



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Modelado de máquinas eléctricas considerando los efectos del  
circuito magnético

presentada por

**Ing. Elizabeth Cavita Huerta**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica**

Director de tesis

**Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez**

Codirector de tesis

**Dr. Carlos Daniel García Beltrán**

Cuernavaca, Morelos, México. Enero de 2020.



"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Mor., 15/enero/2020  
No. de Oficio: DIE/026/2020  
Asunto: Aceptación de documentos de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ing. Elizabeth Cavita Huerta**, con número de control **M17CE053** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Modelado de Máquinas Eléctricas Considerando los Efectos del Circuito Magnético."** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez  
Doctor en Ingeniería  
Cédula profesional 3431842

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Daniel García Beltrán  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 8699605

REVISOR 1

Dr. José Francisco Gómez Aguilar  
Doctor en Física  
Cédula profesional 9124781

REVISOR 2

Dr. Juan Reyes Reyes  
Doctor en Ciencias en la Especialidad de  
Control Automático  
Cédula profesional 4214833

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera- Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Estudiante  
Expediente

MPS/Irr.



"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos, **7 Enero 2020**

OFICIO No. SAC/026/2020  
Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. ELIZABETH CAVITA HUERTA  
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "*Modelado de Máquinas Eléctricas Considerando los Efectos del Circuito Magnético*", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE  
Excelencia en Educación Tecnológica@.  
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



SEP TecNM  
CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente.

CVGR/chg

# Dedicatoria

*A Samuel, porque eres el motor que me impulsa a nunca rendirme, ejemplo de amor infinito.  
Te amo hijo, espero que en un futuro esto sea ejemplo de superación para ti.*

# Agradecimientos

Agradezco a mis padres, **César** y **Dolores** por su amor y apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida, por el consejo y amistad que siempre me han brindado. Todas las metas logradas son gracias a ustedes, estoy sumamente orgullosa de ser su hija y los amo con todo el corazón.

A mis hermanos **César** y **Felipe** que han dado alegría a mis días con sus ocurrencias, recordandome que la etapa más bonita de una persona es la niñez, jamás pierdan su entusiasmo y ganas de cumplir todos sus sueños. Espero ser una buena hermana mayor.

A mis asesores, **Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez** y el **Dr. Carlos Daniel Garcia Beltrán** quienes me guiaron, apoyaron y siempre me brindaron su amistad. Gracias por sus enseñanzas y ayuda.

A mis revisores el **Dr. Francisco Gómez Aguilar** y el **Dr. Juan Reyes Reyes** cuyos comentarios y observaciones fueron muy valiosos para el desarrollo del presente trabajo.

De manera especial a **David** por acompañarme a lo largo de esta etapa, por todo el apoyo y amor gracias.

A mis amigos y compañeros de generación, **Jonathan, Diana, Erick, Eusebio, Isaac, Juan, Sabido, Henry, Citlaly** y **Christian** por haber encontrado en ustedes una segunda familia lejos de casa. Estaré por siempre agradecida por el apoyo brindado a Sam y a mi en momentos difíciles.

A la **Lic. Lorena** por su apoyo y ayuda a lo largo de mi estancia en Cenidet.

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (**CONACYT**) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

Finalmente, agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (**CENIDET**) por darme la oportunidad de estudiar y prepararme, así como de tener un ambiente muy agradable de trabajo y una atención excelente en todo momento.

# Resumen

Generalmente el comportamiento dinámico del motor de inducción (M.I.) es representado por modelos matemáticos que en su mayoría consideran el efecto del circuito magnético lineal. Estos modelos permiten obtener una respuesta que se aproxima al comportamiento real de la máquina en la mayoría de las aplicaciones, sin embargo en aplicaciones que requieren de un alto desempeño dinámico y donde la máquina trabaja fuera de la zona nominal es necesario tomar en cuenta las no linealidades del circuito magnético para obtener respuestas más acertadas.

Este trabajo de tesis presenta el modelo de un M.I. tipo jaula de ardilla en coordenadas abc, basado en la formulación Euler- Lagange (E-L) considerando la parte del circuito magnético no lineal, ya que se incluye el efecto de la saturación magnética; de esta manera se obtuvo un modelo que describe de manera más precisa el comportamiento de la máquina.

Al desarrollar la ecuación de E-L para cada grado de libertad se obtuvo el modelo matemático de la máquina y al resolver el sistema de ecuaciones resultantes se obtuvo el comportamiento dinámico del mismo. Aprovechando la estructura de las ecuaciones de E-L se incluyó el uso de grados de saturación como la relación entre la corriente saturada necesaria para producir el enlace de flujo en una bobina determinada y la corriente lineal correspondiente a la corriente asociada al flujo de operación, cuando la característica magnética es una línea recta que parte del origen. De esta manera las matrices de inductancias del modelo abc del M.I. se ven modificadas por los grados de saturación.

# Abstract

Usually the dynamic behavior of induction motor is represent for mathematical models that mostly consider as lineal the effect of magnetic circuit of the machine. These models allow obtain an approximate response in the most of the applications, however in the applications that require high dynamic performance and the performance machine is out of nominal zone it is necessary to take into account nonlinearities of magnetic circuit for obtain more accurate responses.

This research presents the model of an induction machine squirrel cage type in abc coordinates, based in the Euler Lagrange formulation considering the nonlinear magnetic circuit, including the effect of magnetic saturation; in this way a model was obtained that describes more accurate the behavior of the machine.

When develop the Euler Lagrange equation for each degree of freedom the model of the machine was obtained and by solve the system of resulting equations the dynamic behavior of it was obtained. Taking advantage of the structure of Euler Lagrange equations the use of saturation degrees was included as the ratio between the saturated current necessary to produce the magnetic flux link in a given coil and the linear current corresponding to the current associated with the operation flux, when magnetic feature is a straight line that starts from origin. In this way the inductance arrays of the abc model of the induction motor are modified by the saturation degrees.

# Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	IX
Nomenclatura	X
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.3. Estado del arte . . . . .	4
1.4. Hipótesis . . . . .	5
1.5. Objetivos . . . . .	5
1.5.1. General . . . . .	5
1.5.2. Específicos . . . . .	5
1.6. Metas . . . . .	6
1.7. Justificación . . . . .	6
1.8. Alcance . . . . .	6
1.9. Organización del documento . . . . .	7
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>8</b>
2.1. Máquinas eléctricas giratorias . . . . .	8
2.2. Motor de inducción (M.I.) trifásico . . . . .	10
2.2.1. Constitución física . . . . .	10
2.2.2. Principio de funcionamiento . . . . .	13
2.3. Saturación magnética . . . . .	14
2.3.1. Determinación de la curva de saturación en un M.I. . . . .	15
2.4. Materiales ferromagnéticos . . . . .	16
2.5. Armónicos . . . . .	17
2.6. Modelado con enfoque energético E-L . . . . .	19
2.7. Ecuaciones de E-L en sistemas eléctricos . . . . .	22
2.7.1. Análisis por nodos . . . . .	24
2.7.2. Análisis por mallas . . . . .	25
2.8. Análisis matemático de un circuito magnético, basado en el enfoque E-L . . . . .	25
2.8.1. Circuito equivalente . . . . .	27
2.8.2. Ecuaciones de E-L obtenidas . . . . .	28

<b>3. Modelado y simulación del M.I. considerando circuito magnético lineal</b>	<b>30</b>
3.1. Modelo matemático en coordenadas abc, basado en leyes del electromagnetismo	30
3.2. Modelo matemático en coordenadas abc, basado en E-L . . . . .	35
3.3. Comparación de resultados de ambos modelos . . . . .	39
<b>4. Pruebas experimentales</b>	<b>42</b>
4.1. Caracterización del motor de inducción del caso de estudio . . . . .	42
4.2. Características del motor de inducción . . . . .	43
4.3. Prueba de vacío . . . . .	44
4.4. Prueba de rotor bloqueado . . . . .	45
4.5. Prueba de resistencia de CD . . . . .	46
4.6. Cálculos para obtención de parámetros . . . . .	47
4.6.1. Parámetros característicos obtenidos a partir de las pruebas experimentales	49
4.7. Sistema en por unidad (P.U.) . . . . .	49
4.7.1. Parámetros característicos del M.I. en (P.U.) . . . . .	49
4.8. Curva de saturación característica del M.I. en (P.U.) . . . . .	50
4.8.1. Parámetros característicos obtenidos a partir de la curva de saturación en (P.U.) . . . . .	51
<b>5. Modelo del motor de inducción, considerando circuito magnético no lineal</b>	<b>52</b>
5.1. Modelo matemático considerando la saturación magnética en coordenadas abc, basado en el enfoque E-L . . . . .	53
5.2. Determinación de la corriente lineal y saturada . . . . .	54
5.3. Modificación de las ecuaciones por el efecto de la saturación magnética . . . . .	54
<b>6. Resultados de simulación considerando el enfoque E-L, del motor del caso de estudio</b>	<b>61</b>
6.1. Simulación del modelo matemático, considerando circuito magnético lineal en (P.U.) . . . . .	61
6.2. Simulación del modelo matemático, considerando el efecto de la saturación mag- nética en (P.U.) . . . . .	63
6.3. Análisis de contenido armónico . . . . .	64
6.4. Comparación de resultados de ambos modelos . . . . .	68
<b>7. Conclusiones</b>	<b>69</b>
7.1. Aportaciones . . . . .	69
7.2. Conclusiones . . . . .	69
7.3. Trabajos futuros . . . . .	70
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>

# Índice de figuras

2.1. Clasificación de máquinas eléctricas. . . . .	8
2.2. Constitución de la máquina eléctrica giratoria . . . . .	9
2.3. Núcleo de estator laminado. . . . .	10
2.4. Estator de un motor de inducción. . . . .	11
2.5. Rotor tipo jaula de ardilla . . . . .	11
2.6. Rotor tipo devanado . . . . .	12
2.7. Tipos de bobina . . . . .	12
2.8. Partes del M.I. . . . .	13
2.9. Curva de saturación . . . . .	14
2.10. Características magnéticas. . . . .	16
2.11. Curva de magnetización lineal vs saturada. . . . .	17
2.12. Onda cuadrada con sus 7 primeros armónicos. . . . .	18
2.13. Entrehierro . . . . .	26
2.14. Circuito magnético con entrehierro. . . . .	27
2.15. Circuito eléctrico (a) y Circuito magnético (b). . . . .	27
2.16. Circuito E-L. . . . .	28
3.1. Esquema del M.I. . . . .	32
3.2. Diagrama eléctrico de los devanados del estator y rotor del M.I. . . . .	32
3.3. Metodología E-L. . . . .	36
3.4. Corrientes del estator a diferentes porcentajes de carga. . . . .	40
3.5. Corrientes del rotor a diferentes porcentajes de carga. . . . .	40
3.6. Par y velocidad sujetos a diferentes porcentajes de carga. . . . .	41
4.1. Circuito equivalente de una fase del M.I. . . . .	43
4.2. Circuito prueba de vacío . . . . .	44
4.3. Circuito prueba de rotor bloqueado . . . . .	45
4.4. Circuito prueba de resistencia de CD conexión Y. . . . .	46
4.5. Circuito prueba de resistencia de CD conexión $\Delta$ . . . . .	47
4.6. Curva de magnetización característica . . . . .	50
5.1. Grados de saturación. . . . .	55
5.2. Diagrama obtención del grado de saturación $S_{as}$ . . . . .	57
5.3. Diagrama modelo abc con saturación. . . . .	59
5.4. Modelo con saturación. . . . .	60
6.1. Corrientes de magnetización de vacío en P.U. . . . .	62

6.2.	Velocidad y par en vacío en P.U. . . . . .	62
6.3.	Corrientes de magnetización en vacío con saturación en P.U. . . . . .	63
6.4.	Velocidad y par en vacío con saturación en P.U. . . . . .	64
6.5.	Transformada FFT. . . . .	65
6.6.	Análisis FFT corriente fase a del estator. . . . .	66
6.7.	Análisis FFT corriente fase b del estator. . . . .	66
6.8.	Análisis FFT corriente fase c del estator. . . . .	67
6.9.	Comparación de corrientes en vacío del estator. . . . .	68

# Índice de tablas

2.1. Funciones de energía del capacitor. . . . .	23
2.2. Funciones de energía del inductor. . . . .	24
2.3. Funciones de energía del disipador. . . . .	24
3.1. Parámetros del M.I. tomados de la literatura. . . . .	39
4.1. Datos nominales del M.I. . . . .	43
4.2. Valores base del M.I. . . . .	44
4.3. Datos prueba de vacío. . . . .	45
4.4. Datos prueba de rotor bloqueado. . . . .	46
4.5. Datos prueba de CD. . . . .	47
4.6. Relación entre reactancias. . . . .	48
4.7. Parámetros característicos del M.I. . . . .	49
4.8. Parámetros característicos del M.I. en P.U. . . . .	50
4.9. Datos curva de magnetización. . . . .	51
6.1. Datos de contenido armónico en el M.I. . . . .	67

# Nomenclatura

$M.I.$	—	motor de inducción.
$EL$	—	Euler Lagrange.
$P.U.$	—	valor por unidad.
$FFT$	—	transformada rápida de Fourier.
$THD$	—	tasa de distorsión armónica.
$f_s$	—	frecuencia del estator.
$f_r$	—	frecuencia del rotor.
$\omega_s$	—	velocidad de sincronismo.
$\omega_r$	—	velocidad del rotor.
$s$	—	deslizamiento.
$B$	—	densidad de flujo magnético.
$H$	—	intensidad de campo magnético.
$H_A$	—	campo magnético aplicado.
$\lambda_s$	—	enlaces de flujo en estator.
$\lambda_r$	—	enlaces de flujo en rotor.
$u_s$	—	voltaje de alimentación en el estator.
$u_r$	—	voltaje de alimentación en el rotor.
$R_s$	—	resistencia en el estator.
$R_r$	—	resistencia en el rotor.
$i_s$	—	corriente en el estator.
$i_r$	—	corriente en el rotor.
$\mu$	—	permeabilidad del medio.
$\mu_r$	—	permeabilidad relativa.
$\mu_0$	—	permeabilidad del vacío.
$T$	—	energía cinética total.
$V$	—	energía potencial total.
$J$	—	coeficiente de inercia.
$K$	—	energía cinética.
$\tau_L$	—	par de carga.
$\mathcal{L}$	—	lagrangiano.
$\mathcal{L}^*$	—	co-lagrangiano.
$n$	—	grados de libertad.
$F_T$	—	función de disipación total.
$V_1$	—	voltaje de fase del estator en volts.

$V_2$	—	voltaje de fase de rotor referido al estator en volts.
$f$	—	frecuencia en hertz.
$I_1$	—	corriente del estator en amperes.
$I_2$	—	corriente del rotor referida al estator en amperes.
$I_M$	—	corriente de magnetización en ampers.
$I_c$	—	corriente de las pérdidas del núcleo en amperes.
$m$	—	número de fases.
$R_1$	—	resistencia del estator en ohms.
$R'_2$	—	resistencia del rotor referida al estator en ohms.
$R_c$	—	resistencia que representa las pérdidas del núcleo en ohms.
$X_1$	—	reactancia de dispersión del estator en ohms.
$X'_2$	—	reactancia de dispersión del rotor referida al estator en ohms.
$X_M$	—	reactancia de magnetización en ohms..
$P$	—	potencia en watts.
$Q$	—	potencia reactiva en vars.
$Z$	—	impedancia por fase en ohms.
$Z_2$	—	impedancia del rotor referida al estator en ohms.
$L_{m0}$	—	inductancia zona lineal.
$L_{msat}$	—	inductancia zona saturada.
$\Phi_T$	—	nivel de flujo curvatura del codo de saturación.
$\Psi_T$	—	nivel de flujo saturación de la curva.
$S_{as}$	—	grado de saturación fase a del estator.
$S_{bs}$	—	grado de saturación fase b del estator.
$S_{cs}$	—	grado de saturación fase c del estator.
$S_{ar}$	—	grado de saturación fase a del rotor.
$S_{br}$	—	grado de saturación fase b del rotor.
$S_{cr}$	—	grado de saturación fase c del rotor.

# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad el desarrollo tecnológico que ha alcanzado la sociedad tanto en el sector industrial como en el doméstico, no sería posible sin el uso de las máquinas eléctricas, en especial del motor eléctrico, el cual es usado en diversas aplicaciones donde es necesario generar movimiento, presentes en diferentes áreas tecnológicas, como la industria automotriz, aeroespacial, armamentista, robótica, etc. Debido a su simplicidad de funcionamiento y a su alta eficiencia es empleado en la mayoría de las máquinas modernas; el auge de las nuevas tecnologías donde los sistemas eléctricos tienen mayor demanda, debido al uso de energías limpias, donde la contaminación es prácticamente nula, comparado con los motores de combustión, hace que el motor eléctrico sea el equipo eléctrico más usado.

Generalmente por simplicidad el análisis de las máquinas eléctricas se realiza asumiendo linealidad del sistema magnético, situación que para la mayoría de las aplicaciones en que se emplean resulta adecuado. Sin embargo, también existen otras aplicaciones que llevan a las máquinas a regímenes de operación en los que esta conjetura pierde su validez, bien porque intencionalmente se pretende trabajar con niveles de flujo inferiores o mayores al nominal, o porque la saturación se presenta como parte inherente de determinados procesos transitorios.

Se pueden encontrar muchos ejemplos de aplicación en los que la inclusión del fenómeno de la saturación ayuda a obtener resultados más ajustados a los datos experimentales, esto permite aproximar con mayor exactitud el comportamiento experimental. Incluso se pueden encontrar casos determinados, en que al modelo con característica magnética lineal le resulta imposible representar el comportamiento real de la máquina, siendo en consecuencia, obligada la consideración de la saturación [Martín Cañadas, 2006].

Así sucede en los regímenes transitorios, en los que se generan grandes corrientes, como puede ser el arranque directo o la reconexión a la red, tras la ausencia de la tensión de alimentación, la inclusión de la saturación en el modelo conduce a obtener resultados más apegados a la realidad.

En el desarrollo de esta investigación se considera como caso de estudio un motor de inducción trifásico, se aborda el modelo matemático que representa su comportamiento dinámico, se desarrolla el modelo bajo el enfoque Euler-Lagrange por coordenadas abc, tomando en cuenta el circuito magnético no lineal del sistema, que en este caso incluye el efecto de la saturación

magnética, el cual proporciona un modelo que describe con mayor precisión el comportamiento del motor de inducción.

## 1.1. Antecedentes

El descubrimiento de la electricidad fue un hecho que cambió por completo a la civilización humana; no se tiene claro cuando fue la primera vez que un humano pudo percatarse de este fenómeno, sin embargo formalmente en la Grecia antigua del siglo VII a.C. un filósofo llamado Tales de Mileto realizó el primer experimento, al frotar una piedra de ambar con un paño de lana, percatándose de que al realizar tal cosa, estos se atraían entre sí y a otros materiales, aunque el griego Tales de Mileto no sabía que esto era electricidad. Tuvieron que pasar muchos siglos para que hubiera avances significativos en el campo de la electricidad.

Después del descubrimiento de la relación entre la electricidad y el magnetismo en 1821 por el químico danés Hans Christian Oersted, en 1831 Michael Faraday desarrolló el generador eléctrico al percatarse de que un imán en movimiento dentro de un disco de cobre era capaz de producir electricidad, esto resolvió el problema de producir electricidad de manera continua.

El desarrollo de las máquinas de inducción tuvo que esperar hasta la aparición de los sistemas eléctricos de corriente alterna, ya que con su irrupción comenzaron los primeros estudios para adaptar los motores existentes al nuevo sistema eléctrico, con el objetivo de aprovechar las ventajas que ofrecía el uso de la corriente alterna.

Muchos fueron los científicos que investigaron sobre los motores eléctricos. En 1837 Davenport inventó el motor de corriente continua; en 1887 el físico serbio Nikola Tesla el motor de inducción y en 1890 presentó la primera patente del primer motor eléctrico actual de corriente alterna. También en 1890 Mikhail Dolivo Dobrovolsky, ingeniero de AEG, inventó el motor asíncrono trifásico empleando un rotor en forma de jaula de ardilla y utilizando un devanado distribuido en el estator. A finales del siglo XIX el inventor y empresario George Westinghouse compró y desarrolló el motor patentado de Tesla, pensando que el futuro de la electricidad pasaría por este tipo de corriente, empezando a comercializar motores de inducción alimentados a una frecuencia de 60 Hz. Finalmente a principios del siglo XX se impuso el sistema trifásico europeo, frente al bifásico americano, por lo que las máquinas asíncronas trifásicas comenzaron a adquirir cada vez más importancia.

Actualmente el M.I. es el motor más utilizado, sobre todo por su costo, significativamente más económico que el de un motor de corriente continua. Los avances en electrónica de control y potencia que se han tenido a partir del nuevo siglo, ha posibilitado que este tipo de motores sea utilizado en una gama más amplia de aplicaciones.

El crecimiento en el uso de los motores de inducción obliga a conocer su funcionamiento detallado, la interacción que existe entre sus componentes así como las variables internas y externas que gobiernan su desempeño; haciendo necesario desarrollar modelos más precisos, que permitan aumentar la eficiencia y calidad operativa de la máquina. Esto se puede lograr incluyendo efectos o fenómenos presentes al operar la máquina que normalmente no se consideran por simplicidad en el modelo convencional, introduciendo el uso de nuevas variables que ayudan

a describirlos, resultando en representaciones matemáticas más completas que se apegan con mayor exactitud al comportamiento real del motor. De esta manera es posible realizar diseños que proporcionen una mejor respuesta y sean más eficientes.

## 1.2. Planteamiento del problema

En la actualidad los motores de inducción son los equipos con un mayor impacto en procesos industriales, debido a las ventajas que presenta sobre las demás motores, como son el bajo costo, la mínima necesidad de mantenimiento, alta confiabilidad, robustez, capacidad de trabajar en ambientes sucios y explosivos.

Estos constituyen una de las principales aplicaciones de la energía eléctrica; desde su invención han representado un procedimiento versátil y sencillo de aplicar y alimentar eléctricamente [Victoria and Roldán, 2010].

Gracias a su versátil tamaño pueden introducirse motores de alta potencia en máquinas pequeñas, siendo así ampliamente utilizados en los equipos manufacturados para el uso doméstico [Rubio Soto, 2014].

Se considera que el 70 % de las aplicaciones en la industria utiliza motores de inducción, sector en el cual consumen aproximadamente el 68 % de la energía eléctrica total empleada [Waide and Brunner, 2013], de ahí que su eficiencia y la confiabilidad de operación son aspectos relevantes para mejorar la eficiencia energética en la industria y reducir los costos de producción [Quispe and González, 2003].

Se han desarrollado modelos matemáticos de diferente complejidad, dependiendo del grado de profundidad deseado en el análisis del comportamiento de la máquina. Cuando se modela un motor de inducción, se pueden hacer suposiciones, como despreciar los fenómenos no lineales, considerando un comportamiento lineal, éstas permiten desarrollar modelos matemáticos donde el motor se ve solo como un circuito eléctrico, sin considerar la influencia de la temperatura, vibraciones, ruido acústico, pérdidas eléctricas y magnéticas, entre otras características físicas que pueden llegar a afectar su desempeño.

Considerar sólo sus características eléctricas permite tener un modelo simplificado pero que no representará todos los aspectos físicos que intervienen en su operación, esto puede provocar problemas, principalmente en aplicaciones industriales de alto desempeño, donde se necesita un control preciso de la posición, velocidad y par; tradicionalmente se han utilizado servocontroles basados en motores de corriente directa (CD) y motores de pasos (stepper) ya que con ellos se obtienen buenas características de funcionamiento y además resultan ser más fáciles de controlar. Sin embargo, en el caso de los motores de CD se tienen problemas con el conmutador, sobre todo a velocidades elevadas, además de que no son utilizables en ambientes peligrosos, corrosivos o explosivos.

### 1.3. Estado del arte

El modelo dinámico convencional basado en leyes del electromagnetismo como el presentado en [Krause and Wasynczuk, 1995] ha sido el objeto de numerosos estudios, gracias al auge que ha tenido el motor eléctrico desde que apareció por primera vez. Esto se debe a su gran importancia para una gama amplia de aplicaciones que van desde el control, como el diseño, presentes en la ingeniería eléctrica que data desde el siglo XIX.

Así mismo en [García and Díaz, 2006] se obtiene el modelo matemático del motor trifásico de inducción en coordenadas  $dq0$ , partiendo de su modelo físico. Se obtienen las ecuaciones de los flujos, corrientes y voltajes, a partir de transformaciones matemáticas, también se obtienen la ecuación del par y la ecuación mecánica. Además se expresa el modelo matemático en la notación de variables de estado, introduciendo el fenómeno de la saturación al modificar la inductancia mutua.

En [Pérez and Rafael, 2018] se realiza un modelo matemático expresado en diferentes marcos de referencia, basado en leyes del electromagnetismo, donde se considera la saturación en una máquina asíncrona. Señala que el comportamiento de esta máquina ante el fenómeno de la saturación magnética se presenta como una tarea importante para lograr el correcto diseño y control de la misma.

En [Aller and Restrepo, 2013] se realiza la modelación del motor de inducción en coordenadas  $abc$ , incluyendo la saturación magnética, basado en leyes del electromagnetismo, tomando en cuenta la curva de saturación característica de un motor de 4kW.

