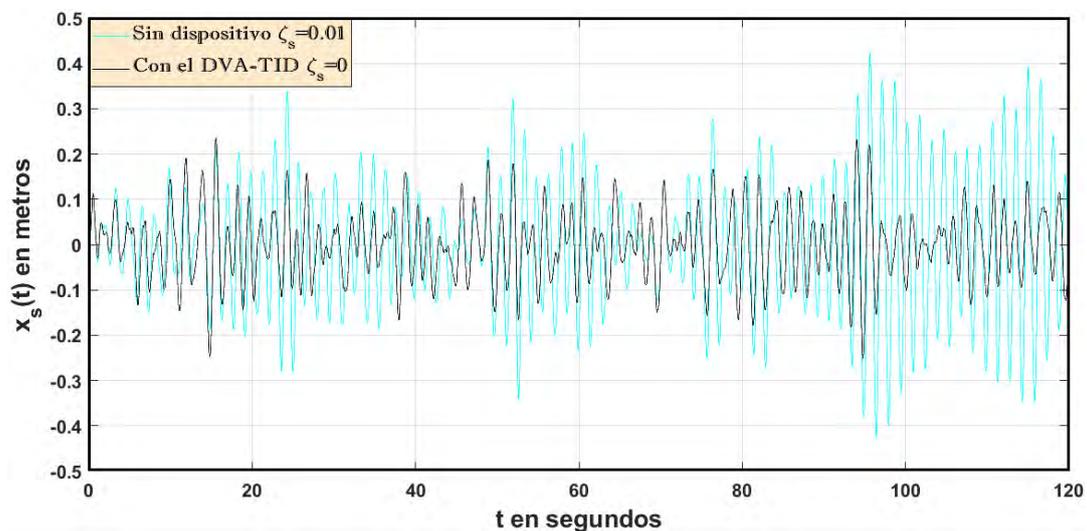


Figura 7.9: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA-TID.

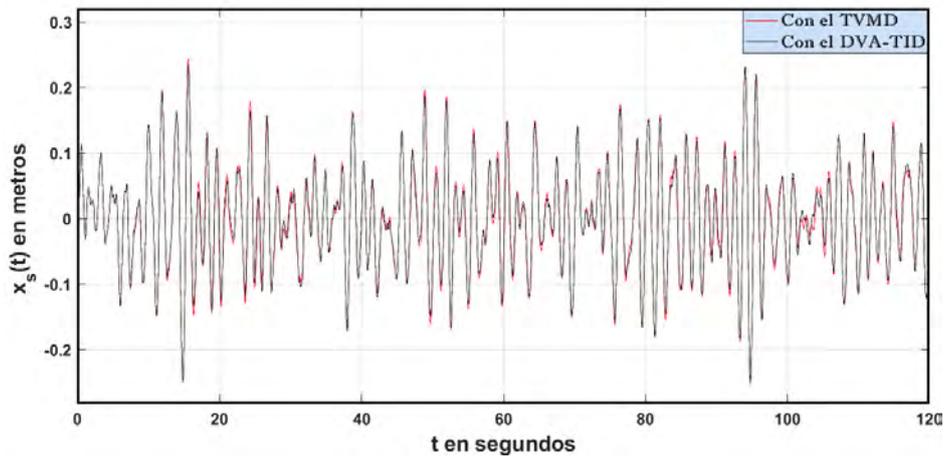


Figura 7.10: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA-TID.

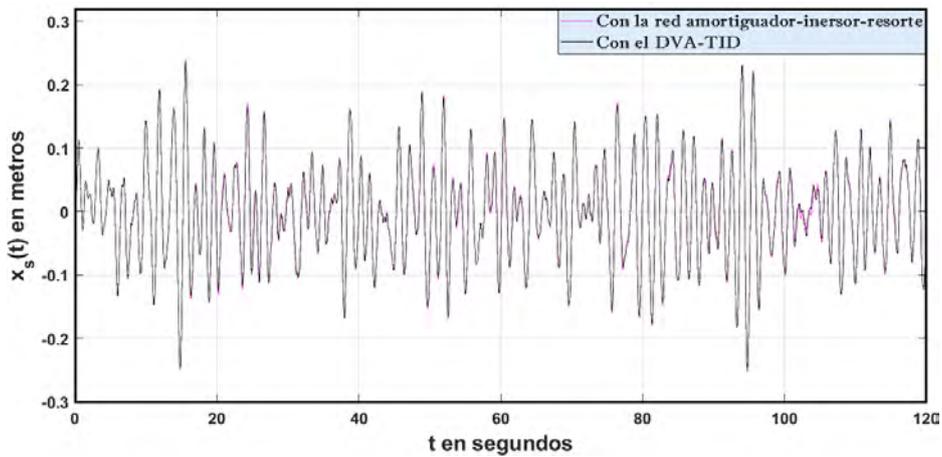


Figura 7.11: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.

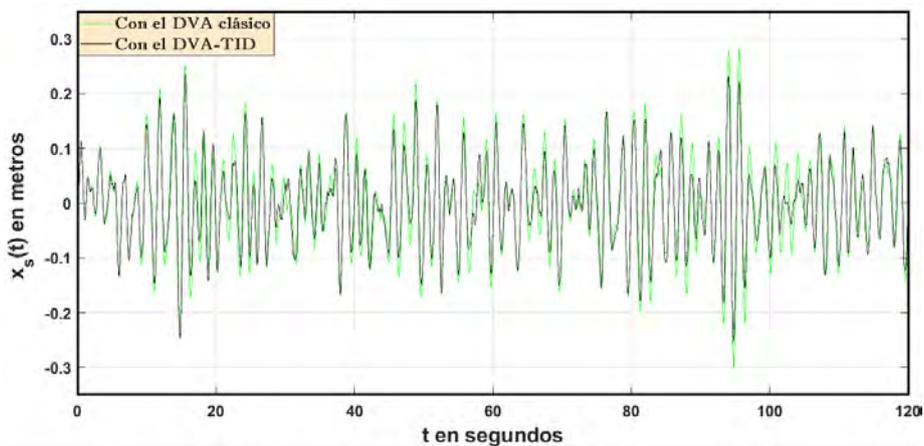


Figura 7.12: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA-TID.

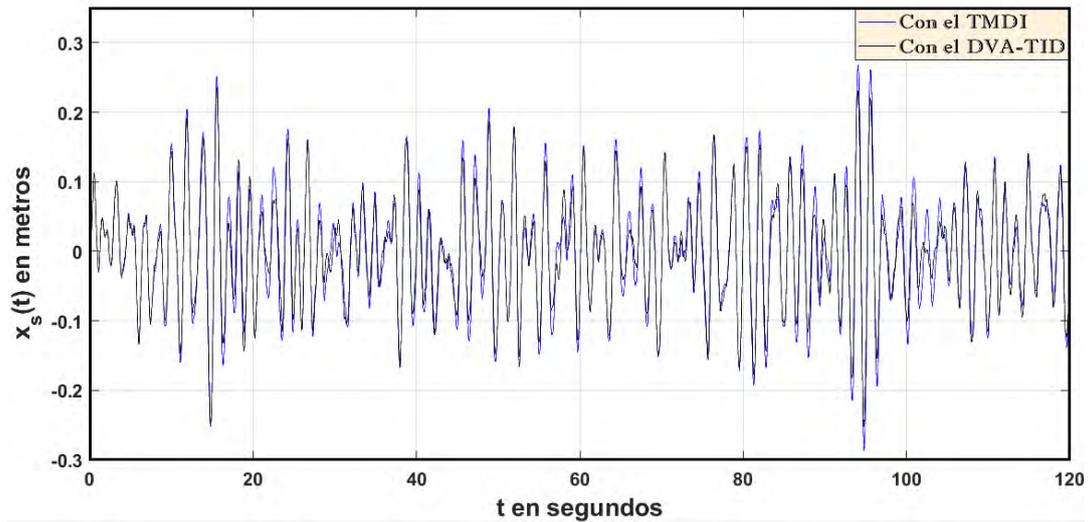


Figura 7.13: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando ruido blanco Gaussiano. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA-TID.

De acuerdo con la literatura, las variables adimensionales adecuadas para minimizar la energía total de vibración de la estructura primaria, son las obtenidas a partir de la norma H_2 . Sin embargo, para verificar la efectividad del DVA tipo Frahm acoplado con TID al minimizar la amplitud de vibración en resonancia, se hacen tres comparaciones más utilizando las variables óptimas obtenidas a partir de la norma H_∞ , considerando una relación de masas del 5 %, la misma frecuencia natural en la base aislada ($\omega_s = \frac{4}{3}\pi rad/s$) y excitación sísmica con las propiedades de amortiguamiento y frecuencia natural del suelo medio (ver Tabla 7.1). En las Figuras 7.14 - 7.16 se muestran las comparaciones del DVA-TID frente a los sistemas mecánicos de las Figuras 6.7 y 6.10.

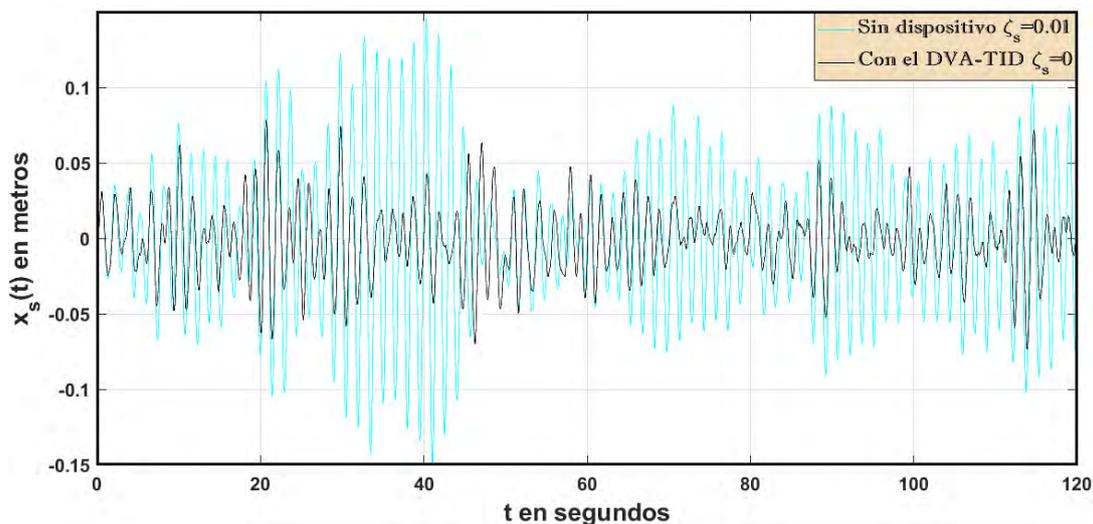


Figura 7.14: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables de la norma H_∞ . Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA-TID.

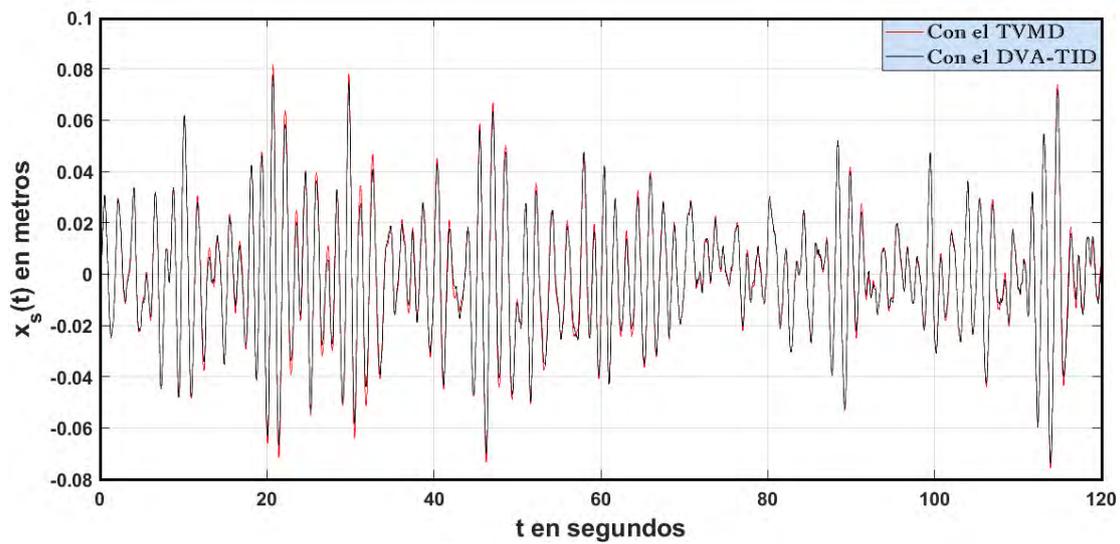


Figura 7.15: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables de la norma H_∞ . Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA-TID.

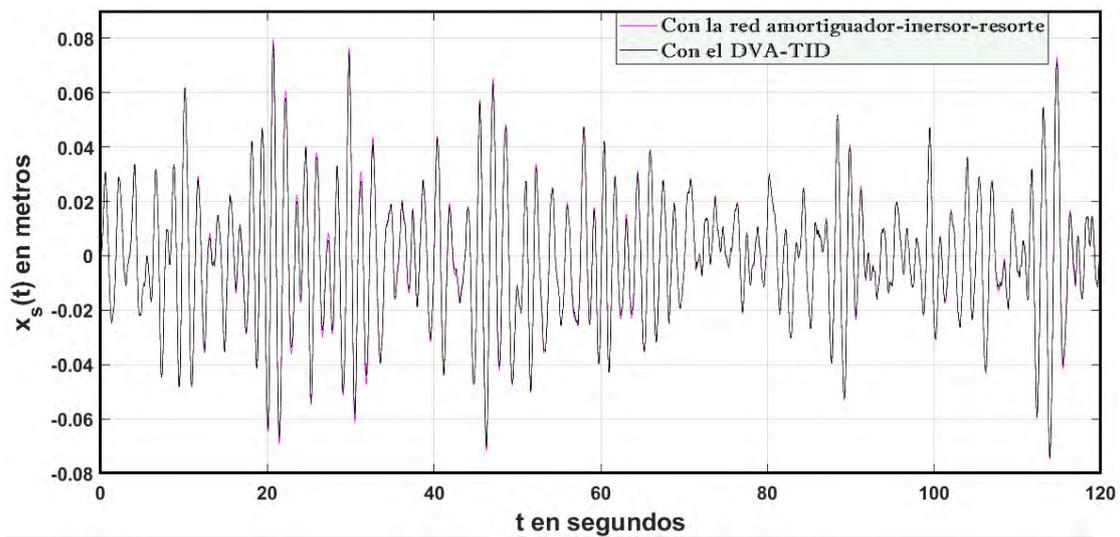


Figura 7.16: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables de la norma H_∞ . Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.

Finalmente, se hace otra comparación de la respuesta del edificio SDOF considerando el acoplamiento del DVA tipo Frahm acoplado con TID propuesto en este trabajo, considerando las mismas condiciones que en las simulaciones anteriores pero en uno de los casos utilizando las variables óptimas obtenidas a partir de la norma H_2 y en el otro las de la norma H_∞ .

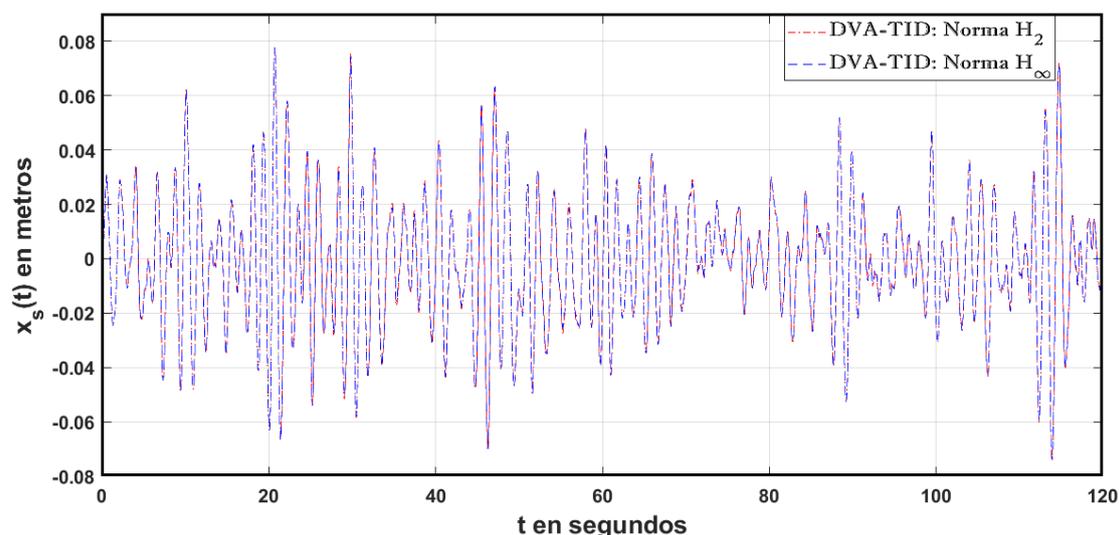


Figura 7.17: Posición del edificio SDOF relativa al suelo conectado al DVA-TID utilizando $\beta = 0.05$. Línea roja: Norma H_2 . Línea azul: Norma H_∞ .

