



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Diseño de un controlador basado en
observadores funcionales para sistemas
discretos

presentada por

Ing. Ángel Rodrigo Guadarrama Estrada

como requisito para la obtención del grado
de

**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Directora de tesis

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo

Codirectora de tesis

Dra. Yesica Imelda Saavedra Benítez

Cuernavaca, Morelos, México. Marzo 2021.



Cuernavaca, Mor., **17/marzo/2021**
No. de Oficio: **DIE/088/2021**
Asunto: **Aceptación de documentos de tesis**

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ing. Ángel Rodrigo Guadarrama Estrada**, con número de control **M19CE018** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Diseño de un controlador basado en observadores funcionales para sistemas discretos”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTORA DE TESIS

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9968714

CODIRECTORA DE TESIS

Dra. Yesica Imelda Saavedra Benítez
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 10212209

REVISOR 1

Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 8699605

REVISOR 2

Dr. Enrique Quintero-Mármol Márquez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química
Cédula profesional 10259407

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera- Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
Expediente

HRR/irr.





EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca, Mor.,

22/marzo/2021

No. de Oficio:

SAC/53/2021

Asunto:

Autorización de
impresión de tesis

**ÁNGEL RODRIGO GUADARRAMA ESTRADA
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Diseño de un controlador basado en observadores funcionales para sistemas discretos", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

"Excelencia en Educación Tecnológica"

"Educación Tecnológica al Servicio de México"

**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA**

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Expediente

CMAZ/CHG



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490,
Cuernavaca, Morelos Tel. (01) 777 3 62 77 73, ext. 4104,

e-mail: acad_cenidet@tecnm.mx

www.tecnm.mx | www.cenidet.tecnm.mx



Dedicatoria

“Dedico esta tesis con gran amor a toda mi familia, novia y mis amigos por el apoyo incondicional, por siempre impulsarme a ser mejor, por su incondicional compañía, amistad y amor”

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Elsa Elizabeth Estrada Cortes y Angel Guadarrama Reynoso, así como a mi hermano Ricardo Eduardo Guadarrama Estrada por su apoyo incondicional y amor quienes han sido para mí un ejemplo de dedicación y cariño. Gracias por esas palabras de aliento y motivación que me han servido cada momento para poder mejorar como persona cada día, cumplir mis objetivos y sueños.

A mi asesora de tesis, la Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, por su paciencia, amistad y su disponibilidad para atender cualquier duda que me surgiera, gracias por cada consejo que me ayudo a superarme y poder hacerlo mejor. Así también a mi Co-asesora la Dra. Yesica Imelda Saavedra Benítez.

A mi familia por su amor incondicional y aliento cuando hacía falta, a mis tías Lilia y Adriana Estrada a mis abuelitas Elizabeth Cortes y Teresa Reynoso. A mis primos que me impulsan a querer ser mejor cada día y darles el mejor ejemplo Sergio Villanueva y Eimy Narváez A mis tíos Jafeth Alonso, Carlos Narváez, Jorge Anguiano y Antonio González.

A mi novia Magdalena Márquez por su amor, apoyo y ánimos para esforzarme y hacer las cosas mejor.

A mis amigos Raymundo Carrizosa, Francisco Reyes, Carlos Moncada, Daniel Galeana, y por su cariño, amistad y compañerismo, por todas esas risas que compartimos. Así también a mis nuevos amigos del CENIDET Cristian Corona, Zuleyma España y Germán Vázquez por haberme acompañado en el transcurso de la maestría y animándonos mutuamente.

A mis revisores: Dr. Carlos Daniel García Beltrán y el Dr. Enrique Quintero Mármol Márquez por sus comentarios y observaciones que ayudaron a consolidar este trabajo de tesis.

A cada uno de mis profesores que ayudaron a mi preparación académica, Dr. Adam Medina, Dr. Carlos Astorga, Dr. José Gómez, Dr. Juan Reyes, Dr. Ricardo Fabricio, Dr. Gerardo Guerrero y Dr. Guadalupe Madrigal, así como a la Lic. Lorena Ruiz por siempre estar disponible para realizar de forma oportuna y puntual cada uno de los trámites.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante este periodo para así poder culminar con mis estudios. Así también al CENIDET por permitirme ser parte de ellos y dar uso al plantel.

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el diseño de dos observadores funcionales dinámicos generalizados, estos están enfocados a la estimación de los estados no disponibles a la salida del sistema, así como la estimación de la ley de control que permite el seguimiento de trayectoria de una referencia deseada. Estos dos enfocados para sistemas tipo Takagi-Sugeno discretos. Se presentan las condiciones suficientes para la existencia de este tipo de observador, mediante el uso de desigualdades lineales matriciales.

Por medio del análisis de Euler-Lagrange se obtiene la representación matemática de la dinámica de un manipulador robótico de dos grados de libertad con movimiento horizontal, para posteriormente desarrollar su representación mediante la metodología de Takagi-Sugeno del sector no lineal. En cuanto a la discretización se utiliza la técnica Zoh o (Retenedor de Orden Cero).

Finalmente se muestran las simulaciones de todos los resultados obtenidos. Para probar el correcto comportamiento del observador funcional, en estas simulaciones se tomaron en cuenta diferentes tiempos de integración y discretización, así como un error en el modelado, generado por la reducción de las no linealidades del sistema no lineal completo, esto a partir de la depreciación de las fuerzas Coriolis ya que en ángulos pequeños estas prácticamente son igual a cero. Todas estas poniendo a prueba la robustez del observador diseñado. Además, se presenta la ley de control obtenida para el control de seguimiento de trayectoria que permita el movimiento circular deseado para los eslabones.

Abstract

In this thesis paper, I shall to present the design of two generalized dynamic functional observers, which focus on the estimation of the states not available at the output of the system, as well as on the estimation of the control law that permits the tracking of a trajectory of a desired reference. These approaches focus on discrete Takagi-Sugeno type systems. Sufficient conditions are presented for the existence of this type of observer through the use of linear matrix inequalities.

Using the Euler-Lagrange analysis, I shall obtain the mathematical representation of the dynamics of a robotic manipulator with two degrees of freedom with horizontal movement, which is represented using the Takagi-Sugeno methodology of the non-linear sector. Regarding discretization, the Zoh (Zero Order Holder) technique is used.

Finally, I shall present the simulations of all the results obtained. To test the correct behavior of the functional observer, different integration and discretization times were considered in these simulations, as well as an error in the modeling, generated by the reduction of the non-linearities of the complete non-linear system. The uncertainty in the model is caused by the depreciation of the Coriolis forces since, at small angles, these are practically equal to zero. All of these were taken into consideration to test the robustness of the designed observer. Furthermore, the control law obtained for the trajectory-following control is presented, which allows the desired circular motion for the links.

Índice general

Índice general	VI
Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XII
Nomenclatura	XIV
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	3
1.2 Objetivos	4
1.2.1 Objetivo general	4
1.2.2 Objetivos particulares	4
1.3 Estudio del estado del arte	4
1.3.1 Manipuladores robóticos	4
1.3.2 Sistemas Takagi-Sugeno	5
1.3.3 Observadores funcionales	6
1.3.4 Controladores proporcionales-integrales	7
1.4 Alcances	8
1.5 Aportaciones	9
1.6 Originalidad	9
1.7 Estructura del documento	9
2 Marco Teórico	12
2.1 Análisis de manipuladores robóticos	12
2.1.1 Formulación Euler-Lagrange	13

2.2	Teoría de sistemas Takagi-Sugeno	15
2.2.1	Enfoque del sector no lineal	16
2.2.2	Enfoque por linealización	18
2.2.3	Propiedades de los sistemas Takagi-Sugeno	20
2.3	Metodologías de discretización de sistemas	21
2.3.1	Retenedor de orden cero	22
2.4	Observadores	23
2.4.1	Clasificación de los observadores por la estructura	24
2.5	Controladores de sistemas	27
2.6	Conclusiones del capítulo	30
3	Representación T-S del robot manipulador	31
3.1	Modelo no lineal reducido del robot manipulador	31
3.2	Modelo Takagi-Sugeno	37
3.2.1	Simulación de modelos no lineales	42
3.2.2	Simulación del modelo no lineal reducido y el T-S continuo	43
3.3	Discretización del modelo Takagi-Sugeno	45
3.3.1	Simulación del modelo no lineal simplificado y el modelo T-S discreto	46
3.3.2	Simulación 1 en condiciones diferentes	48
3.3.3	Simulación 2 en condiciones diferentes	51
3.4	Definición de la trayectoria de referencia	53
3.5	Conclusiones del capítulo	57
4	Diseño del observador funcional para el sistema Takagi-Sugeno discreto	59
4.1	Planteamiento del problema	60
4.2	Parametrización de las matrices del observador funcional	61
4.3	Análisis de estabilidad del observador	64
4.4	Simulación 1 del observador funcional	66
4.5	Simulación 2 del observador funcional	71
4.6	Simulación 3 del observador funcional	75
4.7	Conclusiones del capítulo	76

5	Cálculo de un controlador PI basado en el observador funcional	77
5.1	Planteamiento del controlador PI	77
5.2	Análisis de estabilidad del controlador PI	79
5.3	Planteamiento del observador funcional	81
5.4	Simulación 1 del controlador	84
5.5	Simulación 2 del controlador	94
5.6	Simulación 3 del controlador	96
5.7	Simulación 4 cambios en la masa	99
5.8	Simulación 5 cambio en la trayectoria	101
6	Conclusiones generales	103
6.1	Trabajos futuros	105
	Bibliografía	106
A	Obtención de señal de entrada para el sistema no lineal	110
B	Pruebas de cambio de parámetros para el manipulador	113
C	Código para obtener la posición angular a partir del círculo de referencia	118

Índice de figuras

2.1	Diagrama del observador Luenberger.	24
2.2	Diagrama del observador proporcional.	25
2.3	Diagrama del observador proporcional integral	26
2.4	Diagrama del observador dinámico generalizado	27
2.5	Diagrama a bloques de un sistema de control a lazo abierto.	28
2.6	Diagrama a bloques de un sistema de control a lazo cerrado.	28
2.7	Diagrama a bloques del controlador PI	30
3.1	Esquema del manipulador robótico.	37
3.2	Entrada del sistema para sistemas no lineales.	42
3.3	Comparación de posiciones angulares de los sistemas no lineales.	43
3.4	Comparación velocidades del sistema no lineal completo y reducido	43
3.5	Entrada para el sistema no lineal y T-S continuo.	44
3.6	Comparación de posiciones angulares del sistema no lineal reducido y T-S continuo.	44
3.7	Comparación de velocidades angulares del sistema no lineal reducido y T-S continuo.	45
3.8	Entrada para sistemas no lineal y T-S Discreto.	46
3.9	Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno discreto.	47
3.10	Posiciones angulares del modelo no lineal simplificado y el T-S discreto.	47
3.11	Velocidades angulares del modelo no lineal simplificado y el T-S discreto.	48
3.12	Simulación 1: Gráfica de señales de entrada del manipulador.	49
3.13	Simulación 1: Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno discreto.	49
3.14	Simulación 1: Posiciones angulares del sistema no lineal y Takagi-Sugeno discreto.	50
3.15	Simulación 1: Velocidades angulares del sistema no lineal y Takagi-Sugeno discreto.	50
3.16	Simulación 2: Gráfica de señales de entrada del manipulador.	51