En [Vintimilla and Valdivieso, 1997] se realiza la modelación matemática y la simulación digital de un motor de inducción en coordenadas  $dq0$ , con la consideración de que sus inductancias son variables. La saturación es expresada por funciones no lineales, en términos de las corrientes de excitación. El modelo es válido mediante la comparación de resultados obtenidos experimentalmente, para condiciones de arranque, fallas y frenado del motor de inducción.

En [Martín Cañadas, 2006] se realiza el modelo matemático de un motor de inducción de doble jaula de ardilla tomando en cuenta el efecto de la saturación magnética en coordenadas  $dq0$ , además que se explora la bondad de determinados modelos simplificados con inclusión del efecto de ranura profunda y la saturación magnética del flujo principal.

En [Escobar and Holguín, 2008] se realiza el desarrollo de una metodología para obtener los parámetros de un motor de inducción a partir de los datos proporcionados por los fabricantes. Parámetros como la potencia nominal, el par máximo, el par nominal, la corriente de arranque, la corriente nominal y el factor de potencia serán utilizados para la solución del problema.

Finalmente en [Guerrero and González, 2013] se realiza la estimación de parámetros de un motor de inducción mediante técnicas metaheurísticas, utilizando el algoritmo llamado shuffle frog leaping algorithm (SFLA) que arroja resultados de manera más rápida comparada con las demás técnicas. Este consiste en imitar mediante modelos el comportamiento de los grupos de ranas, en particular la forma en que estos anfibios buscan su alimento (insectos). El algoritmo

SFLA tiene reglas de saltos hacia lo que será primero una búsqueda local para cada rana individual y reglas de combinación de los diferentes grupos de ranas (hojas) para una búsqueda global; cada salto de rana produce un cambio de posición dentro del espacio de soluciones y tiene el propósito de acercarse a la mejor posible.

Generalmente la mayoría de los modelos del M.I. encontrados en la literatura suponen que el circuito magnético es lineal, es decir, no existe saturación y que además la fuerza magnetomotriz (fmm) no contiene componentes armónicas. Desde luego éstas simplificaciones no permiten predecir con exactitud el comportamiento del M.I. en todos sus modos de operación; sin embargo, esta representación simplificada nos proporciona resultados adecuados del comportamiento en la mayoría de las aplicaciones prácticas.

Se han realizado trabajos que toman en cuenta la no linealidad del circuito magnético, tomando en cuenta el efecto de la saturación magnética, pero se basan en la metodología de modelado basada en leyes del electromagnetismo, sin parametrizar el M.I. mediante las pruebas de rotor bloqueado y de corto circuito.

## 1.4. Hipótesis

El M.I. en la actualidad juega un rol muy importante, ya que es una de las máquinas eléctricas más usadas. Por ello es necesario desarrollar modelos que estén enfocados a mejorar la respuesta de la máquina ante escenarios donde es necesario un mayor desempeño, evitando generar errores que deterioren su funcionamiento, la hipótesis planteada para este trabajo es:

*El análisis convencional del circuito magnético en máquinas eléctricas se considera lineal, tomar en cuenta las no linealidades como el efecto de saturación, ayudará a obtener modelos que describan un comportamiento preciso y apegado a las condiciones reales de operación del motor de inducción.*

## 1.5. Objetivos

Derivado de la investigación realizada y la hipótesis planteada, se manejan los siguiente objetivos a cumplir para este trabajo de investigación.

### 1.5.1. General

Modelar y simular la operación de la máquina de inducción (M.I.) considerando el efecto de la saturación magnética, mediante el empleo de la metodología de modelado con enfoque energético de Euler Lagrange (E-L).

### 1.5.2. Específicos

- Obtener el modelo del M.I. en coordenadas abc basado en la formulación de E-L y simular por computadora.

- Obtener mediante pruebas experimentales los parámetros del M.I. utilizado en el caso de estudio.
- Introducir los parámetros obtenidos en la simulación del modelo basado en E-L, incluyendo el circuito magnético no lineal del M.I.
- Realizar el análisis de resultados de ambos modelos.

## 1.6. Metas

- Analizar el circuito magnético del M.I. y estudiar el efecto de la saturación magnética.
- Obtener el modelo del M.I. en coordenadas abc basado en leyes del electromagnetismo y simular por computadora.
- Desarrollar el modelo del M.I. en coordenadas abc basado en la formulación de E-L y simular por computadora.
- Realizar los ensayos de laboratorio (prueba de vacío, rotor bloqueado, resistencia de CD) necesarios para la obtención de los parámetros del M.I.
- Introducir la parte del circuito magnético no lineal del M.I. basado en la formulación E-L, utilizando los parámetros obtenidos y simular por computadora.
- Realizar la comparación de resultados obtenidos en la simulaciones de los modelos, incluyendo el circuito magnético no lineal vs lineal.

## 1.7. Justificación

Con la finalidad de obtener modelos más precisos del M.I. se puede ver a este como la integración de diferentes subsistemas que lo conforman; generalmente los efectos del subsistema magnético son despreciados en el modelado convencional, obteniendo resultados que son distantes a los reales, principalmente en aplicaciones donde es necesario un desempeño dinámico alto.

A diferencia de los métodos de modelado convencionales para el análisis de máquinas eléctricas, en este trabajo de tesis se realiza un modelo matemático de un motor de inducción representado bajo la metodología de modelado E-L, el cual incluye los efectos del subsistema magnético, como son el fenómeno de la saturación magnética.

## 1.8. Alcance

Se elegirá de la literatura un modelo matemático del M.I representado mediante las leyes del electromagnetismo, basado en coordenadas abc; se realizará la representación de este modelo mediante el enfoque de E-L, se introducirá el efecto de la saturación magnética manteniendo la misma estructura. Con el fin de demostrar que el modelo propuesto representa correctamente y con mayor precisión a la máquina eléctrica, se simulará por computadora y se validará comparando con los resultados existentes en la literatura y con algunas pruebas en el laboratorio.

## 1.9. Organización del documento

Esta tesis se compone de 7 capítulos. El capítulo 1, presenta las generalidades relacionadas con el tema de tesis, el contexto en el que se desarrolla este trabajo, la necesidad que motivó a su realización y los objetivos de la tesis con sus alcances correspondientes. El capítulo 2, aborda los temas que fueron necesarios de entender y que están relacionados con el tema de investigación, como la descripción del funcionamiento del M.I., seguido de la explicación del fenómeno de la saturación magnética y sus efectos, así como también el desarrollo de la metodología de modelado de las ecuaciones de Euler-Lagrange. El capítulo 3, presenta el modelo del motor de inducción considerando linealidad en su circuito magnético, con dos enfoques diferentes, el primero basado en leyes del electromagnetismo y el segundo mediante la metodología de Euler-Lagrange. Al final del capítulo se presentan resultados de simulación a diferentes condiciones de operación con parámetros tomados de la literatura. En el capítulo 4, se desarrollan las pruebas de laboratorio que son necesarias para la parametrización del motor de inducción, utilizado en el caso de estudio, además se realizan los cálculos necesarios para determinar el valor de los parámetros, basados en el sistema por unidad que ayuda a simplificar las operaciones matemáticas. En el capítulo 5 se presenta el modelo matemático del motor de inducción considerando el circuito magnético no lineal, ya que se toma en cuenta el efecto de la saturación magnética, mostrando como se modifican las ecuaciones matemáticas, específicamente en la matriz de inductancias del modelo, agregando un concepto conocido como grado de saturación. Los resultados de la simulación del modelo basado en Euler-Lagrange, tomando los datos del M.I. del caso de estudio y considerando el circuito magnético lineal vs no lineal, se presentan en el capítulo 6, además de realizar un análisis de contenido armónico a la onda distorsionada por el efecto de la saturación magnética, mediante Fourier. El capítulo 7 presenta las conclusiones de este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

En este capítulo se muestran los temas esenciales para el entendimiento del trabajo realizado en esta tesis. La sección 2.1 se brinda un panorama general de lo que son las máquinas eléctricas giratorias. En la sección 2.2 se explica el principio de funcionamiento de un motor de inducción y las partes que lo constituyen. En la sección 2.3 se aborda el concepto de saturación magnética, además que se explica la forma de obtener la curva característica de saturación en un motor de inducción trifásico. En la sección 2.4 se menciona qué son los materiales ferromagnéticos y cuales son sus características principales. En la sección 2.5 se define qué son los armónicos y como se pueden calcular. En la sección 2.7 se aborda la metodología con enfoque energético de E-L, explicando en que consiste y como se desarrolla el análisis en sistemas eléctricos. Finalmente en la sección 2.8 se realiza un ejemplo donde se analiza un circuito magnético, utilizando la metodología E-L.

### 2.1. Máquinas eléctricas giratorias

Las máquinas eléctricas pueden ser clasificadas como se muestra a continuación:



Figura 2.1: Clasificación de máquinas eléctricas.

Las máquinas eléctricas rotativas son dispositivos capaces de convertir energía eléctrica en mecánica o viceversa; cuando el dispositivo convierte energía eléctrica en mecánica se le denomina motor; cuando convierte energía mecánica en eléctrica, es llamado generador. Estos dispositivos se rigen bajo el principio de funcionamiento al que llamaremos, “ABC de máquinas eléctricas”, el cual es descrito de manera resumida a continuación:

A : Existencia de un campo magnético

$B$  : Existencia de un conductor eléctrico

C.1 Caso generador: Siempre que exista un movimiento relativo entre A y B se generará un voltaje en B.

C.2 Caso motor: Hacer circular una corriente eléctrica en B que se encuentra bajo la influencia de A; en B se producirá una fuerza que producirá un movimiento.

Con frecuencia en la industria se requiere convertir una forma de energía que se dispone, en otra compatible con la aplicación en la cual se trabaja. Existe una gran variedad de estos convertidores de energía: en el hogar los motores eléctricos hacen funcionar refrigeradores, congeladores, aspiradoras, licuadoras, entre otros. En la industria los motores están presentes prácticamente en todos los equipos, suministrando la fuerza motriz que rige su funcionamiento. En consecuencia, los generadores son necesarios para suministrar la energía para los motores eléctricos.

Los motores y generadores eléctricos, convierten energía mediante el movimiento giratorio, se construyen desde capacidades de pequeñas fracciones a miles de caballos de potencia. Se puede resumir que las máquinas eléctricas giratorias consisten en la parte eléctrica, mecánica y magnética, las cuales cuentan con por lo menos un embobinado [Vargas Machuca, 1990], como se ilustra en la Figura 2.2.

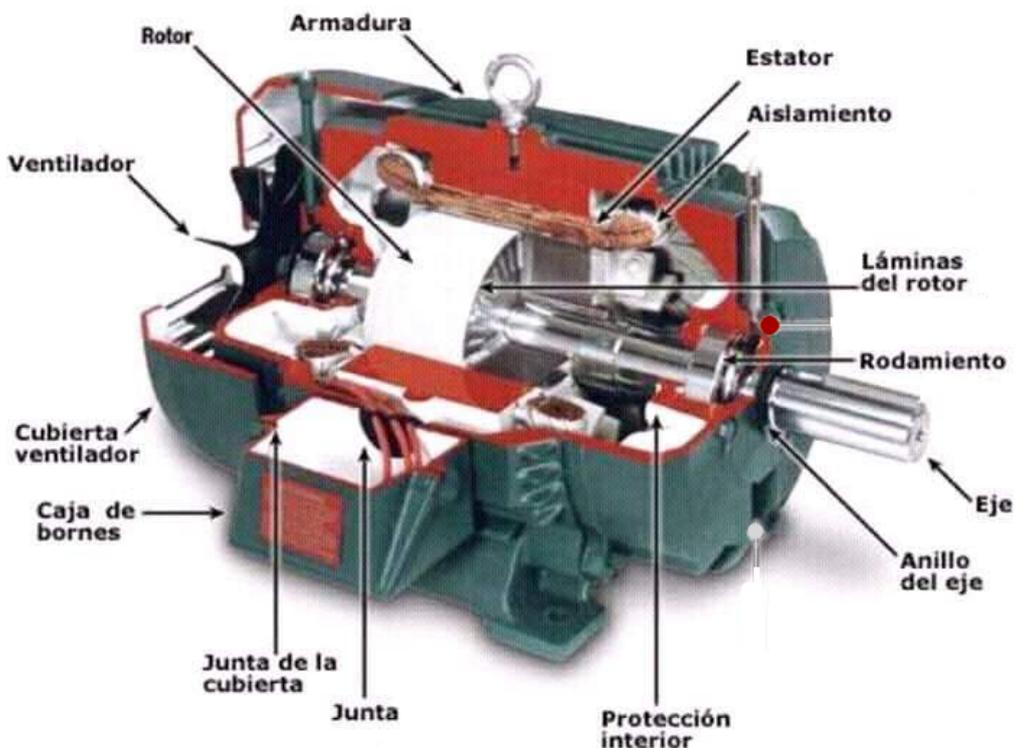


Figura 2.2: Constitución de la máquina eléctrica giratoria [Chapman, 2014]

Para un motor, tal embobinado está conectado a una fuente de energía eléctrica, y para un generador el embobinado es una fuente de energía eléctrica. El circuito magnético está constituido por el entrehierro entre la parte fija llamada estator y la parte giratoria llamado rotor.

Los núcleos magnéticos en este tipo de máquinas están sometidos a flujos magnéticos que sufren rápidas variaciones en el tiempo, se construyen laminados (placas paralelas) para reducir los efectos de las corrientes parásitas y así asegurar menores pérdidas, como se muestra en la Figura 2.3.

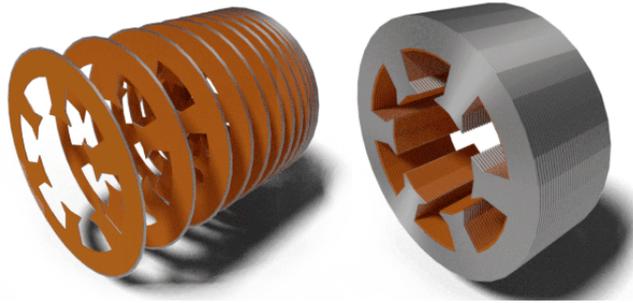


Figura 2.3: Núcleo de estator laminado.

Las máquinas giratorias rotan sobre un eje, por lo que su movimiento queda restringido a una dimensión angular. La dirección del movimiento rotativo que se produce, será positivo cuando esta gira en sentido antihorario y se asumirá negativo cuando gire en sentido horario [Vukosavic, 2012].

## 2.2. Motor de inducción (M.I.) trifásico

Se les llama máquinas asíncronas a las máquinas de corriente alterna cuya velocidad de giro  $N$  es diferente de la velocidad de sincronismo  $N_s$ . Al igual que otras máquinas eléctricas, pueden funcionar como motor o como generador aunque su aplicación más difundida es como motor, denominándose también en este caso “motor de inducción” [Aller, 2006]. En la actualidad, el motor de inducción trifásico es el más utilizado en la industria debido a su robustez, larga vida, facilidad de operación y bajo costo.

Su principio de funcionamiento es simple, se genera un campo magnético rotatorio por los flujos magnéticos que son generados por las corrientes que fluyen en el estator; este campo magnético induce una fuerza electromotriz en el rotor que produce que circulen corrientes en el rotor y da origen a un campo magnético giratorio inducido en el rotor; la interacción de estos campos magnéticos produce el par electromagnético; la velocidad de giro de la máquina depende de la corriente y frecuencia de alimentación.

### 2.2.1. Constitución física

Las principales partes constitutivas del motor de inducción son:

- Estator

- Rotor
- Devanados
- Eje
- Carcasa
- Elementos mecánicos (rodamientos, sistema de ventilación, etc.)

**El estator:** es la parte fija del motor, su núcleo de material ferromagnético está compuesto por una serie de laminaciones aisladas mediante un barníz, el laminado del circuito magnético ayuda a reducir el efecto de las pérdidas por histéresis y corrientes de eddy. En la parte interna, distribuidas geométricamente se encuentran las ranuras, donde se alojan los tres devanados que están separados  $120^\circ$ , Figura 2.4.

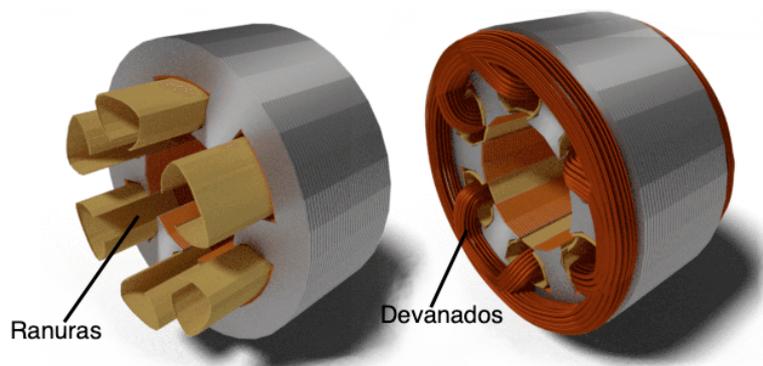


Figura 2.4: Estator de un motor de inducción.

**El rotor:** constituye el componente móvil en un motor, de él depende la conversión de energía eléctrica a mecánica. Se compone de una estructura metálica formada por un conjunto de chapas o láminas de acero al silicio, troqueladas con forma circular y montadas en un mismo eje con sus correspondientes devanados de alambre de cobre.

El motor de inducción puede ser clasificado de acuerdo al tipo de rotor que tiene como:

- **Jaula de ardilla:** sus devanados están cortocircuitados, por tanto no hay posibilidad de conexión del devanado con el exterior. Internamente contiene barras conductoras longitudinales de aluminio o de cobre con surcos y conectados juntos en ambos extremos poniendo en cortocircuito los anillos que forman la jaula, Figura 2.5.

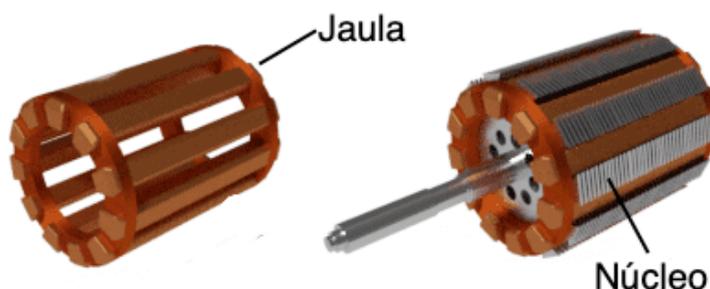


Figura 2.5: Rotor tipo jaula de ardilla

- **Rotor devanado:** se compone de un núcleo y tres devanados en lugar de barras conductoras como en el rotor jaula de ardilla. Las corrientes se inducen en los devanados de la misma manera que lo hacen las barras en corto circuito; pero la diferencia radica en el hecho que estos tienen acceso al exterior, porque están conectados a los anillos deslizantes que se encuentran montados en el eje, por medio de las escobillas se pueden conectar los devanados del rotor a resistencias variables, de modo que se puede controlar la corriente que pasa a través de los devanados de manera más eficaz. Los motores de este tipo utilizan las resistencias externas en el arranque, limitando las corrientes en el estator, Figura 2.6.

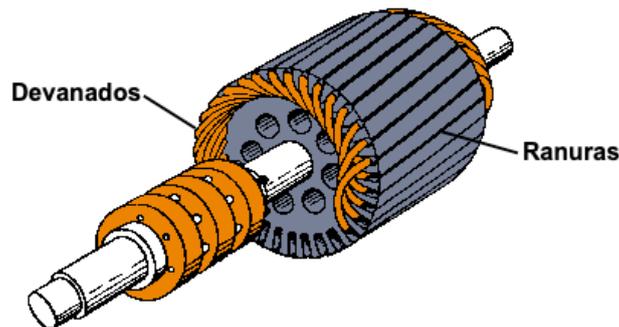


Figura 2.6: Rotor tipo devanado

- **Devanados:** los devanados o bobinas del motor son espiras que están enrolladas, dependiendo del número de vueltas que se requieran, están construidos de cobre ya que es un excelente conductor y almacenan energía en forma de campo magnético, Figura 2.7.

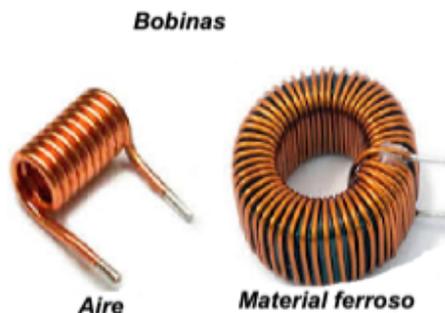


Figura 2.7: Tipos de bobina

- **Eje:** es el encargado de transmitir la potencia obtenida en forma de movimiento giratorio, a una o un conjunto de piezas.
- **Carcasa:** es la parte que cubre al motor impidiendo que las partes internas como rotor, estator, devanados etc. estén expuestas con el exterior, el material empleado para su fabricación en este tipo de motores, generalmente son del tipo metálico.  
El M.I. es considerado el más simple de todos los motores eléctricos, en la Figura 2.8 se pueden observar las partes que lo constituyen.

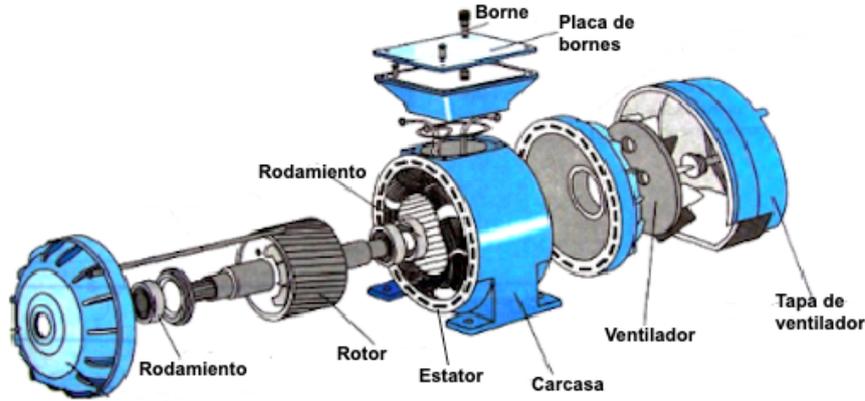


Figura 2.8: Partes del M.I.

### 2.2.2. Principio de funcionamiento

En el desarrollo de las ecuaciones, el subíndice  $s$  indicará que es una variable asociada al estator, mientras que el subíndice  $r$  es una variable relacionada con el rotor. Al aplicar un voltaje trifásico balanceado al devanado del estator, circulan corrientes de frecuencia  $f_s$ , correspondiente a la frecuencia de alimentación cíclica (ciclos/seg) aplicada en el estator, causando que en los devanados del estator se produzca un campo magnético giratorio a la velocidad síncrona  $\omega_s$ , que es la velocidad de rotación del campo magnético en una máquina rotativa (rpm) y depende de la frecuencia del estator  $f_s$  y del número de polos de la máquina  $P$ :

$$\omega_s = \frac{120f_s}{P} \quad (2.1)$$

Si existe un movimiento relativo entre el campo establecido por las corrientes trifásicas que circulan en el estator y los conductores del rotor, se inducen voltajes en los devanados del rotor a una frecuencia  $f_r$ , denominada frecuencia rotórica dada en (ciclos/seg), la cual depende de la velocidad relativa entre el campo magnético giratorio establecido por las corrientes del estator y el campo del rotor.

Las corrientes del rotor y el campo magnético que se forma reaccionan con el campo magnético giratorio del estator produciendo un par que mueve el rotor en la dirección de la rotación del campo del estator. Para desarrollar un par positivo, la velocidad del rotor debe ser menor que la velocidad síncrona [Chiasson, 2005]. El rotor entonces, se mueve a una velocidad  $\omega_s - \omega_r$ , respecto al campo rotatorio establecido por el estator. Esta diferencia de velocidades, también se le conoce como “deslizamiento” el cual depende de la velocidad síncrona  $\omega_s$  y la velocidad rotórica  $\omega_r$ .

$$s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \quad (2.2)$$

O también,

$$\omega_r = \omega_s(1 - s) \quad (2.3)$$

La frecuencia de los voltajes inducidos en los conductores del rotor puede expresarse en función del deslizamiento como:

$$f_r = sf_s \quad (2.4)$$

Con el rotor en reposo, el deslizamiento es igual a uno, las frecuencias en el estator y en los circuitos del rotor son iguales, por lo que el campo producido en el rotor gira a la misma velocidad que el campo magnético giratorio originándose un par de arranque que hace girar al rotor en la dirección que gira el campo del estator.

Sin carga, la máquina opera con un deslizamiento muy pequeño, pero al aplicar a la flecha carga mecánica, el deslizamiento se incrementa induciendo voltajes en el rotor que provocan corrientes, las cuales producen el par requerido por mover la carga mecánica. De esta manera la dinámica de los circuitos del rotor se puede expresar en términos del deslizamiento.

### 2.3. Saturación magnética

Es un fenómeno que se presenta en los materiales ferromagnéticos tales como el hierro, níquel, cobalto y sus aleaciones. El cual se puede observar en la curva característica de magnetización, cuando la densidad del flujo magnético  $B$  tiende a estabilizarse, mientras la intensidad de campo magnético  $H$  se incrementa, la densidad de flujo magnético  $B$  se aproxima y mantiene en un valor máximo que es el nivel de saturación del material, [Pozueta, 2014]. Obsérvese la Figura 2.9 donde se muestra la evolución de los dominios o dipolos magnéticos de un material ferromagnético sometido a un campo  $H_A$ .