Con la finalidad de apreciar mejor la diferencia en la magnitud de los desplazamientos de la estructura al diseñar el absorbedor propuesto con los criterios H_2 y H_∞ , en la Figura 7.18 se muestra la misma comparación que en la Figura 7.17 centrada en el intervalo $45 \leq t \leq 75$ (seleccionado al azar).

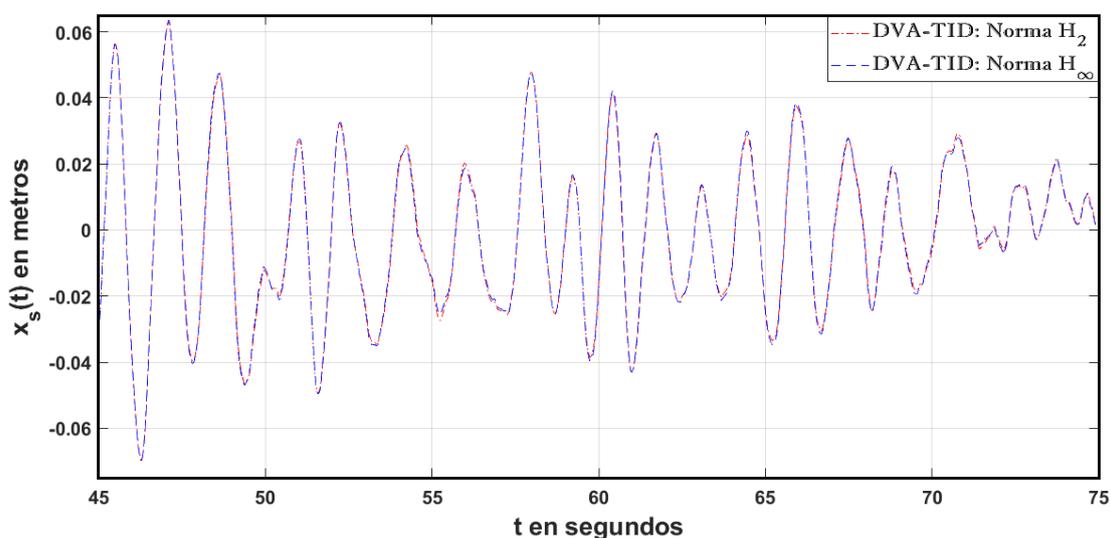


Figura 7.18: Acercamiento visual de la posición del edificio SDOF relativa al suelo conectado al DVA-TID para $\beta = 0.05$. Línea roja: Norma H_2 . Línea azul: Norma H_∞ .

En las Figuras 7.4-7.8 la varianza de desplazamiento es aproximadamente igual al valor calculado en las Secciones 6.3 y 6.4, debido a que en la excitación estocástica se consideró la función PSD (ecuación 7.8) y a que en el cálculo de los valores óptimos obtenidos a partir de la norma H_2 , solo se consideró el espectro S_0 (ecuación 7.7) en todo el rango de frecuencias de excitación, que es el caso del ruido blanco Gaussiano estacionario con media igual a cero. Por esta razón, se puede decir que las Figuras 7.9-7.13 muestran resultados de mayor precisión que los de las Figuras 7.4-7.8.

En la Figura 7.4, se observa que el DVA tipo Frahm acoplado con TID reduce eficientemente la magnitud de desplazamiento del edificio rígido ante excitación sísmica, considerando niveles bajos de ζ_s en la base aislada. Adicionalmente, se realizaron otras simulaciones considerando niveles de ζ_s hasta de 0.1, encontrando que aun así los desplazamientos del edificio rígido se reducen al implementar este dispositivo. Por otro lado, en las Figuras 7.5-7.8 se observa un comportamiento similar en la respuesta del edificio rígido, al implementar los dispositivos y redes mecánicas de la literatura y el IDVA propuesto. Esto se debe a que la varianza de desplazamiento del edificio no presenta una diferencia elevada al implementar estos dispositivos y el IDVA propuesto. Particularmente, al acoplar las redes mecánicas TVMD y amortiguador-inersor-resorte entre la masa m_A y el suelo, se obtienen varianzas de desplazamiento muy cercanas a la que se obtiene al implementar el DVA-TID propuesto, pero no menores a ella.

Por otro lado, las variables adimensionales utilizadas en estas simulaciones son prácticamente las óptimas para minimizar la varianza de desplazamiento del edificio sujeto a excitación sísmica, mientras que en el caso del Ruido blanco Gaussiano son exactamente las óptimas.

En las Figuras 7.4-7.8 se muestran únicamente las simulaciones de movimiento del edificio rígido aislado en la base situado en un tipo de suelo medio. En el Apéndice C se muestran diez simulaciones más considerando las características del suelo suave y firme, en las cuáles se encontró que el DVA-TID propuesto también supera en rendimiento a los cuatro dispositivos tomados de la literatura. Por otro lado, en las Figuras 7.9-7.13 se puede observar un comportamiento similar en la respuesta del edificio con respecto a la que se muestra en las Figuras 7.4 - 7.8, mostrando pequeñas variaciones en las amplitudes de desplazamiento del edificio. Particularmente, es complicado apreciar la mejora que produce el IDVA propuesto frente al TMDI en el dominio del tiempo considerando las características del suelo medio. Sin embargo, al considerar las características del suelo suave esta mejora se aprecia con mayor claridad. Finalmente, el rendimiento dinámico del TMDI es alto, pero no superior al del DVA-TID y de los dispositivos acoplados con el TVMD y la red mecánica amortiguador-inersor-resorte.

Capítulo 8

Análisis de la energía regenerada

Los absorbedores de vibración dinámicos recolectores de energía (EHDVAs), son utilizados en sistemas de ingeniería que tienden a vibrar constantemente debido a cualquier fenómeno ocasionado de forma natural o inducida. En este trabajo, se trata de vibración causada por la aceleración sísmica del suelo. No obstante, el edificio MDOF aislado en la base puede vibrar debido a otras causas naturales, siendo el n -ésimo piso la zona de máximo desplazamiento. Es por eso que en la configuración de la Figura 4.3 de la Sección 4.2, se agrega un transductor electromagnético, conectado entre una de las terminales del inersor y el n -ésimo piso del edificio, considerando que es la zona del absorbedor más susceptible a desplazarse y a generar velocidades elevadas. La función de un transductor electromagnético es generar y recolectar energía eléctrica a partir de la energía mecánica de vibración. Normalmente la energía mecánica obtenida a partir de un movimiento vibratorio, es recolectada a partir de los elementos que la disipan, tal y como ocurre en el caso de los amortiguadores viscosos. Esta disipación de energía se puede llevar a cabo en la misma zona en la que se producen los desplazamientos más altos de la estructura, pero también, puede no coincidir con esta zona. En este Capítulo se realiza un análisis de posición y velocidad, de la potencia instantánea y de la potencia media disipada a partir de la energía mecánica disipada por el edificio SDOF conectado al DVA tipo Frahm acoplado con TID. Asimismo, se cuantifica la potencia mecánica media generada mediante un análisis paramétrico del factor de amortiguamiento ζ_B .

8.1. Análisis de posición y velocidad del DVA tipo Frahm acoplado con TID

Si se adiciona un transductor electromagnético en el sistema de la Figura 4.3, se origina el sistema de la Figura 8.1(a), donde el dispositivo electromagnético es únicamente representativo, debido a que en este trabajo solo se cuantifica la energía disipada por el

amortiguador viscoso del IDVA propuesto, quedando como trabajo futuro la posibilidad de implementar un transductor electromagnético. Por otro lado, el máximo desplazamiento horizontal en un edificio de varios pisos cuando está sujeto a excitación sísmica, ocurre en el piso más alto (Petrini et al, 2020). Sin embargo, debido al comportamiento de cuerpo rígido de los edificios con aislamiento en la base (Love et al., 2011), (Ismail, 2018), (Garevski et al, 2000) y tomando en cuenta la conclusión obtenida en la Subsección 5.2.1, en la cuál se descarta el caso de la Figura 4.3. El diagrama de la Figura 8.1(a) se puede simplificar en el caso uno definido en el Capítulo 4 quedando como se muestra en la Figura 8.1(b).

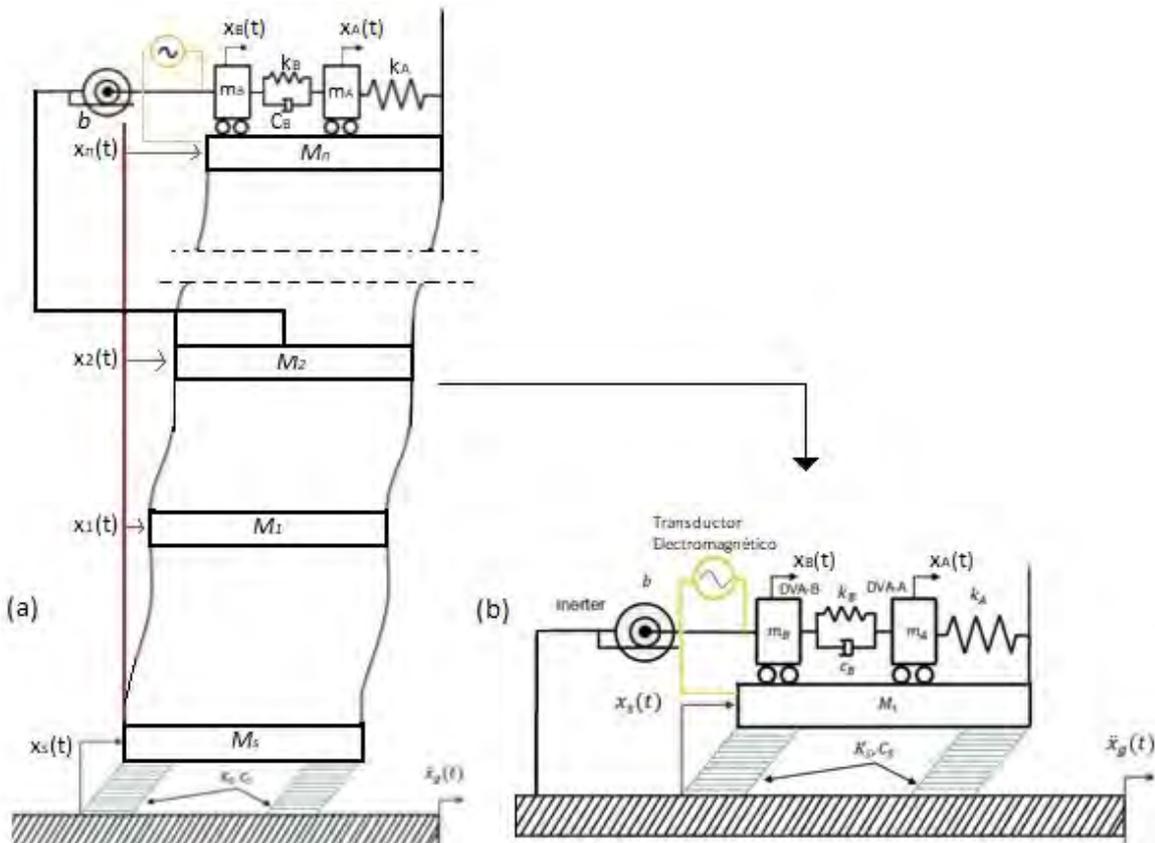


Figura 8.1: (a) Estructura MDOF controlada por el IDVA propuesto y conectada a un transductor electromagnético. (b) Estructura SDOF controlada por el IDVA propuesto y conectada a un transductor electromagnético.

En la Subsección 6.1.2, se determinó que el efecto de la masa m_B del absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional puede ser despreciado al considerar niveles altos de inercia, ocasionando la conexión de un TID entre el suelo y la masa m_A como se mostró en la Figura 6.3. Es por eso que el sistema de la Figura 8.1(b) cambia al que se muestra en la Figura 8.2.

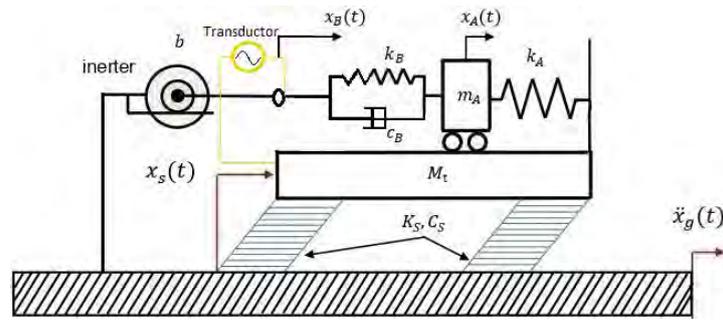


Figura 8.2: Estructura SDOF controlada por el DVA tipo Frahm acoplado con TID y conectada a un transductor electromagnético para la regeneración de energía.

El sistema vibratorio de la Figura 8.2 es de tres grados de libertad; la posición de la masa total del edificio M_t , de la masa m_A y del nodo B con coordenadas x_s , x_A y x_B respectivamente. Con la finalidad de identificar el nodo o elementos que más se desplazan cuando el sistema de la Figura 8.2 está sujeto a aceleración sísmica, se obtiene el desplazamiento de las coordenadas x_s , x_A y x_B en el dominio del tiempo, utilizando las variables óptimas obtenidas a partir de la norma H_2 en la Sección 6.3 y las características del edificio SDOF de base aislada descrito en el apéndice A. En la Figura 8.3, se muestran la respuesta de estos tres grados de libertad en el dominio del tiempo.

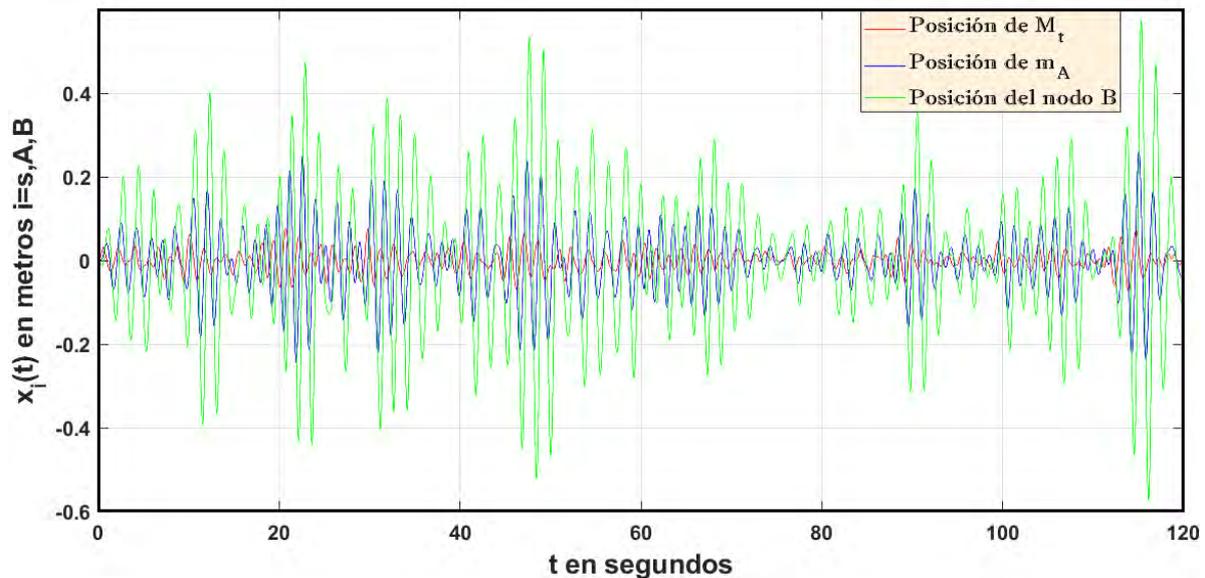


Figura 8.3: Posición de M_t , m_A y el nodo B en el dominio del tiempo utilizando las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$ y excitación sísmica en suelo medio.

En la Figura 8.3, se puede ver que el nodo B vibra con mayor amplitud de desplazamiento en $0 \leq t \leq 120$, esto se debe a que el inersor es el elemento inercial más efectivo de este sistema al modificar la energía cinética del edificio SDOF aislado en la base. Por otro lado, la masa M_t con coordenada x_s , posee amplitudes de vibración más pequeñas, debido a que su movimiento es controlado por el DVA tipo Frahm acoplado con TID y a que la solución de las ecuaciones diferenciales del conjunto a fue obtenida utilizando las variables óptimas de la Sección 6.3. Adicionalmente, es posible obtener la respuesta de las

coordenadas x_s , x_A y x_B en el dominio de la frecuencia, utilizando las variables óptimas de la técnica de los puntos fijos extendida, de la norma H_∞ o H_2 . Donde podrá verse que las amplitudes de vibración más altas son producidas por el nodo B . Con base en los resultados mostrados en la Figura 8.3, se limita la ubicación adecuada para cuantificar la energía regenerada del sistema vibratorio mostrado en la Figura 8.2.