3.17 Simulación 2: Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno discreto.	51
3.18 Simulación 2: Ángulos del sistema no lineal y el Takagi-Sugeno discreto	52
3.19 Simulación 2:Velocidades del sistema no lineal y el Takagi-Sugeno discreto	52
3.20 Esquema del manipulador para la cinemática inversa	53
3.21 Triángulo para calcular el ángulo α	54
3.22 Triángulo para la regla de cosenos	54
3.23 Triángulo para el segundo eslabón	55
3.24 Triángulo de relaciones entre los eslabones	56
3.25 Trayectoria de referencia para las posiciones angulares	57
4.1 Esquema del observador para la estimación de una función.	59
4.2 Simulación 1: Gráfica de señales de entrada del manipulador.	70
4.3 Simulación 1: Estimación de las velocidades angulares del sistema.	70
4.4 Simulación 2: Gráfica de señales de entrada del manipulador para el observador funcional.	74
4.5 Simulación 2:Estimación de las velocidades angulares del sistema	74
4.6 Simulación 3: Gráfica de señales de entrada del manipulador.	75
4.7 Simulación 3: Estimación de las velocidades angulares del sistema.	75
5.1 Esquema del observador funcional para la estimación de ley de control	81
5.2 Simulación 1: Posición angular de referencia y del sistema no lineal controlado.	93
5.3 Simulación 1: Comparación de la ley de control.	93
5.4 Simulación 1: Área de trabajo del manipulador robótico con la referencia 1	94
5.5 Simulación 2: Referencia para el seguimiento de trayectoria.	94
5.6 Simulación 2: Comportamiento de los ángulos del manipulador.	95
5.7 Simulación 2: Ley de control estimada.	95
5.8 Simulación 2: Área de funcionamiento del manipulador robótico.	96
5.9 Simulación 3: Referencia para el seguimiento de trayectoria.	97
5.10 Simulación 3: Área de funcionamiento del manipulador robótico.	97
5.11 Simulación 3: Comportamiento de los ángulos del manipulador.	98
5.12 Simulación 3: Ley de control.	98
5.13 Trayectoria de referencia para las posiciones angulares	99

5.14	Simulación 4: Seguimiento de trayectoria ante cambios de masa.	100
5.15	Simulación 4: Comparación ley de control masas.	100
5.16	Simulación 5: Referencia rectangular para seguimiento.	101
5.17	Simulación 5: Posición angular de referencia y del sistema no lineal controlado. . . .	101
5.18	Simulación 5: Ley de control estimada rectángulo.	102
A.1	Crear programa nuevo en Simulink	110
A.2	Colocar la herramienta Signal Builder	111
A.3	Configurar la herramienta Signal Builder	111
A.4	Creación de señales en Signal Builder	112
A.5	Enviar las señales a Matlab.	112
B.1	Simulación 1:Comparación ángulos del sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno discreto.	114
B.2	Simulación 1:Comparación velocidades del sistema no lineal y el sistema Takagi- Sugeno discreto.	114
B.3	Simulación 1: Estimación de las velocidades angulares del sistema.	115
B.4	Simulación 2: Comparación ángulos del sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno discreto.	116
B.5	Simulación 2: Comparación velocidades del sistema no lineal y el sistema Takagi- Sugeno discreto.	116
B.6	Simulación 2: Estimación de las velocidades angulares del sistema.	117
C.1	Código para gráficas los ángulos del círculo de referencia.	118

Índice de tablas

Tabla 3.1	Parámetros del robot	41
Tabla B.1	Parámetros del robot prueba 2	113
Tabla B.2	Parámetros del robot prueba 3	115

Notación y acrónimos

Conjuntos

\mathbb{R}	Conjunto de todos los números reales.
\mathbb{R}^n	Conjunto de vectores reales de dimensión n ,
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjunto de vectores reales de dimensión $n \times n$.

Notación referente a vectores y matrices

$A > 0$	Matriz real A simétrica positiva definida.
$A < 0$	Matriz real A simétrica negativa definida.
I	Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
A^{-1}	Inversa de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$.
A^T	Transpuesta de la matriz A .
$\det(A)$	Determinante de la matriz A .
$\text{rank}(A)$	Rango de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Variables

	Descripción
$x(t), x(k)$	Vector de variables de estado continuas (discretas).
$u(t), u(k)$	Vector de variables de entrada continuas (discretas).
$y(t), y(k)$	Vector de variables de salida continuas (discretas).
$z(t), z(k)$	Vector de la función lineal a estimar continua (discreta).
$\rho(t), \rho(k)$	Vector de variables premisas continuas (discretas).
$\eta_i^j(t), \eta_i^j(k)$	Función de ponderación con $i = 1$ para límite superior, $i = 0$ para límite inferior, $j = 1, \dots, p$ siendo p el número de variables premisas.
$\mu_i(t), \mu_i(k)$	Función de pertenencia, $i = 1, \dots, \kappa$ siendo κ el número de modelos locales lineales.

Variables

$\zeta(k)$

$v(k)$

$\hat{z}(k)$

$\varepsilon(k)$

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

$e_z(k)$

$r_e(k)$

$y_e(k)$

$$\beta(k) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y_e(k) \end{bmatrix}$$

Descripción

Vector de estado discreto del observador.

Vector auxiliar discreto del observador.

Vector de la función estimada discreta.

Vector de error transformado de estimación.

Vector aumentado de la dinámica del error de estimación.

Vector de error de estimación de la función $z(k)$.

Vector de la integral del vector de referencia $r(k)$.

Vector de la integral del vector de salida $y(k)$.

Vector aumentado para el diseño del controlador.

Manipulador robótico

Símbolo	Descripción	Unidades
$\theta_{1,2}(k)$	Posición angular del eslabón.	<i>rad</i>
$\dot{\Theta}_{1,2}(k)$	Velocidad angular del eslabón.	<i>rad/s</i>
$\ddot{\Theta}_{1,2}(k)$	Aceleración angular del eslabón.	<i>rad/s²</i>
$\tau_{1,2}$	Par de entrada del sistema.	<i>N.m</i>
$l_{1,2}$	Longitud del eslabón.	<i>m</i>
$lc_{1,2}$	Longitud centro de masa del eslabón.	<i>m</i>
$I_{1,2}$	Inercia del eslabón.	<i>Kg.m²</i>
$m_{1,2}$	Masa del eslabón.	<i>Kg</i>
g	Constante de gravedad.	<i>g</i>
$\beta_{1,2}$	Coefficiente de fricción del eslabón.	-

Acrónimos

LMI	Desigualdad Matricial Lineal.
PI	Proporcional-Integral.
GDL	Grados de libertad.
T-S	Takagi-Sugeno.
Zoh	Retenedor de Orden Cero.
GDO	Observador Dinámico Generalizado.
LPV	Lineal de Parámetros Variables.
PUMA	Máquina universal programable para montaje.
CC-CC	Corriente continua - Corriente continua.
PWM	Modulación por ancho de pulsos.

Capítulo 1

Introducción

La robótica ha sido una de las áreas con mayor aplicación en ámbitos industriales y de procesos para la elaboración de múltiples bienes, y su modernización e investigación de temas relacionados con ellos es cada vez mayor, por lo cual es de vital importancia el tener un incremento de la eficiencia, la precisión y la productividad de los mismos, así también reducir los errores en su funcionamiento.

Dentro de la clasificación de los robots se encuentran dos de los más importantes y utilizados para la realización de diferentes procesos los cuales son: los manipuladores y móviles. En este documento, se muestra el análisis de un robot manipulador de dos grados de libertad (2GDL) con movimiento horizontal. Como definición para este tipo de manipuladores tenemos que es “una máquina manipuladora con n grados de libertad, programable y de múltiples usos”, dentro de sus aplicaciones industriales son comúnmente empleados en tareas repetitivas y de precisión, así como en actividades peligrosas (Reyes-Cortes, 2013).

Una de las ramas más importantes de la robótica está relacionada con el entendimiento y desarrollo de aplicaciones, las cuales, están condicionadas al conocimiento de diversas disciplinas, para poder entender de manera lógica el funcionamiento que engloba a los manipuladores robóticos y como es que podemos llegar a una representación apropiada de ellos (Lewis *y col.*, 1993).

Para cumplir con el objetivo del diseño de un controlador muchas veces es necesario contar con un modelo matemático que represente el comportamiento dinámico del sistema. Los modelos dinámicos del robot relacionan el movimiento y las fuerzas implicadas en el mismo. En el cual se

establecen las relaciones matemáticas entre las coordenadas articulares, sus derivadas (velocidad y aceleración), las fuerzas y pares aplicados en cada una de las articulaciones, así como los parámetros del robot (masas de los eslabones, inercias, etc.). Para poder obtener el modelo antes mencionado existen diferentes técnicas. Para este documento se empleó el método de Euler-Lagrange el cual permite obtener un conjunto de ecuaciones las cuales representan la posición angular, velocidad y aceleración lineal y angular del sistema (Nagesh *y col.*, 2012).

A partir de la representación no lineal del robot, utilizamos el enfoque Takagi-Sugeno (T-S), el cual consiste en obtener una familia de modelos locales lineales interpolados que representen el modelo no lineal, de acuerdo a la literatura, diversos sistemas pueden ser representados usando este enfoque, por ejemplo en Dezhi *y col.* (2012); Lendek *y col.* (2010); Souad (2013); Shodan y Singh (2016); Chadli *y col.* (2002) la metodología Takagi-Sugeno es utilizada para la representación de diferentes procesos, siendo aplicada para diferentes fines, tales como: diseño de controladores o diseño de observadores.

Un observador es un sistema dinámico auxiliar que refleja el comportamiento de un sistema físico y es impulsado por mediciones de entrada-salida, para así poder proporcionar una estimación de los estados internos del sistema, los artículos Yacine *y col.* (2014); Bouassem *y col.* (2017); Akhenak *y col.* (2003); Flores-Martínez *y col.* (2019) desarrollan diferentes tipos de observadores, como son el observador proporcional, proporcional-integral y funcional.

El uso de los observadores en el diseño de sistemas de control, es una herramienta muy útil, ya que muchas veces no se cuenta con la medición de todas las variables para fines de control, por lo cual es preciso estimar el resto de variables de estado. En general, los observadores tienen una amplia gama de aplicaciones de control, como el diseño de un controlador para la retroalimentación de estados, así como la estimación de fallas en un sistema, o para la obtención de la ley de control del sistema, entre otros.

Dentro de la teoría de los observadores existen distintos métodos para poder estimar las variables de estado. En este caso en particular se utiliza un observador funcional, el cual estima una ley de control, dicha ley de control es una función lineal de las variables de estado. Las aplicacio-

nes utilizadas para los observadores funcionales consisten en la estimación de una ley de control (Souad *y col.*, 2013), la estimación de una función de las variables medibles y no medibles del sistema (Yacine *y col.*, 2013; Nagy-Kiss *y col.*, 2011).

Utilizando el controlador, se puede definir una trayectoria a desarrollar por el robot. Para propósitos de este trabajo, se utiliza un controlador Proporcional-Integral (PI) estático donde las ganancias de este son constantes, esto es posible gracias a la acción del controlador por retroalimentación de estados que se encarga de estabilizar al sistema. De esta manera, el controlador es empleado para que el estado del sistema siga las referencias indicadas (Ríos-Ruiz, 2016; Kermadi *y col.*, 2016).

1.1. Planteamiento del problema

El tema del control siempre es importante para la automatización de diferentes procesos y cuando no se conoce un sistema por completo no siempre es posible. Uno de los principales problemas es que no se tienen disponibles todas las variables, para así, poder controlarlo de una manera eficiente. Para solucionar esto surgen múltiples estrategias las cuales permiten dar solución a los diferentes problemas que se puedan presentar.