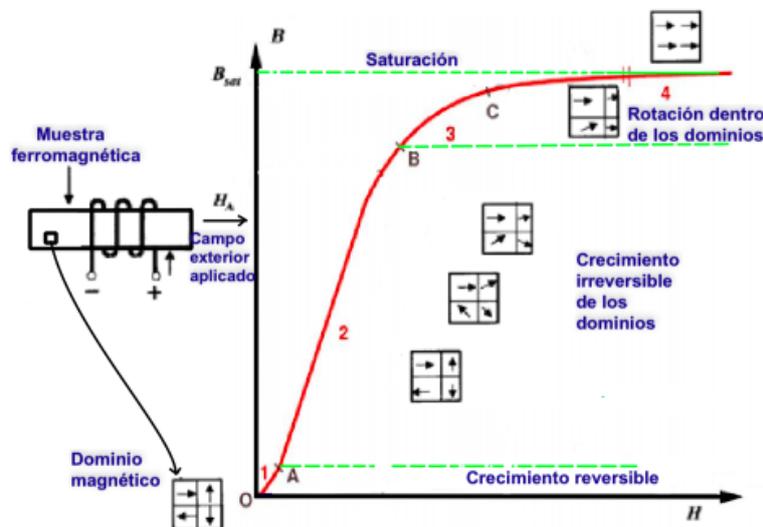


Figura 2.9: Curva de saturación [Pozueta, 2014].

En esta curva se pueden distinguir diferentes zonas:

- **Zona parabólica:** Esta zona es la más pequeña, tiene forma parabólica y es la señalada como 1 (comprendida entre los puntos  $O$  y  $A$ ) en la Figura 2.9. Sí, antes de superar el punto  $A$ , desaparece la excitación  $H$  los dominios magnéticos vuelven a su estado inicial.
- **Zona lineal:** Esta zona es recta y está señalada como 2 (comprendida entre los puntos  $A$  y  $B$ ) en la Figura 2.9. Su crecimiento no es totalmente reversible. Muchas veces se

desprecia la zona parabólica y se acepta que entre los puntos O y B la inducción aumenta linealmente con la excitación H.

- **Codo:** Esta zona es curva y está señalada como 3 (comprendida entre los puntos B y C) en la Figura 2.9. Si a partir del punto B se sigue aumentando la excitación H, además de que los dominios orientados a favor del campo exterior continúan son irreversibles y permanecen aunque se anule el valor de la intensidad magnetizante H.
- **Zona saturada:** Esta zona es lineal y está señalada como 4 (a partir del punto C) en la Figura 2.9. En esta zona el material ferromagnético se ha saturado, pues a partir del punto C todos sus dominios están orientados a favor del campo magnético exterior y el material es incapaz de añadir más magnetización adicional al campo externo.

### 2.3.1. Determinación de la curva de saturación en un M.I.

Cuando un motor es alimentado con corriente alterna, las variaciones en los enlaces de flujo son función directa del voltaje (en magnitud y frecuencia) aplicado [Mora, 2003].

$$\frac{d\lambda_s}{dt} = v_s - R_s i_s \quad (2.5)$$

Las variaciones en el flujo causan variaciones en la corriente, para un cierto rango de voltajes, la relación entre el flujo y la corriente es lineal. Sin embargo, al alcanzar un cierto nivel de voltaje, las corrientes aumentan de forma no lineal con el flujo. Es así como queda definida una curva de saturación para un motor de inducción, en la cual se tiene una zona lineal donde la relación flujo-corriente es proporcional y una zona no-lineal donde para una pequeña variación de flujo (voltaje) las corrientes se incrementan en una proporción mayor y se produce distorsión armónica en ellas.

Cuando se arranca un motor se aplica la fuerza electromotriz entre las terminales estando el motor en reposo, la fuerza contra-electromotriz es aún cero y por lo tanto, no ofrece oposición a la circulación de la corriente que viene de la línea de alimentación; esto explica por qué la corriente es tan elevada en esos momentos. El motor se acelera rápidamente hasta alcanzar su velocidad normal y luego continúa funcionando a una velocidad aproximadamente constante, al alcanzar su velocidad máxima sin ninguna carga aplicada, la intensidad de la corriente que toma de la línea desciende hasta un valor relativamente pequeño comparado con la intensidad inicial; sí se aplica una carga mecánica al motor, su velocidad se reduce de acuerdo con la carga y la intensidad de la corriente que toma de la línea de alimentación va aumentando a medida que aumenta la carga aplicada.

Para determinar la curva de saturación de un motor de inducción es necesario hacerlo operar en vacío ya que en esta condición la f.m.m de reacción del rotor es nula y entonces sólo actúa la f.m.m. del estator, que en este caso, es igual a la f.m.m. debida al efecto conjunto de todas las corrientes de la máquina, de esta manera se debe incrementar progresivamente el voltaje en el estator midiendo y registrando en cada paso la forma de onda de las corrientes y los voltajes en las terminales, con esas variables es posible determinar los enlaces de flujo de acuerdo con (2.5).

## 2.4. Materiales ferromagnéticos

El campo magnético en las máquinas eléctricas es el medio necesario para realizar la conversión de energía, por ello es necesario generar campos magnéticos elevados, esto se consigue utilizando materiales que poseen una elevada permeabilidad magnética, que es la capacidad de una sustancia o material para atraer y hacer pasar a través de ella campos magnéticos, en la construcción de los núcleos de las máquinas eléctricas; con el propósito de hacer máximas sus características de producción de par electromagnético.

Tomando en cuenta la relación que existe entre la densidad de flujo magnético ( $B$ ) y la intensidad de campo magnético ( $H$ ):

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad (2.6)$$

Donde:

- $\mu$  - permeabilidad del medio.
- $\mu_r$  - permeabilidad relativa.
- $\mu_0$  - permeabilidad del vacío  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ .

La característica principal de los materiales ferromagnéticos, que suelen ser compuestos de hierro y sus aleaciones con cobalto, tungsteno, níquel, aluminio, entre otros, es que el valor de su permeabilidad relativa ( $\mu_r$ ) es mayor a 1; esto permite que éstos tengan flujos mayores a los que se obtienen con el aire.

El comportamiento de este tipo de materiales puede ser estudiado mediante su curva de magnetización característica, como la que se muestra en la Figura 2.10.

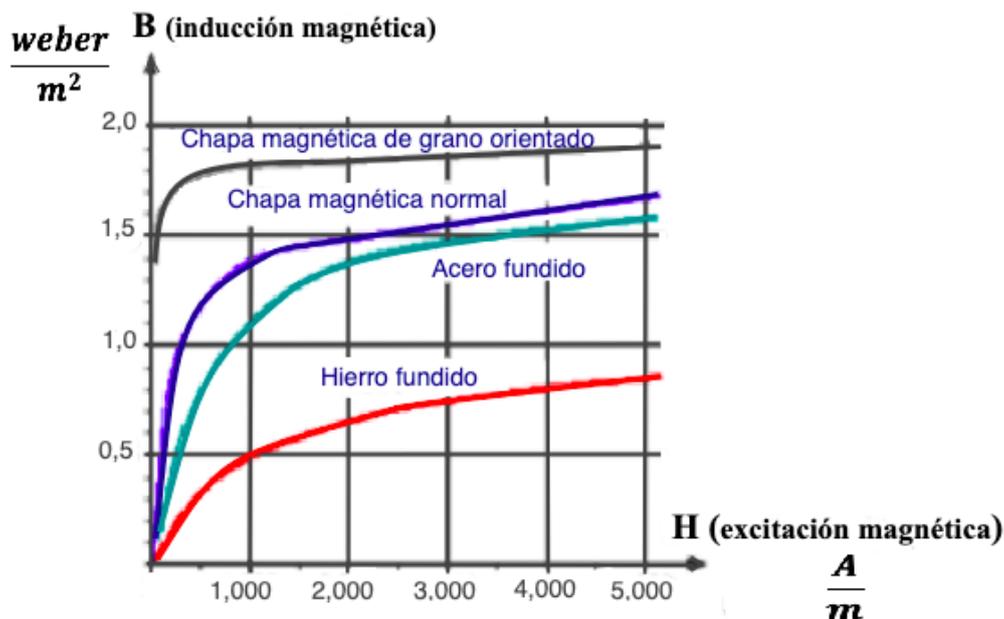


Figura 2.10: Características magnéticas.

En las diferentes características magnéticas mostradas se puede observar un comportamiento no lineal, ya que la densidad de flujo ( $B$ ) magnético aumenta en proporción a la intensidad de campo magnético ( $H$ ) hasta que alcanza un cierto valor donde ya no puede aumentar, volviéndose casi constante a medida que la intensidad de campo continúa aumentando. Esto se debe a que hay un límite en la cantidad de densidad de flujo que puede generar el núcleo ya que todos los dominios en el hierro están perfectamente alineados y cualquier aumento en la intensidad del campo magnético debido a un aumento en la corriente eléctrica que fluye a través de la bobina tendrá poco efecto o ninguno como se observa en la Figura 2.10.

Los modelos de el M.I. utilizados frecuentemente asumen una curva de magnetización con comportamiento lineal como se muestra en la Figura 2.11, esta consideración simplifica notablemente el modelo, sin embargo subestima algunas distorsiones en las corrientes, que afectan la operación de la máquina.

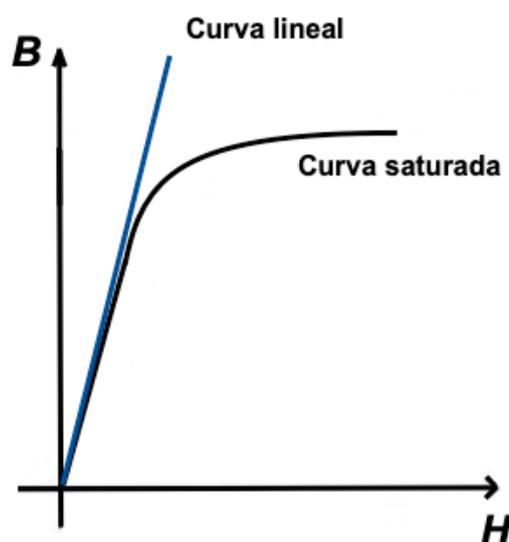


Figura 2.11: Curva de magnetización lineal vs saturada.

Otro efecto que provoca la saturación magnética es la aparición de armónicos en las señales de la corriente, cuando el flujo magnético está por encima del codo de la curva de magnetización. Cuando un M.I. es alimentado con una señal de voltaje sinusoidal, la corriente presentará distorsión armónica debido a la no linealidad de la relación  $B/H$ , que se traduce como una impedancia de magnetización variable.

## 2.5. Armónicos

Los armónicos son un fenómeno que genera problemas tanto para los usuarios como para la entidad encargada de la prestación del servicio de energía eléctrica. Para definir este concepto es importante definir primero la calidad de la onda la cual debe tener amplitud y frecuencia constantes al igual que una forma sinusoidal ya sea de corriente o de voltaje.

Cuando una onda periódica no tiene esta forma sinusoidal se dice que tiene contenido armónico, lo cual puede alterar su valor pico y/o valor RMS causando alteraciones en el funcionamiento normal de los equipos que estén sometidos a esta. La frecuencia de la onda periódica se denomina frecuencia fundamental y los armónicos son señales cuya frecuencia es un múltiplo entero de esta frecuencia [Dugan and Wayne, 1996].

La transformada de Fourier es el procedimiento matemático que descompone una función en las frecuencias que la conforman, de la misma manera que un prisma descompone la luz en los diferentes colores y longitudes de onda. Fourier determinó que era posible expresar una función como la suma de senos y cosenos de diferentes frecuencias y amplitudes hasta lograr determinar la función original [Cortés and Chaves, 2007].

Una función periódica queda descompuesta en una serie infinita de funciones sinusoidales que tienen diferentes frecuencias, todas ellas múltiplos de la frecuencia fundamental de la función, tal y como se muestra en Figura 2.12.

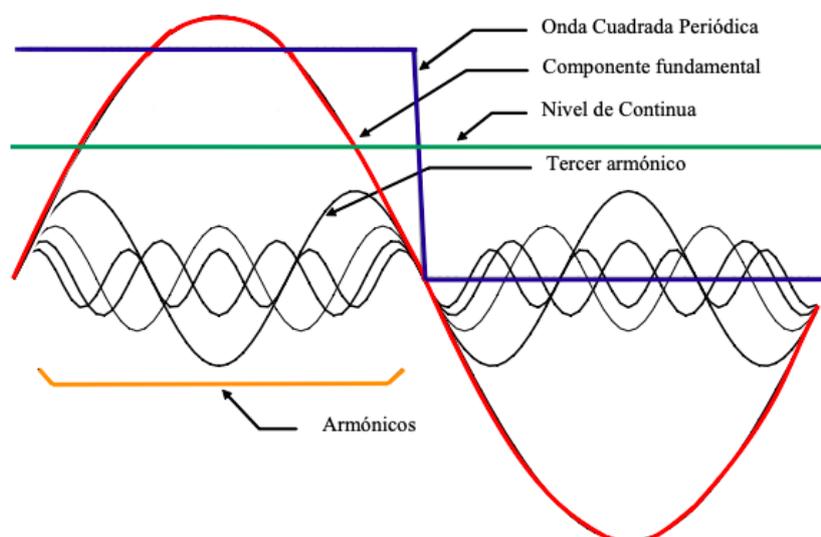


Figura 2.12: Onda cuadrada con sus 7 primeros armónicos.

En ciertas áreas de la ingeniería es interesante establecer un parámetro que permita evaluar cuánto se aleja una forma de onda periódica de una sinusoidal de la misma frecuencia, de forma que cuando una forma de onda no es sinusoidal se dice que está distorsionada.

Uno de los parámetros más empleados para evaluar la distorsión, es la tasa de distorsión armónica total (THD) la cual relaciona la amplitud (o el valor eficaz) de los armónicos de una forma de onda con el de su componente fundamental, y según el IEEE Std 519 [Hoevenaars and Colosino, 2003] está dado por:

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^n V_h^2}}{V_1} * 100 \% \quad (2.7)$$

donde el valor de  $n$  es el número del armónico máximo que se va a tener en cuenta para el cálculo del THD. Por ejemplo, en ingeniería eléctrica este valor es típicamente 40, o sea, que se evalúa la distorsión de una forma de onda, de tensión o intensidad, teniendo únicamente en cuenta los 40 primeros armónicos. Según esta definición una onda sinusoidal tiene un valor de THD del 0%, mientras que para una onda cuadrada (como la mostrada en la Figura 2.12) este valor es del 48.3%.

Los índices porcentuales para la distorsión armónica total, recomendados por la IEEE Std 519 no deben ser mayores al 5% [IEEE, 1993].

## 2.6. Modelado con enfoque energético E-L

Las ecuaciones de Euler-Lagrange surgen de modo natural mediante el cálculo de variaciones y el problema de la braquistócrona el cual pretende determinar la curva de descenso más rápida de una partícula que se desliza de un punto A dado a otro punto B (que no esté en la recta vertical que pasa por A), considerando que la fricción y la resistencia del aire son despreciables. De tal forma, se pretende minimizar el valor de la integral que representa el tiempo de descenso de la partícula, la solución al problema es una línea con forma de un arco de cicloide invertida, este fue uno de los primeros problemas variacionales y su investigación fue el punto de partida para el desarrollo del cálculo de variaciones.

El sentido matemático del lagrangiano es aquella cantidad que minimiza la acción, así que lo que se obtiene es un principio de mínima acción. A partir de las leyes de Newton puede probarse el principio de mínima acción para partículas de la mecánica Newtoniana. Esta derivación puede hacerse a partir del principio de D'alembert que es esencialmente equivalente a las leyes de Newton.

La dinámica de Lagrange no es en absoluto una nueva teoría para la mecánica, los resultados obtenidos por este método han de ser idénticos a los que proporcionan las fórmulas de Newton, lo que varía es el procedimiento para llegar al resultado, mientras que con la mecánica newtoniana se maneja un agente exterior al cuerpo (fuerzas) en la mecánica analítica se manejan magnitudes asociadas al cuerpo (energías).

Por lo tanto se puede determinar que las ecuaciones de E-L establecen que la integral de acción para un sistema físico es un mínimo, por lo que la idea del principio fundamental de las ecuaciones de E-L es que se minimiza la energía.

La Segunda Ley de Newton permite obtener las ecuaciones de movimiento en sistemas mecánicos, sin embargo generalmente su aplicación se complica si la geometría del movimiento no es simple y/o por la presencia de restricciones.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, son equivalentes a la formulación Newtoniana de la mecánica pero tienen una serie de ventajas tanto operativas como formales, resultan una herramienta imprescindible para estos casos, pues incluyen de manera natural las restricciones, además de que se basan en el concepto de coordenadas generalizadas, las cuales permiten describir la dinámica en términos de las variables asociadas con los grados de libertad del sistema [Poznyak, 2005].

Los parámetros que intervienen en la formulación de las ecuaciones de E-L son:

- $T$ - Energía cinética total del sistema: suma de las energías cinéticas de las partículas (en un sistema eléctrico representa la energía total en los inductores o almacenadores de esfuerzo).
- $V$ - Energía potencial total del sistema: suma de las energías potenciales de las partículas (en un sistema eléctrico representa la energía total en los capacitores o almacenadores de flujo).
- Coordenada generalizada: cada grado de libertad del sistema se expresa mediante una coordenada generalizada.
- Velocidad generalizada: derivada temporal de las coordenadas generalizadas.
- Fuerzas generalizadas: dependen del caso de análisis, si se trata de un sistema conservativo no es necesario definir las.

Considerando un sistema  $A$  compuesto de  $y$  elementos ideales (sin importar su naturaleza). Si no existe ninguna correlación entre ellos, el comportamiento dinámico de  $A$  será descrito por completo por las  $y$  coordenadas  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, y$ ; por lo tanto tiene  $y$  grados de libertad. Si estos elementos son interconectados, entonces su comportamiento se restringe y el número de grados de libertad se reducen a  $z$ , por lo tanto  $z = y - r$ , donde  $r$  son las restricciones.

Las coordenadas generalizadas  $q_i = 1, \dots, z$ , representan el sistema completo, ya que las  $y$  coordenadas básicas pueden ser expresadas en funciones de ellas mismas

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_z) \quad i = 1, \dots, y$$

de esta manera el comportamiento dinámico de  $A$  puede ser representado en términos de  $q$ . La energía cinética de un sistema se representa como  $T(q, \dot{q})$  y la energía potencial como  $V(q)$ , donde  $q, \dot{q}$  son los vectores de coordenadas generalizadas.

Considerando un sistema  $A$  en equilibrio, en el cual se describe su comportamiento en función de  $q, \dot{q}$ , aplicando el principio de D'Alembert, se obtiene la siguiente igualdad para las fuerzas que aparecen en el sistema:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} = Q_i^e \quad i = 1, \dots, z \quad (2.8)$$

donde los primeros dos términos del lado izquierdo son fuerzas debidas a la energía cinética, el tercero corresponde a las fuerzas conservativas, es decir, derivables de la energía potencial, y el término del lado derecho son las fuerzas externas generalizadas.

Para generalizar esta formulación energética, se define una nueva función como la diferencia entre la energía cinética y la potencial:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (2.9)$$

Esta función  $\mathcal{L}$  es llamada lagrangiano y su uso en (2.8) produce las ecuaciones de E-L, las cuales pueden considerarse como una abstracción en términos de coordenadas generalizadas del principio de D'Alembert.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = Q_i^e \quad i = 1, \dots, z \quad (2.10)$$

Es importante mencionar que los sistemas conservativos no son más que aproximaciones aceptables de los eventos físicos reales que facilitan el análisis de los mismos, ya que todo sistema real presenta pérdidas energéticas.

En el caso de sistemas no conservativos como es el caso de este análisis del M.I. donde se pierde algo de la energía original del sistema, la expresión anterior puede ser modificada al tomar en cuenta las fuerzas disipativas, añadiendo un término a las ecuaciones de Euler-Lagrange para complementarlas introduciendo una función de disipación de Rayleigh  $\zeta(\dot{q})$ , la cual es una ecuación que indica cómo varía una función o variable cuando hacemos variar alguna otra función o variable, es decir, un término diferencial que puede ser introducido al lagrangiano y representa la disipación de energía en el sistema. Por lo tanto, para resolver un problema que incluya fuerzas disipativas, además del lagrangiano se necesita conocer otra función escalar más, que corresponde a la de disipación presente en el sistema.

Considerando que las fuerzas externas generalizadas  $Q_i^e$  son de la forma:

$$Q_i^e = Q_i - \frac{\partial \zeta(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.11)$$

es decir, las fuerzas externas aplicadas a cada coordenada generalizada o grado de libertad menos las fuerzas de disipación. Si existen pérdidas éstas se reflejan igualando la ecuación de Euler-Lagrange a  $Q_i$ , donde  $Q_i$  representa la suma de todas las fuerzas no conservativas [Hauser, 1969]; bajo estas condiciones se obtiene la forma completa de las ecuaciones de E-L como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \zeta(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, z \quad (2.12)$$

donde  $Q_i$  son las fuerzas de entrada. El atractivo de las ecuaciones de E-L es que en realidad no se debe alterar su estructura general para incluir las fuerzas de interacción entre los dos subsistemas.

Es posible derivar las ecuaciones de la mecánica clásica como las del electromagnetismo a partir del lagrangiano respectivo introducido en las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por ese camino, es posible ampliar el lagrangiano de Maxwell para obtener el lagrangiano de Dirac y así obtener, luego, la ecuación relativista de Dirac; por lo tanto se puede construir toda la mecánica clásica utilizando éste enfoque, siempre y cuando se elija el lagrangiano correcto [Doughty, 2018].

Desarrollar una representación matemática mediante la formulación de E-L, permite analizar sistemas no lineales, donde los métodos de transformadas no aplican; compuestos por sistemas de distintas naturalezas (mixtos) que manejan diferentes tipos de energía (e.g. electromecánicos) y que además estén sujetos a algún tipo de restricción holonómica, por ejemplo en un

sistema eléctrico donde las coordenadas generalizadas están holonómicamente restringidas por fuentes de voltaje o corriente que no admiten variaciones. Los vínculos del tipo holonómico son los que permiten disminuir el número de variables de las inicialmente consideradas, por constituir relaciones funcionales que provocan la eliminación de variables redundantes.

## 2.7. Ecuaciones de E-L en sistemas eléctricos

En sistemas eléctricos, existen dos metodologías para realizar el análisis matemático, éstas son el análisis nodal y por mallas; las herramientas de análisis de redes están tan bien desarrollados que rara vez surge la necesidad de buscar otro método de análisis. Sin embargo, puede ocurrir cuando se estudia sistemas eléctricos no lineales, donde los métodos no son aplicables, o cuando los componentes eléctricos forman parte de un sistema de manejo de energía mixta de diferentes naturalezas [Wellstead, 1979]; es en los casos de este tipo que los métodos bien pueden resultar ineficientes o inservibles.

La elección entre el análisis variacional de mallas y nodos es en el caso de los sistemas eléctricos es subjetiva, aunque por regla general, se utiliza el método que requiere la formulación del menor número de restricciones de interconexión.

Para realizar el análisis de cualquier sistema mediante la formulación Euler-Lagrange es necesario comenzar con la definición de las variables generalizadas, las cuales son aquellas que describen el comportamiento dinámico del sistema asociadas con la transferencia de energía, se definen dos variables generalizadas, que son cantidades abstractas:

- Esfuerzo
- Flujo

Estas variables generalizadas determinan como y en que sentido se transmite la energía, para sistemas eléctricos son:

$$\text{Esfuerzo } (e) \Rightarrow \text{Voltaje } (v)$$

$$\text{Flujo } (f) \Rightarrow \text{Corriente } (i)$$

En la interpretación energética el almacenamiento de información es equivalente al almacenamiento de energía, los mecanismos de almacenamiento de energía son:

- En términos del esfuerzo  $e$ :

$$e = \frac{de_a}{dt} \Rightarrow e_a = \int_0^t e dt \quad (2.13)$$

$$\text{energía almacenada} = \int_0^{e_a} f de_a \quad (2.14)$$

donde  $e_a$  = esfuerzo acumulado.

- En términos del flujo  $f$  :

$$f = \frac{df_a}{dt} \Rightarrow f_a = \int_0^t f dt \quad (2.15)$$

$$\text{energía almacenada} = \int_0^{f_a} e df_a \quad (2.16)$$

donde  $f_a$  = flujo acumulado.

El estado de un sistema dinámico está relacionado con la acumulación de esfuerzo y flujo ( $e_a, f_a$ ), las cuales forman un conjunto natural de variables.

- En un sistema eléctrico

$$e_a \Rightarrow \lambda = \text{enlaces de flujo} \Rightarrow \lambda = Li \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$$

$$f_a \Rightarrow q = \text{carga eléctrica} \Rightarrow q = Cv \Rightarrow v = \frac{d\lambda}{dt}$$

En un sistema eléctrico se pueden encontrar los siguientes elementos:

1) Inductancia  $\Rightarrow$  almacenamiento de esfuerzo eléctrico.

- Inductor: almacena energía en forma de campo magnético.

2) Capacitancia  $\Rightarrow$  almacenamiento de flujo eléctrico.

- Capacitor: almacena energía en forma de campo eléctrico.

3) Resistencia  $\Rightarrow$  disipación de energía eléctrica.

- Resistor: disipador de energía en forma de calor.

4) Alimentación del sistema

- Fuentes de energía: fuentes de esfuerzo y de flujo.

En los sistemas eléctricos se pueden obtener funciones de energía, las cuales se presentan a continuación.

- Capacitor

Tabla 2.1: Funciones de energía del capacitor.