Además de realizar el análisis de posición, también se muestra la variación de velocidad de la masa M_t , m_A y del nodo B de la Figura 8.2 con respecto al tiempo, debido a que son los parámetros fundamentales que intervienen en la disipación de energía. Esta gráfica de velocidad se obtiene resolviendo las ecuaciones del conjunto a , programadas en Matlab-Simulink utilizando las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$, vibración sísmica en suelo medio y las características del edificio rígido del Apéndice A.

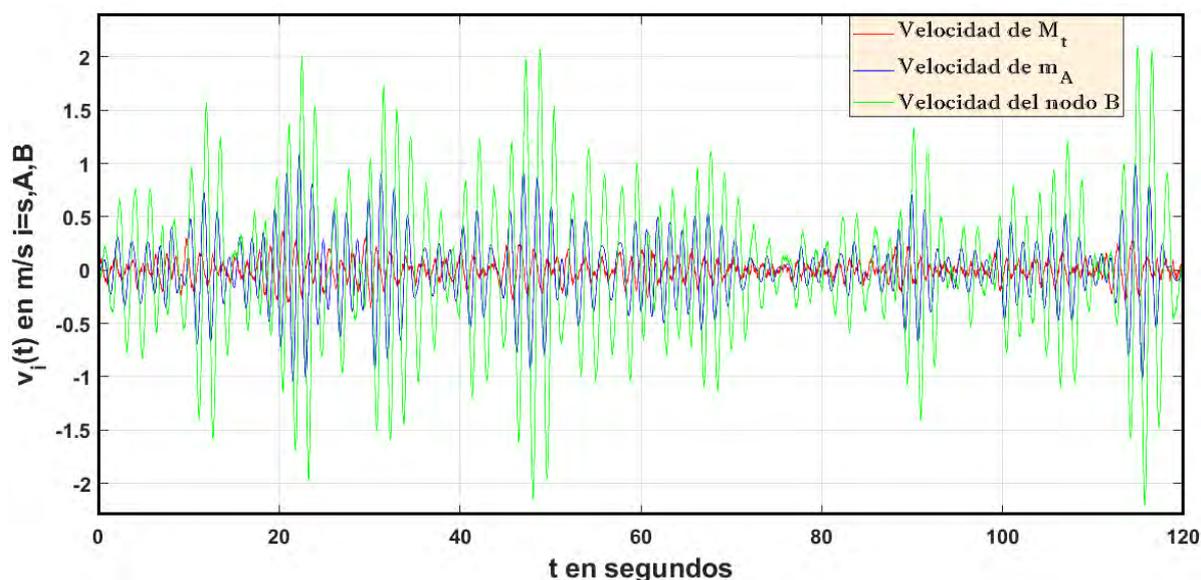


Figura 8.4: Velocidad de M_t , m_A y el nodo B en el dominio del tiempo utilizando las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$ y excitación sísmica en suelo medio.

El resultado de la Figura 8.4, muestra que el nodo B y la masa m_A son los elementos que poseen una magnitud de velocidad más alta a lo largo de los 120 segundos utilizados en la simulación del evento sísmico. Es por eso que se puede afirmar que la zona de máximo desplazamiento y de máxima velocidad coincide con la zona de disipación de energía llevada a cabo por el amortiguador C_B . Finalmente, en la Figura 8.5 se muestra la zona del DVA tipo Frahm acoplado con TID en donde los desplazamientos son altos. Esta zona es la misma en donde resultaría viable colocar un dispositivo electromagnético para el almacenamiento de energía en un trabajo futuro.

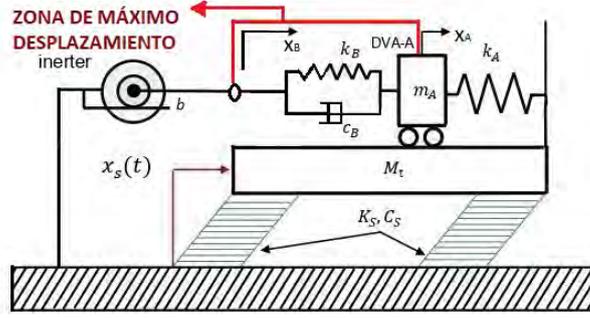


Figura 8.5: Zona de máximo desplazamiento del DVA tipo Frahm acoplado con TID conectado en la base del edificio

8.2. Potencia mecánica disipada

De acuerdo con la literatura, es posible aprovechar la potencia mecánica generada por la disipación de energía de un sistema vibratorio, esto se logra multiplicando el valor medio cuadrado de la velocidad del elemento amortiguador por el coeficiente de amortiguamiento C_B (Abdelkareem et al, 2018). La ecuación 8.1 muestra la potencia instantánea en Watts o Joules/s, mientras que las ecuaciones 8.2 y 8.3 son la potencia promedio y potencia total respectivamente, generadas por los elementos amortiguadores del sistema mecánico.

$$P_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i (\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i)^2 \quad (8.1)$$

$$P_{promedio} = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_n}{n} \quad (8.2)$$

$$P_{total} = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (8.3)$$

Barredo (2020), realizó un análisis de recolección de energía de las suspensiones de automóviles basadas en inersores para diferentes perfiles estocásticos de carretera. En este trabajo, la potencia mecánica se genera a partir del amortiguador de constante C_B , que es el elemento disipador de energía del DVA tipo Frahm acoplado con TID. Por lo tanto, las ecuaciones 8.1 - 8.3 se escriben como sigue:

$$P_1 = C_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 = C_B (\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2 \quad (8.4)$$

$$P_{promedio} = P_1 \quad (8.5)$$

$$P_{total} = P_1 \quad (8.6)$$

Las ecuaciones 8.4 - 8.6 muestran que la potencia instantánea disipada es idéntica a la potencia promedio y total. A partir de esta Sección la potencia instantánea disipada por el DVA tipo Frahm acoplado con TID será denotada con el subíndice a . Por otro

lado, la ecuación 8.4 puede escribirse con el coeficiente C_B en términos de las variables adimensionales del conjunto C_2 , de la masa total y de la frecuencia natural del edificio SDOF de base aislada (ver Figura 8.21 en el Apéndice A);

$$P_{a_{inst}} = C_B (\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2$$

o bien

$$P_{a_{inst}} = P_{a_{prom}} = P_{a_{tot}} = 2\eta \alpha \beta \zeta_B M_t \omega_s (\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2 \quad (8.7)$$

De la misma manera, las funciones de potencia mecánica disipada para los sistemas de las Figuras 6.7, 6.10, 6.13 y 6.15 (dispositivos y redes mecánicas de la literatura) son:

$$\begin{cases} P_{b_{inst}} = P_{b_{prom}} = P_{b_{tot}} = 2\eta \alpha \beta \zeta_B M_t \omega_s (\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2 \\ P_{c_{inst}} = P_{c_{prom}} = P_{c_{tot}} = 2\eta \alpha \beta \zeta_B M_t \omega_s (\dot{x}_C - \dot{x}_B)^2 \\ P_{d_{inst}} = P_{d_{prom}} = P_{d_{tot}} = 2\nu \beta \zeta_A M_t \omega_s (\dot{x}_A - \dot{x}_s)^2 \\ P_{e_{inst}} = P_{e_{prom}} = P_{e_{tot}} = 2\nu (\beta + \alpha) \zeta_A M_t \omega_s (\dot{x}_A - \dot{x}_s)^2 \end{cases} \quad (8.8)$$

Debe notarse que la ecuación $P_{c_{inst}}$ (potencia mecánica disipada por la red mecánica amortiguador-inersor-resorte) debería considerar las terminales del amortiguador \dot{x}_g y \dot{x}_C . Sin embargo, al comprobar mediante el Software "Maple - Soft", que en esta red mecánica en serie se obtiene la misma magnitud de la FRF, independientemente de la posición del amortiguador C_B , se decidió colocar el elemento amortiguador entre el inersor de inercia b y el resorte de rigidez k_B , al no producir cambios en la optimización de las variables adimensionales. Es por eso que en la ecuación $P_{c_{inst}}$ se consideraron las terminales del nodo C y B .

La ecuación 8.7 y las del conjunto 8.8, se grafican solucionando las ecuaciones diferenciales de los conjuntos 7.21 y 7.24 - 7.27 para las velocidades de cada grado de libertad de los sistemas analizados. Estos conjuntos de ecuaciones se determinaron en la Sección 7.2. En este caso, primero se utilizaron las variables óptimas de la norma H_2 y después las obtenidas a partir de la norma H_∞ , en ambos casos para $\beta = 0.05$. Se consideró la excitación sísmica de la ecuación 7.15 en condiciones de suelo medio y los parámetros de masa, amortiguamiento y frecuencia natural del edificio SDOF mostrado en el Apéndice A; $M_t = 340000kg$, $\zeta_s = 0$ y $\omega_s = \frac{4}{3}\pi \frac{rad}{s}$. Las gráficas de potencia instantánea disipada para estos cinco sistemas considerando un evento sísmico en suelo medio se muestran en las Figuras 8.6 - 8.9, mientras que en el Apéndice B se muestran estas mismas simulaciones en condiciones de suelo suave y firme.

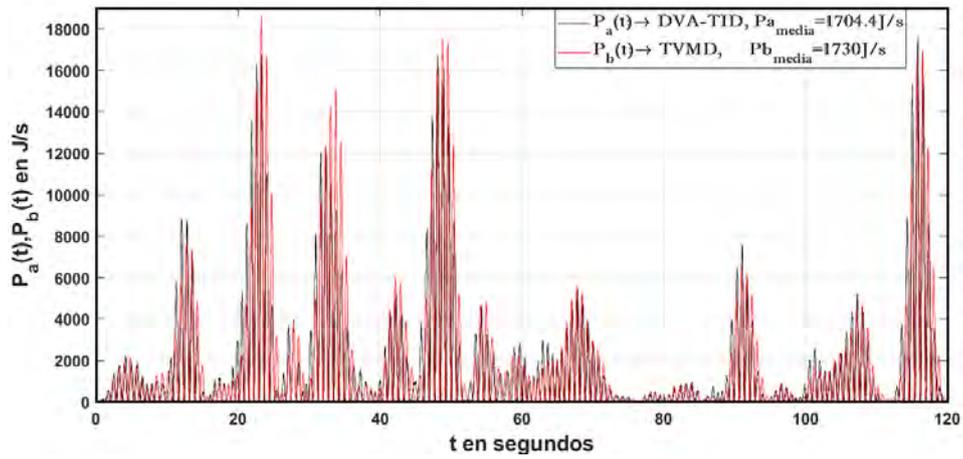


Figura 8.6: Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea roja: TVMD.

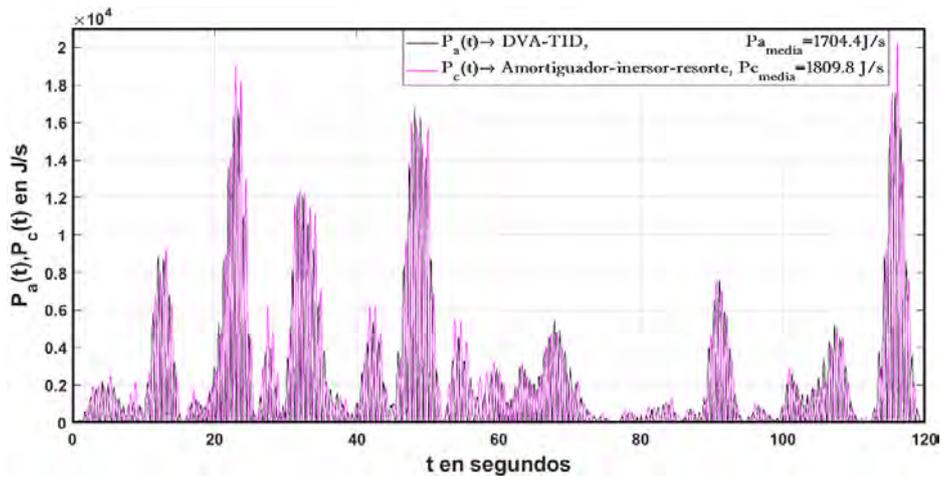


Figura 8.7: Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte.

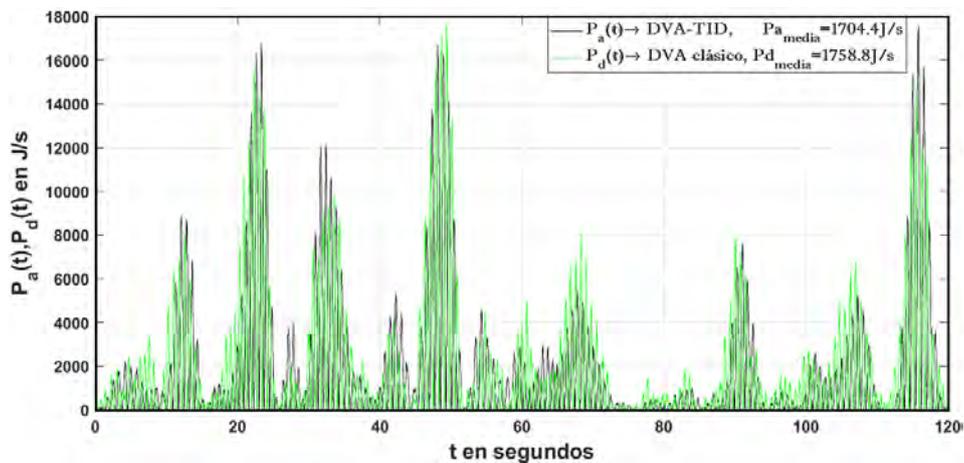


Figura 8.8: Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea verde: DVA clásico.

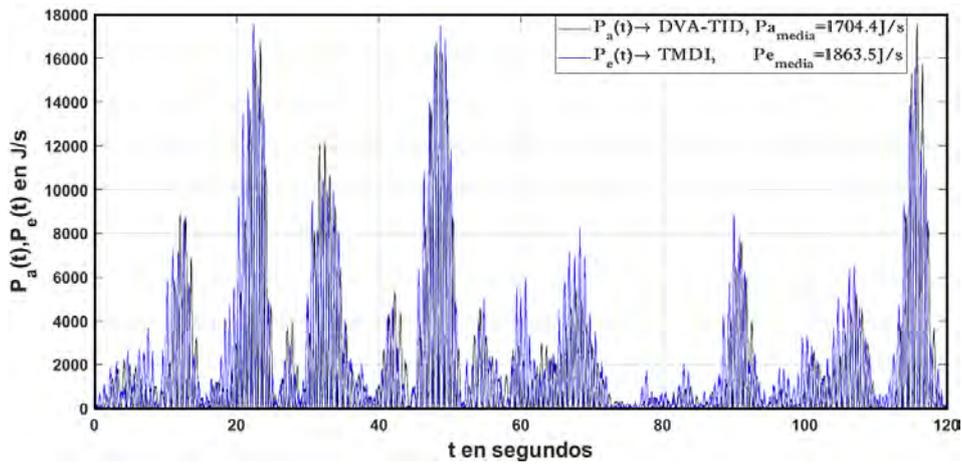


Figura 8.9: Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_2 . Línea negra: DVA-TID. Línea azul: TMDI.

Las Figuras 8.6 - 8.9 fueron obtenidas considerando excitación sísmica en el suelo transmitida a la base aislada del edificio durante un tiempo de 120 segundos. El valor medio de las gráficas de potencia disipada que aparece en la leyenda de las Figuras 8.6-8.9, representa el promedio de potencia mecánica disipada durante el evento sísmico. Con base en esta información, se puede ver que en las condiciones del suelo medio el DVA tipo Frahm acoplado con TID (propuesto en este trabajo) disipa menor cantidad de potencia que los cuatro dispositivos analizados en este trabajo. Esto está directamente relacionado con el efecto de la red mecánica conocida como TID, debido a que absorbe mayor cantidad de energía cinética que los otros dispositivos, debido a su configuración y a la implementación del inersor. Esta observación puede no cumplirse en todos los casos, debido a que también depende del tipo de suelo considerado en el evento sísmico y de las variables óptimas utilizadas. A continuación se muestran las mismas comparaciones bajo las mismas condiciones de vibración, pero ahora utilizando las variables óptimas de la norma H_∞ .