Usualmente en los modelos matemáticos se encuentran presentes no linealidades, las cuales hacen complejo el diseño de controladores y observadores, por lo tanto, existen diferentes enfoques que sirven para representar dichos modelos no lineales dentro de una familia de modelos locales lineales. Los observadores son utilizados para estimar variables de estados que no están disponibles para su medición en la salida. La estimación de estados es de gran importancia para múltiples aplicaciones, sin embargo, en muchas ocasiones no es necesario estimar todos los estados individualmente si ya conocemos algunos.

Para poder dar solución a estos problemas, se propuso estimar una ley de control por medio de un observador funcional dinámico generalizado, aplicado a sistemas Takagi-Sugeno, la cual permitió controlar por seguimiento de trayectoria el movimiento de un manipulador robótico.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Diseñar un controlador de seguimiento de trayectoria basado en un observador funcional dinámico generalizado para un sistema no lineal en su representación Takagi-Sugeno discreta, aplicado a un manipulador robótico de dos eslabones con movimiento horizontal.

1.2.2. Objetivos particulares

- Obtener la representación Takagi-Sugeno discreta del brazo robótico de dos eslabones.
- Diseñar un observador funcional dinámico generalizado para estimar una función lineal de las variables de estado del sistema Takagi-Sugeno discreto.
- Diseñar un observador funcional dinámico generalizado para estimar una ley de control que permita el controlar la salida del sistema.

1.3. Estudio del estado del arte

1.3.1. Manipuladores robóticos

Un robot industrial es una máquina programable de uso general que tiene algunas características antropomórficas. Las características humanoides más típicas de los robots actuales es la de sus brazos móviles, los que se desplazan por medio de secuencias de movimientos que son programados para la ejecución de tareas de utilidad (Reyes-Cortes, 2013).

Los primeros robots usaban mecanismos de realimentación para corregir errores, los cuales siguen empleándose actualmente, el desarrollo del brazo manipulador llevó al robot moderno. El inventor estadounidense George Devol desarrolló en 1954 un brazo primitivo que se podía programar para realizar tareas específicas. En 1975, el ingeniero mecánico estadounidense Victor Scheinman, desarrolló un manipulador polivalente flexible conocido como Brazo Manipulador Universal Programable (PUMA, por las siglas en inglés de Programmable Universal Machine for Assambly). El PUMA era capaz de mover un objeto y colocarlo en cualquier orientación en un lugar deseado que estuviera a su alcance. El concepto básico multi-articulado del PUMA es la base de la mayoría de

los robots actuales (Cero *y col.*, 2019).

Los avances en la robótica son considerables y día a día se presentan nuevos resultados en aplicaciones industriales como en investigación científica y estos se enfocan a cualquiera de los sub-sistemas de que están constituidos.

Los problemas de ingeniería que surgen por el uso de robots no son pocos, entre ellos se pueden citar la planificación y coordinación de tareas, la construcción o selección del robot adecuado, entre otras. Para ello, se requiere del conocimiento de la cinemática y dinámica de los robots manipuladores. A partir de ello, y con ayuda de la simulación digital se selecciona el controlador adecuado que permitirá un buen desempeño durante la ejecución de una tarea. Podemos ver un claro ejemplo del desarrollo de la cinemática inversa en Miranda-Colorado (2016); Cero *y col.* (2019).

Para llevar a cabo el análisis de la dinámica del manipulador, así como las ecuaciones matemáticas que representan cada uno de ellos tenemos el análisis de Euler-Lagrange que se explica a detalle en Lewis *y col.* (1993), donde encontramos el análisis por Euler-Lagrange de diferentes tipos de manipuladores.

1.3.2. Sistemas Takagi-Sugeno

La principal propiedad de un modelo Takagi-Sugeno (T-S) es poder expresar la dinámica local de cada una de las no linealidades del sistema, delimitadas en una región propia. Un claro ejemplo se puede ver en Souad *y col.* (2013), donde se reduce el costo computacional al evitar los términos cruzados entre las ganancias de retroalimentación y las matrices de Lyapunov en la dinámica del circuito cerrado, dentro del problema, algunas variables de estado no están disponibles para su medición y uso en el control de retroalimentación.

En Flores-Martínez *y col.* (2019) se aborda la aplicación de la representación Takagi-Sugeno, presentando un algoritmo para el diseño de un observador funcional dinámico generalizado. El artículo explica las ventajas de la representación Takagi-Sugeno, ya que de forma eficaz representa las relaciones locales lineales de un sistema. En este caso se aplica para un sistema de Glucosa-Insulina

en el cual a partir de los datos de entrada y salidas medidas se regulan los niveles de glucosa frente a las perturbaciones asociadas con la ingesta de alimentos.

El enfoque Takagi-Sugeno hace posible reescribir un sistema no lineal de una manera que sea más fácil de estudiar, dividiéndolo en unidades más simples y manejables. El interés de realizar una descomposición del sistema es que, gracias a la propiedad de la suma convexa, el estudio de la estabilidad, la síntesis de controladores y observadores han sido ampliamente estudiados en el caso lineal. Puede extenderse al caso no lineal con herramientas similares. Por tanto, podemos citar Tanaka *y col.* (2003), Tanaka y Wang (2000) y Kruszewski (2006).

También podemos citar a Akhenak *y col.* (2007), Patton *y col.* (1998) por sus trabajos relacionados con observadores aplicados a sistemas Takagi-Sugeno con incertidumbre en el modelo, en estos trabajos las funciones de activación dependen de las llamadas variables premisas. Estas variables pueden ser medibles o no medibles. En Akhenak *y col.* (2007) explica que los modelos Takagi-Sugeno se pueden agrupar en dos familias distintas: por un lado, los modelos locales acoplados u homogéneos, en el sentido de que comparten la misma estructura y el mismo vector de estado; y por otro lado, modelos desacoplados o heterogéneos, en el sentido de que su estructura y variables de estados difieren, esto quiere decir, que cada sub-modelo tiene un vector de estado independiente.

Finalmente, abordamos el artículo Gomez-Peñate *y col.* (2017) en el cual se desarrolla el diseño de un observador de estado para un vehículo eléctrico representado por un modelo Takagi-Sugeno. Este propone que el modelo Takagi-Sugeno propuesto considera la no linealidad de la variable de velocidad del vehículo y la variación paramétrica inducida por la pendiente del terreno; esta consideración permite obtener un modelo matemático que representa al vehículo para un rango amplio de velocidades y simular diferentes condiciones del terreno. Igualmente, se presentan simulaciones que estiman la velocidad y la distancia recorrida por el vehículo eléctrico ante variaciones en la corriente de la batería y la pendiente del terreno.

1.3.3. Observadores funcionales

Originalmente la idea de un observador para estimar directamente una función del vector de estado fue inicialmente propuesta por Luenberger en Luenberger (1966). El observador funcional tiene

como objetivo estimar funciones lineales del vector de estado de un sistema sin estimar los estados individualmente (Tyrone y Hieu, 2014). La estimación directa de una función lineal permite que la estructura del observador tenga una dimensión mínima.

En Hieu y Tyrone (2011) se presentan diversos conceptos sobre la teoría de los observadores funcionales. Enfocándose en: 1). Observadores funcionales lineales, 2). Enfoque para el diseño de observadores funcionales para estimación de orden reducido.

En Jianglin y Patron (2015) se lleva a cabo el diseño de un observador funcional para sistemas descriptivos, en este caso para el diseño de un controlador robusto tolerante a fallas, lograda mediante la retroalimentación de la estimación de las variables de estado.

En Osorio-Gordillo *y col.* (2015) se centra en el diseño de un observador dinámico generalizado para la estimación de fallas aplicado a sistemas descriptor, en este se explican las ventajas de estructura del observador, así como su desarrollo. En este caso, se considera una entrada desconocida, así como la estimación simultánea de las variables de estado y la falla.

Así también, en el trabajo de Tyrone *y col.* (2011) se unifican varias estructuras de observadores funcionales reportadas en la literatura y además se detalla la importancia de eliminar los estados auto-convergentes del sistema, antes de proceder con el diseño del observador funcional, porque, la presencia de estados auto-convergentes puede llevar a conclusiones incorrectas con respecto a la existencia del observador.

Finalmente, en Flores-Martínez *y col.* (2019) podemos ver la aplicación de un observador funcional para la estimación de la ley de control, para un sistema glucosa-insulina en la sangre.

1.3.4. Controladores proporcionales-integrales

El control automático es de suma importancia en cualquier rama de la ingeniería, la tecnología de automatización se entiende como la aplicación de diversos métodos, estrategias de control, procesos e incluso instalación de hardware con la finalidad de alcanzar un objetivo sin la necesidad de la ayuda humana (Gyongy y Clarke, 2006). Debido a la creciente demanda de dispositivos electróni-

cos de uso industrial, se ha visto incrementado en los últimos años el desarrollo de nuevos métodos para optimizar procesos o tareas haciendo uso de estrategias diferentes.

Aunque el control por medio de un controlador Proporcional-Integral (PI), se ha estudiado desde hace tiempo, siguen existiendo campos importantes para su investigación, ya que algunas veces no es suficiente la implementación de un controlador PI, por ello, se han explorado diversos métodos que combinan la versatilidad y robustez de un PI con técnicas de estimación con algún observador. Como un claro ejemplo a revisar tenemos el controlador PI aplicado para sistemas no lineales con representación Takagi-Sugeno y un observador para la estimación de estados no disponibles. En Ríos-Ruiz (2016) se aplicó un controlador PI a un sistema cuasi-LPV, más específicamente a una bicicleta no tripulada, permitiendo representar las no linealidades del sistema original.

En Kermadi *y col.* (2016) se aborda la aplicación de un controlador PI discreto para un convertidor Buck Boost CC-CC bidireccional utilizando un microcontrolador SAM3X8E Arduino, para acoplarlo al convertidor se utiliza el módulo PWM incorporado en la tarjeta.

La realización de la revisión del estado del arte permitió orientar el trabajo de manera adecuada, poder entender los límites de este y así también poder enfocarlo hacia las aportaciones que se presentan en este trabajo.

1.4. Alcances

Diseñar un esquema de control que permita el seguimiento de trayectorias aún en presencia de incertidumbres paramétricas utilizando el enfoque Takagi-Sugeno discreto. En enfoque está basado en un modelo matemático obtenido del análisis de Euler-Lagrange de un robot manipulador de dos grados de libertad con movimiento horizontal. De dicho modelo se tomaron las variables disponibles a la salida, para que en conjunto con un observador funcional dinámico generalizado se realizó la estimación de la ley de control del sistema. El esquema de control está acotado a una trayectoria circular obtenida a partir de la dinámica inversa del robot.

1.5. Aportaciones

- Modelo matemático de un robot manipulador de 2GDL con movimiento horizontal en forma Takagi-Sugeno discreto.
- Esquema de estimación de una función lineal de las variables de estado de un sistema Takagi-Sugeno discreto, aplicado al robot manipulador de 2GDL.
- Esquema de control PI basado en un observador funcional para sistemas Takagi-Sugeno discreto, aplicado al seguimiento de una trayectoria circular de robot manipulador de 2GDL.

1.6. Originalidad

En este trabajo de investigación, se muestra una aportación teórica para temas de control, donde se construye una ley de control para sistemas discretos bajo la representación Takagi-Sugeno. Dicha ley de control es estimada directamente por un observador funcional, la estimación se logra al considerar un controlador con estructura proporcional-integral y un observador generalizado funcional, combinando así las bondades de cada uno de ellos. Por el lado del controlador PI la corrección del error de seguimiento de trayectoria en estado estable, está dado debido a la acción integral, y del observador funcional generalizado, la tolerancia que muestra ante variaciones paramétricas no consideradas en el modelo matemático, gracias a sus grados de libertad adicionales.