	<b>Energía</b>	<b>Co-energía</b>
Caso lineal	$U = \frac{1}{2C} f_a^2$	$U^* = \frac{1}{2} C e^2$
Caso no lineal	$U = \int_0^{f_a} e df_a$	$U^* = \int_0^e f_a de$

■ Inductor

Tabla 2.2: Funciones de energía del inductor.

	<b>Energía</b>	<b>Co-energía</b>
Caso lineal	$T = \frac{1}{2L} e_a^2$	$T^* = \frac{1}{2} L f^2$
Caso no lineal	$T = \int_0^{e_a} f de_a$	$T^* = \int_0^f e_a df$

■ Disipador

Tabla 2.3: Funciones de energía del disipador.

	<b>Energía</b>	<b>Co-energía</b>
Caso lineal	$G = \frac{1}{2R} f^2$	$J = \frac{1}{2} R e^2$
Caso no lineal	$G = \int_0^f e df$	$J = \int_0^e f de$

Las ecuaciones Euler-Lagrange son un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la evolución en el tiempo del sistema que se analiza, al desarrollar la ecuación de Euler-Lagrange para cada grado de libertad, se obtiene el modelo matemático del sistema; cuando se resuelve el sistema de ecuaciones resultante se obtiene el comportamiento dinámico del sistema.

### 2.7.1. Análisis por nodos

Se define un conjunto completo e independiente de coordenadas generalizadas de acumulación de esfuerzo  $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ , donde  $\lambda_j$  se define como la integral en el tiempo de los voltajes medidos entre dos puntos del circuito; la ecuación de Euler-Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q_e, q_m, \dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \dot{\lambda}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q_e, q_m, \dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial J(\dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \dot{\lambda}_j} = I_j \quad (2.17)$$

Donde:  $\mathcal{L} = U^* - T$

- $\mathcal{L}$  - lagrangiano.
- $U^*$  - co-energía total en los capacitores.
- $T$  - energía total en los inductores.
- $J$  - complemento del contenido en los resistores.
- $V$  - fuente de corriente relacionada con la  $j$ ésima coordenada generalizada de enlaces de flujo.

Las relaciones constitutivas para obtener  $U^*$ ,  $T$  y  $J$  son:

$$U^* = \frac{1}{2} C_j \dot{\lambda}_j^2 \quad (2.18)$$

$$T = \frac{1}{2L_j} \lambda_j^2 \quad (2.19)$$

$$J = \frac{1}{2} R_j \dot{\lambda}_j^2 \quad (2.20)$$

### 2.7.2. Análisis por mallas

Se define un conjunto completo e independiente de coordenadas generalizadas de acumulación de flujo (cargas eléctricas)  $[q_1, q_2, \dots, q_r]$ , donde las  $q_j$  se definen como la integral en el tiempo de cualquier corriente en el circuito, generalmente se eligen las corrientes de las mallas internas del circuito; la ecuación de Euler-Lagrange complementaria es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*(q_e, q_m, \dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*(q_e, q_m, \dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial q_j} + \frac{\partial G(\dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_j} = V_j \quad (2.21)$$

Donde:  $\mathcal{L}^* = T^* - U$

- $\mathcal{L}^*$  - co-lagrangiano.
- $T^*$  - co-energía total en los inductores.
- $U$  - energía total en los capacitores.
- $G$  - contenido en los resistores.
- $V$  - fuente de voltaje relacionada con la  $j$  ésima coordenada generalizada de carga.

Las relaciones constitutivas para obtener  $T^*$ ,  $U$  y  $G$  son:

$$T^* = \frac{1}{2} L_j \dot{q}_j^2 \quad (2.22)$$

$$U = \frac{1}{2C_j} q_j^2 \quad (2.23)$$

$$G = \frac{1}{2R_j} \dot{q}_j^2 \quad (2.24)$$

Es importante mencionar que las expresiones obtenidas para las relaciones constitutivas mostradas, surgen de la suposición de que se analizan componentes lineales e invariantes en el tiempo.

## 2.8. Análisis matemático de un circuito magnético, basado en el enfoque E-L

El objetivo de presentar el análisis matemático del circuito magnético es para mostrar un primer acercamiento al analizar un dispositivo mediante la metodología de E-L, que también

sirve como ejemplo para facilitar el entendimiento del modelado del M.I., el cual por su construcción tiene un mayor grado de dificultad al realizar el análisis.

Los transformadores se devanan en núcleos cerrados. Sin embargo, los dispositivos de conversión de energía que incorporan un elemento en movimiento deben poseer entrehierros en sus circuitos magnéticos, si la longitud del entrehierro llega a ser excesivamente grande, el flujo se dispersará en los costados del entrehierro, en sistemas reales, las líneas del campo magnético bordean externamente al entrehierro, como se ilustra en la Figura 2.13.

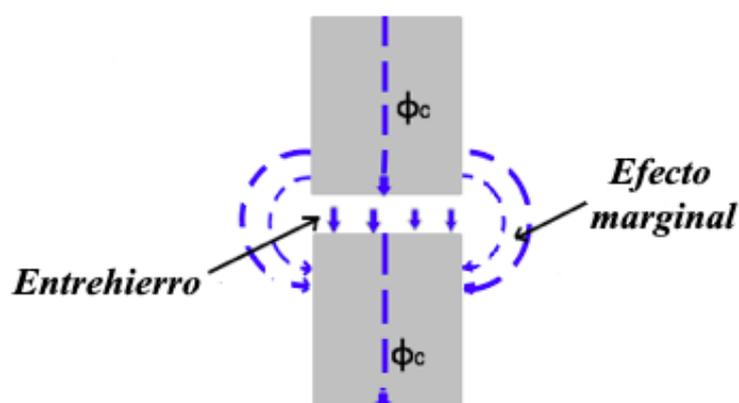


Figura 2.13: Entrehierro

Así como las máquinas eléctricas necesitan de la generación de un campo magnético para funcionar, el campo magnético también necesita un circuito de material ferromagnético por donde circular. El circuito magnético es un dispositivo eléctrico en el cual las líneas de fuerza del campo magnético están canalizadas trazando un camino cerrado. Para su fabricación se utilizan materiales ferromagnéticos, debido a que estos tienen una permeabilidad magnética mayor que la del aire o el espacio vacío y por tanto el campo magnético tiende a confinarse dentro del material, llamado núcleo.

Un circuito magnético sencillo es una estructura hecha de material ferromagnético envuelto por un arrollamiento por el cual circula una corriente eléctrica, esta crea un flujo magnético en la estructura [MIT, 1965], como se puede observar en la Figura 2.14.

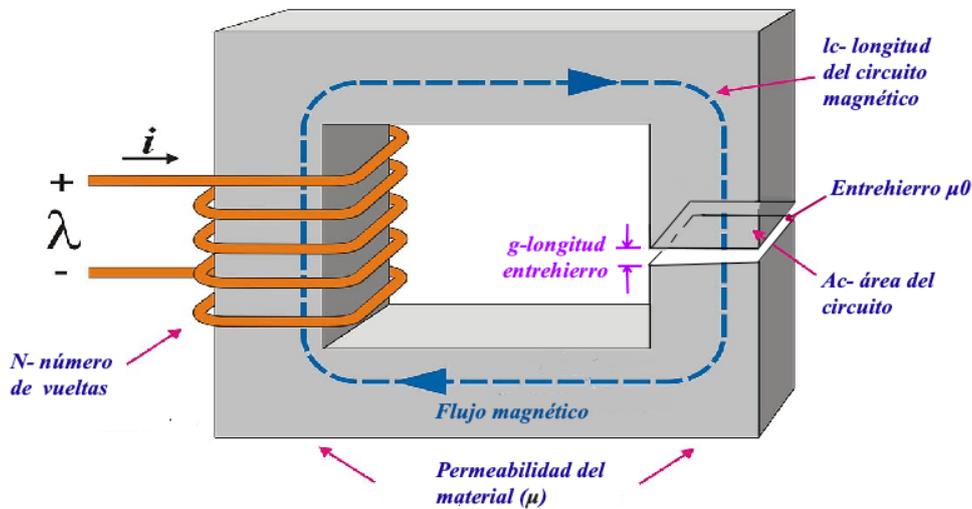


Figura 2.14: Circuito magnético con entrehierro.

### 2.8.1. Circuito equivalente

Para realizar el análisis matemático del circuito magnético mostrado en la Figura 2.14, se realizan los circuitos eléctricos y magnéticos equivalentes, que se muestran en la Figura 2.15.

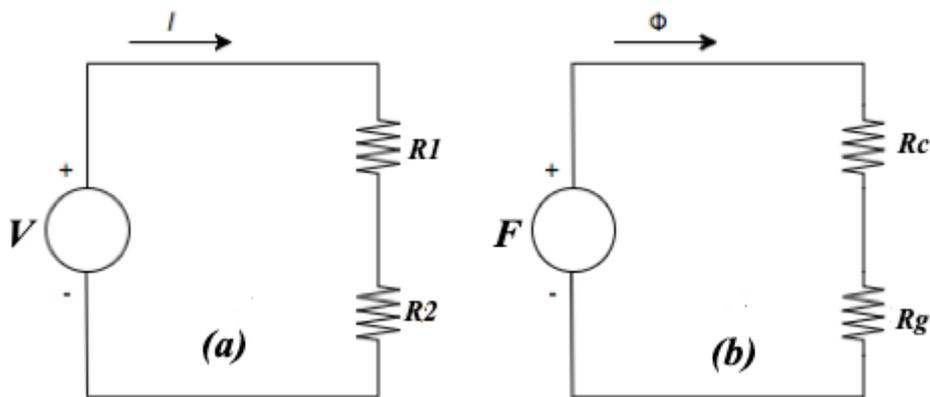


Figura 2.15: Circuito eléctrico (a) y Circuito magnético (b).

El inciso a) de la Figura 2.15 presenta un circuito eléctrico donde un voltaje  $V$  maneja una corriente  $I$  a través de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ , el inciso b) se observa que la fmm  $F$  (análoga al voltaje dentro del circuito eléctrico) maneja un flujo  $\phi$  análogo a la corriente del circuito eléctrico) a través de la combinación de la reluctancia del núcleo  $R_c$  y del entrehierro  $R_g$ .

Por lo tanto la corriente y el flujo magnético está dado por:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad \phi = \frac{F}{R_c + R_g} \quad (2.25)$$

La comparación en la solución de circuitos eléctricos y magnéticos se realiza con frecuencia para encontrar soluciones simples para los flujos en circuitos magnéticos de complejidad considerable.

### 2.8.2. Ecuaciones de E-L obtenidas

Retomando el circuito eléctrico de la Figura 2.15 se procede a realizar su análisis por la metodología de E-L, como se muestra en la Figura 2.16.

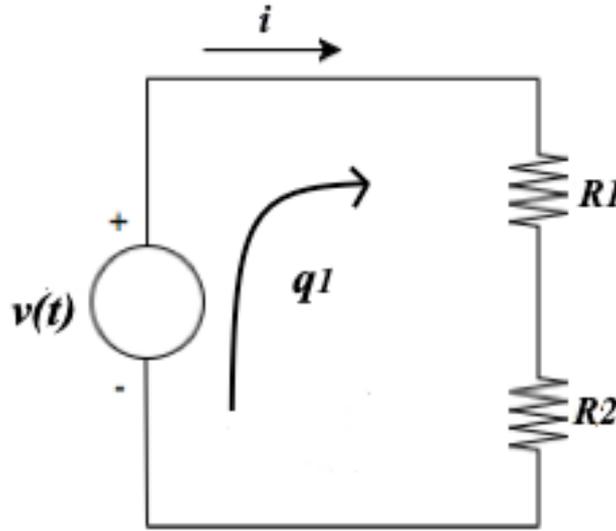


Figura 2.16: Circuito E-L.

- Definir las coordenadas generalizadas: De acuerdo a la metodología de análisis por mallas, el circuito eléctrico de la Figura 2.16 sólo tiene una malla, por lo tanto tendrá solo una coordenada generalizada  $q_1$ .
- Coordenada variacional generalizada: Ya que no existe restricción alguna dentro de la malla entonces,  $\delta_{q_1}$ .
- La co-energía inductiva del circuito  $T^* = 0$ , ya que no existe ningún inductor.
- La energía capacitiva  $U = 0$ , debido a que no se tiene algún elemento capacitivo.
- El contenido de la energía debido a los resistores esta definido por:

$$G = \frac{1}{2}R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}R_2 \dot{q}_1^2 \quad (2.26)$$

- El co-lagrangiano siguiendo lo definido anteriormente  $L^* = T^* - U = 0$ .
- La ecuación complementaria de Euler Lagrange para la coordenada  $q_1$  del circuito eléctrico, está definida como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_1} + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_1} = v(t) \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (R_1 + R_2)$$

Resolviendo:

$$\dot{q}_1 (R_1 + R_2) = v(t)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{v(t)}{(R_1 + R_2)} \quad (2.28)$$

# Capítulo 3

## Modelado y simulación del M.I. considerando circuito magnético lineal

El modelo del M.I. ha sido estudiado ampliamente, tomando en cuenta consideraciones que permiten realizar un análisis simplificado; como primera aproximación pueden despreciarse las pérdidas en el núcleo y el fenómeno de la saturación magnética, además de considerar un entrehierro constante y que la energía del campo magnético está concentrada en el entrehierro, donde no existen pérdidas mecánicas por fricción o rozamiento.

Al suponer una máquina sin desviaciones, es decir, un M.I. trifásico, simétrico y balanceado (devanados del rotor iguales entre sí y devanados del estator iguales entre sí) permite obtener un modelo que al estudiar no resulte un sistema matemático de ecuaciones imposible de resolver o que arrastre procesos de cálculo demasiado complejos para su estudio.

A lo largo de este bloque se presentarán y desarrollarán modelos matemáticos que reflejan el comportamiento dinámico del M.I., las ecuaciones matemáticas serán extensamente utilizadas a lo largo de todo el trabajo por lo que se ha sintetizado su obtención. La sección 3.1 presenta el modelo matemático del M.I. considerando el circuito magnético lineal, basado en leyes del electromagnetismo en el desarrollo de las ecuaciones y tomando en cuenta el marco de coordenadas abc. En la sección 3.2 se presenta el modelo matemático del M.I. considerando el circuito magnético lineal, también en coordenadas abc, pero a diferencia de la sección anterior se considera la estructura de modelado basado en la formulación de Euler Lagrange. Finalmente en la sección 3.3 se realiza una comparación de resultados obtenidos en el modelo basado en leyes del electromagnetismo y el basado en la estructura de la formulación E-L, tomando como referencia datos de un motor de inducción existentes en la literatura.

### 3.1. Modelo matemático en coordenadas abc, basado en leyes del electromagnetismo

El análisis completo del motor de inducción (M.I.) comprende la determinación de las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de la máquina. Es necesario tener conocimiento de ciertos parámetros físicos de la máquina como las inductancias, resistencias etc; una vez conocidos se plantean las ecuaciones de los voltajes inducidos, los voltajes aplicados en los devanados, y a partir de estas se pueden determinar las demás variables de interés como las

corrientes, el par electromagnético, la velocidad etc.

Para la obtención de las ecuaciones se emplea un motor de inducción trifásico, 4 polos, conectado en estrella, tipo jaula de ardilla. Los devanados del estator se consideran iguales, desplazados  $120^\circ$  eléctricos entre sí, con un número equivalente de vueltas  $N_s$  y resistencia  $R_s$ . Debido a que el rotor es del tipo jaula de ardilla, los conductores que forman el devanado están conectados en corto circuito en sus extremos. Para este caso, se representan los devanados equivalentes y similares a los del estator, con  $N_r$  vueltas y resistencia  $R_r$ .

Se han realizado una serie de suposiciones, que suelen facilitar la obtención de las ecuaciones matemáticas. Desde luego éstas simplificaciones no permiten predecir con exactitud el comportamiento del M.I. en todos sus modos de operación, pero es una representación simplificada, que es suficiente para describir el comportamiento de ciertas aplicaciones prácticas [García and Rodríguez, 2006], las suposiciones se realizan se presentan a continuación:

- Comportamiento del circuito magnético lineal, es decir se desprecia el efecto de la saturación magnética y pérdidas en el núcleo.
- Se considera el estator y rotor concéntricos, además el entrehierro tiene una longitud radial constante.
- Construcción de los devanados del M.I. por fase iguales entre sí y distribuidos simétricamente.
- Permeabilidad magnética del núcleo infinita (reluctancia magnética despreciable frente a la del entrehierro).
- Se supone que los dos neutros del estator y rotor son aislados y que las terminales del rotor están en corto circuito internamente.
- La fuerza magnetomotriz (fmm) no contiene componentes armónicas.

A continuación se presenta el esquema del M.I. que se está considerando Figura 3.1; obsérvese la disposición física de los devanados del estator y del rotor, así como el diagrama eléctrico de los mismos, en el cual se representa el desfaseamiento entre ellos con la inclinación de la parte derecha, Figura 3.2.

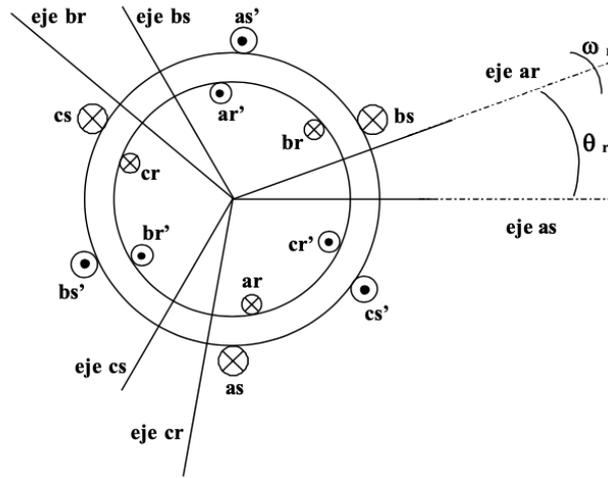


Figura 3.1: Esquema del M.I.

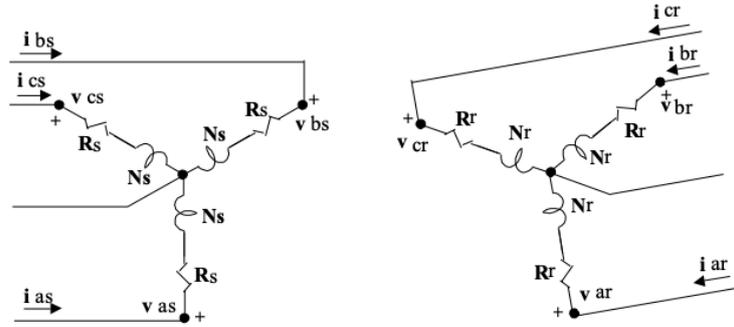


Figura 3.2: Diagrama eléctrico de los devanados del estator y rotor del M.I.

A continuación se presentan las ecuaciones de voltaje del estator (3.1) y el rotor (3.2), de acuerdo a las variables presentadas, tomando en cuenta que  $p$  denota el operador de la derivada ( $d/dt$ ):

$$v_{as} = i_{as}R_s + p\lambda_{as}, \quad v_{bs} = i_{bs}R_s + p\lambda_{bs}, \quad v_{cs} = i_{cs}R_s + p\lambda_{cs} \quad (3.1)$$

Tomando en cuenta que el voltaje de alimentación en los devanados del rotor es cero, entonces las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$0 = i_{ar}R_r + p\lambda_{ar}, \quad 0 = i_{br}R_r + p\lambda_{br}, \quad 0 = i_{cr}R_r + p\lambda_{cr} \quad (3.2)$$

Donde:

- $i_{as}, i_{bs}, i_{cs}$  -Corrientes de los devanados de las fases del estator (A)
- $i_{ar}, i_{br}, i_{cr}$  -Corrientes de los devanados de las fases del rotor (A)
- $v_{as}, v_{bs}, v_{cs}$  -Voltajes de alimentación trifasicos en los devanados de estator (V)
- $\lambda_{as}, \lambda_{bs}, \lambda_{cs}$  -Enlaces de flujo de los devanados del estator (Wb)
- $\lambda_{ar}, \lambda_{br}, \lambda_{cr}$  -Enlaces de flujo de los devanados del rotor (Wb)
- $R_s, R_r$  -Resistencias de los devanados de estator y rotor respectivamente ( $\Omega$ )

Las ecuaciones de enlaces de flujo son:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \\ \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \\ \lambda_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ls}+L_{ss} & L_{sm} & L_{sm} & L_{sr} \cos\theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) \\ L_{sm} & L_{ls}+L_{ss} & L_{sm} & L_{sr} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos\theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) \\ L_{sm} & L_{sm} & L_{ls}+L_{ss} & L_{sr} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos\theta_r \\ L_{sr} \cos\theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L_{lr}+L_{rr} & L_{rm} & L_{rm} \\ L_{sr} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos\theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L_{rm} & L_{lr}+L_{rr} & L_{rm} \\ L_{sr} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L_{sr} \cos\theta_r & L_{rm} & L_{rm} & L_{lr}+L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Donde:

$L_{ls}, L_{lr}$  -Inductancias de dispersión de los devanados de estator y rotor respectivamente

$L_{ss}, L_{rr}$  -Autoinductancias o inductancias propias de los devanados de estator y rotor respectivamente

$L_{sm}, L_{rm}$  -Inductancias mutuas entre los devanados de estator y rotor respectivamente

$L_{sr}$  -Valor pico de las inductancias mutuas estator – rotor

$\theta_r$  -Desplazamiento angular del rotor

Al referenciar las variables del rotor respecto del marco de referencia del estator en función de la inductancia de magnetización del estator, la matriz de inductancias de la ecuación (3.3) queda de la siguiente manera:

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} L_{ls}+L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & L'_{ms} \cos\theta_r & L'_{ms} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) \\ -\frac{1}{2}L'_{ms} & L_{ls}+L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & L'_{ms} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos\theta_r & L'_{ms} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) \\ -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & L_{ls}+L'_{ms} & L'_{ms} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos\theta_r \\ L'_{ms} \cos\theta_r & L'_{ms} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L'_{lr}+L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} \\ L'_{ms} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos\theta_r & L'_{ms} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & -\frac{1}{2}L'_{ms} & L'_{lr}+L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} \\ L'_{ms} \cos(\theta_r-\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos(\theta_r+\frac{2\Pi}{3}) & L'_{ms} \cos\theta_r & -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & L'_{lr}+L'_{ms} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Donde:

$L'_{ms}, L'_{lr}$  y -Inductancias de magnetización y la inductancia de dispersión del rotor ambas, referidas al estator.

Como la máquina de inducción trabaja generalmente en la zona lineal de la curva de saturación, se considera que  $L'_{ms}, L'_{lr}$  son invariables y pueden salir de las matrices correspondientes, que únicamente dependen de la geometría del convertidor y son independientes de la característica magnética del mismo.

La ecuación para el subsistema mecánico en términos del par electromecánico  $\tau_e$  es:

$$\tau_e = J \frac{d\omega_r}{dt} + B\omega_r + \tau_L \quad (3.5)$$

Donde:

$J$ -Inercia del rotor

$B$ -Coeficiente de fricción viscosa  $N \cdot m \cdot s/rad$

$\omega_r$ -Velocidad mecánica angular  $rad/s$

$\tau_L$ -Par de carga

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$V = RI + \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.6)$$

Donde:

$$\begin{aligned} V &= [v_{as} \ v_{bs} \ v_{cs} \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \lambda &= [\lambda_{as} \ \lambda_{bs} \ \lambda_{cs} \ \lambda_{ar} \ \lambda_{br} \ \lambda_{cr}]^T \\ I &= [i_{as} \ i_{bs} \ i_{cs} \ i_{ar} \ i_{br} \ i_{cr}]^T \\ R &= \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es decir,  $I$  es el vector de corrientes de los devanados del estator y del rotor,  $R$  es la matriz de resistencias de los devanados del estator y del rotor y  $V$  es el vector de voltajes del estator y rotor, donde los voltajes correspondientes al rotor son iguales a cero debido a que se considera un motor jaula de ardilla. La matriz de resistencia que permite modelar el comportamiento de la máquina de inducción solo contiene términos en la diagonal principal ya que no existen resistencias mutuas entre las bobinas del estator y del rotor.

A fin de resolver la ecuación diferencial de primer orden para la corriente, se obtiene la derivada de los enlaces de flujo dados por la ecuación:

$$\lambda = LI \quad (3.7)$$

Esto es:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dL}{dt}I + L\frac{dI}{dt} \quad (3.8)$$

Sustituyendo la ecuación (3.8) en (3.6) y despejando  $L\frac{dI}{dt}$  se obtiene

$$L\frac{dI}{dt} = -RI - \frac{dL}{dt}I + V \quad (3.9)$$

El término  $\frac{dL}{dt}$  se puede expresar como:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\theta_r} \cdot \frac{d\theta_r}{dt} = \frac{dL}{d\theta_r} \cdot n_p\omega_r \quad (3.10)$$

Donde  $n_p$  representa el número de pares de polos de la máquina y  $\omega_r$  la velocidad del rotor. De esta manera la ecuación (3.9) se expresa de la siguiente forma:

$$L\frac{dI}{dt} = -[R + \frac{dL}{d\theta_r}n_p\omega_r] \cdot I + V \quad (3.11)$$

es decir,

$$L \begin{bmatrix} \dot{i}_{as} \\ \dot{i}_{bs} \\ \dot{i}_{cs} \\ \dot{i}_{ar} \\ \dot{i}_{br} \\ \dot{i}_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s & 0 & 0 & K_\omega \text{sen}\theta_r & K_\omega \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & -R_s & 0 & K_\omega \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}\theta_r & K_\omega \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & -R_s & K_\omega \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}\theta_r \\ K_\omega \text{sen}\theta_r & K_\omega \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & -R_r & 0 & 0 \\ K_\omega \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}\theta_r & K_\omega \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & 0 & -R_r & 0 \\ K_\omega \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & K_\omega \text{sen}\theta_r & 0 & 0 & -R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Donde

$$k_\omega = n_p \omega_r L'_{ms}.$$

$L$  está dada por la ecuación (3.4) y al despejar la derivada de las corrientes, se resuelve la ecuación (3.12) numéricamente.