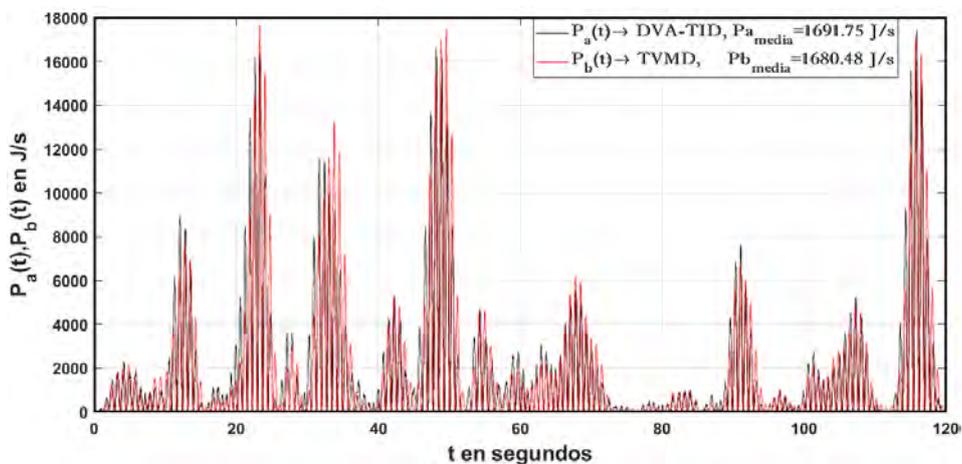


Figura 8.10: Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_∞ . Línea negra: DVA-TID. Línea roja: TVMD.

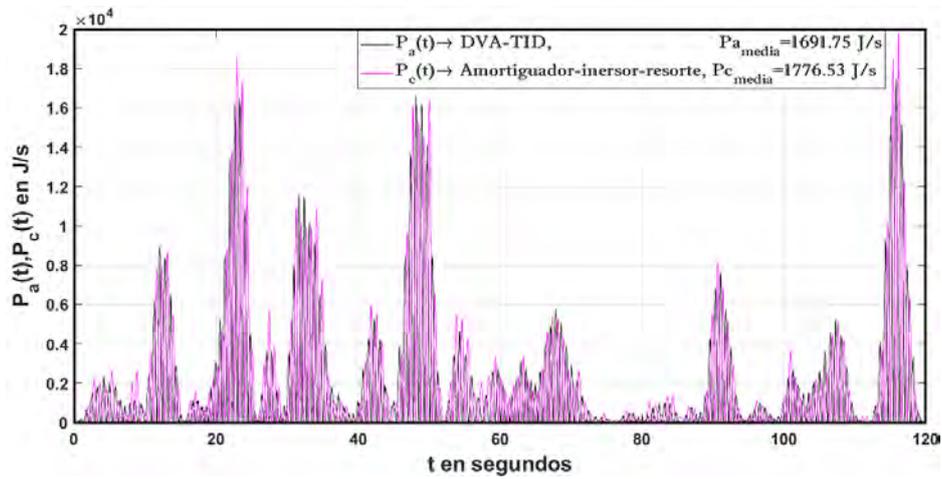


Figura 8.11: Potencia instantánea disipada en suelo medio con las variables de la norma H_∞ . Línea negra: DVA-TID. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte.

En la Figura 8.10, se puede observar que la potencia media disipada por el DVA-TID es mayor que en el caso del uso de la red mecánica TVMD. Esto se debe a que se utilizaron las variables óptimas de la norma H_∞ , las cuáles están centradas en la minimización de la amplitud de vibración en resonancia y no en la minimización de energía. Es por eso que este valor puede ser menor o mayor que el obtenido al implementar los otros cuatro dispositivos diseñados con las variables óptimas de la norma H_∞ . En el Apéndice C, se muestra la potencia mecánica media disipada para los tres tipos de suelo al implementar el DVA-TID y los cuatro dispositivos tomados de la literatura diseñados con las variables de la norma H_2 y H_∞ . Por otro lado, de acuerdo con el análisis de posición y velocidad realizado en la Sección 8.1, la zona de máximo desplazamiento del dispositivo propuesto (DVA - TID) coincide con la zona de disipación de energía (terminales del amortiguador C_B). Sin embargo, esta coincidencia puede no ocurrir en el caso de los cuatro dispositivos reportados en la literatura estudiados en este trabajo.

8.3. Análisis de sensibilidad paramétrica

La potencia mecánica media para diferentes valores de amortiguamiento, se obtiene calculando la energía disipada dividida con respecto al tiempo, originando una variación de potencia mecánica en unidades de $J/s = W$, que puede ser aprovechada para regenerarla y utilizarla para otras aplicaciones. Un análisis de este tipo y más extenso fue realizado por Abdelkareem et al (2018). Por otro lado, considerando que el amortiguador de constante C_B es el elemento disipador de energía del sistema de la Figura 8.5, el análisis de sensibilidad paramétrica, se relaciona directamente con el factor de amortiguamiento ζ_B . No obstante, es posible realizar este mismo análisis al variar otros parámetros como la rigidez o la inercia.

Para obtener la potencia media generada para diferentes valores de ζ_B , se utilizan

las variables óptimas calculadas a partir de la norma H_2 , después se muestran gráficas realizando este mismo análisis utilizando las variables óptimas obtenidas a partir de la norma H_∞ (en ambos casos para $\beta = 0.05$). Para realizar este análisis se siguieron los siguientes pasos con ayuda del comando "Sim" de Matlab - Simulink, que sirve para enlazar un programa en Simulink y resolverlo mediante un script de Matlab.

1. Fijar los parámetros del edificio (Apéndice A) y las variables adimensionales óptimas excepto ζ_B .
2. Variar ζ_B en un intervalo definido. En este caso en $0.02 \leq \zeta_B \leq 0.8$
3. Resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento del conjunto a definido en 7.21, considerando excitación sísmica en alguno de los tres tipos de suelo.
4. Obtener las velocidades $\dot{x}_B(t)$ y $\dot{x}_A(t)$ a partir de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (a) para $0 \leq t \leq 120$ (puede ser un tiempo distinto).
5. Calcular la potencia disipada en el dominio del tiempo mediante la ecuación 8.7 para el primer valor de ζ_B .
6. Obtener la media de la señal de potencia disipada.
7. Repetir los pasos número 5 y 6 para cada valor de ζ_B .
8. Graficar el intervalo de amortiguamiento ζ_B definido en el paso número 2 con respecto a cada potencia media obtenida en el paso número 6.

Siguiendo esta secuencia de pasos se obtuvieron las gráficas de las Figuras 8.12 - 8.15.

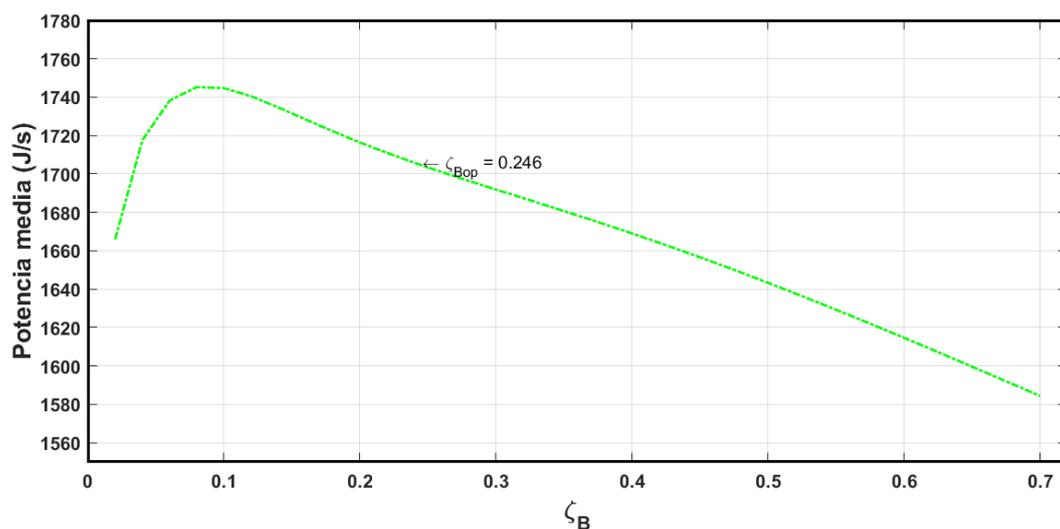


Figura 8.12: Potencia media disipada al utilizar el DVA - TID considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables óptimas de la norma H_2 .

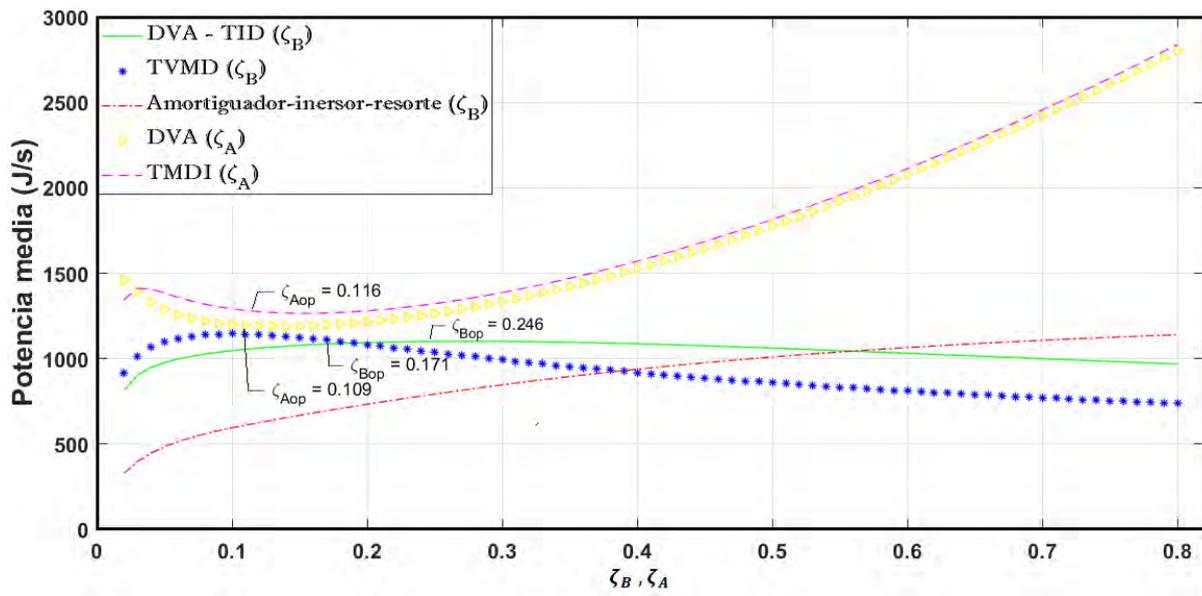


Figura 8.13: Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo suave y las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$.

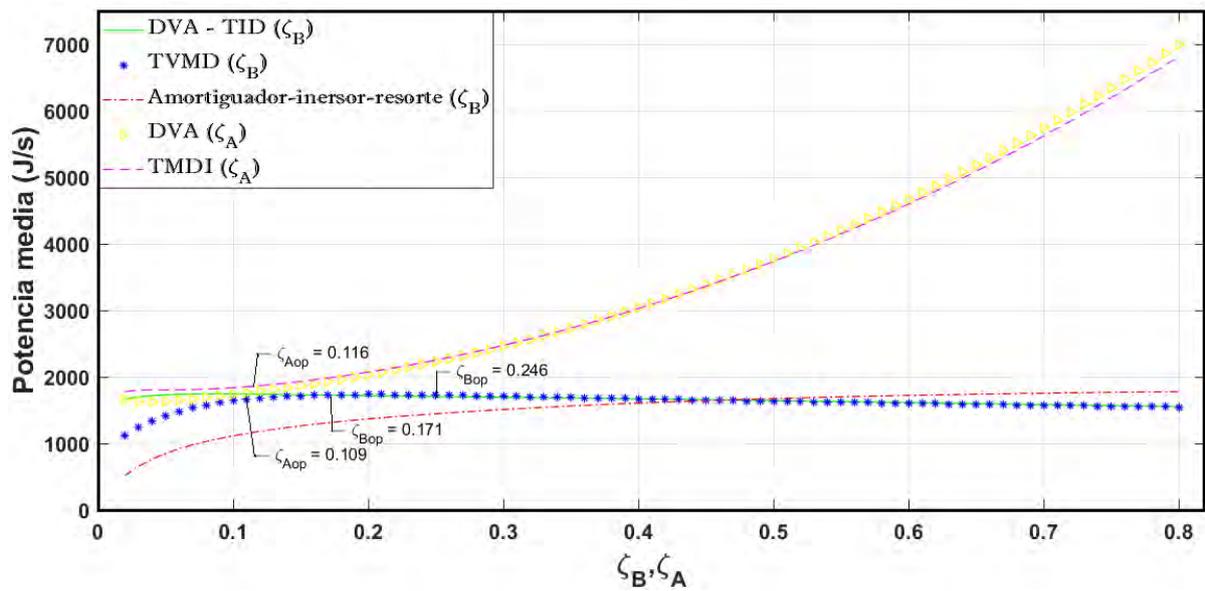


Figura 8.14: Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$.

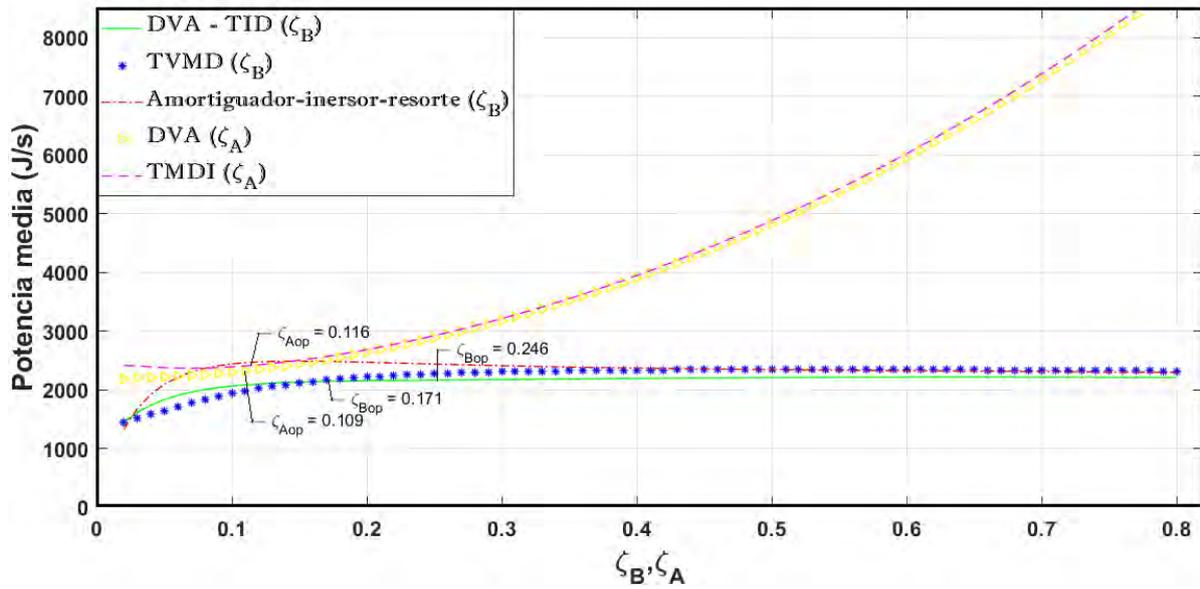


Figura 8.15: Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo firme y las variables óptimas de la norma H_2 para $\beta = 0.05$.

Finalmente, se muestran tres simulaciones más, haciendo las mismas comparaciones que en las Figuras 8.13 - 8.15, pero ahora utilizando las variables óptimas para la minimización de vibración en resonancia (norma H_∞) para $\beta = 0.05$. Recordando que en este caso, solo se compara el uso de dos dispositivos adicionales al propuesto, ya que en los casos del DVA clásico y del TMDI solo se aplicó la norma H_2 .

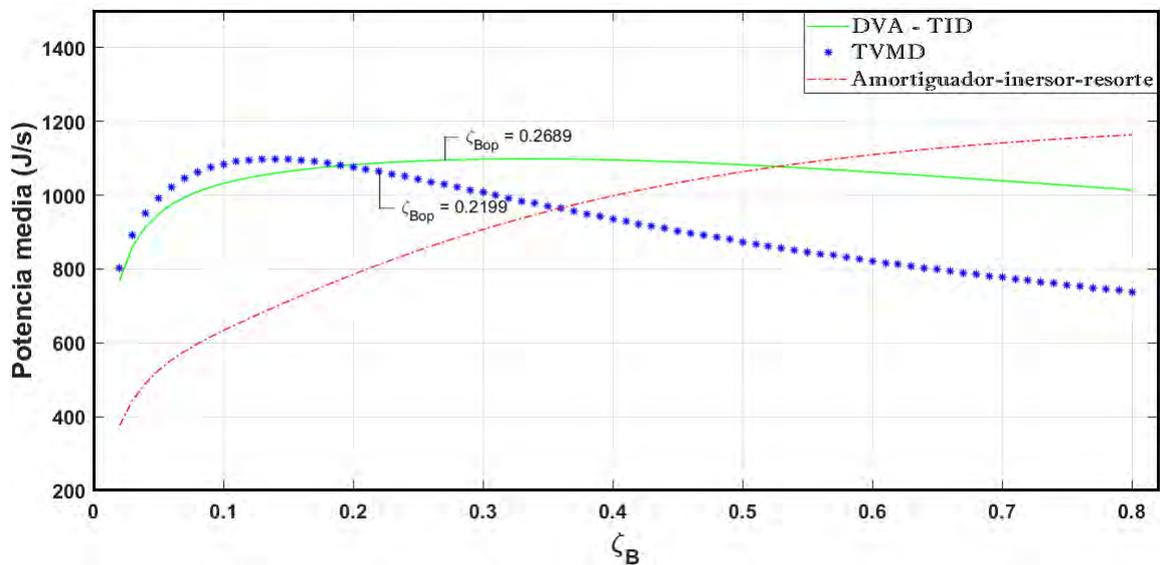


Figura 8.16: Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo suave y las variables óptimas de la norma H_∞ para $\beta = 0.05$.