El esquema de control basado en el observador fue desarrollado de forma generalizada, pudiendo ser aplicado a cualquier proceso que tenga una representación Takagi-Sugeno discreta. De forma particular en este trabajo de tesis, se aplica a un robot manipulador de dos grados de libertad con movimiento horizontal.

1.7. Estructura del documento

El trabajo de investigación se encuentra dividido en ocho capítulos:

En el Capítulo 1 se plantea el objetivo general y los específicos de este trabajo de tesis, así como los antecedentes, la justificación, contribuciones que se realizan en la teoría del control relacionado

con el diseño de controladores y el desarrollo de observadores funcionales para sistemas con representación Takagi-Sugeno discreto; además, de presentar el estudio del estado del arte relacionado con todos los temas abordados.

En el Capítulo 2 se despliegan los conceptos básicos y definiciones importantes relacionados con los manipuladores de acuerdo con diversas fuentes relacionadas. Se aborda la teoría relacionada con la representación Takagi-Sugeno para sistemas no lineales. Se realiza una explicación detallada de los observadores. Posteriormente, se explica el objetivo de discretizar un sistema, así también, las diferentes metodologías para poder llevarlo a cabo, se hace énfasis en la metodología de retenedor de orden cero, técnica que se utiliza en este tema de tesis. Posteriormente, se lleva a cabo de forma detallada la clasificación de los observadores por medio de su orden y su estructura, en varios de los casos para la comprensión de estos integramos los esquemas que representan a cada uno de los observadores. Finalmente, se lleva a cabo una explicación de las diferentes técnicas que pueden ser utilizadas para el control de distintos sistemas, así como las características que los diferencian.

En el Capítulo 3 una vez presentado lo necesario para comprender la teoría básica de este tema de tesis, en la primera sección, se lleva a cabo la representación del sistema no lineal en el cual se identifican las no linealidades que lo componen; así también, se propone un segundo modelo no lineal el cual parte del sistema anterior, pero tomando una consideración para ángulos pequeños la cual permite reducir el número de no linealidades, posteriormente es turno de introducirse al modelado Takagi-Sugeno del manipulador de dos grados de libertad así como la simulación del sistema no lineal continuo con todas las no linealidades y el que toma en cuenta las consideraciones para la depreciación de la fuerza Coriolis y centrífugas, a continuación, se lleva a cabo la comparación del sistema no lineal completo y el sistema Takagi-Sugeno discreto obtenido a partir del sistema no lineal continuo. Al final de esta sección se realizaron múltiples simulaciones en la primera, se lleva a cabo la comparación del sistema no lineal completo y el reducido. Posteriormente, se simula el modelo Takagi-Sugeno continuo y el modelo no lineal reducido. Finalmente, se realizan diversas simulaciones del sistema Takgi-Sugeno discreto y el simplificado, con tiempos de integración y discretización distintos.

En el Capítulo 4, se lleva a cabo el diseño del observador funcional dinámico generalizado para

estimar los estados no disponibles a la salida del sistema, el cual está integrado por la parametrización de las ecuaciones del observador, la obtención de cada una de las matrices, la comprobación de la estabilidad por el desarrollo de una función de Lyapunov, la aplicación de diferentes técnicas como lo es el lema de eliminación y el complemento de Schur, los cuales en conjunto ayudan a poder resolver desigualdades de matrices lineales (LMI, por las siglas en inglés de Linear Matrix Inequalities). Finalmente, se muestra la simulación del observador funcional, donde se compara la estimación del observador con la variable real del sistema.

En el Capítulo 5, se presenta el diseño de un controlador PI basado en un observador funcional dinámico generalizado para un sistema bajo la representación Takagi-Sugeno discreto, con el cual se estiman los estados no disponibles en el sistema. El que es aplicado al sistema del manipulador robótico, posteriormente se desarrolla un observador funcional dinámico generalizado, el cual permite estimar la ley de control para la aplicación del par que permite formar la trayectoria deseada, se comprueba la estabilidad del observador por medio de una función de Lyapunov, así también se aplica el método de Schur para la resolución de las LMIs de una forma más sencilla. Utilizando la cinemática inversa aplicada al robot manipulador, se forma un círculo de referencia el cual se utiliza para el observador que estima la ley de control. Finalmente, se simula el observador funcional para validarlo, utilizando diferentes tiempos de integración y discretización, para obtener así, las gráficas que representan las posiciones angulares del sistema no lineal controlado y la referencia deseada; a partir de esto, se obtienen las gráficas del error de seguimiento para finalmente, con la dinámica obtenida graficar el área de funcionamiento del manipulador robótico junto con el círculo de referencia deseado.

En el Capítulo 6, se exteriorizan las conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Análisis de manipuladores robóticos

La dinámica del robot está descrita por las formulaciones matemáticas de las ecuaciones de movimiento del brazo. Las ecuaciones de movimiento de un manipulador son un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen su conducta dinámica. Tales ecuaciones son útiles para la simulación en computadora del movimiento del robot, el diseño de ecuaciones de control apropiadas para el robot y la evaluación del diseño y estructura del brazo. El objetivo del control de un manipulador basado en computadora es mantener la respuesta dinámica del mismo de acuerdo con algún rendimiento del sistema previamente especificado. En general, el rendimiento dinámico de un manipulador depende directamente de la eficacia de los algoritmos de control y de su modelo dinámico. El problema de control consiste en obtener modelos dinámicos del brazo del robot físico y a continuación especificar estrategias de control correspondientes para conseguir la respuesta y rendimiento del sistema deseado.

El modelo dinámico de un robot se puede obtener a partir de leyes físicas conocidas tales como las leyes de la mecánica Newtoniana y Lagrangiana. Este conduce al desarrollo de las ecuaciones de movimiento dinámico para las diversas articulaciones del manipulador en términos de los parámetros geométricos e inerciales de los elementos. Métodos convencionales como las formulaciones de Euler-Lagrange (L-E) y Newton-Euler (N-E) se pueden aplicar entonces sistemáticamente para desarrollar las ecuaciones de movimiento del robot.

La obtención del modelo dinámico de un manipulador basado en la formulación de Euler-Lagrange

es simple y sistemática, se fundamenta en el análisis de las energías cinética y potencial, fuerza de Coriolis y centrípeta y fricción.

- **Energía cinética:** Es una forma de energía debida al movimiento de los cuerpos. Equivale al trabajo que es necesario realizar para que el cuerpo pase del estado de reposo (velocidad cero, $v(t) = 0$ al estado de desplazamiento con una velocidad $v(t)$. En mecánica clásica un cuerpo de masa m desplazándose a una velocidad $v(t)$ posee una energía cinética.
- **Energía potencial:** Es una función de las coordenadas tal que la diferencia entre sus valores en las posiciones inicial y final es igual al trabajo efectuado sobre la partícula para moverla de su posición inicial a la final.
- **Fuerza de Coriolis:** Es la fuerza producida por la rotación de la tierra en el espacio, que tiende a desviar la trayectoria de los objetos que se desplazan sobre la superficie terrestre; a la derecha en el hemisferio norte y a la izquierda, en el sur.

Esta fuerza no solo aparece durante la rotación de la tierra sino, en general, para cualquier objeto con masa que se desplaza a una determinada velocidad sobre otro objeto en rotación.

- **Fuerza de centrípeta:** Fuerza dirigida hacia un centro, que hace que un objeto se desplace en una trayectoria circular.
- **Fricción:** Fuerza que resiste el movimiento encontrado entre dos cuerpos, bajo la acción de una fuerza externa en la cual un cuerpo tiende a moverse sobre la superficie del otro.

2.1.1. Formulación Euler-Lagrange

Las ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange proporcionan ecuaciones de estado explícitas para la dinámica del robot y se pueden utilizar para analizar y diseñar estrategias de control avanzadas en el espacio de las variables de articulación. En una menor medida se está utilizando para resolver el problema dinámico directo, esto es, dadas las fuerzas/pares deseadas, se utilizan las ecuaciones dinámicas para resolver las aceleraciones de las articulaciones, que se integran a continuación para obtener las coordenadas y velocidades generalizadas; o para el problema dinámico inverso, esto es, dadas las coordenadas generalizadas deseadas y sus primeras dos derivadas con respecto al tiempo,

se calculan las fuerzas/pares generalizados.

La formulación de Euler-Lagrange, está definida por la siguiente expresión:

$$\tau(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \theta(t)} \quad (2.1)$$

donde $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \cdots \ \theta_n(t)]^T$ y $\Theta(t) = [\Theta_1(t) \ \cdots \ \Theta_n(t)]^T$ son la posición y velocidad angular de los eslabones respectivamente. $\tau(t) = [\tau_1(t) \ \cdots \ \tau_n(t)]^T$ es el vector de torques aplicados al robot. $\mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))$ denota el Lagrangiano del sistema, definido por la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}_i(\theta(t), \Theta(t))$, y la energía potencial $\mathcal{P}_i(\theta(t))$ siendo,

$$\mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t)) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{K}_i(\theta(t), \Theta(t)) - \mathcal{P}_i(\theta(t))) \quad (2.2)$$

para un robot de n eslabones.

La energía cinética asociada al sistema está determinada por,

$$\mathcal{K}_i(\theta(t), \Theta(t)) = \frac{1}{2} m_i v_i^2(t) + \frac{1}{2} I_i \Theta_i^2(t) \quad (2.3)$$

donde m_i denotan las masas de los eslabones, $v_i(t)$ es la rapidez del centro de masa de los eslabones e I_i representan los momentos de inercia del eslabón i -ésimo.

La energía potencial asociada a los eslabones está determinada por

$$\mathcal{P}_i(\theta(t)) = m_i g h_i \quad (2.4)$$

donde g es la gravedad y h_i es la altura del centro de gravedad.

De forma que la ecuación (2.2), puede representarse como:

$$\mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2(t) - m_i g h_i \right) \quad (2.5)$$

El movimiento articular real de un robot es gobernado por su dinámica, teniendo en cuenta la masa de cada eslabón y junta, la velocidad y aceleración articular, y las fuerzas aplicadas a cada junta.

El modelo dinámico del robot es un conjunto de ecuaciones diferenciales dadas por la siguiente ecuación:

$$\mathcal{M}(\theta(t))\dot{\Theta}(t) + \mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t)) + \mathcal{G}(\theta(t)) = \tau(t) \quad (2.6)$$

donde $\mathcal{M}(\theta(t))\dot{\Theta}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $\mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas, $\mathcal{G}(\theta(t)) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales, y $\tau(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas y pares efectivos aplicados a las articulaciones.

2.2. Teoría de sistemas Takagi-Sugeno

Para llevar a cabo una representación Takagi-Sugeno de un sistema no lineal, existen distintos enfoques, los primeros tipos de representación fueron propuestos en Tanaka *y col.* (2003). El objetivo principal que tiene la representación Takagi-Sugeno es reproducir un sistema de forma más simple, tomando en cuenta cada una de las no linealidades que se encuentran en el sistema, es decir, es una forma diferente de llevar a cabo una representación de los modelos no lineales, con las mismas características del sistema no lineal, pero con un enfoque lineal que permite que diferentes acciones puedan ser aplicadas, como puede ser el control.