### 3.2. Modelo matemático en coordenadas abc, basado en E-L

A diferencia de la formulación vectorial de Newton que se utiliza para determinar todas las fuerzas que actúan en una partícula, donde es necesario trabajar con muchos vectores, fuerza y aceleración; el método variacional o analítico se basa en la diferencia entre la energía cinética  $T$  y potencial  $V$ , siendo estas funciones escalares que simplifican mucho el problema. Podemos dar ahora un método rutinario para resolver todos los problemas de mecánica a los que se pueda aplicar la formulación de Lagrange. Solo hay que escribir  $T$  y  $V$  en coordenadas generalizadas, formar  $\mathcal{L}$  a partir de aquellas y sustituir en (2.12) para obtener las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones dinámicas que se obtienen del uso de la metodología de E-L son equivalentes a las que surgen de la aplicación de las leyes de Newton para sistemas mecánicos. Sin embargo, la ventaja de las ecuaciones de E-L es que en realidad no se debe alterar su estructura general para incluir las fuerzas de interacción entre los dos subsistemas, [Bolio, 2001].

Para abordar el problema mediante la metodología de E-L se ha realizado el diagrama de la Figura 3.3, con la intención de resumir los pasos a seguir.

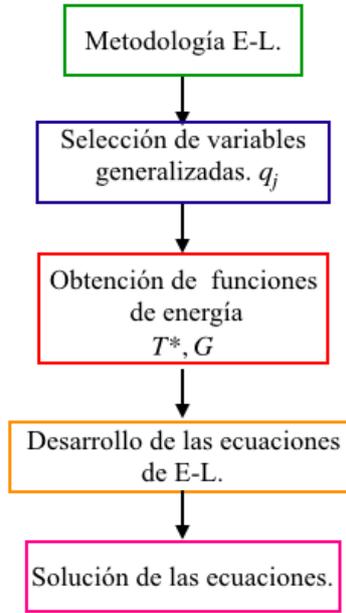


Figura 3.3: Metodología E-L.

En el siguiente análisis donde se aborda la metodología de E-L se considera un motor con las mismas características y suposiciones realizadas en la sección del análisis del M.I. por leyes del electromagnetismo, mostrado en la sección 3.1 (circuito magnético lineal).

Para la obtención de las ecuaciones del motor de inducción trifásico mediante la metodología de Euler-Lagrange se procede a analizar el sistema eléctrico y mecánico del motor, mediante un análisis variacional de redes.

Se considera un motor de tres fases:

$$n = 7 \quad (3.13)$$

Donde:

$n$  = Número de coordenadas generalizadas, las cuales son las 3 coordenadas eléctricas del estator, las 3 coordenadas eléctricas del rotor y la coordenada mecánica del motor.

$$q = [q_{as}, q_{bs}, q_{cs}, q_{ar}, q_{br}, q_{cr}, q_m]^T \quad (3.14)$$

Donde:

$q$  = Vector de coordenadas generalizadas del motor de inducción trifásico.

Vector de enlaces de flujo.

$$\lambda = [\lambda_{as}, \lambda_{bs}, \lambda_{cs}, \lambda_{ar}, \lambda_{br}, \lambda_{cr}]^T \quad (3.15)$$

Vector de coordenadas eléctricas:

$$\dot{q}_e = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_6]^T \quad (3.16)$$

Bajo las consideraciones anteriores y mediante la aplicación de las leyes de Gauss y Ampere, se obtiene la siguiente relación lineal entre el vector de enlaces de flujo (3.15) y el vector de corrientes (3.16), que contiene las tres corrientes de estator y las tres de rotor.

$$\lambda = L(q_m)\dot{q}_e \quad (3.17)$$

Donde:

$L(q_m)$  es simétrica y definida positiva (matriz de 6x6 de inductancias las cuales dependen de la coordenada del eje del motor  $q_m$ ).

Se calcula la co-energía cinética de la parte eléctrica que representa el complemento de la energía total en los inductores, que se define como:

$$T^* = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T L(q_m)\dot{q}_e \quad (3.18)$$

Mientras que la co-energía cinética de la parte mecánica es:

$$K = \frac{1}{2}J\dot{q}_m^2 \quad (3.19)$$

Donde:

$J$  es la inercia rotacional del motor.

Si se considera que no existen efectos capacitivos en los devanados y la flecha del motor es rígida, entonces la energía potencial es cero, por lo tanto el co-lagrangiano que representa el complemento de la energía, de la diferencia entre la energía cinética y la potencial, el cual es:

$$\mathcal{L}^*(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m) = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T L(q_m)\dot{q}_e + \frac{1}{2}J\dot{q}_m^2 \quad (3.20)$$

Además se considera que los términos de disipación en los devanados se deben únicamente a sus resistencias que tienen valores constantes, por lo tanto la función de disipación de Rayleigh que representa las fuerzas de disipación para cada una de las coordenadas generalizadas [Cortés, 2002] para el subsistema eléctrico es:

$$G(\dot{q}_e) = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T R\dot{q}_e \quad (3.21)$$

Donde:

$R = \text{diag}\{R_1, \dots, R_6\}$  positiva definida de dimensión 6x6.

También en el caso del subsistema mecánico se considera que los términos de disipación se deben a la fricción mecánica presente en los rodamientos que tienen un coeficiente constante, por lo tanto la función de disipación de Rayleigh que representa las pérdidas mecánicas por rozamiento en el motor, está dada por:

$$F(\dot{q}_m) = \frac{1}{2}B\dot{q}_m^2 \quad (3.22)$$

Donde:

$B$  es el coeficiente de fricción viscosa

La función total de disipación de Rayleigh que incluye al sistema eléctrico y mecánico es:

$$F_T(\dot{q}_e, \dot{q}_m) = G(\dot{q}_e) + F(\dot{q}_m) = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T R \dot{q}_e + \frac{1}{2}B\dot{q}_m^2 \quad (3.23)$$

Las fuerzas externas del sistema corresponden a los voltajes aplicados en los devanados del estator y rotor, denotados por:

$$u = [u_1, \dots, u_6]^T$$

Y el par de la carga del eje del motor, el cual es una función no lineal de la posición y la velocidad, está dado por:

$$-\tau_L$$

Se procede a calcular las derivadas parciales del co-lagrangiano (3.20) primeramente con respecto al subsistema eléctrico.

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_e} = L(q_m)\dot{q}_e$$

lo que implica

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_e} \right) = L(q_m)\ddot{q}_e + \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_e$$

Debido a que no existe la dependencia de (3.20) con respecto a  $q_e$ , y considerando la siguiente función:

$$\frac{\partial F_T(\dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_e} = R\dot{q}_e$$

Las ecuaciones diferenciales para el subsistema eléctrico son:

$$L(q_m)\ddot{q}_e + W(q_m)\dot{q}_m \dot{q}_e + R\dot{q}_e = u \quad (3.24)$$

Donde:

$$W(q_m) = \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m}$$

A continuación se calculan las derivadas parciales del co-lagrangiano con respecto al subsistema mecánico.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_m} \right) = J\ddot{q}_m$$

se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_m} = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_e$$

y también

$$\frac{\partial F_T}{\partial \dot{q}_m} = B\dot{q}_m$$


---

Por lo tanto, la ecuación diferencial del subsistema mecánico es:

$$J\ddot{q}_m - \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W(q_m)\dot{q}_e + B\dot{q}_m = -\tau_L(q_m, \dot{q}_m) \quad (3.25)$$

Empleando las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta que solo son afectados directamente por voltajes externos los 3 devanados del estator.

Entonces, el conjunto de ecuaciones de equilibrio del M.I. es:

$$L(q_m)\ddot{q}_e + W(q_m)\dot{q}_m\dot{q}_e + R\dot{q}_e = u \quad (3.26)$$

$$J\ddot{q}_m - \tau_e(\dot{q}_e, q_m) + B\dot{q}_m = -\tau_L(q_m, \dot{q}_m) \quad (3.27)$$

Finalmente se debe enfatizar que como se esperaba, el modelo (3.26) y (3.27) es una equivalencia del modelo clásico que se obtiene de la aplicación de las leyes de Faraday, Ohm y Newton.

$$\frac{d\lambda}{dt} + R_e\dot{q}_e = u \quad (3.28)$$

$$J\ddot{q}_m + B\dot{q}_m = \tau_e - \tau_L \quad (3.29)$$

### 3.3. Comparación de resultados de ambos modelos

Para realizar una comparación de resultados de los modelos que se presentaron en la sección 3.1 (modelo del M.I. basado en leyes del electromagnetismo) y 3.2 (modelo del M.I. basado en la formulación E-L) se han tomado datos de un motor de 3 HP, 220V, 4 polos, 60Hz; existente en la literatura [Krause and Wasynczuk, 1995], que han sido utilizados en la simulación correspondiente, a continuación en la Tabla 3.1 se presentan los parámetros utilizados .

Tabla 3.1: Parámetros del M.I. tomados de la literatura.

Parámetro	Valor	Unidades
Resistencia en los devanados del estator	0.435	ohms
Resistencia en los devanados del rotor	0.816	ohms
Reactancia de magnetización	26.13	ohms
Reactancia de dispersión del rotor	0.754	ohms
Reactancia de dispersión del estator	0.754	ohms
Par nominal	11.9	N-m

Debido a que las ecuaciones que se obtienen en ambos modelos son equivalentes, al realizar la simulación utilizando cada uno de los dos enfoques por separado, se han obtenido los mismos resultados gráficos, las variables de interés son las corrientes en el estator y rotor, así como el par y la velocidad de la máquina, que se ha sometido al 0 %, 25 %, 50 %, 75 %, 100 % y 125 % porcentaje de carga, como se observa a continuación.

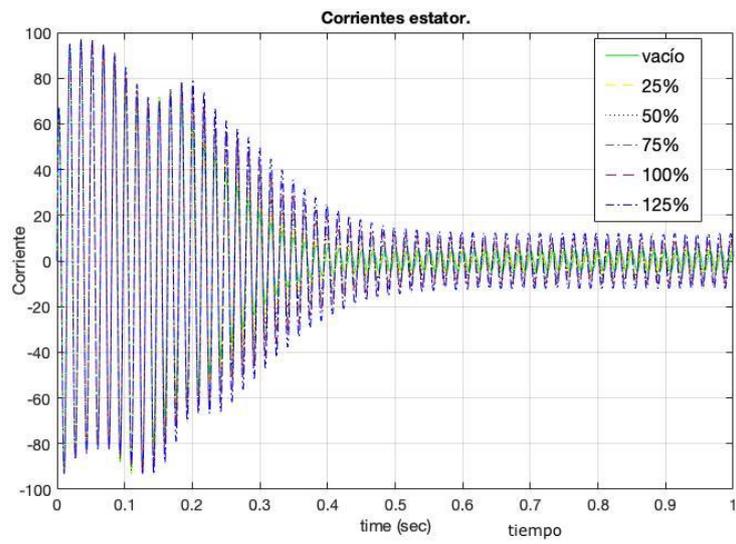


Figura 3.4: Corrientes del estator a diferentes porcentajes de carga.

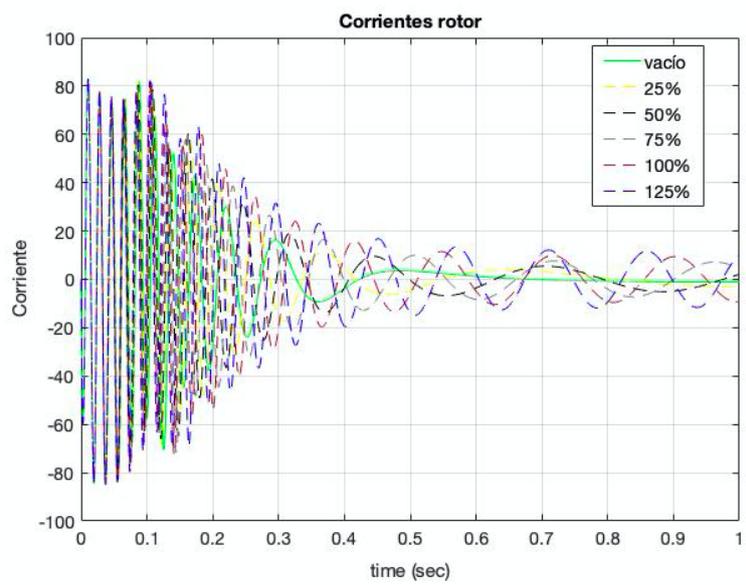


Figura 3.5: Corrientes del rotor a diferentes porcentajes de carga.

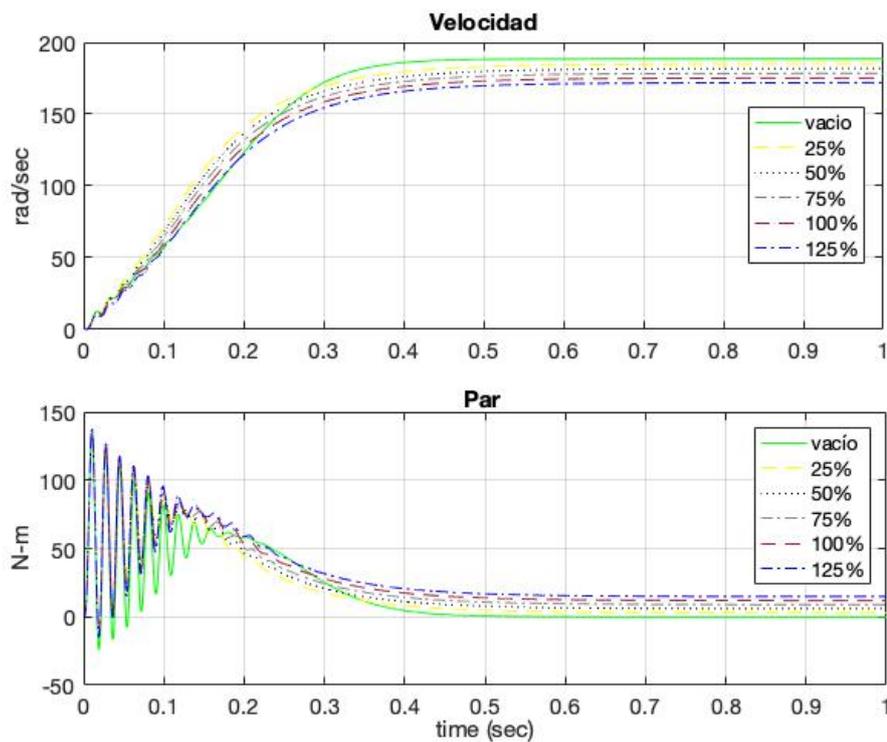


Figura 3.6: Par y velocidad sujetos a diferentes porcentajes de carga.

Es posible determinar de acuerdo a los resultados obtenidos en las gráficas, que la corriente aumenta si aumenta el par de carga aplicado, caso contrario de la velocidad que disminuye si este aumenta. También la corriente del rotor es nula si la máquina opera en vacío, caso contrario a la corriente del estator que presenta un nivel de corriente diferente de cero.

# Capítulo 4

## Pruebas experimentales

En este capítulo se desarrollaron las pruebas necesarias para obtener los parámetros característicos del motor de inducción utilizado en el caso de estudio. En la sección 4.1 se mencionan cuales son las pruebas experimentales que según el estándar de la IEEE se deben realizar para obtener los parámetros de la máquina y se presenta el circuito monofásico equivalente del M.I. en el que se basan las pruebas. La sección 4.2 muestra las características del motor utilizado en el laboratorio para realizar las pruebas experimentales, además se presentan los valores base con los que se va a trabajar. En la sección 4.3 se muestra el procedimiento a seguir para realizar la prueba de vacío, su diagrama de conexión y los resultados obtenidos en la prueba. La sección 4.4 muestra la metodología a seguir para llevar a cabo la prueba de rotor bloqueado, su diagrama de conexión y la tabla de resultados obtenidos en esta prueba. En la sección 4.5 se muestra el procedimiento a seguir para realizar la prueba de rotor bloqueado, su diagrama de conexión eléctrico y los resultados obtenidos en la prueba. En la sección 4.6 se realizan los cálculos necesarios para la obtención de los parámetros característicos del motor del caso de estudio, utilizando los resultados obtenidos en las pruebas de vacío, de rotor bloqueado y de resistencia de CD. En la sección 4.7 se explica la definición de la representación de cantidades o magnitudes en el sistema por unidad y se realiza la conversión de los parámetros característicos del motor de inducción del caso de estudio a este sistema. Por último, la sección 4.8 presenta la curva de saturación obtenida a partir de pruebas experimentales del motor del caso de estudio y se realizan los cálculos necesarios para obtener los parámetros a partir de esta curva.

### 4.1. Caracterización del motor de inducción del caso de estudio

Existen diversas formas de estimar los parámetros en un motor asíncrono trifásico, pero según el estándar [IEEE, 2018], se encuentran realizando las siguientes pruebas:

- Prueba de vacío.
- Prueba de rotor bloqueado.
- Prueba de resistencia de corriente directa

El circuito eléctrico equivalente convencional del motor de inducción que se presenta en la Figura 4.1 representa la operación de una fase del motor alimentado por un sistema de tensiones trifásico, simétrico y con forma de onda sinusoidal [Cochran and Motors, 1989].

Los parámetros a encontrar se basan en el diagrama monofásico del motor de inducción [Rincón and Jaramillo, 2013], que se muestra a continuación:

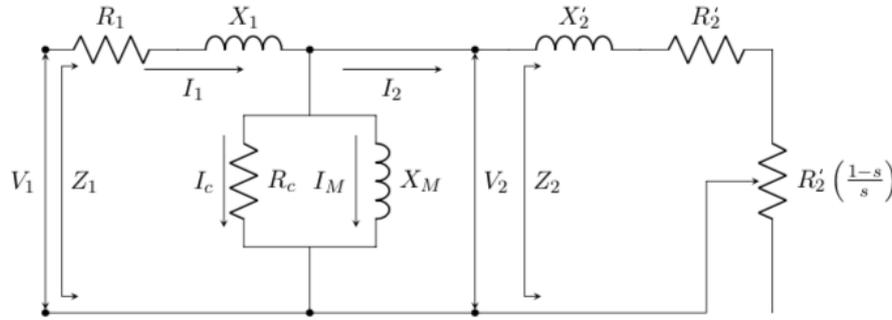


Figura 4.1: Circuito equivalente de una fase del M.I.

Para el cálculo de los parámetros se utilizan las variables que se muestran en el diagrama de la Figura 4.1, agregando el subíndice 0 representan cantidades correspondientes a la prueba de vacío y el subíndice  $L$  corresponde a la prueba de rotor bloqueado.

## 4.2. Características del motor de inducción

Se utilizó una máquina de inducción de rotor tipo jaula de ardilla, modelo BHI62ST-A, marca Oriental Motor. La Tabla 4.1 muestra sus datos de placa.

Tabla 4.1: Datos nominales del M.I.

Parámetro	Valor	Unidades
Voltaje nominal	220	volts
Corriente nominal	.95	ampers
Potencia nominal	200	watts
Frecuencia nominal	60	hertz
Velocidad nominal	1795	rpm

A partir de la información del motor, se procede a realizar la caracterización de sus parámetros mediante pruebas experimentales. Para procesar los datos adquiridos se eligen y determinan las bases que se van a utilizar para tener un sistema adimensional de unidades en valores (p.u.), los valores base que servirán de referencia para la conversión se muestran en la Tabla 4.2 y a continuación se muestra el procedimiento para su obtención.

Para comenzar se eligen como valores base el voltaje de línea a línea y la potencia trifásica de la máquina, según la placa de datos del mismo.

$$VB_{LL} = 220V \quad SB_{3\phi} = 200 VA$$

- Se realiza el cálculo de la corriente base:

$$I_{B_L} = \frac{S_{B_{3\phi}}}{\sqrt{3} V_{B_{LL}}} = \frac{200VA}{\sqrt{3} 220V} = 0.524A \quad (4.1)$$

- Se realiza el cálculo de la impedancia base, tomando en cuenta que la potencia en un sistema trifásico es  $S_{3\phi} = \sqrt{3}|V_{LL}||I_L|$ :

$$Z_{B_L} = \frac{V_{B_{LL}}^2}{S_{B_{3\phi}}} = \frac{220V^2}{200VA} = 242\Omega \quad (4.2)$$

Tabla 4.2: Valores base del M.I.

Parámetro	Valor	Unidades
Voltaje base	220	volts
Potencia base	200	VA
Corriente base	.524	ampers
Impedancia base	242	ohms

### 4.3. Prueba de vacío

La combinación de los resultados de la prueba de vacío con los resultados de la prueba de rotor bloqueado permiten calcular  $R_2$ ,  $X_1$ ,  $X'_2$  y  $X_M$ . Adicionalmente esta prueba proporciona información para el cálculo de las pérdidas rotacionales y del núcleo.

Esta prueba consiste en hacer funcionar la máquina sin ningún tipo de carga mecánica en el eje, es decir, en vacío, se realiza alimentando al estator a frecuencia y voltaje nominal, a continuación el diagrama de conexión.

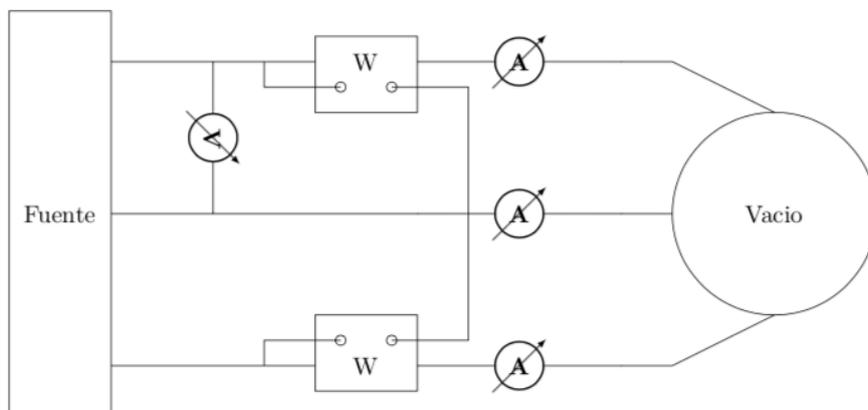


Figura 4.2: Circuito prueba de vacío

**Procedimiento:**

1. Se realiza las conexión como lo indica el circuito de la Figura 4.2.
2. Una vez verificadas las conexiones, se enciende la fuente y se ajusta para que el voltaje del estator llegue al valor nominal.
3. Se registran los valores de corriente, voltaje, velocidad y potencia.
4. Finalmente se apaga la fuente.

Tabla 4.3: Datos prueba de vacío.

Parámetro	Valor	Símbolo	Unidades
$Voltaje_{10}$	127	$V_{10}$	volts
$Corriente_{10}$	0.60	$I_{10}$	ampers
$Potencia_{10}$	31.8	$P_0$	watts

#### 4.4. Prueba de rotor bloqueado

Esta prueba se lleva a cabo con el fin de hallar el valor de la reactancia de rotor y reactancia mutua. Se debe prestar especial cuidado al realizar la prueba pues la temperatura del motor tiende a subir rápidamente. A continuación la Figura 4.3 muestra el diagrama de conexión:

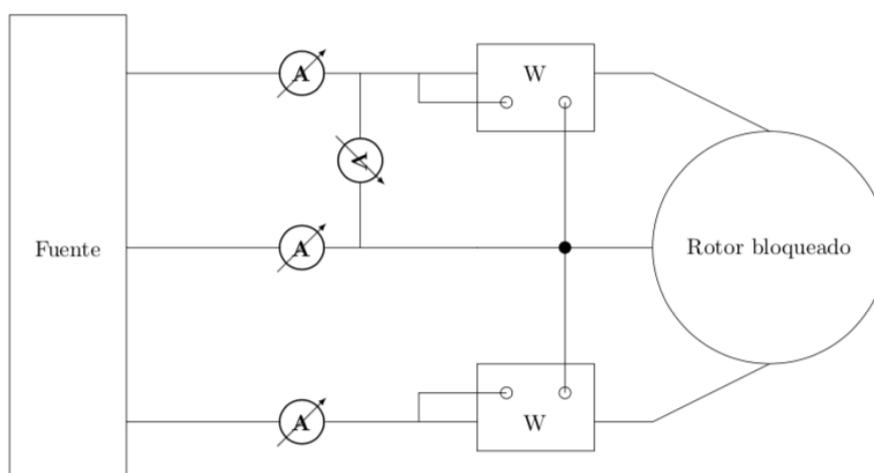


Figura 4.3: Circuito prueba de rotor bloqueado

**Procedimiento:**

La prueba consiste en aplicar al motor una tensión de bajo valor y también a una frecuencia menor de la nominal, que permita mantener el rotor en reposo sujetándolo externamente. En lo posible los amperímetros deben marcar la corriente nominal. Se deben tomar los datos de potencia activa de entrada al motor, corriente y tensión de línea.

Tabla 4.4: Datos prueba de rotor bloqueado.