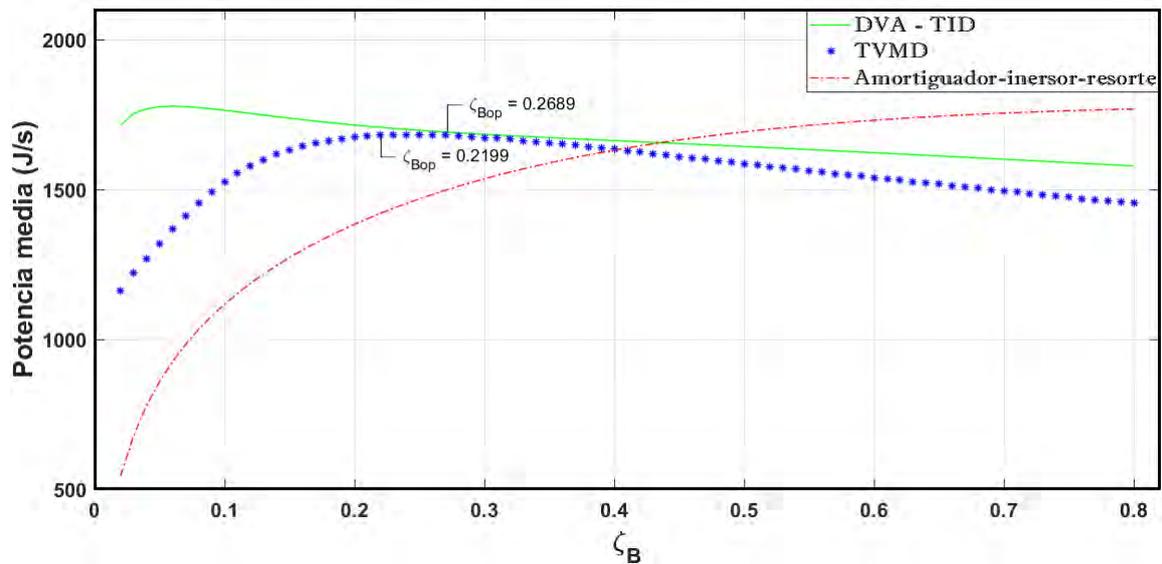


Figura 8.17: Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo medio y las variables óptimas de la norma H_∞ para $\beta = 0.05$.

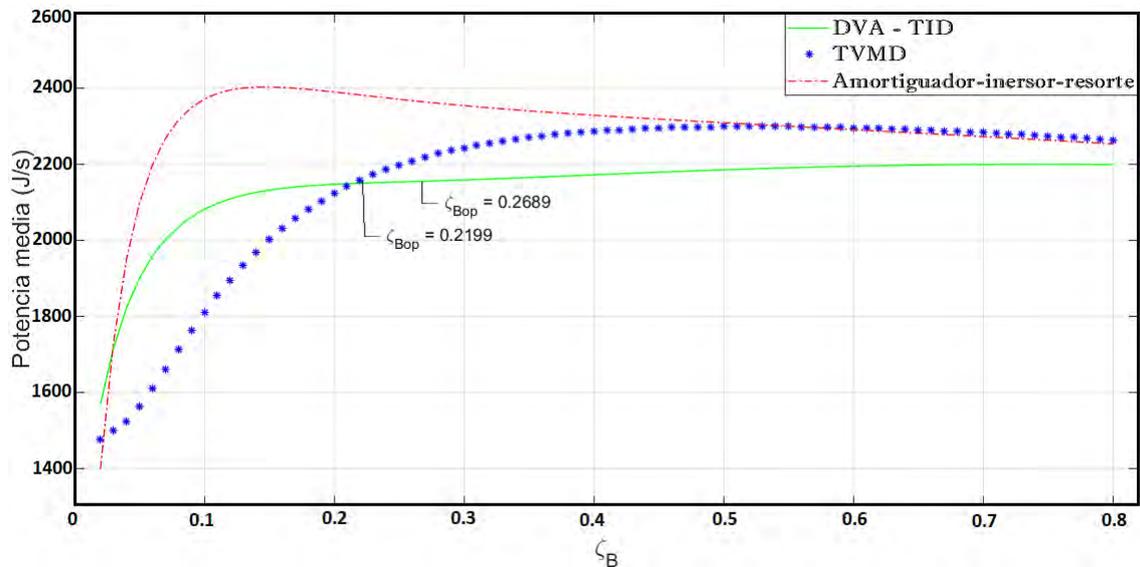


Figura 8.18: Comparación de la potencia media disipada considerando excitación sísmica en suelo firme y las variables óptimas de la norma H_∞ para $\beta = 0.05$.

De acuerdo con las Figuras 8.13-8.18, se puede decir que la potencia media disipada al emplear el DVA-TID es casi en todos los casos, cercana a la que se disipa al implementar el TVMD. Hecho que no ocurre al emplear el DVA clásico y el TMDI. Esto, se relaciona directamente con la capacidad de absorción de vibraciones de estos dispositivos. Es decir, así como el DVA clásico y el TMDI son los dispositivos que disipan mayor cantidad de potencia, son los menos eficientes en el control de vibraciones en comparación con el dispositivo propuesto. Por otro lado, se observa que no hay mucha diferencia en la cantidad de potencia disipada por estos dispositivos al diseñarlos con las variables óptimas de la norma H_∞ y H_2 .

Conclusiones

En esta investigación se propuso un nuevo absorbedor de doble masa sintonizadas con inercia rotacional, con base en el alto rendimiento dinámico que han presentado el TMDI y el absorbedor de doble masa conectado en serie. Este dispositivo se conectó a una estructura tipo edificio MDOF con aislamiento en la base, primero en la base aislada y después en el enésimo piso del edificio. Se encontró que en un edificio de este tipo no es conveniente controlar los desplazamientos indeseados de cualquiera de sus pisos desde el enésimo piso, debido a su comportamiento dinámico de cuerpo aproximadamente rígido. Se encontró que el primer caso, definido por $n + 3$ ecuaciones diferenciales de movimiento, se simplifica en un modelo dinámico lineal de tres grados de libertad.

El dispositivo propuesto fue sintonizado para producir la misma amplitud de vibración en los puntos invariantes de la estructura mediante la técnica de los puntos fijos extendida, teniendo en consideración que la existencia de estos puntos se origina a partir de las frecuencias invariantes no amortiguadas. Se obtuvieron funciones analíticas para los parámetros del IDVA propuesto del conjunto C_1 en términos de la relación de masa β y de inercia δ . Se encontró que al calcular el límite de la función de la amplitud de vibración $H(\beta, \delta)$ cuando $\delta \rightarrow \infty$, el parámetro inercial m_B puede ser despreciado al no presentar cambios en la FRF sintonizada. Originando la conexión directa de una red mecánica conocida como TID entre el suelo y el elemento inercial m_A . Dispositivo que fue denominado como; DVA tipo Frahm acoplado con TID.

El rendimiento dinámico del DVA - TID se calculó a partir de la optimización de las variables adimensionales propuestas del conjunto C_2 utilizando los índices H_∞ y H_2 , encontrando que al aplicar la norma de rendimiento H_2 , se obtiene la misma varianza de desplazamiento mínima del edificio SDOF que en el caso estudiado por Barredo et al. (2020). Por otro lado, la formulación del problema de optimización H_∞ originó un sistema de ecuaciones no lineal restringido, mientras que la formulación del problema de optimización H_2 originó un sistema de 4 ecuaciones no lineales sin restricciones. Ambos problemas fueron resueltos utilizando el método de Newton-Raphson para diferentes valores de β .

La solución de los problemas de optimización presentó variables adimensionales que originan parámetros del DVA-TID físicamente posibles de implementar, principalmente para $\beta = \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$. Estos resultados fueron validados y comparados

al acoplar dos redes mecánicas utilizadas extensamente en la literatura; la red mecánica TVMD y amortiguador-inersor-resorte y dos dispositivos de absorción de vibración; el DVA clásico y el TMDI, teniendo en consideración que la implementación teórica del TMDI en este tipo de edificios fue un caso estudiado por Matteo et al. (2019). Se optimizaron los parámetros de estos dispositivos, encontrando que el DVA-TID supera en rendimiento dinámico a los cuatro dispositivos tomados de la literatura. En este caso, el acoplamiento de la red mecánica amortiguador-inersor-resorte proporcionó un rendimiento dinámico casi tan alto como el DVA-TID, teniendo como desventaja valores muy altos en el factor de amortiguamiento ζ_B .

Las ecuaciones diferenciales del sistema propuesto simplificado, fueron resueltas considerando excitación sísmica aproximadamente estacionaria y de ruido blanco Gaussiano. En donde se encontró, que el desplazamiento del edificio SDOF x_s relativo al suelo x_g se minimiza con respecto al desplazamiento obtenido al considerar unicamente el efecto de la base aislada para valores bajos de ζ_s . Adicionalmente, se encontro que el uso del DVA-TID supera en rendimiento dinámico en un 3.766 %, 1.748 %, 18.854 % y en un 11.198 % al acoplamiento de la red mecánica TVMD, la red mecánica amortiguador-inersor-resorte, el uso del DVA clásico y del TMDI respectivamente.

Por otro lado, se realizó un análisis paramétrico de la potencia mecánica disipada por el DVA-TID considerando un evento sísmico en tres tipos de suelo durante un tiempo de 120 segundos. Encontrando que de manera global, en condiciones de suelo medio y firme el dispositivo propuesto disipa menos energía que los dispositivos reportados en la literatura en la mayoría de los valores asignados a ζ_B . Sin embargo, la cantidad de energía disipada en este intervalo de tiempo, se puede aprovechar para convertirla en energía eléctrica. También se encontró que cuando el DVA-TID es diseñado con los parámetros adimensionales obtenidos a partir de la norma H_2 , tiende a disipar menor cantidad de energía en comparación con los dispositivos de la literatura casi para todos los valores de β (excepto para el caso del TVMD), hecho que no ocurre en la mayoría de los casos al utilizar los parámetros de la norma H_∞ . Actualmente no se han reportado casos reales de estructuras aisladas en la base con dispositivos de absorción de vibraciones regenerativos de energía, por lo tanto, se puede realizar un análisis más extenso en la regeneración de energía de este dispositivo, con la finalidad de realizar un diseño experimental a futuro.

Considerando que la regeneración de energía es un objetivo secundario, se concluye que el DVA-TID es el dispositivo más eficiente para el propósito de este trabajo. Mientras que la red mecánica amortiguador-inersor-resorte presenta una efectiva cercana a la del DVA-TID, pero no superior a ella al presentar valores altos de ζ_B , sobre todo, para valores bajos de β . Mientras tanto, la red mecánica TVMD no es tan eficiente en rendimiento dinámico y proporciona prácticamente la misma capacidad de regeneración de energía que el DVA-TID. El DVA clásico y el TMDI, tampoco superan al DVA-TID, pero son una opción viable si el objeto principal de su diseño en este tipo de estructuras es la recolección de energía. A menos que un análisis de estabilidad diga lo contrario.

Trabajo futuro

1. Los efectos del factor de amortiguamiento de la base aislada ζ_s pueden ser considerados en la formulación del problema de optimización, despreciando el hecho de que el amortiguamiento interno del material de la estructura es pequeño frente al efecto de ζ_B , ocasionando el desvanecimiento de ζ_s . Este parámetro puede ser considerado como constante dentro del proceso de diseño óptimo, de esta manera, se optimizarían las mismas variables para cada par de valores constantes de β y ζ_s , a la vez que las variables optimizadas serían de mayor precisión.
2. La parte principal de este trabajo es la optimización de las variables adimensionales del conjunto C_2 . Se calcularon dichas variables simplificando el edificio de múltiples grados de libertad en uno de un sólo grado de libertad, considerando el comportamiento dinámico de las estructuras con aislamiento en la base. Sin embargo, para obtener resultados más precisos en la optimización de los parámetros del dispositivo propuesto (DVA-TID), se recomienda realizar una formulación del problema de optimización para un edificio de base aislada como el que se muestra en la Figura 8.19.

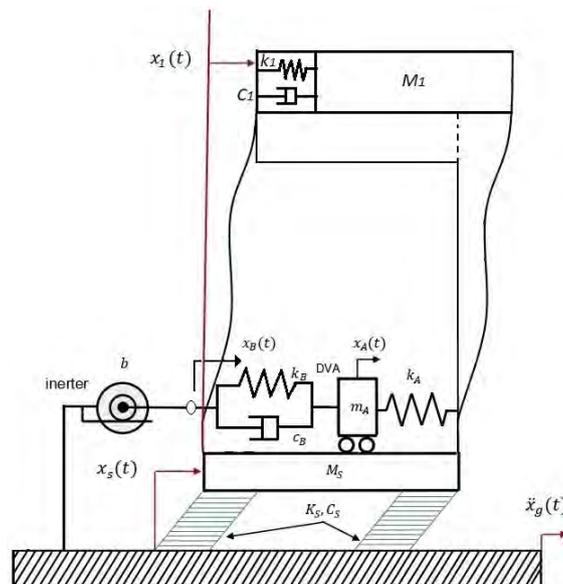


Figura 8.19: Edificio aislado en la base de dos grados de libertad. El elemento inercial M_1 representa la masa de las n plantas de un edificio MDOF.

En la Figura 8.19 M_1 representa la masa total de los n pisos del edificio, k_1 y C_1 la rigidez equivalente y el amortiguamiento viscoso de esta masa respectivamente. El resto de los parámetros de este sistema son los mismos que los propuestos y estudiados a lo largo de este trabajo. De esta manera, se podría ver la discrepancia entre las variables óptimas y la varianza de desplazamiento mínima de la estructura de la Figura 6.3 analizada a lo largo de este trabajo, con respecto a los parámetros óptimos y varianza de desplazamiento mínima de la Figura 8.19.

Un análisis dimensional de este sistema ocasionaría la propuesta de 10 variables adimensionales, por esta razón, no sería posible aplicar la técnica de los puntos fijos extendida, pero sí, la aplicación de la formulación de la norma H_∞ y H_2 .

3. Es recomendable realizar un análisis de estabilidad del sistema propuesto simplificado en un edificio SDOF, utilizando el criterio de Routh–Hurwitz. De esta manera pueden restringirse los valores de β para los cuáles tiene sentido diseñar el DVA tipo Frahm acoplado con TID. Este mismo análisis podría ser aplicado al sistema mecánico propuesto en la Figura 8.19.
4. Hasta el momento el diseño ha presentado resultados teóricos favorables. Sin embargo, después de realizar los trabajos futuros recomendados en los puntos uno, dos y tres, podría considerarse la posibilidad de un diseño experimental y comparar la respuesta dinámica de la estructura en el dominio del tiempo tanto del diseño teórico como del diseño experimental. Un diseño experimental, implicaría una selección de materiales, en el caso de los elementos inerciales, podría aprovecharse la propiedad de densidad de masa, mientras que en el resto de los elementos mecánicos también pueden seleccionarse materiales que estén en sintonía con los valores óptimos de inercia, amortiguamiento y rigidez.

Apéndice A. Edificio de 5 pisos aislado en la base.

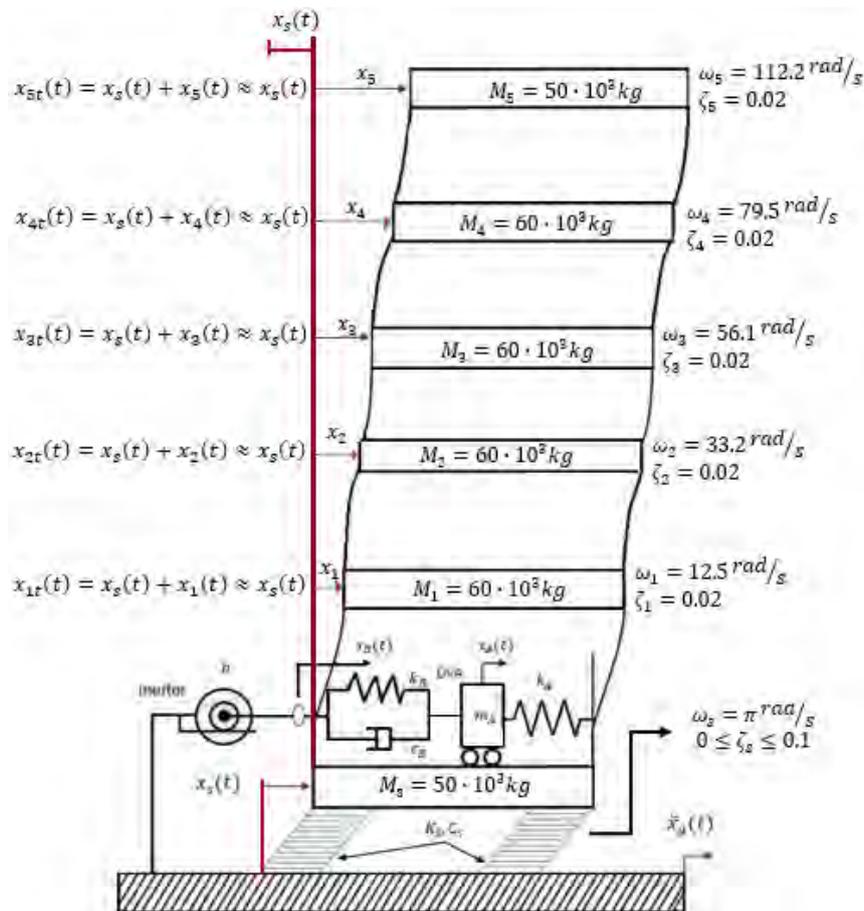


Figura 8.20: Estructura tipo edificio analizada por De Domenico & Ricciardi (2018) y utilizada como referencia en este trabajo.