Estas representaciones son modelos matemáticos con una forma especial, la cual tiene como característica que representan de manera exacta o muy aproximada una gran variedad de sistemas no lineales. Los sistemas Takagi-Sugeno se basan en reglas difusas IF-THEN, las que representan las relaciones lineales locales de la entrada y salida de un sistema no lineal (Lendek *y col.*, 2011). La principal característica de un modelo Takagi-Sugeno es expresar la dinámica local de cada regla difusa por un modelo afín de este, válido localmente en una región correspondiente acotada. El modelo difuso global se consigue mediante una combinación de los modelos locales lineales. La regla anterior parte en un conjunto de variables de modelo en conjuntos difusos. Generando así, para cada una de las reglas una expresión matemática. Podemos decir que la regla de la i -ésima posición puede escribirse como:

$$\rho_1 \text{ es } P_1^i \text{ y } \dots, \text{ y } \rho_p \text{ es } P_p^i \text{ entonces } y = F_i(\rho) \quad (2.7)$$

donde el vector ρ contiene p componentes, ρ_j , $j = 1, 2, \dots, p$, y se utiliza como un vector de las variables pasadas; estas variables también se denominan variables de programación, ya que los valores

determinan el grado en que las reglas están presentes. Los conjuntos $P_j^i, j = 1, 2, \dots, p, i = 1, \dots, \kappa$, donde κ es el número de reglas los cuales son llamados conjuntos difusos.

El valor de una variable de programación ρ_j pertenece a un conjunto difuso P_j^i con un valor de verdad dado por la función de pertenencia $\mu_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. El valor de verdad de una regla completa es determinado en función de las variables de premisa individuales, utilizando un operador de conjunción como el mínimo.

$$\varphi_i(\rho) = \min_j(\mu_{ij}(\rho_j)) \quad (2.8)$$

o el producto algebraico

$$\varphi_i(\rho) = \prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\rho_j) \quad (2.9)$$

El siguiente paso sería, normalizar el valor de verdad obtenido mediante:

$$\mu_i(\rho) = \frac{\varphi_i(\rho)}{\sum_{j=1}^{\kappa} \varphi_j(\rho)} \quad (2.10)$$

Asumiendo que $\sum_{i=1}^{\kappa} \varphi_i(\rho) \neq 0$, es decir, que para cualquier combinación permitida de variables de programación al menos una regla tiene un valor de verdad mayor que cero.

2.2.1. Enfoque del sector no lineal

Uno de los métodos más utilizados para obtener una representación Takagi-Sugeno es el sector no lineal, este se utiliza para el diseño de controladores difusos, ya que se puede obtener una representación difusa muy precisa de un sistema no lineal, dado por un conjunto compacto del espacio de estados. Este enfoque es ampliamente descrito en Ohtake *y col.* (2003). Este método se llevó a cabo inicialmente para sistemas no lineales que tengan la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f^m(x, u)x(t) + g^m(x, u)u(t) \\ y(t) &= h^m(x, u)x(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

En la expresión anterior f^m, g^m, h^m son funciones no lineales suaves, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entrada, y $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de variables medidas. Los elementos de las funciones matriciales f^m, g^m, h^m se suponen están acotados. Además, en general, se supone que todas las variables se definen en un conjunto compacto.

El enfoque del sector no lineal es presentado de una forma más general como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f^m(x, u)x(t) + g^m(x, u)u(t) + a(x, u) \\ y(t) &= h^m(x, u)x(t) + c(x, u)\end{aligned}\tag{2.12}$$

con las mismas suposiciones en f^m, g^m, h^m , y las variables como en la ecuación (2.11) y además, con $a(x, u)$ y $c(x, u)$ funciones vectoriales no lineales suaves.

Las variables de programación se eligen como $\rho_j(\cdot) \in [nl_j^0, nl_j^1]$, $j = 1, 2, \dots, p$, donde ρ_j representa el término no lineal o función diferenciable definido en un conjunto compacto. nl_j^0 y nl_j^1 es el mínimo y máximo respectivamente de ρ_j . Entonces, para cada ρ_j , dos funciones de ponderación son construidas como:

$$\eta_0^j = \frac{nl_j^1 - \rho_j(\cdot)}{nl_j^1 - nl_j^0} \quad \eta_1^j = 1 - \eta_0^j \quad j = 1, 2, \dots, p\tag{2.13}$$

Se considera que ambas funciones de ponderación son normalizadas, es decir, $\eta_0^j(\cdot) \geq 0, \eta_1^j(\cdot) \geq 0$ y $\eta_0^j + \eta_1^j = 1$, para cualquier valor de ρ_j . Además, ρ_j puede expresarse como $\rho_j = nl_j^0 \eta_0^j(\rho_j) + nl_j^1 \eta_1^j(\rho_j)$, es decir, la suma ponderada de los extremos.

Los conjuntos difusos correspondientes a ambas funciones de ponderación son definidos en $[nl_j^0, nl_j^1]$, es decir, el dominio donde ρ_j tomó esos valores. Estos conjuntos se indican a continuación por P_0^1 y P_1^1 .

Las reglas del sistema Takagi-Sugeno son construidas tal que todos los términos $\rho_j, j = 1, 2, \dots, p$ son tomados en cuenta, es decir, las reglas tienen la forma:

Regla del modelo i -ésimo: Si ρ_1 es P_1^i y ρ_p es P_p^i entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + a_i \\ y(t) &= C_i x(t) + c_i\end{aligned}\tag{2.14}$$

donde $P_j^i, j = 1, 2, \dots, p$ pueden ser ya sea P_0^1 o P_1^1 y a_i, c_i son variables de desviación modelo local. En consecuencia, el sistema Takagi-Sugeno consiste en $\kappa = 2^p$ reglas.

La función de pertenencia de la regla es calculada como el producto de las funciones de ponderación que corresponden al conjunto difuso de la regla, es decir:

$$\mu_i(\rho) = \prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\rho_j) \quad (2.15)$$

donde $\mu_{ij}(\rho_j)$ es, ya sea $\eta_0^j(\rho_j)$ o $\eta_1^j(\rho_j)$, dependiendo de la función de ponderación usada en la regla. Debido a la construcción de las funciones de ponderación, el resultado de las funciones de pertenencia son normalizadas, es decir, $\mu_i(\rho) \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho) = 1$.

Las matrices A_i, B_i, C_i y los vectores a_i y c_i se construyen mediante la sustitución de los elementos correspondientes a las funciones de ponderación utilizadas en la regla i -ésima, esto quiere decir que, nl_j^0 para η_0^j y nl_j^1 para η_1^j , respectivamente, en las matrices y vectores f^m, g^m, h^m, a_i y c_i .

Entonces usando las funciones de pertenencia dadas por la ecuación (2.15), el sistema no lineal dado por (2.12), es fielmente representado por el modelo difuso Takagi-Sugeno que se muestra a continuación

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho)(A_i x(t) + Bu(t) + a_i) \quad (2.16)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho)(C_i x(t) + c_i) \quad (2.17)$$

2.2.2. Enfoque por linealización

El enfoque por linealización consiste en una expansión de series de Taylor en diferentes puntos representativos, los cuales pueden ser o no pueden ser puntos de equilibrio. Por linealización en cada uno de estos puntos, una aproximación lineal puede ser obtenida como lo desarrollan en Lendek *y col.* (2011).

Considerando el sistema dinámico no lineal:

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (2.18)$$

$$y(t) = h(x) \quad (2.19)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de variables de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de variables medidas, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entrada, f y h son funciones no lineales suaves.

El objetivo es obtener una aproximación del sistema no lineal como un conjunto de m reglas de la forma:

Regla del i -ésimo modelo:

Si ρ_1 es $P_1 \dots P_p$ es P_p^i entonces:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + a_i \quad (2.20)$$

$$y(t) = C_i x(t) + c_i \quad (2.21)$$

O equivalentemente a un modelo Takagi-Sugeno de la forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho) (A_i x(t) + B_i u(t) + a_i) \quad (2.22)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho) (C_i x(t) + c_i) \quad (2.23)$$

donde A_i, B_i, C_i, a_i y c_i son las matrices y sesgos de los modelos locales lineales, ρ es el vector de programación que determina cuáles de las reglas están activas en un momento dado, $\mu_i(\rho)$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$ son funciones de pertenencia normalizadas.

El primer paso es decidir qué variables describen las no linealidades, es decir, qué variables deberían ser las variables de programación. Esto quiere decir que z es una selección de entradas, estados y salidas. Como segundo paso es decidir el número de puntos de linealización $\rho_{0,i}$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$ que son elegidos, junto con una partición del espacio en el que se define las variables, y las funciones de pertenencia correspondientes $\mu_i(\rho_j)$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$.

Al aumentar el número de puntos de aproximación, la exactitud en la aproximación de los modelos difusos aumenta. Sin embargo, al aumentar el número de los puntos de linealización, los costos computacionales también aumentan. Finalmente, las matrices son obtenidas como:

$$A_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\rho_{0,i},0} \quad B_i = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\rho_{0,i},0} \quad C_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\rho_{0,i},0} \quad (2.24)$$

donde $|_{\rho_{0,i},0}$ indica la evaluación de las derivadas parciales en el valor correspondiente de $\rho_{0,i}$ para las variables de estado y de entrada, que son las variables programadas y 0 corresponde a las variables que no están en ρ . Generalmente la linealización no está en los puntos de equilibrio, los términos afines deben ser agregados como:

$$a_i = f(x, u)|_{\rho_{0,i},0} - (A_i x)|_{\rho_{0,i},0} - (B_i u)|_{\rho_{0,i},0} \quad (2.25)$$

$$c_i = h(x)|_{\rho_{0,i},0} - (C_i x)|_{\rho_{0,i},0} \quad (2.26)$$

Para obtener el sistema Takagi-Sugeno de la forma (2.22) y (2.23), las funciones de pertenencia de cada regla se calculan con (2.9) y se normalizan con (2.10). Con el miembro normalizado, el modelo difuso Takagi-Sugeno se expresa como (2.22) y (2.23).

2.2.3. Propiedades de los sistemas Takagi-Sugeno

Estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno

Para llevar a cabo el desarrollo del análisis de estabilidad de un sistema Takagi-Sugeno, se utilizan las desigualdades de matrices lineales (LMI) para facilitar el diseño. La estabilidad se analiza utilizando el método directo de Lyapunov. La función comúnmente usada es la representación cuadrática, presentada a continuación:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0 \quad (2.27)$$

con $P = P^T > 0$.

Si es usada una función de Lyapunov, se habla de “estabilidad cuadrática”. Cuando un sistema es cuadráticamente estable, implica que el sistema es estable. Sin embargo, lo contrario no es necesariamente cierto. Por lo tanto, las condiciones de estabilidad obtenidas usando la función de Lyapunov (2.27) son más que suficientes para garantizar la estabilidad, es decir, si las condiciones del LMI no se cumplen no se puede decir nada acerca de la estabilidad o la inestabilidad del modelo Takagi-Sugeno.

Considere un sistema Takagi-Sugeno autónomo o no forzado $u(t) = 0$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{\kappa} w_i(\rho) A_i x(t) \quad (2.28)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (2.29)$$

Es cuadráticamente estable si la derivada de la función de Lyapunov (2.27) decrece y tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ en todas las trayectorias de $x(t)$. La derivada de (2.27) a lo largo de las trayectorias del modelo no forzado (2.28) es:

$$\dot{V}(t) = \left(\sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x^T P \left(\sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho) A_i x(t) \right) < 0 \quad (2.30)$$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho) x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0 \quad (2.31)$$

Recordando que $\mu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, \kappa$.

Si la siguiente LMI se verifica, entonces el sistema Takagi-Sugeno (2.28) es estable.

$$(A_i^T P + P A_i) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, \kappa. \quad (2.32)$$

Observabilidad en los sistemas Takagi-Sugeno

La observabilidad en los sistemas Takagi-Sugeno es la propiedad de reconstruir el vector de estados, a partir de las entradas del sistema y de las salidas que están disponibles. Los sistemas Takagi-Sugeno son sistemas no lineales, por lo tanto, parece sencillo utilizar los criterios de observabilidad para sistemas no lineales. Sin embargo, dado que los observadores están diseñados de tal manera que cada regla tiene una ganancia local, se requiere que los modelos locales sean observables en lugar del sistema no lineal completo (Lendek *y col.*, 2011).