Parámetro	Valor	Símbolo	Unidades
$Voltaje_{1L}$	30	$V_{1L}$	volts
$Corriente_{1L}$	0.962	$I_{1L}$	ampers
$Potencia_{1L}$	71	$P_L$	watts

#### 4.5. Prueba de resistencia de CD

La prueba de resistencia de corriente directa tiene como objetivo determinar la resistencia del devanado del estator. Se mide la resistencia en corriente directa (CD) por fase del estator  $R_S$ .

La resistencia efectiva del estator puede determinarse alimentando con una fuente variable de CD y alcanzando la corriente nominal, se toman mediciones de voltaje, corriente y temperatura. El circuito de conexión para la prueba depende de la configuración presente en el motor, en la Figura 4.4 se presenta el diagrama de una conexión del tipo estrella y en la Figura 4.5 el diagrama de una conexión en delta.

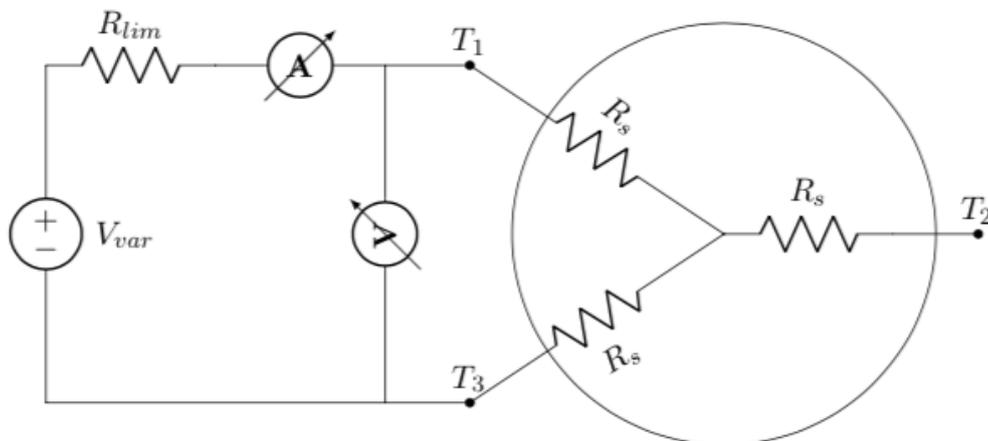


Figura 4.4: Circuito prueba de resistencia de CD conexión Y.

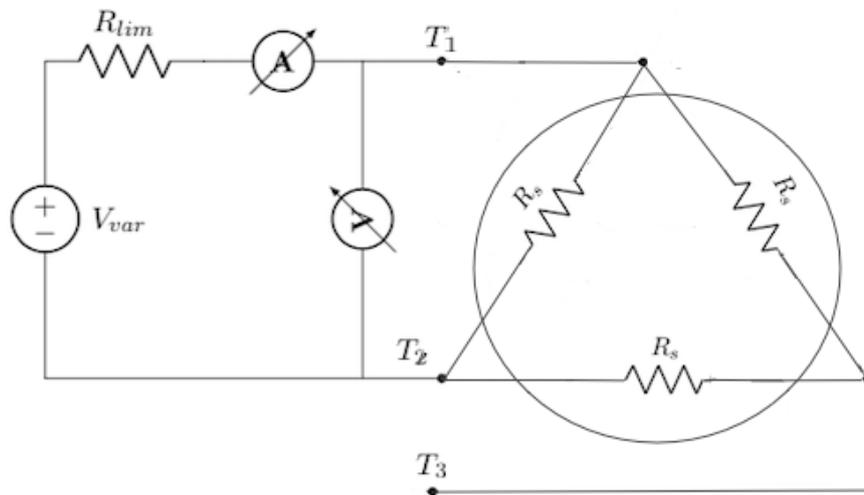


Figura 4.5: Circuito prueba de resistencia de CD conexión  $\Delta$ .

**Procedimiento:**

1. Se realizan las conexión como lo indica el circuito de la Figura 4.4 o la Figura 4.5 según corresponda.
2. Una vez verificadas las conexiones, se enciende la fuente y se ajusta para que la corriente del estator llegue al valor nominal y se mide el voltaje en terminales como se muestra en la Figura 4.4 o Figura 4.5.
3. Se registran los valores de corriente, voltaje y temperatura ambiente.
4. Finalmente se apaga la fuente.

De acuerdo a las pruebas realizadas, se obtiene la siguiente información.

Tabla 4.5: Datos prueba de CD.

Parámetro	Valor	Símbolo	Unidades
<i>Voltaje<sub>CD</sub></i>	24.95	$V_{CD}$	volts
<i>Corriente<sub>CD</sub></i>	1.04	$I_{CD}$	ampers
<i>Resistencia<sub>CD</sub></i>	11.99	$R_1$	ohms

#### 4.6. Cálculos para obtención de parámetros

Para obtener los parámetros característicos del motor de inducción del caso de estudio, se trabaja con la metodología mostrada en [Fitzgerald, 2004], que a su vez está basada en estandar IEEE-112. Primero se debe de asumir la relación de las reactancias  $X_1$  y  $X_2$ , que de acuerdo a la [NEMA, 2003], para los diferentes tipos de motores corresponden los valores que se muestra en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6: Relación entre reactancias.

Clase NEMA MG-1-2003	Relación de inductancias ( $X_1/X_2$ )
<i>A y D</i>	1.0
<i>B</i>	0.67
<i>C</i>	0.43

Ya que se desconoce la clase del motor con el que se trabaja y de acuerdo a la NEMA-MG, para éstos casos se asume el valor  $X_1 = X'_2$ , por lo que el valor de la relación es 1. A continuación se procede a realizar los cálculos correspondientes:

- Cálculo de potencias reactiva en condición de vacío  $Q_0$  y a rotor bloqueado  $Q_L$ .

$$Q_0 = \sqrt{(m V_{10} I_{10})^2 - P_0^2} \quad (4.3)$$

$$Q_L = \sqrt{(m V_{1L} I_{1L})^2 - P_L^2} \quad (4.4)$$

Donde  $m$  es el número de fases y  $V_1$  corresponde al voltaje de fase.

- Cálculo de las reactancias en condición de vacío  $X_0$  y a rotor bloqueado  $X_L$ :

$$X_0 = \frac{Q_0}{m I_{10}^2} \quad (4.5)$$

$$X_L = \frac{f}{f_L} \frac{Q_L}{m I_{1L}^2} \quad (4.6)$$

- Cálculo de las reactancias  $X_1$ ,  $X'_2$  y  $X_M$ .

Considerando que  $X_1 = X'_2$ , entonces el valor de  $k = 1$ , ya que se desconoce la clase del motor, se resuelve la ecuación cuadrática (4.7), obteniendo las raíces del polinomio, se debe elegir la solución que tenga más sentido para el valor de  $X'_2$ , considerando que su valor debe ser menor que el de  $X_0$ .

$$k^2 X_2'^2 + (X_L(1 - k) - X_0(1 + k))X_2' + X_0 X_L = 0 \quad (4.7)$$

Para obtener el valor de  $X_1$ , se realiza el siguiente cálculo:

$$X_1 = k X_2' \quad (4.8)$$

El valor de la reactancia de magnetización se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$X_M = X_0 - X_1 \quad (4.9)$$

- Cálculo de las resistencias en condición de rotor bloqueado  $R_L$  y del rotor referida al estator  $R'_2$ .

$$R_L = \frac{P_L}{m I_{1L}^2} \quad (4.10)$$

$$R'_2 = (R_L - R_1) \left( \frac{X_2' + X_M}{X_M} \right)^2 \quad (4.11)$$

### 4.6.1. Parámetros característicos obtenidos a partir de las pruebas experimentales

A partir de la información recolectada en las pruebas experimentales y después de realizar los cálculos correspondientes, se obtienen los datos que se muestran en la Tabla 4.7, que corresponden a los valores característicos del M.I. con el que se ha trabajado, éstos datos serán utilizados en la simulación del modelo que incluye la saturación magnética.

Tabla 4.7: Parámetros característicos del M.I.

Parámetro	Valor	Unidades
Resistencia en los devanados del estator	11.995	ohms
Resistencia en los devanados del rotor	15.24	ohms
Reactancia de magnetización	211.52	ohms
Reactancia de dispersión del rotor	12.18	ohms
Reactancia de dispersión del estator	12.18	ohms
Pérdidas en el núcleo	22.117	ohms

## 4.7. Sistema en por unidad (P.U.)

El método de representación de cantidades o magnitudes eléctricas en valores por unidad, no modifica ni agrega ningún concepto nuevo, se trata de una herramienta matemática, que permite simplificaciones en los cálculos, utilizando un sistema adimensional de unidades, para ello se deben elegir los valores base que servirán de referencia [Gonen, 2011]. Los valores en (p.u.) se obtienen como se muestra en la ecuación siguiente:

$$Valor(p.u.) = \frac{Valor}{Valor\ base} \quad (4.12)$$

### 4.7.1. Parámetros característicos del M.I. en (P.U.)

Para obtener el valor de los parámetros en el mismo sistema, se realiza la conversión de los parámetros característicos a valores P.U., obteniendo los resultados mostrados en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8: Parámetros característicos del M.I. en P.U.

Parámetro	Valor	Unidades
Resistencia en los devanados del estator	0.0496	ohms
Resistencia en los devanados del rotor	0.0630	ohms
Reactancia de magnetización	0.8740	ohms
Reactancia de dispersión del rotor	0.0503	ohms
Reactancia de dispersión del estator	0.0503	ohms
Corriente	1.81	Ampers
Potencia	1	VA
Voltaje	1	Volts

#### 4.8. Curva de saturación característica del M.I. en (P.U.)

De acuerdo a lo mencionado en la sección 2.3.1 se realiza el procedimiento para determinar la curva de magnetización en condición de operación de vacío del M.I., la cual se muestra en la Figura 4.6 y se determinan los parámetros necesarios a partir de ésta, para la obtención de la corriente lineal y corriente saturada, utilizados en la simulación del modelo matemático que incluye el efecto de la saturación magnética.

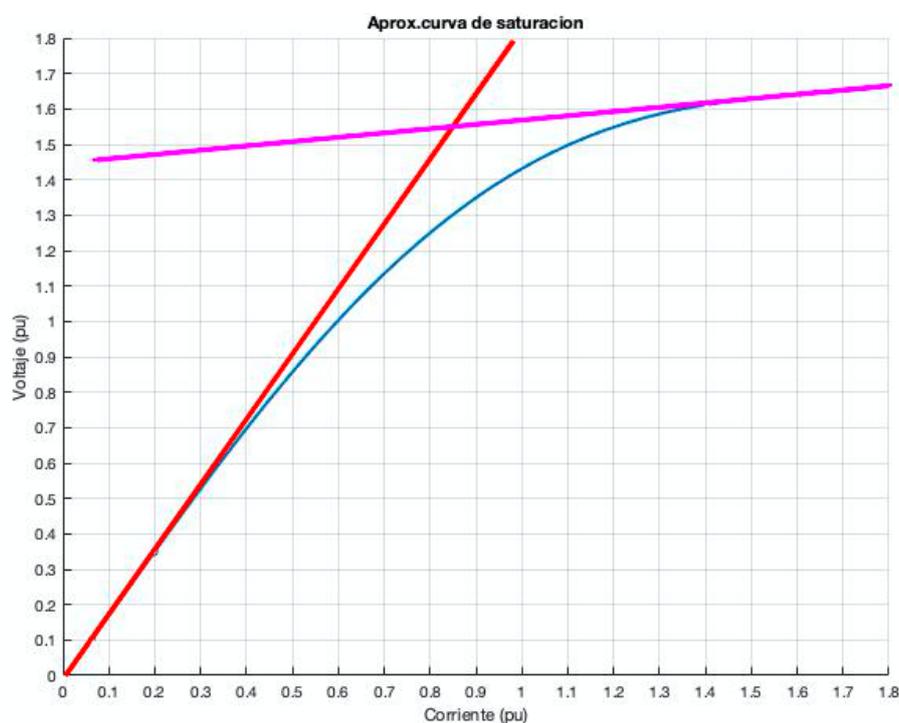


Figura 4.6: Curva de magnetización característica

La curva de magnetización correspondiente a la línea en azul se obtuvo de la prueba de vacío, la línea de color rojo representa la proyección de la zona donde la curva de magnetización

tiene un comportamiento lineal y la línea en color magenta representa la proyección de la zona saturada de la curva de magnetización.

#### 4.8.1. Parámetros característicos obtenidos a partir de la curva de saturación en (P.U.)

De la curva de saturación se obtienen los parámetros mostrados en la Tabla 4.9. Y para obtener el valor de las inductancias  $L_{m0}$  y  $L_{msat}$  se realiza el cálculo de las pendientes.

- Zona lineal, inductancia ( $L_{m0}$ ).

Se definen dos puntos situados en la zona lineal de la curva, en el plano x, y con las coordenadas P1=(0.2, 0.35) y P2=(0.4, 0.7) y se procede a sustituir los valores en la siguiente expresión:

$$L_{m0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.13)$$

- Zona saturada, inductancia ( $L_{msat}$ ).

En este caso las coordenadas de los dos puntos situados en la zona saturada de la curva son P1=(1.4, 1.6) y P2=(1.6,1.65)

$$L_{msat} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.14)$$

El valor de  $\Theta_T$  de acuerdo Figura 4.6, corresponde al valor en el eje de las ordenadas, donde se sitúa el codo de la curva y  $\Psi_T$  corresponde al valor en el eje de las ordenadas donde se satura la curva. De acuerdo a la información anterior se obtiene la Tabla 4.9 completa, correspondiente a los parámetros obtenidos en la curva de saturación en condición de vacío del motor del caso de estudio.

Tabla 4.9: Datos curva de magnetización.

Parámetro	Valor	Símbolo
Inductancia en la zona lineal	1.75	$L_{m0}$
Inductancia en la zona saturada	0.25	$L_{msat}$
Nivel de flujo curvatura del codo	1.2	$\Theta_T$
Nivel de flujo saturación de la curva	1.67	$\Psi_T$

# Capítulo 5

## Modelo del motor de inducción, considerando circuito magnético no lineal

El análisis del M.I. se realiza asumiendo linealidad del sistema magnético, aunque puede comprobarse como esto no es real y existe saturación y calentamiento de los materiales magnéticos; el efecto de la saturación afecta principalmente al valor de la inductancia de magnetización, ya que las inductancias de dispersión cierran su trayectoria de flujo a través del aire y su saturación es prácticamente insignificante.

En el modelo del M.I. que se considera en este trabajo, el efecto de la saturación magnética introduce el concepto de grados de saturación, el cual hace referencia a la relación entre la corriente en la zona saturada y la zona lineal, utilizando la curva de saturación característica como referencia. Si se considera la región lineal, el cociente de la relación mencionada es un valor constante que corresponde al valor de la inductancia de magnetización, pero conforme se aproxima a la zona del codo de la curva de magnetización este valor comienza a decrecer.

El campo magnético giratorio de un M.I. satura de manera diferente cada bobina de la máquina, de acuerdo a la ubicación en la que se encuentre el campo magnético en un instante de tiempo determinado. Tanto la ubicación espacial como la magnitud determinan la saturación de cada fase del M.I., permitiendo observar los armónicos en las corrientes del estator al hacer trabajar la máquina en vacío o con niveles de tensión por encima del nominal.

En este capítulo se presenta en la sección 5.1 el modelo matemático del M.I. considerando la saturación magnética, tomando en cuenta el marco de referencia en coordenadas abc y bajo la metodología de modelado de E-L. Se explica el concepto de grados de saturación y como estos modifican las ecuaciones matemáticas del modelo, además que se muestra en diagrama de bloques las partes que conforman el modelo presentado en este trabajo.

## 5.1. Modelo matemático considerando la saturación magnética en coordenadas abc, basado en el enfoque E-L

El modelo de la máquina de inducción en coordenadas abc desarrollado a continuación, introduce el efecto no lineal de la saturación magnética. A partir de los enlaces de flujo de cada una de las fases se puede obtener el coeficiente de saturación, que está ligado con la permeabilidad magnética, que resulta de la relación de la densidad de campo magnético B y la intensidad de campo magnético H. Por lo tanto, el coeficiente de saturación se utiliza para calcular una nueva inductancia en coordenadas abc que considera la no linealidad de la saturación.

Tomando las ecuaciones del modelo obtenido anteriormente mediante la metodología de Euler-Lagrange (3.26) (3.27) y resolviendolas, se obtienen las expresiones que se muestran a continuación:

- Ecuación que representa el comportamiento dinámico del sistema eléctrico.

$$\ddot{q}_e = [L(q_m)]^{-1} \left[ u_s - \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_e - R_e \dot{q}_e \right] \quad (5.1)$$

- Ecuación que representa el comportamiento dinámico del sistema mecánico.

$$\ddot{q}_m = \frac{1}{J} [\tau_e - B \dot{q}_m - \tau_L] \quad (5.2)$$

Como ha sido mencionado anteriormente el efecto de la saturación repercute directamente en la matriz de inductancias, por tal motivo en el modelo sufrirá modificaciones únicamente en esta parte; para tener en claro este efecto es importante tener presente la estructura de la matriz antes de ser modificada por la saturación magnética, la cual se muestra a continuación.

$$L(q_m) = \begin{bmatrix} L_s & L_{mr}(q_m) \\ L'_{mr}(q_m) & L_r \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Donde  $L'_{mr}(q_m)$  es la submatriz transpuesta y las submatrices que conforman a  $L(q_m)$  se muestran a continuación:

$$L_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} \\ -\frac{1}{2}L'_{ms} & L_{ls} + L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} \\ -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & L_{ls} + L'_{ms} \end{bmatrix}$$

$$L_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} \\ -\frac{1}{2}L'_{ms} & L'_{lr} + L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} \\ -\frac{1}{2}L'_{ms} & -\frac{1}{2}L'_{ms} & L'_{lr} + L'_{ms} \end{bmatrix}$$

$$L_{mr}(q_m) = L'_{ms} \begin{bmatrix} \cos(q_m) & \cos(q_m + \frac{2\pi}{3}) & \cos(q_m - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(q_m - \frac{2\pi}{3}) & \cos(q_m) & \cos(q_m + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(q_m + \frac{2\pi}{3}) & \cos(q_m - \frac{2\pi}{3}) & \cos(q_m) \end{bmatrix}$$

Al realizar la derivada parcial de (5.3), tal como se pide en (5.1) para obtener la solución de la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\left[ \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \right] = -L_{ms} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \text{sen}(q_m) & \text{sen}(q_m + \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}(q_m - \frac{2\Pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(q_m - \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}q_m & \text{sen}(\theta r + \frac{2\Pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(q_m + \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}(q_m - \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}(q_m) \\ \text{sen}(q_m) & \text{sen}(q_m - \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}(q_m + \frac{2\Pi}{3}) & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_m + \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}(q_m) & \text{sen}(q_m - \frac{2\Pi}{3}) & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_m - \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}(q_m + \frac{2\Pi}{3}) & \text{sen}(q_m) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

De lo anterior se puede mencionar que la submatriz  $L_{mr}$ , depende de los acoplamientos mutuos entre bobinas del rotor y estator, que dependen del ángulo  $\theta$  el cual es argumento de la función coseno, por lo que se mantienen después de realizar la derivada parcial, contrario a lo sucedido con las inductancias propias, que se vuelven cero gracias a que no tienen dependencia con la posición de la máquina.

## 5.2. Determinación de la corriente lineal y saturada

Las corrientes en las zonas lineal y saturada, permitirán obtener los coeficientes de saturación según la metodología mostrada en [Aller and Restrepo, 2013] a partir de los datos obtenidos en la curva de la Figura 4.6. Para obtener la corriente de la zona lineal, se considera la ecuación siguiente, que ha sido aplicada para cada una de las fases del estator y rotor en la sección siguiente:

$$i_{lin} = \frac{1}{L_{m0}} \lambda \quad (5.5)$$

Para obtener la corriente en la zona saturada se utiliza la función  $f(\lambda)$  dada por la siguiente expresión y tomando en cuenta los parámetros mostrados en la Tabla 4.9 los cuales son usados a continuación:

$$i_{sat} = \frac{M_F - M_I}{\pi} (\lambda - \Psi_T) \tan^{-1}(\tau_T(\lambda - \Psi_T)) - \Psi_T \tan^{-1}(\tau_T \Psi_T) + \frac{1}{2\tau_T} \left[ \log \left( 1 + (\tau_T \Psi_T)^2 \right) - \log \left( 1 + \tau_T^2 (\lambda - \Psi_T)^2 \right) \right] + \frac{\lambda}{2} (M_F + M_I) \quad (5.6)$$

$$\text{Donde: } M_F = \frac{1}{L_{msat}}; \quad \tau_T = \frac{\Theta_T L_{m0}}{\Psi_T L_{msat}}; \quad M_I = \frac{\left( \frac{1}{L_{m0}} - M_F \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi \tan^{-1}(\tau_T \Psi_T)} \right) \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi \tan^{-1}(\tau_T \Psi_T)}}$$

Ambas corrientes se obtienen a partir de  $\lambda$  que representa a los enlaces de flujo en cada una de las fases del estator y rotor:

$$\lambda = [\lambda_{as}, \lambda_{bs}, \lambda_{cs}, \lambda_{ar}, \lambda_{br}, \lambda_{cr}]^T \quad (5.7)$$

## 5.3. Modificación de las ecuaciones por el efecto de la saturación magnética

El método que se presenta a continuación para introducir la saturación magnética en los M.I. requiere la curva de magnetización suponiendo linealidad, esto quiere decir que se toma

---

la inductancia de magnetización como un valor constante. También se necesita la obtención de la curva de magnetización saturada, para esto se realizan pruebas experimentales y se obtienen puntos de ésta, que permiten aproximarla mediante la función mostrada anteriormente.

Teniendo ambas curvas de magnetización se procede a calcular la curva de saturación que modele al M.I. mediante los grados de saturación, resultado de la relación entre la corriente de la zona saturada y la corriente de la zona lineal, para tener una idea más clara se muestra la Figura 5.1.

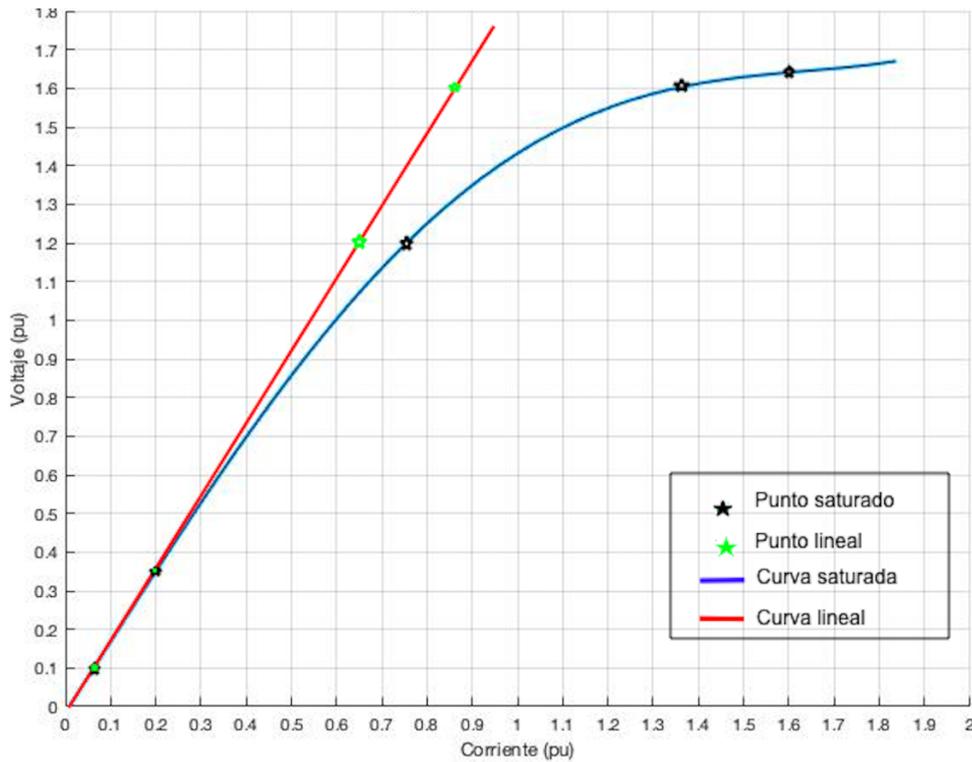


Figura 5.1: Grados de saturación.

De esta manera se establece que el grado de saturación tendrá el valor de 1 cuando el M.I. se encuentre trabajando en la zona lineal y no exista diferencia entre la corriente saturada y la corriente lineal; cuando esté trabajando en la zona saturada será el resultado de la división de la corriente saturada y corriente lineal, premisa que se cumple cuando la diferencia entre las corrientes es mayor a 0.001 [Aller and Restrepo, 2013].

La obtención de los grados de saturación para cada una de las fases del estator y del rotor  $S_{as}$ ,  $S_{bs}$ ,  $S_{cs}$ ,  $S_{ar}$ ,  $S_{br}$  y  $S_{cr}$  requiere:

- Obtención de las corrientes de la curva de magnetización lineal  $i_{lin}$  para cada una de las

fases del estator y rotor.

$$\begin{aligned}
 i_{linas} &= \frac{\lambda_{as}}{L_{m0}} & i_{linar} &= \frac{\lambda_{ar}}{L_{m0}} \\
 i_{linbs} &= \frac{\lambda_{bs}}{L_{m0}} & i_{linbr} &= \frac{\lambda_{br}}{L_{m0}} \\
 i_{lincs} &= \frac{\lambda_{cs}}{L_{m0}} & i_{lincr} &= \frac{\lambda_{cr}}{L_{m0}}
 \end{aligned}$$

- Obtención de las corrientes de la curva de magnetización saturada  $i_{sat}$  para cada una de las fases del estator y rotor.

$$\begin{aligned}
 i_{satas} &= f(\lambda_{as}) & i_{satar} &= f(\lambda_{ar}) \\
 i_{satbs} &= f(\lambda_{bs}) & i_{satbr} &= f(\lambda_{br}) \\
 i_{satcs} &= f(\lambda_{cs}) & i_{satcr} &= f(\lambda_{cr})
 \end{aligned}$$

- Resta de corrientes saturada y lineal.