En la Figura 8.20, se muestra el edificio aislado en la base de 6 grados de libertad, caso estudiado por De Domenico & Ricciardi (2018). Esta estructura se simplificó en un edificio de un grado de libertad de masa M_t como el que se muestra en la Figura 8.21, considerando un comportamiento de cuerpo rígido (Matteo et al, 2019), (Love et al., 2011) y (Ismail, 2018).

La estructura de la Figura 8.21, muestra que el desplazamiento de los 5 pisos del edificio son aproximadamente igual a la magnitud de la coordenada generalizada $x_s(t)$,

con un factor de amortiguamiento ζ_s y una frecuencia natural ω_s distintas a las de la Figura 8.20, mientras que la masa modal es la suma de las masas de la base aislada y de los 5 pisos. Esta Figura representa el mismo edificio que se utilizó a lo largo de este trabajo en el diagrama de la Figura 6.3 en la Subsección 6.1.2.

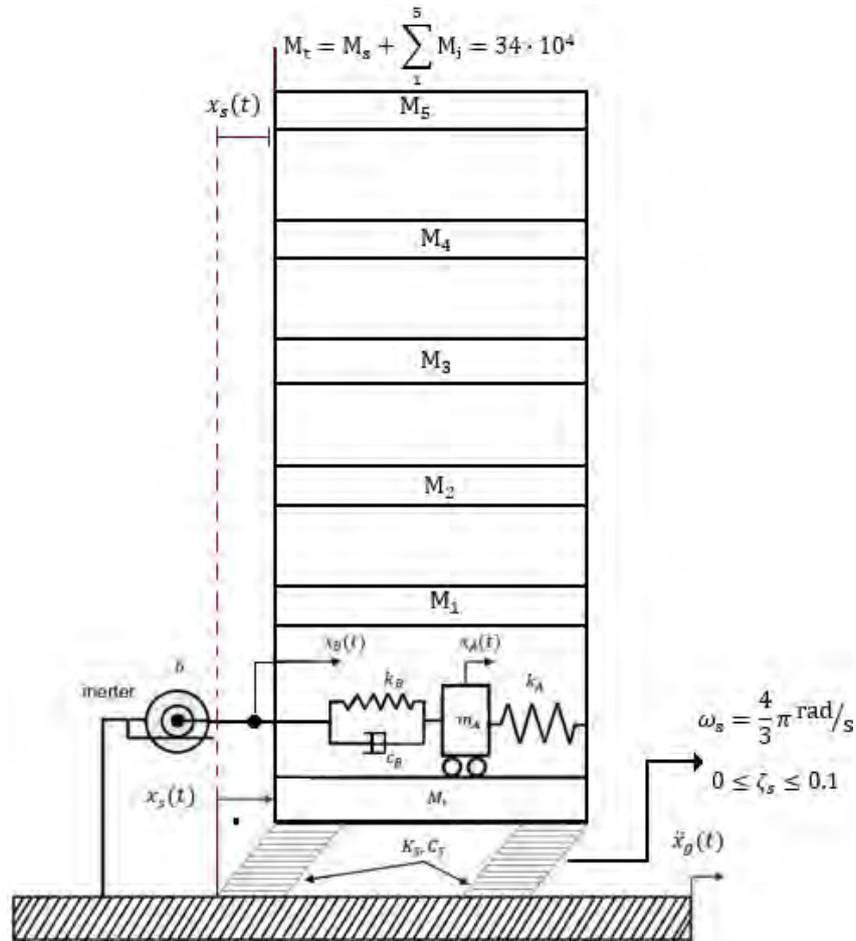


Figura 8.21: Estructura tipo edificio SDOF analizada por De Domenico, D. & Ricciardi (2018), utilizada por Matteo et al. (2019) y en este trabajo.

Apéndice B. Gráficas adicionales.

Vibración sísmica estocástica.

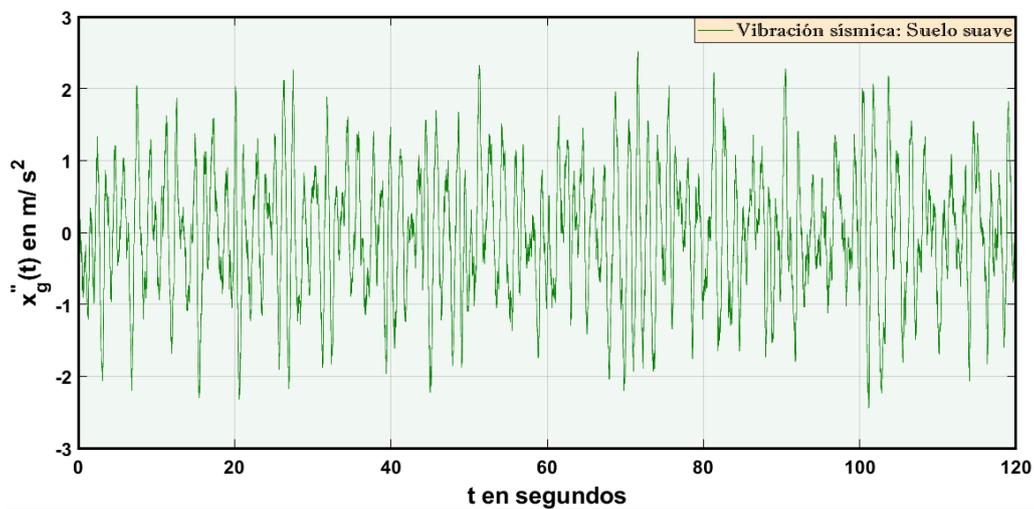


Figura 8.22: Vibración estocástica con densidad espectral de potencia sísmica en suelo suave y media aproximadamente igual a cero.

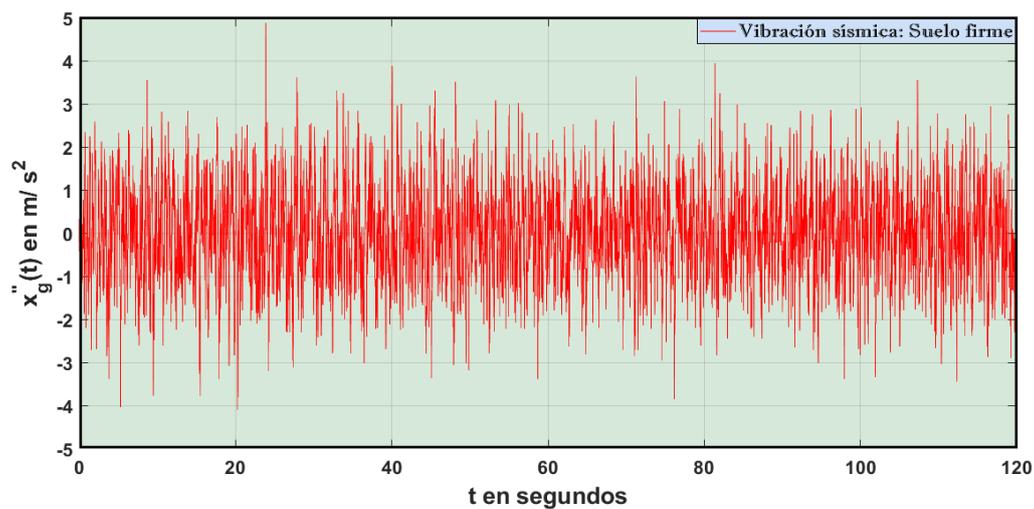


Figura 8.23: Vibración estocástica con densidad espectral de potencia sísmica en suelo firme y media aproximadamente igual a cero.

Respuesta del edificio SDOF aislado en la base en el dominio del tiempo.

Respuesta del edificio SDOF aislado en la base, excitado por la señal sísmica aproximadamente estacionaria de la ecuación 7.15, considerando el espectro sísmico de ruido no blanco con las características del suelo suave y utilizando las variables óptimas para la minimización de energía para $\beta = 0.05$.

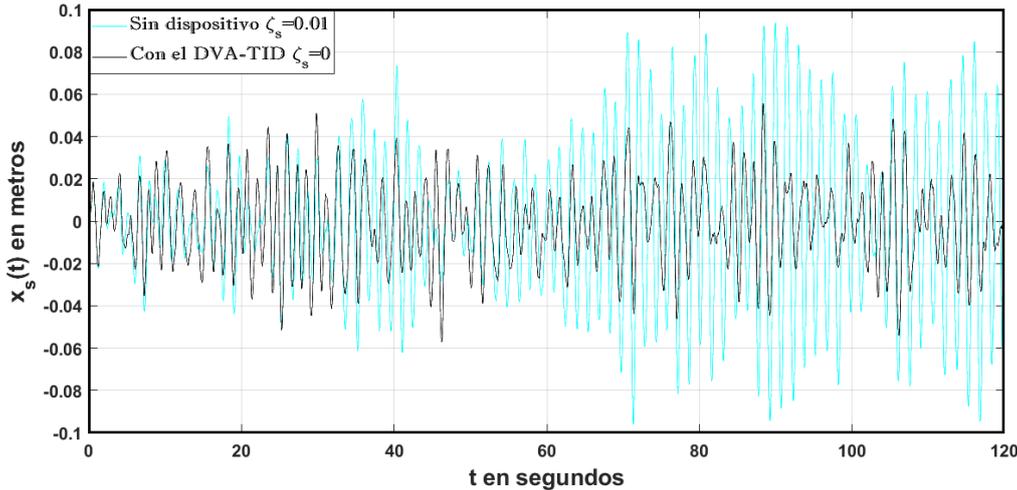


Figura 8.24: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA - TID.

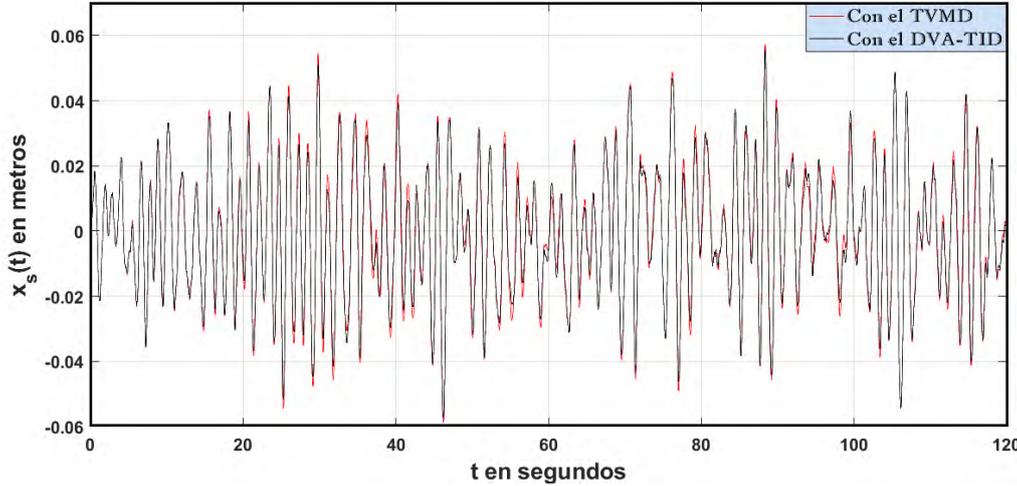


Figura 8.25: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA - TID.

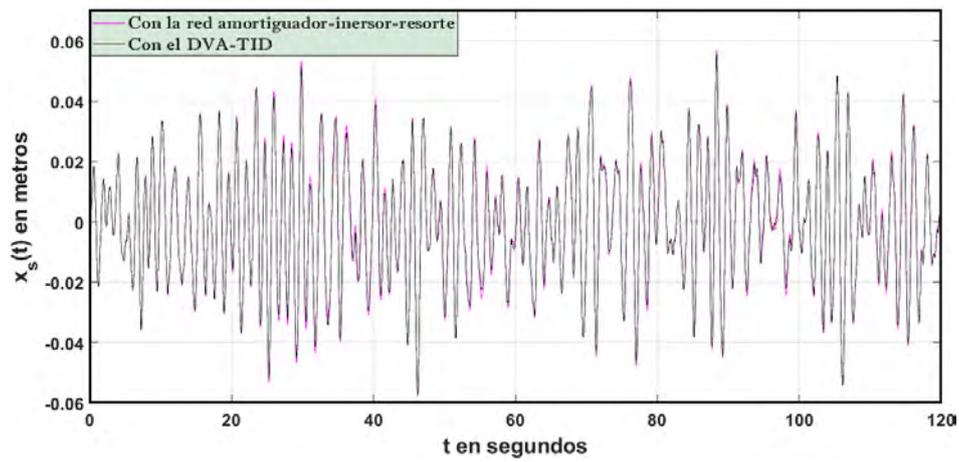


Figura 8.26: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.

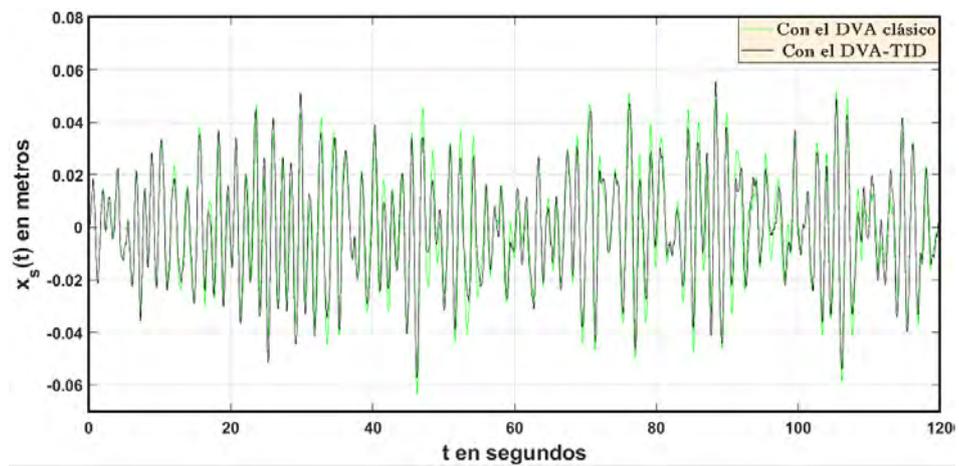


Figura 8.27: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA - TID.

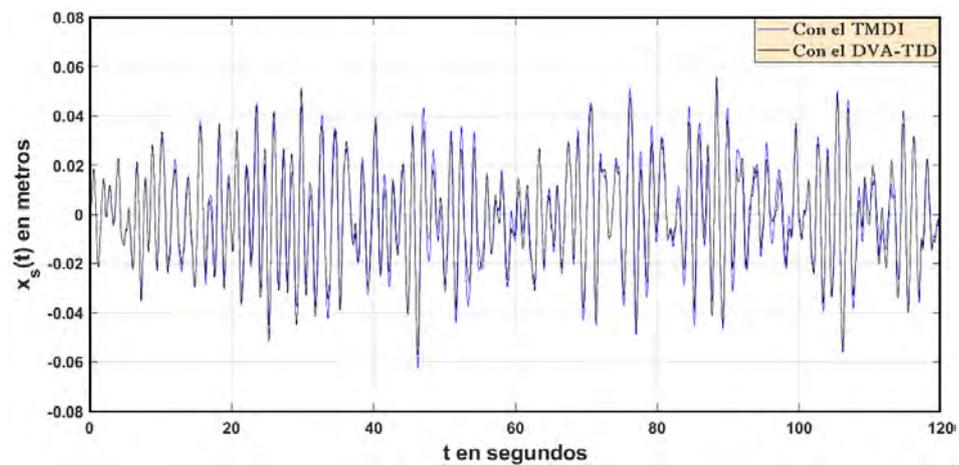


Figura 8.28: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo suave. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA - TID.

Posición del edificio SDOF, excitado por la señal sísmica aproximadamente estacionaria de la ecuación 7.15, considerando el espectro sísmico de ruido no blanco con las características del suelo firme y utilizando las variables óptimas para la minimización de energía para $\beta = 0.05$.