Para el diseño se supone implícitamente que los modelos locales, es decir, los pares $(A_i, C_i), \forall i = 1, 2, \dots, \kappa$, son observables.

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} C \\ C A_i \\ \vdots \\ C A_i^{n_x-1} \end{bmatrix} \right) = n_x, \quad \forall i = 1, \dots, \kappa. \quad (2.33)$$

donde n_x es la dimensión del vector de estados del sistema.

2.3. Metodologías de discretización de sistemas

La discretización es un procedimiento el cual sirve para definir un modelo con un número finito de grados de libertad que permite aproximar el comportamiento de un sistema continuo. Es decir, el

modelo continuo de un sistema, que por ser continuo tiene infinitos grados de libertad, se aproxima mediante otro modelo que está definido mediante un número finito de parámetros (Miranda, 2012).

La discretización de cualquier sistema será mejor o peor en función de la capacidad del modelo y los parámetros empleados para representar fielmente el comportamiento real del sistema.

Existen diversos procedimientos para obtener modelos discretos suficientemente aproximados a los sistemas continuos. Algunos ejemplos de estas metodologías son, método de Euler hacia atrás, método de Euler hacia adelante, método trapezoidal, metodología de retenedor de orden cero, entre otros.

2.3.1. Retenedor de orden cero

Para la discretización del caso de estudio de este trabajo de investigación se empleará la metodología de Retenedor de Orden Cero (Zoh, por las siglas en inglés de Zero-order hold), la cual es una forma de llegar a una representación discreta. Esta técnica menciona que si la entrada $u(t)$ es digital y siendo T_d el periodo de muestreo utilizado para discretización, seguido por un conversor Digital-Analógico y manteniendo el valor durante el periodo de muestreo se tiene:

$$u(t) = u(kT) = u(k), \quad \text{para } kT < t \leq (k+1)T \quad (2.34)$$

Para la señal de entrada la solución del sistema continuo está dado por:

$$x(k) = e^{AkT} x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

$$x(k+1) = e^{A(k+1)T} x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (2.36)$$

Despejando la expresión anterior obtenemos:

$$x(k+1) = e^{AT} x(k) + \left[\int_0^{AT} e^{A((k+1)T-\tau)} d\alpha \right] B u(k) \quad (2.37)$$

Si las salidas también son determinadas en los instantes $t = kT$

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad (2.38)$$

$$y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \quad (2.39)$$

Donde las matrices del modelo discreto son:

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \left(\int_0^T e^{A\alpha} D_\alpha \right) B, \quad C_d = C, \quad D_d = D \quad (2.40)$$

2.4. Observadores

En determinadas circunstancias resulta necesario estimar el valor de ciertas variables de estado que no son medidas en un sistema. La estimación de este tipo de variables se determina observación. Entonces, es necesario estimar las variables de estado que no están disponibles. Es importante señalar que se debe evitar diferenciar una variable de estado para generar la estimación de otra. La diferencia de una señal siempre decrementa la relación señal a ruido, porque este último por lo general fluctúa más rápidamente que la señal de control. En ocasiones, la relación señal-ruido se decrementa varias veces mediante un proceso único de diferenciación.

Considerando la presentación en espacio de estados de un sistema como se describe en:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.41)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.42)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entrada y $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salidas medidas. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ y $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, son constantes conocidas.

Considerando un sistema lineal invariante en el tiempo, como el presentado en la ecuación (2.41), el observador de estados tiene como objetivo reconstruir el vector de estados utilizando las salidas medidas y las entradas disponibles del sistema original.

Una clasificación de los observadores se enfoca en el número de variables que son observadas. De esta manera propone una clasificación de observadores en tres tipos:

- **Orden completo:** El observador capta todas las variables del sistema, sin importar si algunas están disponibles para una medición directa.
- **Orden reducido:** El observador estima menos de n_x variables de estado, en donde n_x es la dimensión del vector de estado.

- Orden mínimo:** Es un observador de orden reducido con el mínimo orden posible, es decir, si n_x es la dimensión del vector de estado y n_y es la dimensión del vector de salidas, el observador de orden mínimo observa $n_x - n_y$ variables.

2.4.1. Clasificación de los observadores por la estructura

Observador tipo Luenberger.

Es un algoritmo que permite estimar todos los estados del sistema dinámico a partir de las entradas y salidas del sistema. El observador tipo Luenberger tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{2.43}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{2.44}$$

Para un mejor entendimiento de la estructura de este tipo de observador se presenta un esquema que se muestra en la Figura 2.1.

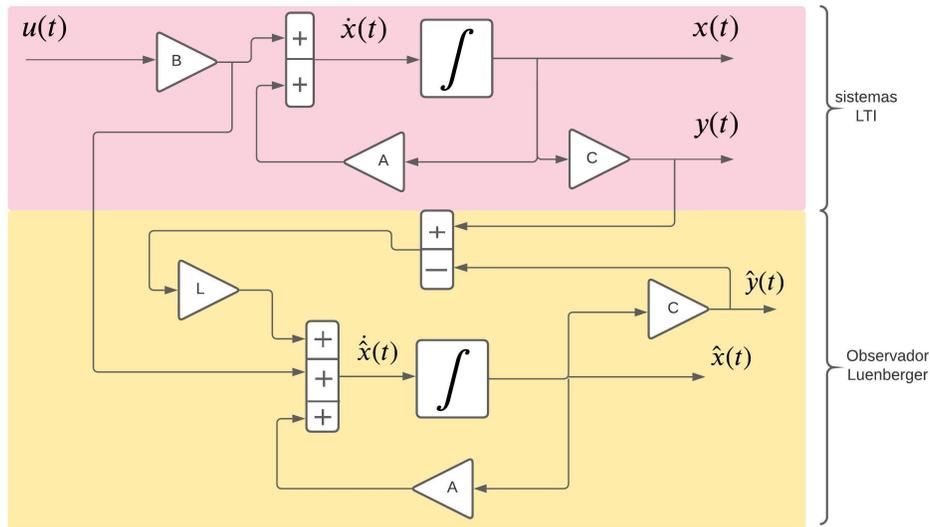


Fig. 2.1. Diagrama del observador Luenberger.

Observador Proporcional.

Este tipo de observador adiciona grados de libertad que se pueden utilizar para aumentar el margen de estabilidad, son muy sensibles a las incertidumbres paramétricas e introducen un error estático

en la estimación de estados. El observador proporcional tiene la siguiente estructura (Darouach y Boutayeb, 1995)

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (2.45)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (2.46)$$

Para un mejor entendimiento de la estructura y la diferencia que existe entre este observador y el tipo Luenberger, se presenta un esquema que se muestra en la Figura 2.2.

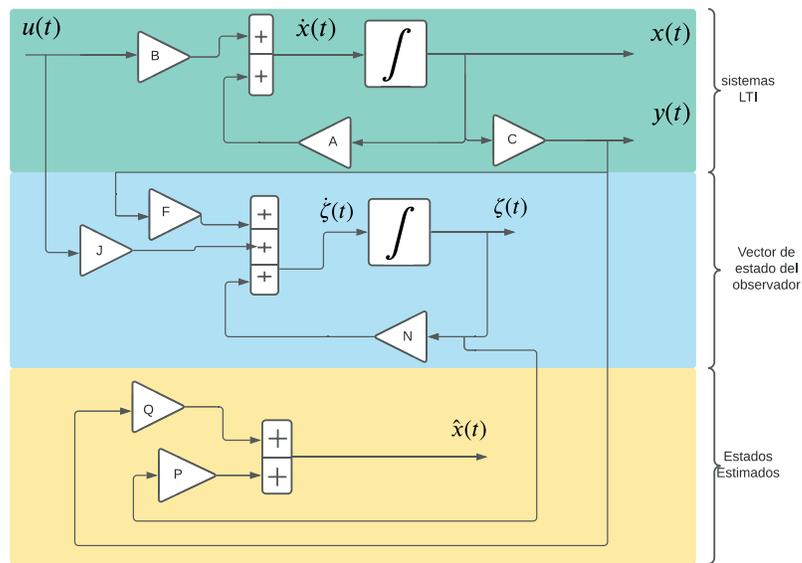


Fig. 2.2. Diagrama del observador proporcional.

Observador Proporcional Integral.

Para hacer frente al inconveniente de la sensibilidad a las incertidumbres paramétricas de los observadores proporcionales, se introdujeron observadores proporcionales integrales, tienen una ganancia integral adicional del error de salida en su estructura (Osorio-Gordillo *y col.*, 2016). Esta estructura puede aumentar la precisión de la estimación en estado estable, como se muestra a continuación:

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (2.47)$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (2.48)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (2.49)$$

Así también para un mejor entendimiento de la estructura y la diferencia que existe entre los observadores proporcional y proporcional integral, se presenta un esquema que se muestra en la Figura 2.3.

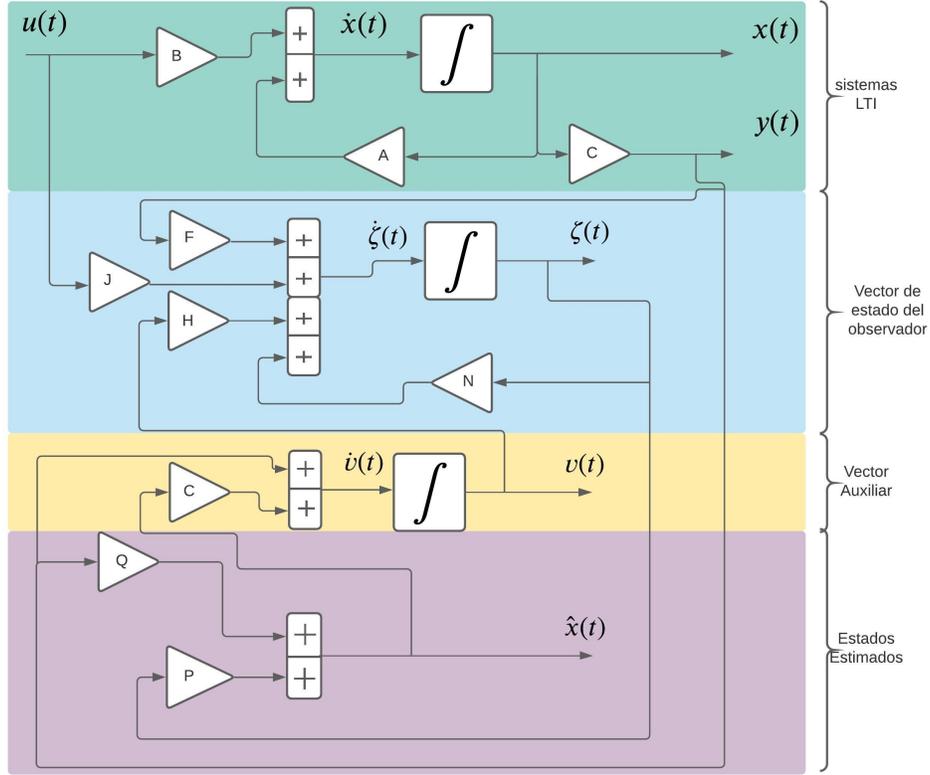


Fig. 2.3. Diagrama del observador proporcional integral

Observador dinámico generalizado

Este tipo de observador aumenta la precisión del estado estable y mejora la robustez de la estimación de errores de modelado. También proporciona grados adicionales de libertad en el diseño que se pueden usar para aumentar el margen de estabilidad (Osorio-Gordillo *y col.*, 2016). El observador dinámico generalizado tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (2.50)$$

$$\dot{v}(t) = S\zeta(t) + Lv(t) + My(t) \quad (2.51)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (2.52)$$

Para un mejor entendimiento de la estructura y la diferencia que existe entre este observador y

los observadores dinámicos anteriormente presentados, se presenta un esquema que se muestra en la Figura 2.4. Se aprecian todas aquellas ganancias que proporcionan los grados adicionales de libertad y la complejidad del diseño de este tipo de observador.