Se realiza la resta de la corriente de la zona lineal menos las corriente de la zona saturada en cada una de las fases del estator y rotor, si el valor absoluto del resultado de ésta operación es menor a 0.001 el valor del grado de saturación es 1.

$$\begin{aligned}
 |i_{satas} - i_{linas}| &\leq 10^{-3} \Rightarrow S_{as} = 1 & (5.8) \\
 &\vdots & \vdots
 \end{aligned}$$

$$|i_{satcr} - i_{lincr}| \leq 10^{-3} \Rightarrow S_{cr} = 1 \quad (5.9)$$

En caso contrario, cuando la resta entre las corrientes sea mayor a 0.001, el valor del grado de saturación será el cociente de la división entre la corriente ( $i_{sat}$ ) y la corriente ( $i_{lin}$ ).

$$\begin{aligned}
 |i_{satas} - i_{linas}| &> 10^{-3} \Rightarrow S_{as} = \frac{i_{satas}}{i_{linas}} & (5.10) \\
 &\vdots & \vdots
 \end{aligned}$$

$$|i_{satcr} - i_{lincr}| > 10^{-3} \Rightarrow S_{cr} = \frac{i_{satcr}}{i_{lincr}} \quad (5.11)$$

De esta manera se obtienen los grados de saturación para cada una de las fases del estator y rotor del M.I.

Para dejar más en claro lo explicado anteriormente, de manera resumida se obtendrá el grado de saturación correspondiente a la fase **a** del estator ( $S_{as}$ ), para ejemplificar el procedimiento, se considera la metodología mostrada en el diagrama de la Figura 5.2.

Para fines de este trabajo de investigación, se determinó que siempre que la diferencia entre las corrientes  $i_{sat}$  e  $i_{lin}$  sea mayor a  $10^{-3}$  el valor del grado de saturación sera uno.

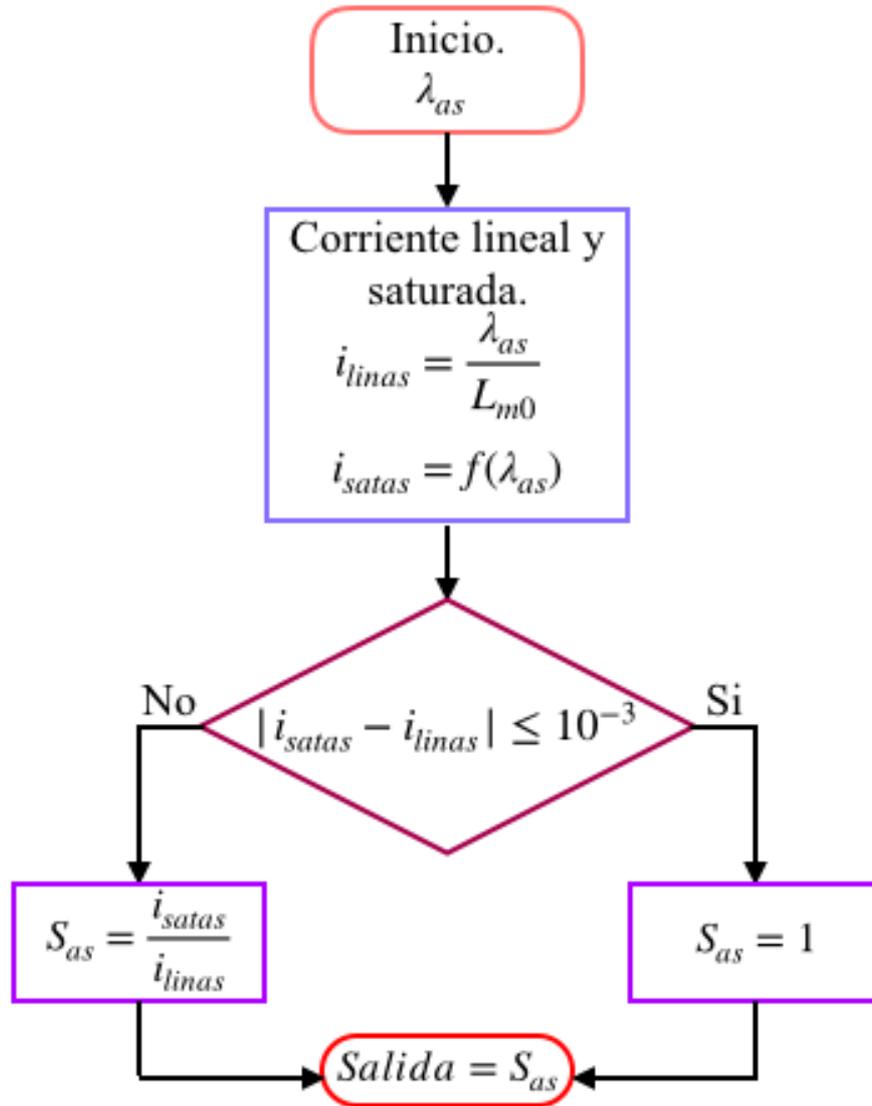


Figura 5.2: Diagrama obtención del grado de saturación  $S_{as}$ .

De lo anterior se puede determinar que el valor del grado de saturación de la fase **a** del estator ( $S_{as}$ ) es igual a 1 cuando la diferencia existente entre la corriente saturada en la fase **a** del estator ( $i_{satas}$ ) y la corriente lineal en la fase **a** del estator ( $i_{linas}$ ) es menor a  $10^{-3}$ , como la siguiente expresión matemática lo define:

$$|i_{satas} - i_{linas}| \leq 10^{-3} \Rightarrow S_{as} = 1 \quad (5.12)$$

O bien es el resultado del cociente entre la corriente saturada en la fase **a** del estator ( $i_{satas}$ ) y la corriente lineal en la fase **a** del estator ( $i_{linas}$ ) cuando la diferencia entre ellas es mayor a  $10^{-3}$ , como lo expresa la siguiente ecuación:

$$|i_{satas} - i_{linas}| > 10^{-3} \Rightarrow S_{as} = \frac{i_{satas}}{i_{linas}} \quad (5.13)$$

Considerar la saturación magnética en el modelo del M.I. representado por las ecuaciones (5.1) y (5.2), se modifica la inductancia de magnetización  $L'_{ms}$  por los grados de saturación. Con esta consideración, resultan submatrices que dependen tanto de la geometría de la máquina como del punto de operación en la curva de magnetización, al obtener el grado de saturación de cada una de las fases en el estator y rotor  $S_{as}, S_{bs}, S_{cs}, S_{ar}, S_{br}$  y  $S_{cr}$  e introducirlos en la matriz de inductancias, resultan los cambios que se muestran a continuación.

$$L(q_m)_{(sat)} = \begin{bmatrix} L_s(sat) & L_{mr(sat)}(q_m) \\ L'_{mr(sat)}(q_m) & L_r(sat) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$L_s(sat) = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{L'_{ms}}{S_{as}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{as}+S_{bs})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{as}+S_{cs})} \\ -\frac{L'_{ms}}{(S_{bs}+S_{as})} & L_{ls} + \frac{L'_{ms}}{S_{bs}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{bs}+S_{cs})} \\ -\frac{L'_{ms}}{(S_{cs}+S_{as})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{cs}+S_{bs})} & L_{ls} + \frac{L'_{ms}}{S_{cs}} \end{bmatrix}$$

$$L_r(sat) = \begin{bmatrix} L'_{lr} + \frac{L'_{ms}}{S_{ar}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{ar}+S_{br})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{ar}+S_{cr})} \\ -\frac{L'_{ms}}{(S_{br}+S_{ar})} & L'_{lr} + \frac{L'_{ms}}{S_{br}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{br}+S_{cr})} \\ -\frac{L'_{ms}}{(S_{cr}+S_{ar})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{cr}+S_{br})} & L'_{lr} + \frac{L'_{ms}}{S_{cr}} \end{bmatrix}$$

$$L_{mr(sat)}(q_m) = 2L'_{ms} \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)}{S_{as}+S_{gr}} & \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{S_{as}+S_{br}} & \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{S_{as}+S_{cr}} \\ \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{S_{bs}+S_{gr}} & \frac{\cos(\theta)}{S_{bs}+S_{br}} & \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{S_{bs}+S_{cr}} \\ \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{S_{cs}+S_{gr}} & \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{S_{cs}+S_{br}} & \frac{\cos(\theta)}{S_{cs}+S_{cr}} \end{bmatrix}$$

Al realizar las modificaciones, se obtiene una nueva matriz de inductancias dada por la expresión:

$$L(sat)(q_m) = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{L'_{ms}}{S_{as}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{as}+S_{bs})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{as}+S_{cs})} & 2L'_{ms} \frac{\cos \theta}{(S_{as}+S_{ar})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{(S_{as}+S_{br})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{(S_{as}+S_{cr})} \\ -\frac{L'_{ms}}{(S_{bs}+S_{as})} & L_{ls} + \frac{L'_{ms}}{S_{bs}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{bs}+S_{cs})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{(S_{bs}+S_{ar})} & 2L'_{ms} \frac{\cos \theta}{(S_{bs}+S_{br})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{(S_{bs}+S_{cr})} \\ -\frac{L'_{ms}}{(S_{cs}+S_{as})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{cs}+S_{bs})} & L_{ls} + \frac{L'_{ms}}{S_{cs}} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{(S_{cs}+S_{ar})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{(S_{cs}+S_{br})} & 2L'_{ms} \frac{\cos \theta}{(S_{cs}+S_{cr})} \\ 2L'_{ms} \frac{\cos \theta}{(S_{as}+S_{ar})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{(S_{bs}+S_{ar})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{(S_{cs}+S_{ar})} & L'_{lr} + \frac{L'_{ms}}{S_{ar}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{ar}+S_{br})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{ar}+S_{cr})} \\ 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{(S_{as}+S_{br})} & 2L'_{ms} \frac{\cos \theta}{(S_{bs}+S_{br})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{(S_{cs}+S_{br})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{br}+S_{ar})} & L'_{lr} + \frac{L'_{ms}}{S_{br}} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{br}+S_{cr})} \\ 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{(S_{as}+S_{cr})} & 2L'_{ms} \frac{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{(S_{bs}+S_{cr})} & 2L'_{ms} \frac{\cos \theta}{(S_{cs}+S_{cr})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{cr}+S_{ar})} & -\frac{L'_{ms}}{(S_{cr}+S_{br})} & L'_{lr} + \frac{L'_{ms}}{S_{cr}} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Fianalmente después de haber realizado las consideraciones del procedimiento anterior, se obtiene el modelo del M.I. incluyendo la saturación magnética, de manera resumida se presenta el diagrama de la Figura 5.3 con el propósito de resumir el procedimiento.

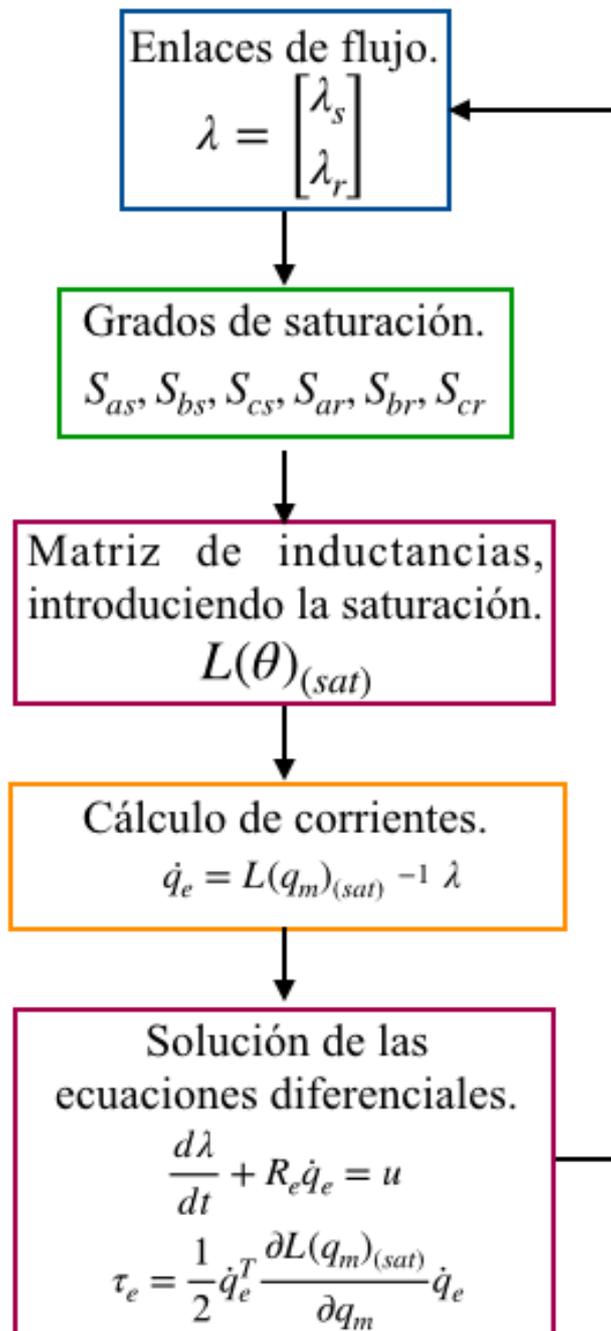


Figura 5.3: Diagrama modelo abc con saturación.

La metodología utilizada considera que la corriente en la zona lineal se encuentra relacionada con la inductancia en la zona lineal de la curva de magnetización del motor, también la corriente saturada se encuentra directamente relacionada con la curva de saturación; por este motivo es importante primero obtener la curva de magnetización característica.

Cuando se toma en cuenta el efecto de la saturación en el modelo del M.I., se puede mencionar que el modelo convencional se complementa con el análisis de la parte magnética, obteniendo un modelo más completo el cual describe de manera más precisa su comportamiento, de tal manera

que la estructura a bloques del modelo queda representada como se muestra en la Figura 5.4.

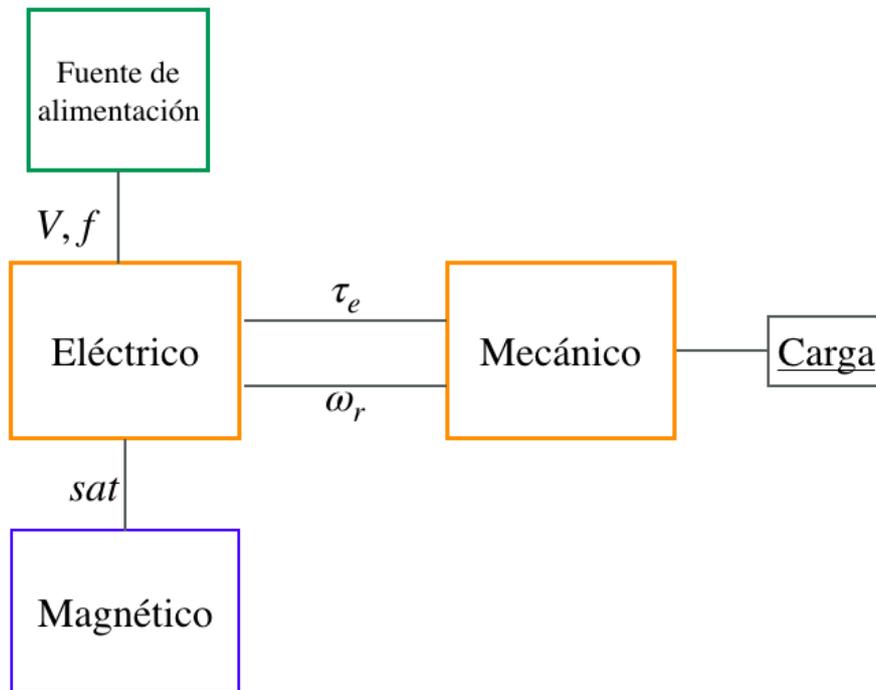


Figura 5.4: Modelo con saturación.

# Capítulo 6

## Resultados de simulación considerando el enfoque E-L, del motor del caso de estudio

Este capítulo presenta los resultados de simulación obtenidos en el modelo del (M.I.) utilizando el enfoque de (E-L), empleando el motor del caso de estudio, que fue parametrizado mediante pruebas experimentales; en todas las simulaciones que se muestran en este capítulo se utilizan los mismos parámetros y las mismas condiciones de simulación, para obtener una comparativa válida.

En la sección 6.1 se muestran los gráficos obtenidos considerando el circuito magnético lineal en el modelo matemático, es decir no se incluye el efecto de la saturación magnética; cabe mencionar que estos resultados están basados en valores por unidad (P.U). En la sección 6.2 se muestran los resultados obtenidos en la simulación del (M.I.) del caso de estudio considerando el circuito magnético no lineal, por lo que el modelo matemático se modifica por el efecto de la saturación magnética y de igual manera los resultados están expresados en el sistema (P.U). En la sección 6.2.1 se realiza un análisis de contenido armónico de la señal distorsionada correspondiente a la corriente del estator del (M.I.), ya que se busca determinar cual es el armónico más presente en esta. Finalmente, en la sección 6.3 se realiza una comparativa entre los resultados obtenidos en el modelo con y sin saturación magnética.

### 6.1. Simulación del modelo matemático, considerando circuito magnético lineal en (P.U.)

Después de haber considerado el modelo matemático del M.I. siguiendo la estructura basada en la metodología de E-L y considerando el sistema en P.U., se realiza la simulación que permite verificar el comportamiento dinámico de la máquina, tomando los parámetros característicos obtenidos de la Tabla 4.8; bajo estas condiciones, se obtienen los resultados presentados a continuación. Es importante mencionar que éstos se han obtenido considerando que la máquina opera en vacío, tal como se considera en la simulación con saturación magnética. A continuación en la Figura 6.1 se muestran los resultados de las corrientes del estator.

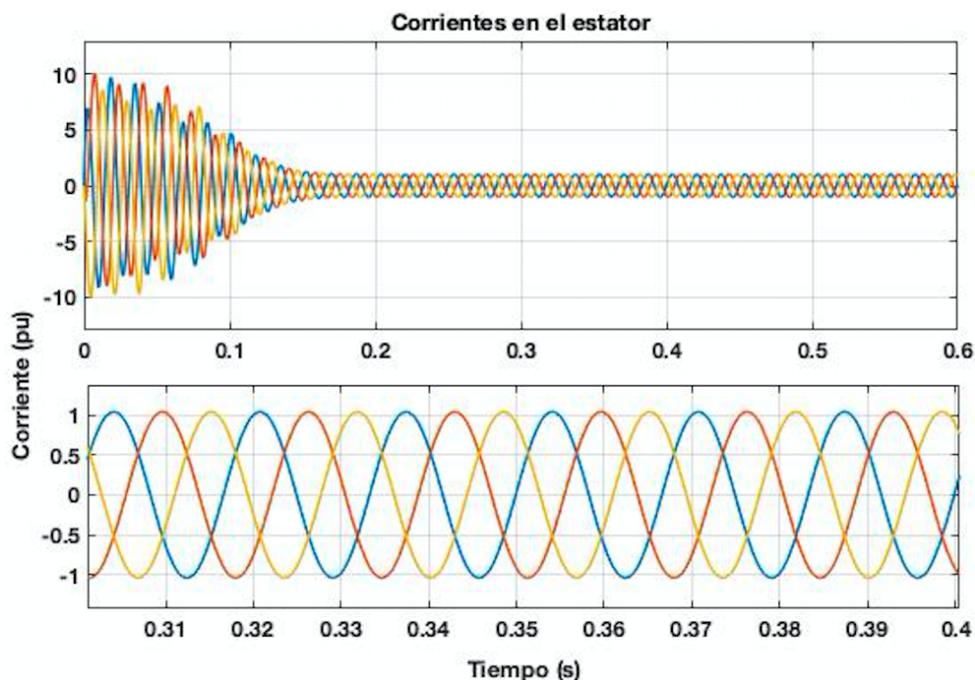


Figura 6.1: Corrientes de magnetización de vacío en P.U.

En la figura anterior se puede observar que el comportamiento de las corrientes en el estator, es normal sin ningún cambio que mencionar, tal como se ha observado en las simulaciones anteriores, sin embargo el sistema en P.U. provoca que aparentemente exista un cambio en los valores de las corrientes, pero al realizar su conversión tomando los valores base como referencia, resulta en este caso que el valor nominal de la corriente de acuerdo a la Figura 6.1 es de 0.37 amper.

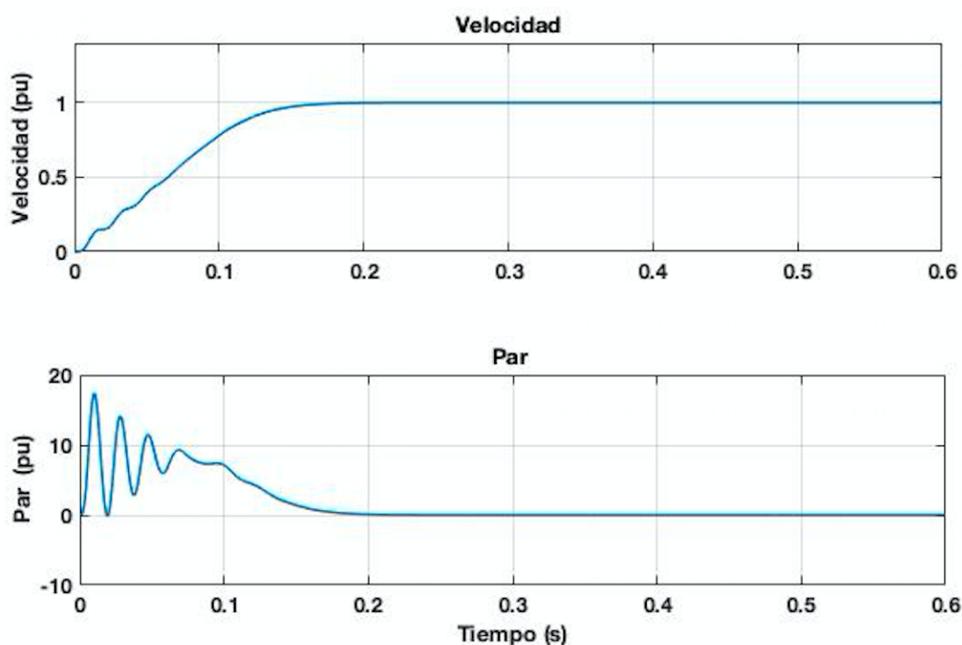


Figura 6.2: Velocidad y par en vacío en P.U.

También se puede verificar mediante las gráficas de la Figura 6.2 que el comportamiento de la velocidad y el par corresponde con el esperado ya que la máquina opera en vacío la velocidad se debe mantener en uno y el par de carga en cero, concluyendo que el modelo que se ha simulado funciona de manera correcta de acuerdo a los lineamientos establecidos.

## 6.2. Simulación del modelo matemático, considerando el efecto de la saturación magnética en (P.U.)

Tomando en cuenta las modificaciones realizadas por el efecto de la saturación magnética en el modelo matemático y realizando las consideraciones necesarias se ha simulado el comportamiento dinámico del motor de inducción, cabe mencionar que no se considera alguna carga en el motor. Por lo tanto el escenario de comparación se basa en los datos obtenidos en el laboratorio, al operar la máquina en condición de vacío. Se muestran las gráficas de corrientes indicadas en la Figura 6.3.

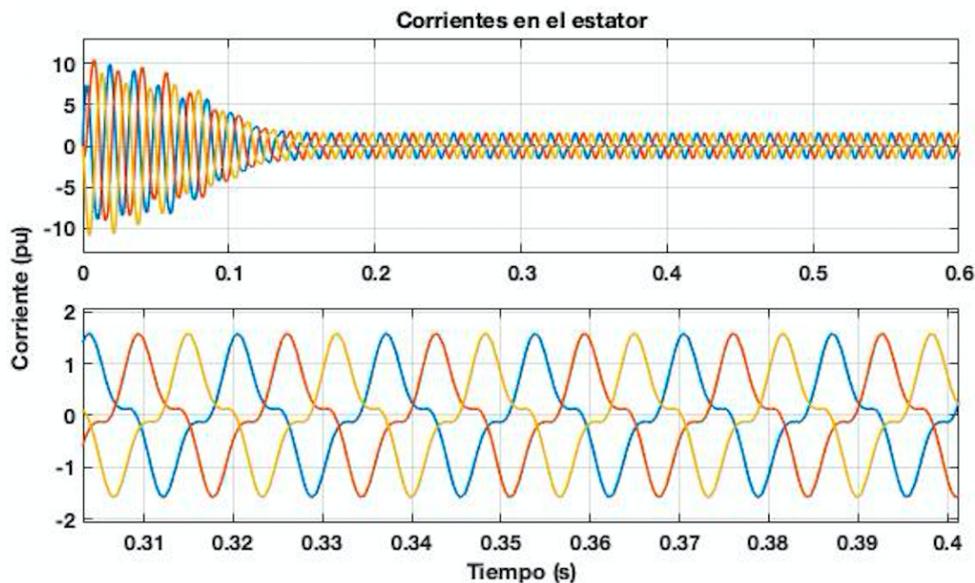


Figura 6.3: Corrientes de magnetización en vacío con saturación en P.U.