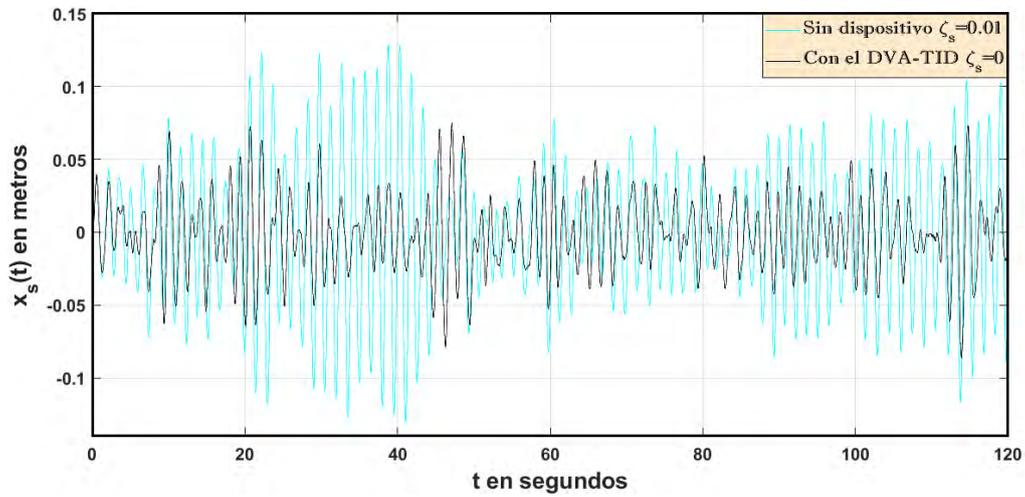


Figura 8.29: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea celeste: Edificio sin controlar. Línea negra: DVA - TID.

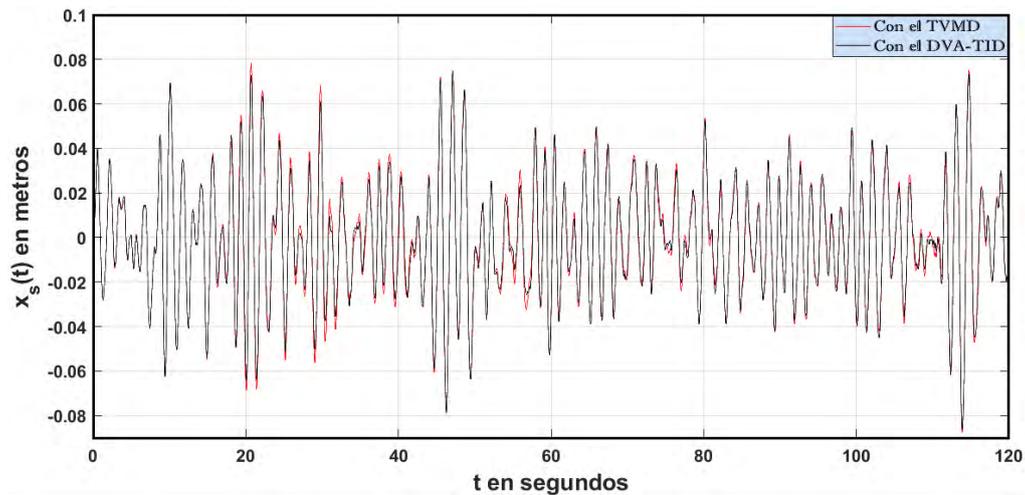


Figura 8.30: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea roja: TVMD. Línea negra: DVA - TID.

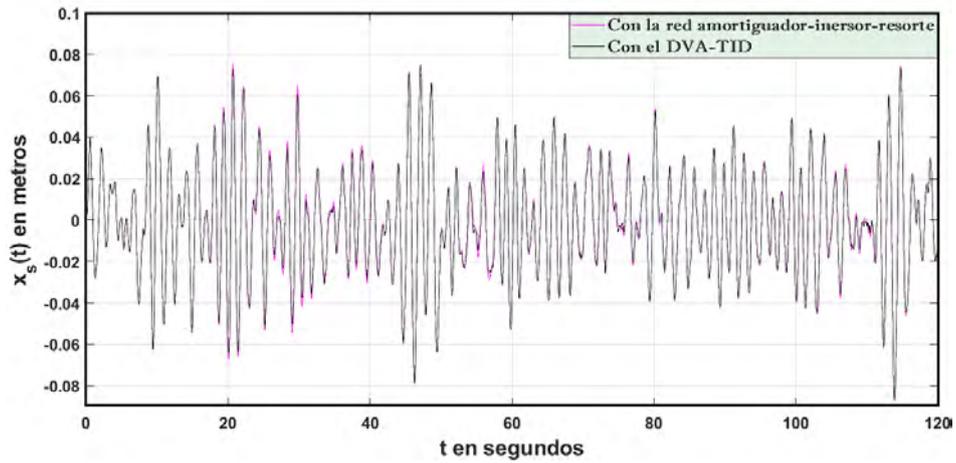


Figura 8.31: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea morada: Amortiguador-inersor-resorte. Línea negra: DVA-TID.

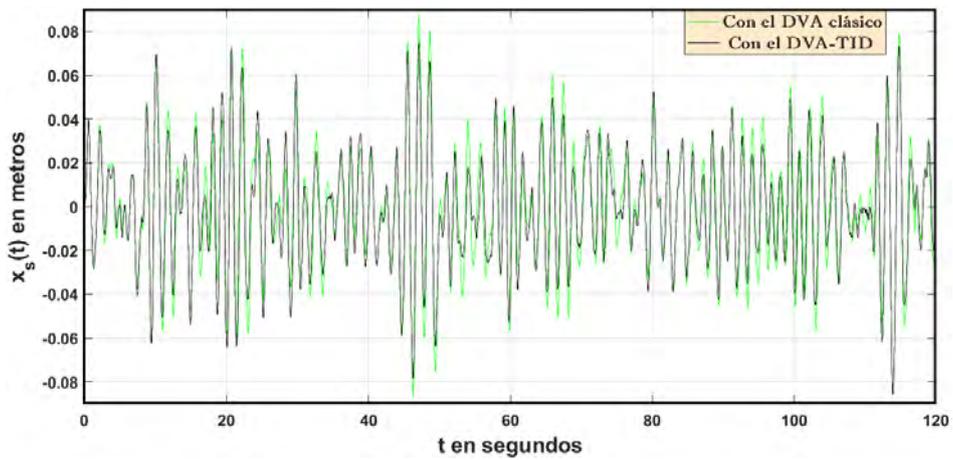


Figura 8.32: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea verde: DVA clásico. Línea negra: DVA - TID.

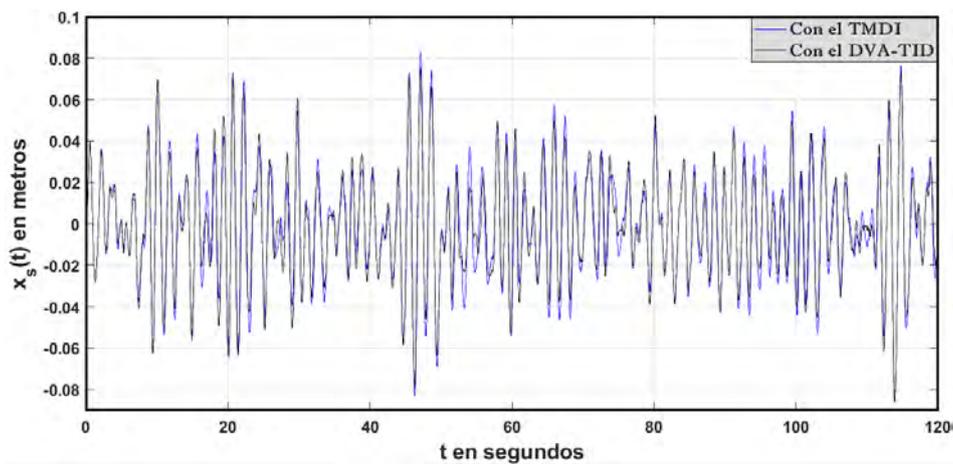


Figura 8.33: Posición del edificio SDOF relativa al suelo considerando excitación sísmica en suelo firme. Línea azul: TMDI. Línea negra: DVA - TID.

Gráficas de disipación de potencia instantánea.

Potencia instantánea disipada al acoplar el DVA - TID y los dispositivos reportados en la literatura, considerando excitación sísmica aproximadamente estacionaria (ecuación 7.15), el espectro sísmico de ruido no blanco con las características de amortiguamiento y frecuencia natural del suelo suave y después del suelo firme, utilizando las variables óptimas para la minimización de energía para $\beta = 0.05$.

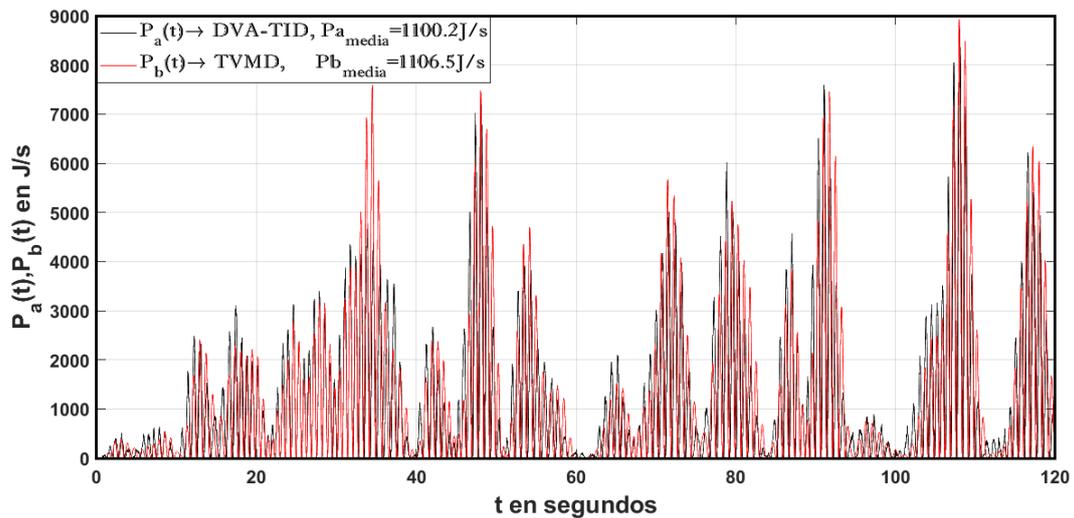


Figura 8.34: Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva roja: TVMD.

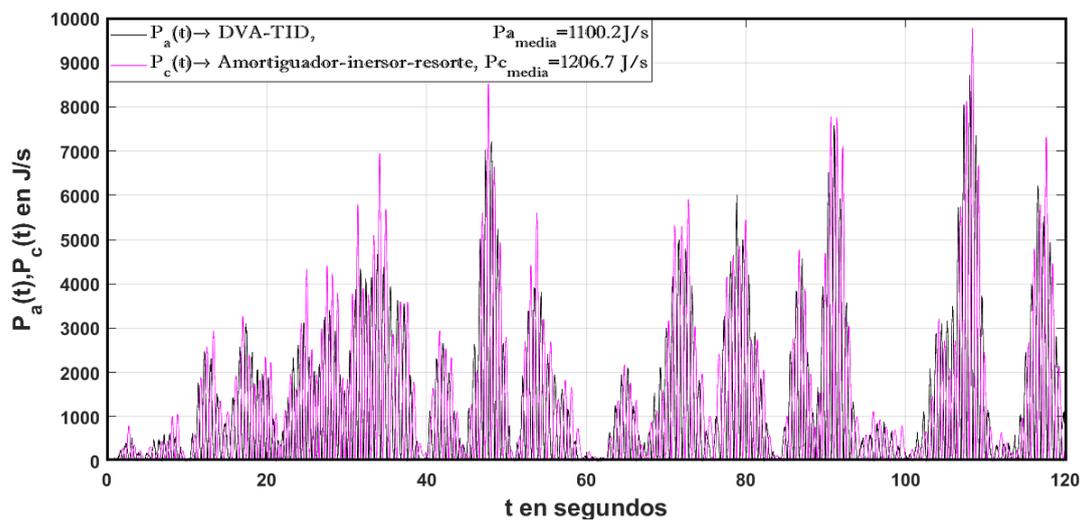


Figura 8.35: Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva morada: Amortiguador-inersor-resorte.

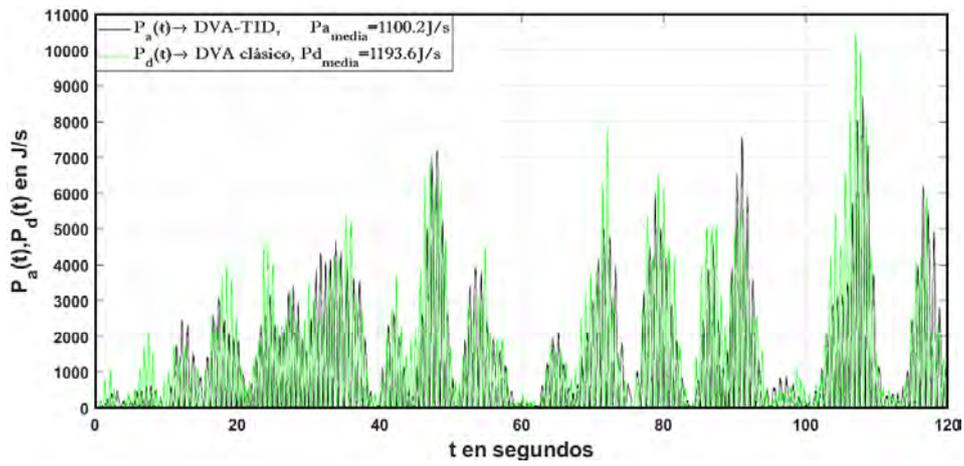


Figura 8.36: Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva verde: DVA clásico.

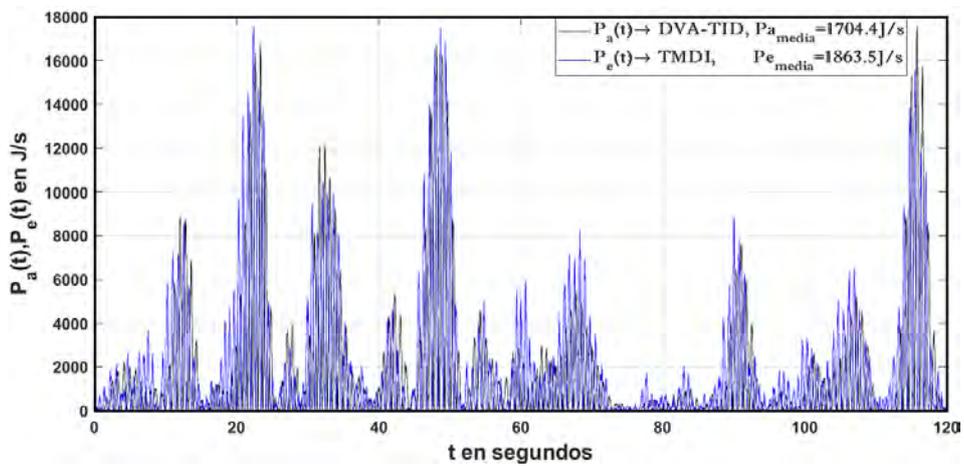


Figura 8.37: Potencia instantánea disipada en suelo tipo suave. Curva negra: DVA - TID. Curva azul: TMDI.

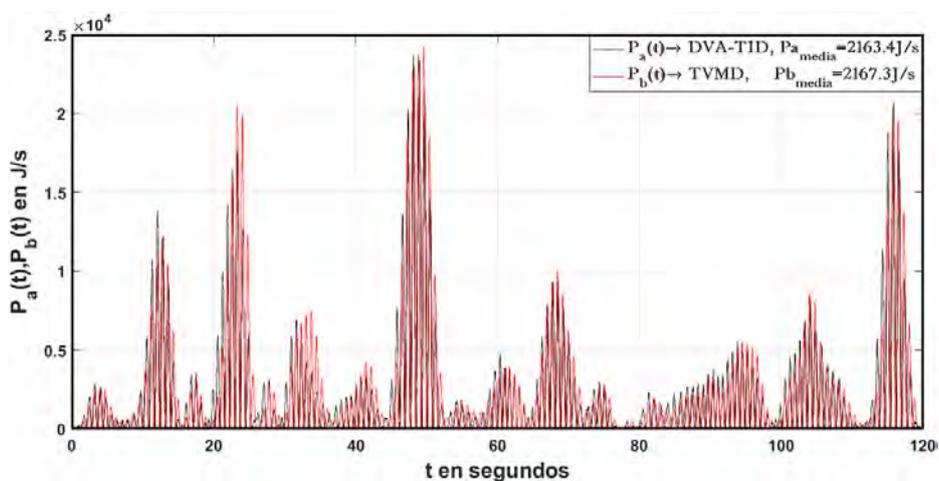


Figura 8.38: Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva roja: TVMD.