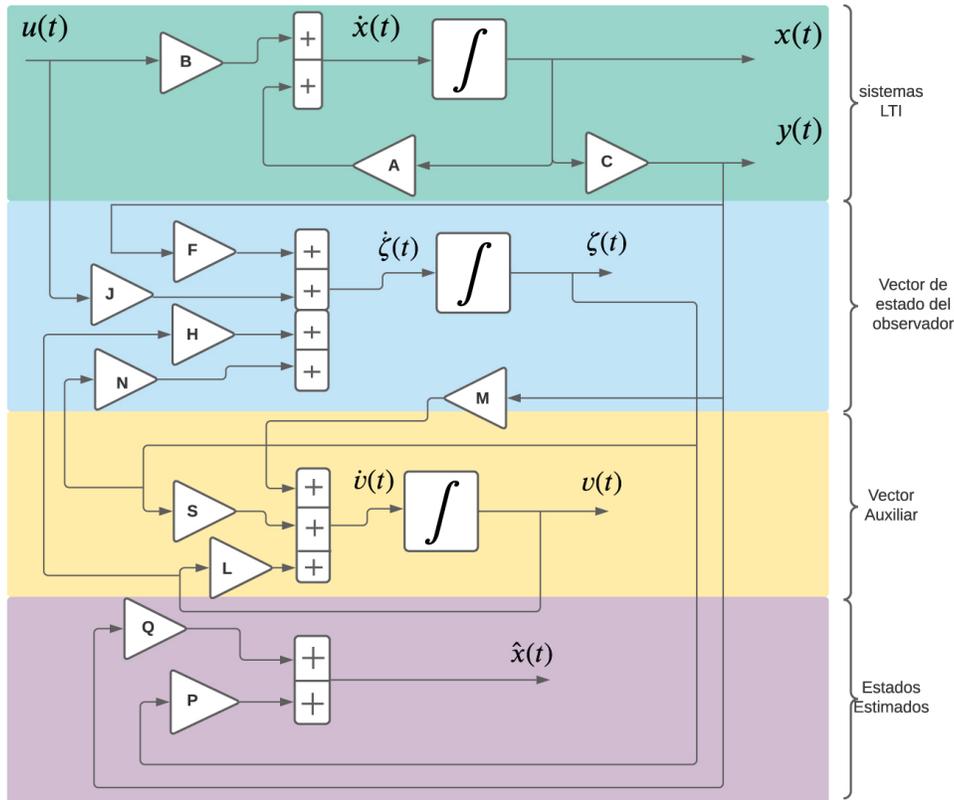


Fig. 2.4. Diagrama del observador dinámico generalizado

2.5. Controladores de sistemas

Un sistema de control consiste en un conjunto de componentes interconectados y diseñados para lograr un propósito específico (respuesta deseada del sistema) llevar al sistema a una condición requerida. La teoría de control está basada en los fundamentos de la retroalimentación y análisis de sistemas lineales y asume una relación causa-efecto de los componentes involucrados. Un componente o proceso que será controlado, puede ser representado con un bloque donde la relación entrada-salida representa la correspondencia causa efecto. De manera general, los sistemas son clasificados en sistemas de lazo abierto y sistemas de lazo cerrado. Se denomina de lazo abierto a

los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control, véase Figura 2.5. En otras palabras, en un sistema de lazo abierto no se mide la salida ni se compara con la entrada, así cada entrada de referencia le corresponderá una condición de operación, como resultado de ello, la precisión recae en la calibración realizada en el control con respecto a la entrada, sin embargo, ante la presencia de perturbaciones, este tipo de sistemas no realizará la tarea establecida. Este sistema de lazo abierto se usa principalmente cuando se conoce la relación entre la entrada y la salida además de considerar que no existen perturbaciones internas ni externas solo se tiene una regulación.

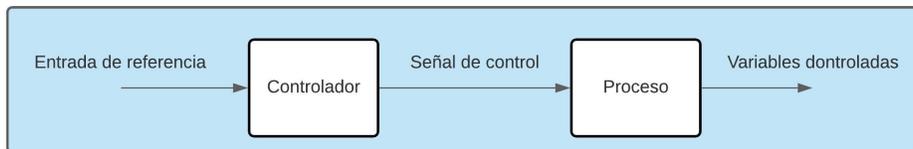


Fig. 2.5. Diagrama a bloques de un sistema de control a lazo abierto.

En contraste, un sistema de control a lazo cerrado, como el que se muestra en la Figura 2.6, utiliza la medida de la señal de salida actual para compararla con la señal deseada, esta diferencia se le denomina error de actuación, la cual alimentará al controlador con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la retroalimentación vuelve al sistema relativamente insensible a las perturbaciones ya sean externas o internas.

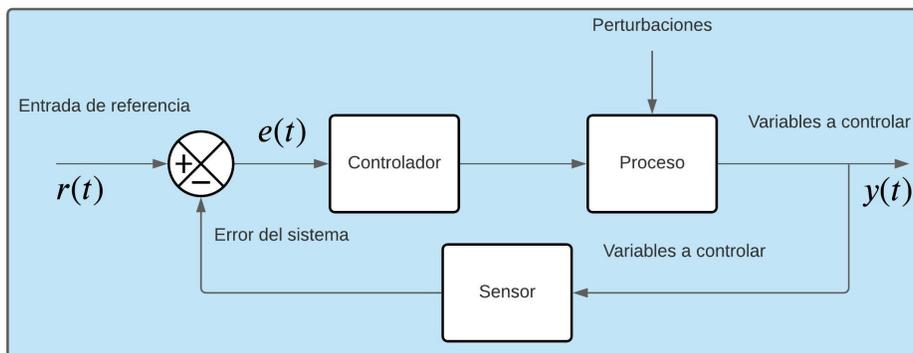


Fig. 2.6. Diagrama a bloques de un sistema de control a lazo cerrado.

Controlador Proporcional

Ahora bien, si la salida del controlador es proporcional, es decir: $u(t) = k_p e(t)$ queda descrita desde su función de transferencia como:

$$\frac{u(t)}{e(t)} = k_p \quad (2.53)$$

donde k_p es una ganancia proporcional ajustable; un sistema proporcional puede controlar cualquier planta estable, pero posee un desempeño limitado y error en régimen permanente. La función principal de la acción integral es asegurar que la salida del proceso concuerde con la referencia en estado estacionario. Con el control proporcional, el error estará en estado estacionario. Con la acción integral, el error positivo producirá un incremento en la señal de control sin importar cuán pequeño sea el error, por lo que se considera un modo de controlar lento.

$$u(t) = k_I \int_0^t e(t) dt \quad (2.54)$$

Controlador Proporcional Integral

El controlador Proporcional Integral (PI) es uno de los más comunes en el área de control. Su estructura simple lo hace muy útil para ser implementado en sistemas lineales. En sistemas no-lineales, sin embargo, resulta ineficiente debido al comportamiento dinámico complejo de este tipo de sistemas. Gracias al uso de la retroalimentación de estados, es posible utilizar un controlador PI para garantizar el seguimiento de las referencias. Para propósitos de este trabajo, se utiliza un controlador PI con ganancias constantes, esto es posible gracias a la acción del controlador por retroalimentación de estados que se encarga de estabilizar al sistema. De esta manera, el controlador PI solo es utilizado para que el estado del sistema siga las referencias indicadas. La estructura del controlador PI se muestra en (2.55)

$$u(t) = k_p e + k_I \int_0^t e dt \quad (2.55)$$

donde $e = r(t) - y(t)$ representa al error y $r(t)$ la referencia del sistema. Se pretende que el error converja asintóticamente a 0. El diagrama de bloques de un controlador PI se muestra en la Figura 2.7.

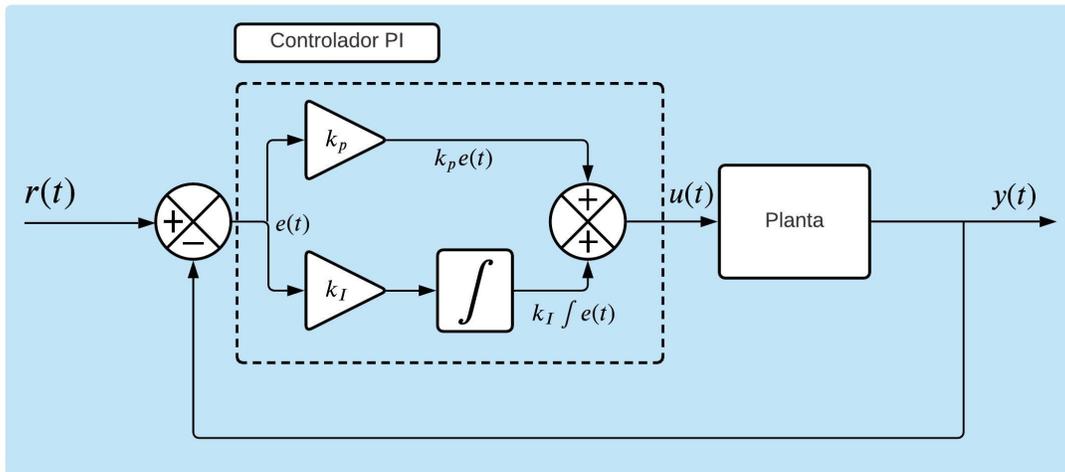


Fig. 2.7. Diagrama a bloques del controlador PI

2.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se mostró el análisis del manipulador el cual es llevado a cabo por la metodología de Euler-Lagrange, así como los diferentes métodos para llegar a la representación Takagi-Sugeno de un sistema no lineal. En cuanto a los observadores, se explicó la clasificación de cada uno por medio de esquemas, así como una corta explicación de su objetivo. Estos están clasificados por estructura y orden. Finalmente, se comentaron los diferentes tipos de controladores usados para el control de diferentes sistemas.

Capítulo 3

Representación T-S del robot manipulador

3.1. Modelo no lineal reducido del robot manipulador

Para propósitos de diseño de control, es necesario tener un modelo matemático que revele el comportamiento dinámico del sistema. Por lo tanto, se deben obtener las ecuaciones dinámicas del movimiento para un robot manipulador. El enfoque utilizado consiste en derivar la energía cinética y potencial del manipulador y con estas obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

De acuerdo al método de Euler-Lagrange las ecuaciones de movimiento que gobiernan a un robot rígido de n grados de libertad están determinadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \theta(t)} = \tau(t) \quad (3.1)$$

donde $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \cdots \ \theta_n(t)]^T$ y $\Theta(t) = [\Theta_1(t) \ \cdots \ \Theta_n(t)]^T$ son la posición y velocidad angular de los eslabones respectivamente. $\tau(t) = [\tau_1(t) \ \cdots \ \tau_n(t)]^T$ es el vector de torques aplicados al robot. $\mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))$ denota el Lagrangiano del sistema, definido por la diferencia entre la energía cinética ($\mathcal{K}(\theta(t), \Theta(t))$), y la energía potencial de un robot rígido de n grados de libertad ($\mathcal{U}(\theta(t))$), es decir:

$$\mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t)) = \mathcal{K}(\theta(t), \Theta(t)) - \mathcal{U}(\theta(t)) \quad (3.2)$$

En el caso de dos grados de libertad, la energía cinética de los eslabones está determinada por:

$$\mathcal{K}(\theta(t), \Theta(t)) = \mathcal{K}_1(\theta(t), \Theta(t)) + \mathcal{K}_2(\theta(t), \Theta(t)) \quad (3.3)$$

donde $\mathcal{K}_1(\theta(t), \Theta(t))$ y $\mathcal{K}_2(\theta(t), \Theta(t))$ son las energías cinéticas asociadas a las masas m_1 y m_2 respectivamente.