En las gráficas que se muestran en la Figura 6.3, se observa el efecto de la saturación magnética en las corrientes del estator, en las cuales se visualizan distorsiones con respecto de la onda sinusoidal, un efecto producido por la presencia de armónicos, de acuerdo a la gráfica la corriente en vacío es de 0.54 ampers realizando la conversión correspondiente.

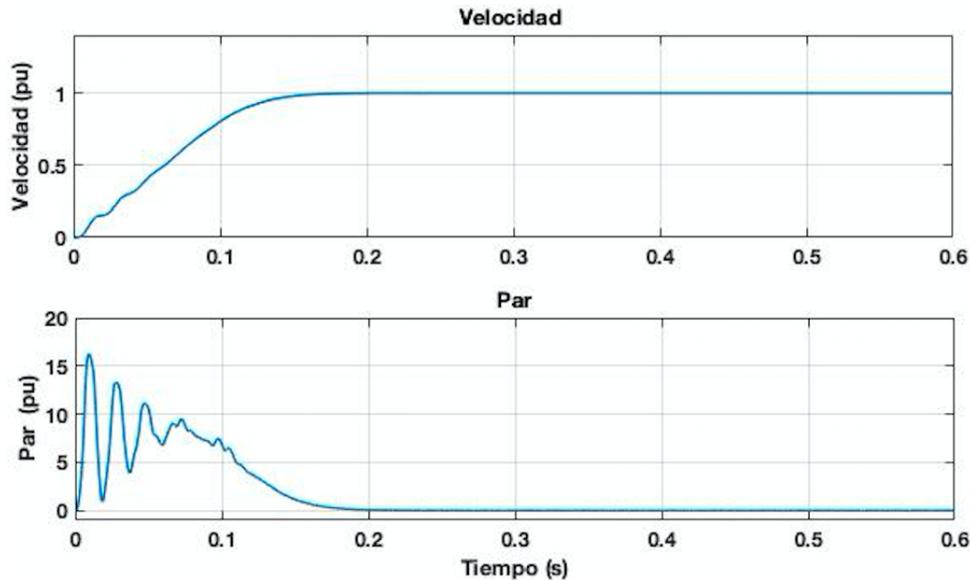


Figura 6.4: Velocidad y par en vacío con saturación en P.U.

En la Figura 6.4 se puede observar que la velocidad de la máquina no sufre disminución alguna, ya que esta opera en condición de vacío. También se puede observar que en la gráfica correspondiente al par de la máquina al rededor del tiempo 0.1 seg. se observan pequeñas distorsiones con picos más pronunciados en el estado transitorio del par respecto del modelo con circuito magnético lineal de la Figura 6.2, este efecto es producido por la presencia de armónicos en las corrientes, que se ve reflejado en el par de la máquina.

### 6.3. Análisis de contenido armónico

Después de haber obtenido los resultados de las corrientes en estator del modelo del M.I. que incluye la saturación magnética, se realiza un análisis de armónicos en las señales correspondientes. De esta manera también se pretende comprobar lo que se menciona en [Liao and Lipo, 1994], donde se indica que el armónico que tiene mayor efecto en la máquina de inducción cuando se toma en cuenta la saturación magnética es el tercero. Para esto se utilizó la metodología de la transformada rápida de Fourier (FFT), que es un método matemático para la transformación de una función que depende del tiempo a una función que dependa de la frecuencia. A veces se describe como la transformación del dominio del tiempo al dominio de frecuencia. Es muy útil para el análisis de los fenómenos dependientes del tiempo.

Para describir esta metodología, supóngase que se tiene una señal descrita por un conjunto de  $n$  (potencia de dos) pares de datos  $(t_j, x_j)$ , espaciados en el tiempo, por un intervalo  $\Delta t$ , que va desde  $t = 0$  hasta  $t_{final} = (n - 1) \Delta t$ ; la inversa del intervalo  $\Delta t$ , se denomina frecuencia de muestreo  $f_s$ . De modo que el vector de tiempos es  $t = (0 : n - 1)/f_s$

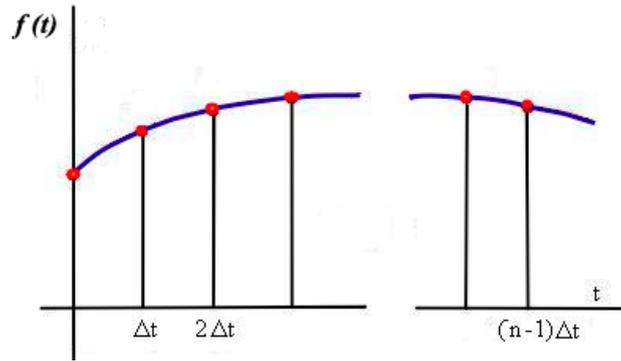


Figura 6.5: Transformada FFT.

Tomando en cuenta la siguiente expresión, donde  $fft$  es una función que convierte un vector de valores de la señal  $x$  en función del tiempo  $t$  en un vector  $g$  en función de la frecuencia  $\omega$ :

$$g = fft(x)$$

Entonces  $g$  es un vector cuyos elementos son números complejos ya que guarda información acerca de la amplitud y de la fase. Se debe asociar cada elemento del vector  $g$  con una frecuencia, del mismo modo que se ha asociado cada elemento del vector  $x$  con un tiempo. Se realiza el análisis mediante la FFT, a las corrientes obtenidas del estator en cada una de las fases, como se muestra en la siguientes expresiones:

- Corrientes del estator en las fases a,b,c con dependencia del tiempo.

$$i_s(t) = \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

- Corrientes del estator en las fases a,b,c discretas.

$$i_s(tk) = \begin{bmatrix} i_{as}(tk) \\ i_{bs}(tk) \\ i_{cs}(tk) \end{bmatrix}, k = 0, 1, \dots, 4096; \quad (6.2)$$

- Vector de pares ordenados resultante, correspondiente a la amplitud y frecuencia.

$$\mathbf{F}\{i_{as}(tk)\} = vec_{i=1,2,\dots,N}[(a_i, f_i)] \quad (6.3)$$

Los resultados gráficos que se obtuvieron al aplicar la FFT se muestra en las siguientes figuras.

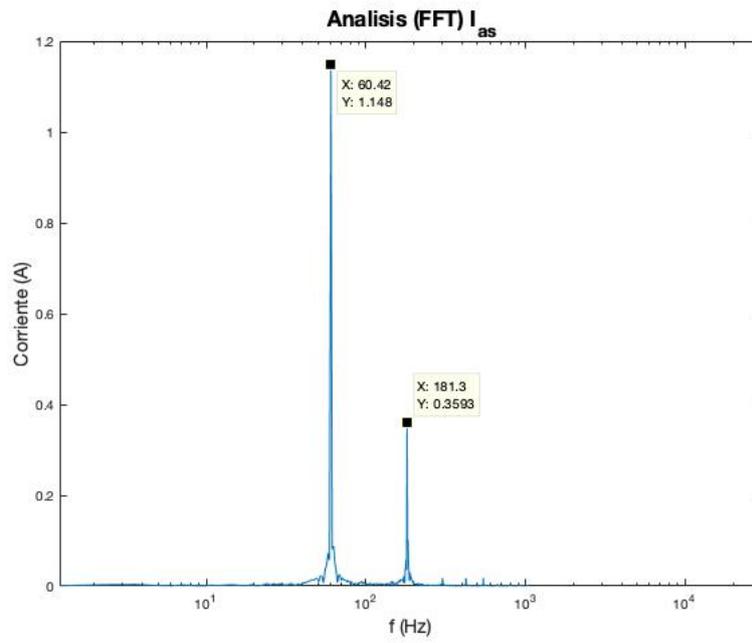


Figura 6.6: Análisis FFT corriente fase a del estator.

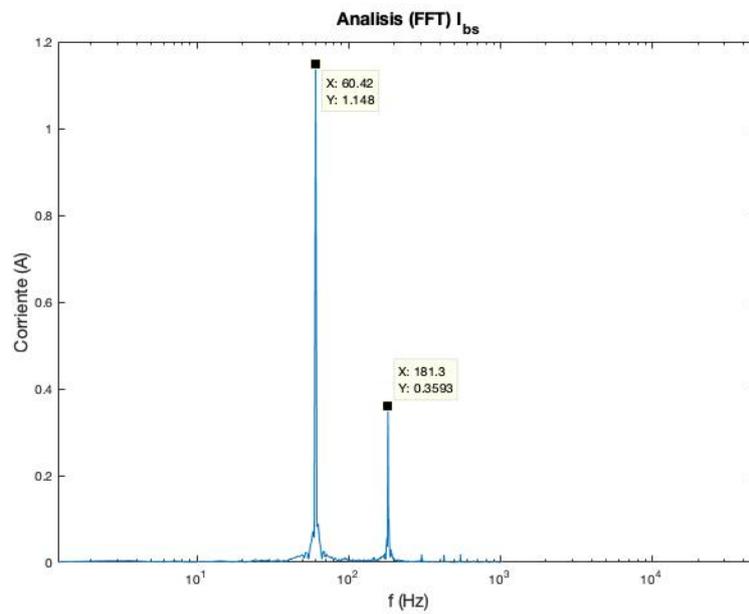


Figura 6.7: Análisis FFT corriente fase b del estator.

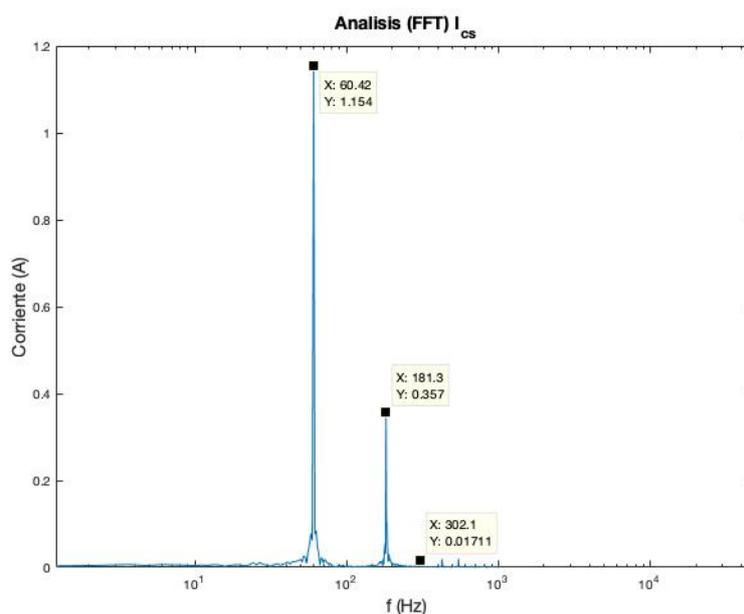


Figura 6.8: Análisis FFT corriente fase c del estator.

De acuerdo a lo obtenido en las gráficas anteriores y tomando en cuenta que es una máquina simétrica y balanceada, los resultados son los mismos en cada uno de los análisis, donde la fundamental que es la onda de 60 Hz de frecuencia tiene la mayor amplitud que en éste caso es de 1.15, el armónico con mayor aporte es el el tercero, determinado por el cociente de la división  $181.12/60.42 = 3$ , el cual tiene una amplitud de 0.357, de ésta forma se puede verificar que también están presentes otros armónicos pero con menor relevancia, en este caso se toman en cuenta el 5°, 7° y 9°, pues son los armónicos que causan mayor daño en los sistemas eléctricos debido a que tienen una mayor amplitud que los demás, es importante mencionar que en todos los armónicos presentes se distribuye la amplitud de la onda fundamental.

El contenido de armónicos de la corriente del estator del M.I. del caso de estudio, se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 6.1: Datos de contenido armónico en el M.I.

Orden de armónico	Frecuencia	Amplitud relativa
Fundamental	60 Hz	100 %
3°	180 Hz	31 %
5°	300 Hz	1.5 %
7°	420 Hz	1.6 %
9°	540 Hz	1.6 %

De la tabla anterior podemos mencionar que la señal de la corriente del estator, la cual fue analizada tiene el 31 % del 3° armónico, 1.5 % del 5° armónico, 1.6 % del 7° armónico y 1.6 % del 9° armónico, sin embargo existen otros armónicos con menor amplitud que no están enlistados

en la tabla pero si están presentes en el sistema. El armónico que se manifiesta con mayor amplitud en el sistema del M.I. es el tercero [Liao and Lipo, 1994], consecuencia de tomar en cuenta el efecto de la saturación magnética en el modelo de la máquina. Además se puede ver que los armónicos presentes son impares y su frecuencia es un múltiplo de la señal fundamental.

#### 6.4. Comparación de resultados de ambos modelos

Se realiza la comparación de los resultados obtenidos, correspondientes a las corrientes en el estator del M.I. del caso de estudio, arrojados por las simulaciones de las secciones 6.1, 6.2 y los obtenidos experimentalmente en el laboratorio, tomadas al hacer operar el motor en vacío. Estos resultados se muestran en la imagen siguiente:

	Circuito magnético lineal	Circuito magnético no lineal	Lectura real
Corrientes en el estator	0.37 ampers	0.54 ampers	0.6 ampers

Figura 6.9: Comparación de corrientes en vacío del estator.

De la Figura 6.9 podemos determinar que incluir el efecto de la saturación magnética en el modelo del M.I. permite obtener resultados más apegados a la realidad; la lectura de corriente en el estator obtenida en el laboratorio y la de la simulación que incluye circuito magnético no lineal muestra como resultado una diferencia entre ellas de 0.06 ampers. Al realizar la comparación de la corriente obtenida al considerar el circuito magnético lineal y las lecturas reales la diferencia entre ellas se acrecienta con un valor de 0.23 ampers. Por lo tanto considerar en el modelo de la máquina al circuito magnético como no lineal permite tener mayor precisión cuando se simula el comportamiento dinámico del motor.

# Capítulo 7

## Conclusiones

Este capítulo presenta las conclusiones del trabajo de tesis. La sección 7.1 presenta las aportaciones de la tesis. La sección 7.2 resume el trabajo realizado y las conclusiones obtenidas. En la sección 7.3 se mencionan los trabajos futuros que se pudieran realizar.

### 7.1. Aportaciones

Se considera como aportación de esta tesis al modelo de un motor de inducción que considera el efecto de la saturación magnética basado en la metodología de modelado con enfoque energético de la formulación E-L. El modelo se encuentra programado con parámetros en por unidad, lo que permite adaptarlo a motores de diferentes capacidades.

Una de las principales ventajas de este modelo es que permite apreciar el efecto de la saturación magnética sin obtener ecuaciones matemáticas de elevada complejidad, utilizando la metodología de modelado E-L que permite interactuar con sistemas no lineales de diferentes naturalezas, como lo es el motor de inducción, a diferencia de otros modelos existentes, los cuales abordan el modelo mediante leyes del electromagnetismo, los cuales resultan en ecuaciones matemáticas de mayor complejidad, que requieren de un alto nivel de procesamiento matemático para solucionarlas.

Además que se realizó la parametrización del motor de inducción mediante pruebas experimentales utilizando la metodología mostrada en los estándares de la IEEE, obteniendo también la curva de saturación característica en el laboratorio.

### 7.2. Conclusiones

Se desarrolló el modelo del motor de inducción en coordenadas abc, incluyendo el efecto de la saturación magnética, además se realizaron las pruebas experimentales de acuerdo al estándar de la IEEE para obtener los parámetros correspondientes del motor de inducción utilizado en el caso de estudio. Se determinó la curva de saturación característica en condición de vacío del motor y los datos correspondientes para la obtención de los grados de saturación de la máquina. Al introducir el efecto de la saturación en el modelo mediante los grados de saturación instantáneos, se toma en cuenta que el circuito magnético no es lineal, esto implica que se obtenga un modelo que describa con mayor precisión el comportamiento dinámico de la

máquina. Después de observar el comportamiento entre el modelo con circuito magnético lineal vs no lineal, se puede determinar que existe una mayor precisión en los resultados obtenidos en las corrientes del estator, en el modelo con el circuito magnético no lineal, de acuerdo con los datos que se obtuvieron experimentalmente en la prueba de vacío, los cuales se muestran en la Tabla 4.3.

- De acuerdo a los resultados obtenidos experimentalmente, el motor del caso de estudio demanda una corriente en el estator de 0.6 ampers en vacío, en la representación del modelo con circuito magnético lineal se realizó la simulación correspondiente y se obtuvo como resultado una corriente del estator en condición de vacío de 0.37 ampers y en el modelo que considera el circuito magnético no lineal, también se realizó la simulación correspondiente y se obtuvo una corriente en el estator de 0.52 ampers. Por lo tanto, se puede concluir con los resultados mencionados anteriormente que al considerar la saturación en el modelo del M.I. se obtienen resultados más apegados a los obtenidos en las pruebas experimentales, los cuales representan el comportamiento real de la máquina.
- Es importante mencionar que cuando se toma en cuenta el efecto de la saturación magnética en la máquina, no es posible realizar transformaciones lineales de coordenadas al modelo abc, ya que la saturación es un fenómeno no lineal y la representación lineal no es capaz de reproducir las distorsiones existentes en las corrientes y el par eléctrico, ya que la saturación no solo afecta la parte eléctrica de la máquina, sino también la parte mecánica mediante distorsiones presentes en la parte transitoria de la señal del par.
- Con respecto al uso de valores en (p.u.) es recomendable su uso, ya que simplifica la visualización y comparación de los resultados. El sistema por unidad consiste en normalizar todas las cantidades eléctricas de un sistema (voltaje, corriente, potencia e impedancias), permitiendo eliminar el problema del manejo de las unidades de medida, así como del manejo continuo del factor de 3 o raíz de 3. Una cantidad en (p.u.) no tiene sentido si no se conoce la referencia base.
- En la saturación magnética el armónico más dominante es el tercero, este puede alcanzar valores relevantes en relación con la onda fundamental, dependiendo del grado de saturación [Liao and Lipo, 1994].

### 7.3. Trabajos futuros

Los trabajos adicionales que se podrían realizar en un futuro a partir de este trabajo de tesis son:

- Utilizar el modelo matemático obtenido, que toma en cuenta el comportamiento no lineal de la saturación magnética en el diseño de un controlador.
- Integrar en el circuito magnético no lineal del modelo, las pérdidas en el núcleo, siguiendo la metodología y estructura de la formulación E-L.
- Utilizar el modelo en el control de una aplicación donde se necesite un desempeño dinámico elevado para evaluar sus ventajas.

- Desarrollar un banco de pruebas con una interfase que permita obtener los parámetros de diferentes motores de inducción, de forma versátil y en menor tiempo.
- Desarrollar una interfase gráfica que permita interactuar de forma amigable con los parámetros utilizados en el modelo del motor de inducción y así modificarlos de forma más rápida.

# Bibliografía

- [Aller and Restrepo, 2013] Aller, Delgado D, B. A. V. J. and Restrepo (2013). Model of the induction machine including saturation. In *2013 15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, pages 1–8. IEEE.
- [Aller, 2006] Aller, J. M. (2006). Máquinas eléctricas rotativas: Introducción a la teoría general. *Editorial Equinoccio*.
- [Bolio, 2001] Bolio, M. M. (2001). *Controladores de motores de inducción: un análisis comparativo*. PhD thesis, Master's Thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- [Chapman, 2014] Chapman, J. S. (2014). Máquinas eléctricas. *McGraw Hill*.
- [Chiasson, 2005] Chiasson, J. (2005). *Modeling and high performance control of electric machines*. John Wiley & Sons.
- [Cochran and Motors, 1989] Cochran, P. L. and Motors, P. I. (1989). Analysis, design and application, nueva york.
- [Cortés, 2002] Cortés, L. (2002). *Control Robusto de Motores de inducción Utilizando la Técnica de Rediseño de Lyapunov*. PhD thesis, Tesis de Maestría. CENIDET.
- [Cortés and Chaves, 2007] Cortés, Jimmy Alexander, M. F. A. and Chaves, J. A. (2007). Del análisis de fourier a las wavelets análisis de fourier. *Scientia et Technica*, 1(34).
- [Doughty, 2018] Doughty, N. (2018). *Lagrangian interaction: an introduction to relativistic symmetry in electrodynamics and gravitation*. CRC Press.
- [Dugan and Wayne, 1996] Dugan, Roger C, M. M. F. B. H. and Wayne (1996). Electrical power systems quality. *New York, NY: McGraw-Hill, / c1996*.
- [Escobar and Holguín, 2008] Escobar, Andrés Ocampo Muñoz, F. A. and Holguín, M. (2008). Estimación de parámetros del motor de inducción a partir de los datos del fabricante. *Scientia Technica*.
- [Fitzgerald, 2004] Fitzgerald, Arthur Eugene, K. C. B. V. E. (2004). *Teoría y análisis de las máquinas eléctricas 6ª ed*. McGraw-Hill.
- [García and Díaz, 2006] García, A. and Díaz, J. (2006). Modelación del motor de inducción trifásico. *Revista Colombiana de Tecnología de Avanzada*, 2(8).

- [García and Rodríguez, 2006] García, A. and Rodríguez, J. D. (2006). Three-phase induction motor modeling. *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada*, 2(8):1–8.
- [Gonen, 2011] Gonen, T. (2011). *Electrical Machines with MATLAB®*. Crc Press.
- [Guerrero and González, 2013] Guerrero and González, F. (2013). *Estimación de los parámetros de la Máquina de inducción mediante técnicas metahurísticas*. PhD thesis, Universidad Tecnológica de Jaén. Facultad de Tecnologías.
- [Hauser, 1969] Hauser, W. (1969). *Introducción a los principios de la mecánica*. Centro Regional de Ayuda Técnica. Agencia para el Desarrollo Internacional,.
- [Hoevenaars and Colosino, 2003] Hoevenaars, Tony, L. K. and Colosino, M. (2003). Interpreting ieee std 519 and meeting its harmonic limits in vfd applications. In *IEEE Industry Applications Society 50th Annual Petroleum and Chemical Industry Conference, 2003. Record of Conference Papers.*, pages 145–150. IEEE.
- [IEEE, 1993] IEEE (1993). Ieee, recommended practices and requirements for harmonic control in electrical power systems. *New York, NY, USA*.
- [IEEE, 2018] IEEE (2018). Ieee standard test procedure for polyphase induction motors and generators. *IEEE Std 112-2017 (Revision of IEEE Std 112-2004)*, pages 1–115.
- [Krause and Wasynczuk, 1995] Krause, Paul C Sudhoff, S. D. and Wasynczuk, O. (1995). *Analysis of electric machinery*. IEEE Computer Society Press.
- [Liao and Lipo, 1994] Liao, Y. and Lipo, T. (1994). Effect of saturation third harmonic on the induction machine performance. *Elect. Mach. Power Syst.*, 22:155–171.
- [Martín Cañadas, 2006] Martín Cañadas, M. E. (2006). *Aportación al modelado del motor trifásico de inducción con consideración de la saturación y el efecto de doble jaula*. Universidad Politécnica de Cataluña.
- [MIT, 1965] MIT (1965). *Magnetic Circuits and Transformers: A First Course for Power and Communication Engineers, by Members of the Staff of the Department of Electrical Engineering*. Massachusetts Institute of Technology. MIT Press.
- [Mora, 2003] Mora, J. F. (2003). *Máquinas eléctricas*. Quinta Edición McGraw-Hill,.
- [NEMA, 2003] NEMA, M. (2003). Mg 1-2003, revision 1-2004. *Motors and Generators.*, Rosslyn, VA. USA: NEMA Standards Publication ANSI.
- [Pérez and Rafael, 2018] Pérez, L. and Rafael, A. (2018). *Modelación de la máquina de inducción considerando la saturación*. PhD thesis, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Facultad de Ingeniería.
- [Poznyak, 2005] Poznyak, A. (2005). Modelado matemático de los sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos.
- [Pozueta, 2014] Pozueta, M. A. R. (2014). Materiales y circuitos magnéticos.

- [Quispe and González, 2003] Quispe, E. and González, G. (2003). Efectos de la calidad de la potencia eléctrica en la operación de motores de inducción. In *Simposio Internacional sobre la Calidad de la Energía Eléctrica-SICEL*, volume 2.
- [Rincón and Jaramillo, 2013] Rincón, F. and Jaramillo, A. O. (2013). *Determinación de parámetros para el motor de inducción trifásico de jaula de ardilla con la Norma NTC 5642-2008*. PhD thesis, Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Tecnologías.
- [Rubio Soto, 2014] Rubio Soto, D. (2014). Caracterización de motores de inducción trifásicos en aplicaciones de tracción. B.S. thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.
- [Vargas Machuca, 1990] Vargas Machuca, F. (1990). *Máquinas Eléctricas Rotativas*. Megaprint Ediciones SA Lima-Perú.
- [Viloria and Roldán, 2010] Viloria, J. R. and Roldán, J. (2010). *Motores trifásicos: características, cálculos y aplicaciones*. Paraninfo.
- [Vintimilla and Valdivieso, 1997] Vintimilla and Valdivieso, L. (1997). Modelo de la máquina de inducción considerando inductancias variables. B.S. thesis, Quito/EPN/1997.
- [Vukosavic, 2012] Vukosavic, S. N. (2012). *Electrical machines*. Springer Science & Business Media.
- [Waide and Brunner, 2013] Waide, P. and Brunner (2013). Energy-efficiency policy opportunities for electric motors driven systems. *International Energy Agency*.
- [Wellstead, 1979] Wellstead, P. E. (1979). *Introduction to physical system modelling*. Academic Press London.