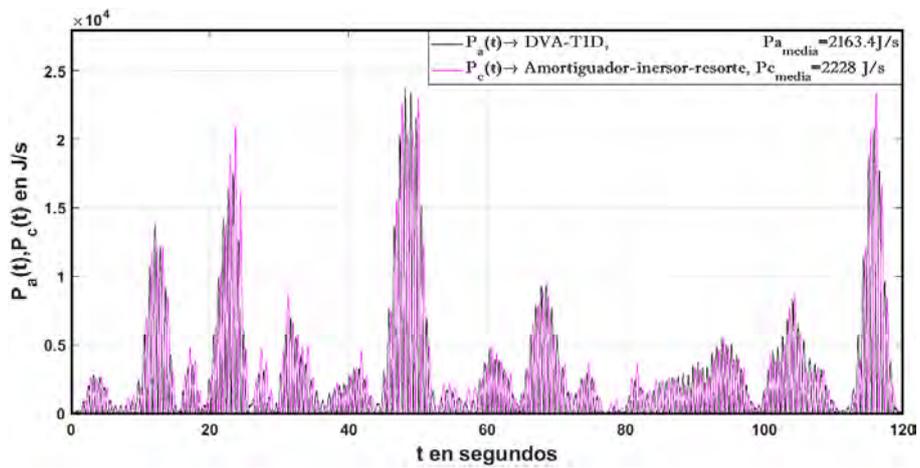


Figura 8.39: Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva morada: Amortiguador-inersor-resorte.

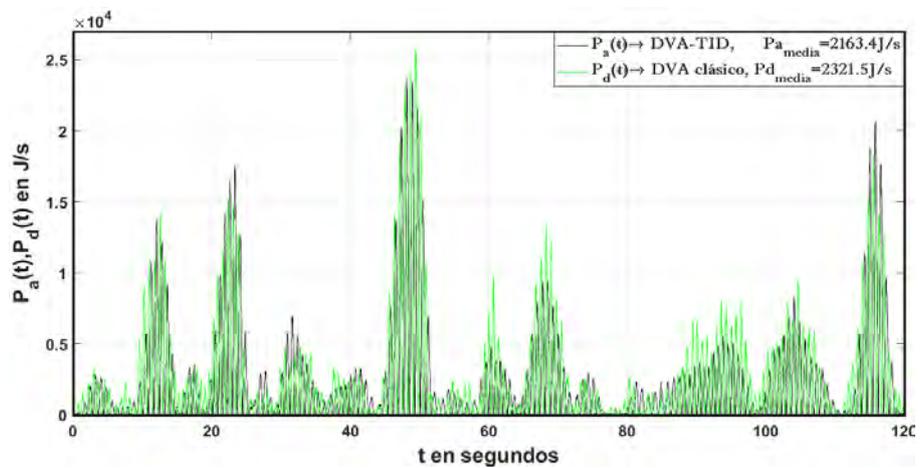


Figura 8.40: Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva verde: DVA clásico.

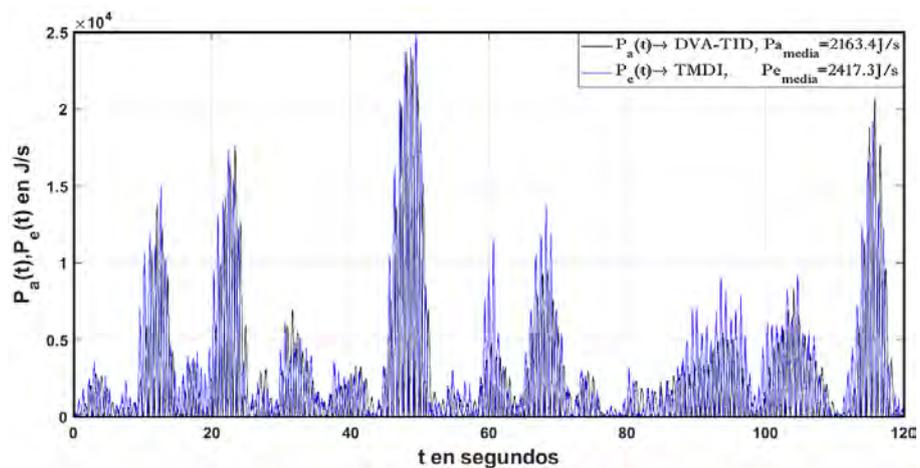


Figura 8.41: Potencia instantánea disipada en suelo tipo firme. Curva negra: DVA - TID. Curva azul: TMDI.

Apéndice C. Tablas.

Tablas de potencia media disipada en el edificio SDOF de base aislada, considerando las propiedades de masa, frecuencia natural y amortiguamiento de la estructura mostrada en la Figura 8.21.

1. Potencia media disipada al acoplar el dispositivo propuesto y los dispositivos tomados de la literatura considerando la señal sísmica aproximadamente estacionaria de la ecuación 7.15, el espectro sísmico de ruido no blanco con las características de frecuencia y amortiguamiento de cada uno de los tres tipos de suelo y utilizando las variables óptimas para la minimización de vibración en resonancia para $\beta = \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$.

Potencia media disipada al controlar el edificio SDOF de base aislada sujeto a un proceso sísmico durante $t = 120$ segundos considerando las variables óptimas de la norma H_{∞} .				
Dispositivo	Variables óptimas	Potencia media disipada (I/s)		
		Suelo suave	Suelo medio	Suelo firme
DVA tipo Frahm acoplado con TID (propuesto en este trabajo).	$\beta = 0.01$	728.871	1326.764	1761.466
	$\beta = 0.02$	818.094	1391.556	1950.779
	$\beta = 0.03$	915.647	1517.412	2062.354
	$\beta = 0.04$	1017.887	1621.895	2120.462
	$\beta = 0.05$	1095.189	1691.755	2155.874
Acoplamiento de la red mecánica TVMD (Tuned Viscous Mass Damper).	$\beta = 0.01$	729.533	1319.161	1747.642
	$\beta = 0.02$	814.991	1374.681	1924.915
	$\beta = 0.03$	888.238	1485.684	2044.345
	$\beta = 0.04$	980.410	1597.510	2114.331
	$\beta = 0.05$	1064.342	1680.486	2158.064
Acoplamiento de la red mecánica amortiguador inersor resorte.	$\beta = 0.01$	736.442	1322.888	1764.601
	$\beta = 0.02$	836.814	1399.865	1966.198
	$\beta = 0.03$	950.561	1548.663	2095.810
	$\beta = 0.04$	1078.549	1683.002	2171.705
	$\beta = 0.05$	1184.174	1776.534	2221.841

Tabla 8.1: Potencia media disipada en el edificio SDOF con frecuencia natural $\omega_s = \frac{4}{3}\pi rad/s$, $\zeta_s = 0$ y $M_t = 34 \cdot 10^4 kg$.

2. Potencia media disipada al acoplar el dispositivo propuesto y los dispositivos tomados de la literatura considerando la señal sísmica aproximadamente estacionaria de la ecuación 7.15, el espectro sísmico de ruido no blanco con las características de frecuencia y amortiguamiento de cada uno de los tres tipos de suelo y utilizando las variables óptimas para la minimización de energía para $\beta = \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$.

Potencia media disipada al controlar el edificio SDOF de base aislada sujeto a un proceso sísmico durante $t = 120$ segundos considerando las variables óptimas de la norma H_2 .				
Dispositivo	Variables óptimas	Potencia media disipada (J/s)		
		Suelo suave	Suelo medio	Suelo firme
DVA tipo Frahm acoplado con TID (propuesto en este trabajo).	$\beta = 0.01$	731.182	1301.966	1718.144
	$\beta = 0.02$	811.066	1391.105	1965.294
	$\beta = 0.03$	911.914	1541.892	2088.258
	$\beta = 0.04$	1024.637	1648.432	2139.086
	$\beta = 0.05$	1100.179	1704.353	2163.420
Acoplamiento de la red mecánica TVMD (Tuned Viscous Mass Damper).	$\beta = 0.01$	734.333	1293.318	1707.851
	$\beta = 0.02$	796.846	1364.587	1936.089
	$\beta = 0.03$	874.985	1507.690	2067.954
	$\beta = 0.04$	1002.071	1650.583	2135.460
	$\beta = 0.05$	1106.465	1730.034	2167.348
Acoplamiento de la red mecánica amortiguador inersor resorte.	$\beta = 0.01$	739.474	1296.602	1721.296
	$\beta = 0.02$	820.720	1392.686	1980.487
	$\beta = 0.03$	939.867	1573.669	2121.379
	$\beta = 0.04$	1094.670	1729.184	2193.178
	$\beta = 0.05$	1206.726	1809.778	2227.955
Uso del DVA clásico (Dynamic Vibration Absorber)	$\beta = 0.01$	777.272	1441.373	1870.672
	$\beta = 0.02$	882.853	1434.891	1932.106
	$\beta = 0.03$	986.638	1513.421	2060.985
	$\beta = 0.04$	1089.478	1629.847	2198.488
	$\beta = 0.05$	1193.585	1758.803	2321.482
Uso del TMDI (Tuned Mass Damper Inerter)	$\beta = 0.01$	779.887	1439.937	1871.553
	$\beta = 0.02$	895.358	1440.888	1941.688
	$\beta = 0.03$	1014.530	1541.583	2094.879
	$\beta = 0.04$	1140.895	1692.125	2259.927
	$\beta = 0.05$	1276.554	1863.501	2417.335

Tabla 8.2: Potencia media disipada en el edificio SDOF con frecuencia natural $\omega_s = \frac{4}{3}\pi rad/s$, $\zeta_s = 0$ y $M_t = 34 \cdot 10^4 kg$.

Referencias

Abdelkareem, MA, Xu, L., Guo, X., Ali, MKA, Elagouz, A., Hassan, MA, ... & Zou, J. (2018). Energy harvesting sensitivity analysis and assessment of the potential power and full car dynamics for different road modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 110, 307-332.

Asami, T. (2017). Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers arranged in series or in parallel. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139.

Asami, T., & Nishihara, O. (2003). Closed-form exact solution to H_∞ optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems). *J. Vib. Acoust.*, 125(3), 398-405.

Asami, T., Mizukawa, Y., & Ise, T. (2018). Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers minimizing the mobility transfer function. *Journal of Vibration and Acoustics*, 140(6).

Asami, T., Nishihara, O., & Baz, A. M. (2002). Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems. *J. Vib. Acoust.*, 124(2), 284-295.

Barredo Hernández, E. (2016). Análisis del Efecto de un Inersor en la Respuesta Dinámica de Sistemas Mecánicos en Resonancia. Tecnológico Nacional de México, CENIDET.

Barredo Hernández, E. (2020). Cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica. Tecnológico Nacional de México, CENIDET.

Barredo, E., Blanco, A., Colín, J., Penagos, V. M., Abúndez, A., Vela, L. G., ... & Mayén, J. (2018). Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 144, 41-53.

Barredo, E., Larios, J. M., Colín, J., Mayén, J., Flores-Hernández, A. A., & Arias-Montiel, M. (2020). A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 485, 115583.

Barredo, E., Larios, J. M., Mayén, J., Flores-Hernández, A. A., Colín, J., & Montiel, M. A. (2019). Optimal design for high-performance passive dynamic vibration absorbers under random vibration. *Engineering Structures*, 195, 469-489.

Brzeski, P., Lazarek, M., & Perlikowski, P. (2017). Experimental study of the novel tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance. *Journal of Sound and Vibration*, 404, 47-57.

Brzeski, P., Pavlovskaia, E., Kapitaniak, T., & Perlikowski, P. (2015). The application of inerter in tuned mass absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 70, 20-29.

Buchholdt, H., & Nejad, S. M. (2012). *Structural Dynamics for Engineers* Second edition. Londres: ICE Publishing.

Cheung, Y. L., & Wong, W. O. (2011). H2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation. *Journal of sound and vibration*, 330(6), 1039-1044.

Clough, R. W., & Penzien, J. (2003). *Dynamics of structures* Third Edition. United States of America: Computers & Structures, Inc.

De Domenico, D. & Ricciardi, G. (2018). An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (TMDI). *Ingeniería sísmica y dinámica estructural*, 47 (5), 1169-1192.

Di Matteo, A., Masnata, C., & Pirrotta, A. (2019). Simplified analytical solution for the optimal design of tuned mass damper inerter for base isolated structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 134, 106337.

Gao, P., Xiang, C., Liu, H., Walker, P., & Zhang, N. (2019). Design of the frequency tuning scheme for a semi-active vibration absorber. *Mechanism and Machine Theory*, 140, 641-653.

Garevski, MA, Kelly, JM & Zisi, NV (2000). Analysis of 3-D vibrations of the base isolated school building "Pestalozzi" by analytical and experimental approach. En *Actas del 12 ° WCEE*, Auckland, Nueva Zelanda .

Ghosh, A., & Basu, B. (2007). A closed-form optimal tuning criterion for TMD in damped structures. *Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for the Control of Structures*, 14(4), 681-692.

Giaralis, A., & Petrini, F. (2017). Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter. *Journal of Structural Engineering*, 143(9), 04017127.

Hu, Y., & Chen, M. Z. (2015). Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 99, 297-307.

Ikago, K., Saito, K., & Inoue, N. (2012). Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(3), 453-474.

Ismail, M. (2018). Seismic isolation of structures. Part I: Concept, review and a recent development. *Hormigón y Acero*, 69 (285), 147-161.

Jin, X., Chen, M. Z., & Huang, Z. (2016). Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 119, 80-87.

Lazar, I. F., Neild, S. A., & Wagg, D. J. (2016). Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures*, 122, 62-71.

Lazarek, M., Brzeski, P., & Perlikowski, P. (2018). Design and identification of parameters of tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance. *Mechanism and Machine Theory*, 119, 161-173.

Liang, Q., Li, L., & Zhang, Y. (2021). Structural optimal hybrid control strategies employing dynamic dual units: inerter and spring. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*.

Love, J. S., Tait, M. J., & Toopchi-Nezhad, H. (2011). A hybrid structural control system using a tuned liquid damper to reduce the wind induced motion of a base isolated structure. *Engineering Structures*, 33(3), 738-746.

Madhav, C., & Ali, S. F. (2016). Harvesting energy from vibration absorber under random excitations. *IFAC-PapersOnLine*, 49(1), 807-812.

Marian, L., & Giaralis, A. (2014). Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 38, 156-164.

Mazón Valadez, C. (2019). Diseño y Construcción de un Sistema de Amortiguamiento con Inersor y Fluido Reológico. *Tecnológico Nacional de México, CENIDET*.

Palacios-Quiñonero, F., Rubió-Massegú, J., Rossell, J. M., & Karimi, H. R. (2017). Advanced computational design of shared tuned mass-inerter dampers for vibration control of adjacent multi-story structures. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 13366-13371.

Papageorgiou, C., Houghton, N. E., & Smith, M. C. (2009). Experimental testing and analysis of inerter devices. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 131(1).

Petrini, F., Giaralis, A., & Wang, Z. (2020). Optimal tuned mass-damper-inerter (TM-DI) design in wind-excited tall buildings for occupants' comfort serviceability performance and energy harvesting. *Engineering Structures*, 204, 109904.

Rao, S. S. (2012). *Vibraciones Mecánicas Quinta Edición*. México: Pearson Educación.

Ren, M. Z. (2001). A variant design of the dynamic vibration absorber. *Journal of sound and vibration*, 245(4), 762-770.

Shen, Y., Liu, Y., Chen, L., & Yang, X. (2019). Optimal design and experimental research of vehicle suspension based on a hydraulic electric inerter. *Mechatronics*, 61, 12-19.

Shen, Y., Peng, H., Li, X., & Yang, S. (2017). Analytically optimal parameters of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 85, 193-203.

Shinozuka, M., & Deodatis, G. (1991). Simulation of stochastic processes by spectral representation.

Smith, M. C. (2002). Synthesis of mechanical networks: the inerter. *IEEE Transactions on automatic control*, 47(10), 1648-1662.

Swift, S. J., Smith, M. C., Glover, A. R., Papageorgiou, C., Gartner, B., & Houghton, N. E. (2013). Design and modelling of a fluid inerter. *International Journal of Control*, 86(11), 2035-2051.

Tipuric, M., Deastra, P., Wagg, D., & Sims, N. (2018, March). Semi-active inerters using magnetorheological fluid: a feasibility study. In *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems XII* (Vol. 10595, p. 105951H). International Society for Optics and Photonics.

Tursun, M., & Eşkinat, E. (2014). H2 optimization of damped-vibration absorbers for suppressing vibrations in beams with constrained minimization. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136(2).

Zill Dennis G. & Wright Warren S. (2011). *Cálculo de varias variables Cuarta Edición*. Ciudad de México: Mc Graw Hill

Zuo, H., Bi, K., Hao, H., & Ma, R. (2021). Influences of ground motion parameters and structural damping on the optimum design of inerter-based tuned mass dampers. *Engineering Structures*, 227, 111422.

Zuo, L., & Nayfeh, S. A. (2006). The two-degree-of-freedom tuned-mass damper for suppression of single-mode vibration under random and harmonic excitation.