Y la energía potencial del sistema es nula, ya que en el movimiento horizontal por lo tanto es igual a cero.

$$\mathcal{U}(\theta(t)) = \mathcal{U}_1(\theta(t)) + \mathcal{U}_2(\theta(t)) = 0 \quad (3.4)$$

De esta manera, para obtener el modelo matemático de un robot de 2GDL se parte de la ecuación (3.1). Para encontrar la energía cinética asociada a los eslabones 1 y 2 se consideran los centros de masa de cada eslabón. De acuerdo con la ecuación (3.3), la energía cinética asociada al sistema está determinada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\theta(t), \Theta(t)) &= \mathcal{K}_1(\theta(t), \Theta(t)) + \mathcal{K}_2(\theta(t), \Theta(t)) \\ &= \left[\frac{1}{2}m_1v_1^2(t) + \frac{1}{2}I_1\Theta_1^2(t) \right] + \left[\frac{1}{2}m_2v_2^2(t) + \frac{1}{2}I_2(\Theta_1(t) + \Theta_2(t))^2 \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde m_1 y m_2 denotan las masas de los eslabones, I_1 e I_2 representan los momentos de inercia del eslabón 1 y 2, respectivamente, $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son la rapidez del centro de masa de los eslabones, cuya representación en términos de las coordenadas cartesianas es

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$v_2(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A su vez, las coordenadas del centro de masa del eslabón 1 en el plano $x - y$ son:

$$x_1 = l_{c_1} \sin(\theta_1(t)) \quad (3.8)$$

$$y_1 = -l_{c_1} \cos(\theta_1(t)) \quad (3.9)$$

mientras que las coordenadas para el centro de masa del eslabón 2 quedan expresadas por:

$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1(t)) + l_{c_2} \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \quad (3.10)$$

$$y_2 = -l_1 \cos(\theta_1(t)) - l_{c_2} \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \quad (3.11)$$

donde l_1 y l_2 es la longitud del eslabón 1 y 2, respectivamente. l_{c_1} y l_{c_2} es la posición de los centros de masa respecto al eslabón.

La velocidad de los eslabones está dada por:

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c_1} \cos(\theta_1(t)) \Theta_1(t) \\ l_{c_1} \sin(\theta_1(t)) \Theta_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$v_2(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c_1} \cos(\theta_1(t)) \Theta_1(t) + l_{c_2} \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) (\Theta_1(t) + \Theta_2(t)) \\ l_{c_1} \sin(\theta_1(t)) \Theta_1(t) + l_{c_2} \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) (\Theta_1(t) + \Theta_2(t)) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_1^2(t) &= l_{c_1}^2 \Theta_1^2(t) \\ v_2^2(t) &= l_1^2 \Theta_1^2(t) + l_{c_1}^2 (\Theta_1^2(t) + 2\Theta_1(t)\Theta_2(t) + \Theta_2^2(t)) + 2l_1 l_{c_2} (\Theta_1^2(t) + \Theta_1(t)\Theta_2(t)) \cos(\theta_2(t)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

De esta manera las energías cinéticas asociadas a cada eslabón del robot rígido están determinadas por:

$$\mathcal{K}_1(\theta(t), \Theta(t)) = \frac{1}{2} m_1 l_{c_1}^2 \Theta_1^2(t) + \frac{1}{2} I_1 \Theta_1^2(t) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\theta(t), \Theta(t)) &= \frac{1}{2} [m_2 l_1^2 m_1 l_{c_2}^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2(t)) + I_2] \Theta_1^2(t) + \frac{1}{2} [m_2 l_{c_2}^2 + I_2] \Theta_2^2(t) \\ &\quad + [m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t) + I_2)] \Theta_1(t) \Theta_2(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dado que el robot se desplaza en el plano horizontal x - y la energía potencial es nula, esto quiere decir que $\mathcal{U}_i(\theta(t)) = 0$.

Finalmente, el Lagrangiano del sistema está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t)) &= \frac{1}{2} m_1 [l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2] \Theta_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 l_{c_2}^2 [\Theta_1^2(t) + 2\Theta_1(t)\Theta_2(t) + \Theta_2^2(t)] \\ &\quad + [m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) + I_2] \Theta_1(t) \Theta_2(t) + \frac{1}{2} [m_2 l_{c_2}^2 + I_2] \Theta_2^2(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

La ecuación de disipación de energía para el manipulador está dada por:

$$\mathcal{F}(\Theta(t)) = \frac{1}{2} \beta_1 \Theta_1^2(t) + \frac{1}{2} \beta_2 \Theta_2^2(t) \quad (3.18)$$

donde β_1 y β_2 son los coeficientes de fricción de las uniones de los eslabones.

De acuerdo a la ecuación (3.1) las ecuaciones de movimiento del sistema, están expresadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta_1(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \theta_1(t)} &= \tau_1(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta_2(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \theta_2(t)} &= \tau_2(t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $\mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))$ está definido en la ecuación (3.17). Desarrollando las ecuaciones de movimiento (3.19), se obtiene las siguientes expresiones para el eslabón 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta_1} &= [m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c_2}^2] \Theta_1(t) + m_2 l_{c_2}^2 \Theta_2 + \\ &2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) \Theta_1(t) + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) \Theta_2(t) + I_1 \Theta_1(t) + I_2 [\Theta_1(t) + \Theta_2(t)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta_1} \right) &= [m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t))] \dot{\Theta}_1(t) - 2m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_1 \Theta_2 + \\ &[m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t))] \dot{\Theta}_2(t) - m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_2^2 + I_1 \dot{\Theta}_1(t) + \\ &I_2 [\dot{\Theta}_1(t) + \dot{\Theta}_2(t)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \theta_1(t)} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\Theta(t))}{\partial \Theta_1(t)} = \beta_1 \Theta_1(t) \quad (3.23)$$

Así también para el eslabón 2 tenemos las siguientes cuatro ecuaciones las cuales constituyen su representación matemática:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta_2(t)} = m_2 l_{c_2}^2 \Theta_1(t) + m_2 l_{c_2}^2 \Theta_2(t) + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) \Theta_1(t) + I_2 [\Theta_1(t) + \Theta_2(t)] \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \Theta_2(t)} \right) &= m_2 l_{c_2}^2 \dot{\Theta}_1(t) + m_2 l_{c_2}^2 \dot{\Theta}_2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) \dot{\theta}_1 - \\ &m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_1(t) \Theta_2(t) + I_2 [\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta(t), \Theta(t))}{\partial \theta_2(t)} = -m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) [\Theta_1^2(t) + \Theta_1(t) \Theta_2(t)] \quad (3.26)$$

$$\frac{\mathcal{F}(\Theta(t))}{\partial \Theta_2(t)} = \beta_2 \Theta_2(t) \quad (3.27)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento para el robot de 2GDL, utilizando el método de Euler-Lagrange, quedan determinadas por:

$$\begin{aligned} \tau_1(t) = & \left[m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) + I_1 + I_2 \right] \dot{\Theta}_1(t) - \\ & 2m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_1(t) \Theta_2(t) + \left[m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) + I_2 \right] \dot{\Theta}_2(t) - \\ & m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_2^2(t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \tau_2(t) = & \left[m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) + I_2 \right] \dot{\Theta}_1(t) + \left[m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \right] \dot{\Theta}_2(t) + \\ & m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_1^2(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

El modelo del sistema (3.28)-(3.29) puede describirse en la forma general como:

$$\tau(t) = \mathcal{M}(\theta(t)) \dot{\Theta}(t) + \mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t)) \Theta(t) \quad (3.30)$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11}(\theta(t)) & \mathcal{M}_{12}(\theta(t)) \\ \mathcal{M}_{21}(\theta(t)) & \mathcal{M}_{22}(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1(t) \\ \dot{\Theta}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11}(\theta(t), \Theta(t)) & \mathcal{C}_{12}(\theta(t), \Theta(t)) \\ \mathcal{C}_{21}(\theta(t), \Theta(t)) & \mathcal{C}_{22}(\theta(t), \Theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1(t) \\ \Theta_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Para los propósitos de control e identificación, es más práctico reescribir el modelo dinámico del robot de las ecuaciones (3.28) y (3.29) en su forma compacta como se muestra en la ecuación (3.30) la matriz $\mathcal{M}(\theta(t))$ multiplica al vector de aceleración $\dot{\Theta}(t)$, por lo tanto, de las ecuaciones anteriores se toman los elementos en los cuales el término $\dot{\Theta}_1(t)$ y $\dot{\Theta}_2(t)$ para obtener así los elementos de la matriz de inercia $\mathcal{M}(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que están en función de la posición articular $\theta(t)$. Una vez realizado este reordenamiento de términos se obtienen los elementos para la matriz $\mathcal{M}(\theta(t))$ los cuales son:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}(\theta(t)) &= m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2(t)) + I_1 + I_2 \\ \mathcal{M}_{12}(\theta(t)) &= m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2) + I_2 \\ \mathcal{M}_{21}(\theta(t)) &= m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2) + I_2 \\ \mathcal{M}_{22}(\theta(t)) &= m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

La matriz $\mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t)) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ centrífuga y de Coriolis puede no ser única, pero el vector $\mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t)) \Theta(t)$ si lo es. Una manera de obtener el vector $\mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t))$ es a través de los coeficientes definidos como:

$$c_{ijk}(\theta(t)) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{kj}(\theta(t))}{\partial \theta_i(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{ki}(\theta(t))}{\partial \theta_j(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{ij}(\theta(t))}{\partial \theta_k(t)} \right] \quad (3.33)$$

donde $\mathcal{M}_{ij}(\theta(t))$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz de inercia $\mathcal{M}(\theta(t))$. De tal forma que el kj -ésimo elemento de la matriz $\mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t))$ puede obtenerse de:

$$\mathcal{C}_{kj}(\theta(t), \Theta(t)) = \begin{bmatrix} c_{1jk}(\theta(t)) \\ c_{2jk}(\theta(t)) \\ \vdots \\ c_{njk}(\theta(t)) \end{bmatrix}^T \Theta(t) \quad (3.34)$$

Por lo tanto, se calculan los coeficientes usando la ecuación (3.33) y los elementos de la matriz de inercia definida en (3.32) con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} c_{111}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{11}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{11}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{11}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} \right] = 0, \\ c_{112}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{21}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{21}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{11}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} \right] = m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)), \\ c_{121}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{12}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{11}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{12}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} \right] = -m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)), \\ c_{122}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{22}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{21}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{12}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} \right] = 0, \\ c_{211}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{11}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{12}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{21}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} \right] = -m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)), \\ c_{212}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{21}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{22}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{21}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} \right] = 0, \\ c_{221}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{12}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{12}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{22}(\theta(t))}{\partial \theta_1(t)} \right] = -m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)), \\ c_{222}(\theta(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{22}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} + \frac{\partial \mathcal{M}_{22}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} - \frac{\partial \mathcal{M}_{22}(\theta(t))}{\partial \theta_2(t)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

De tal forma que los elementos de la matriz centrífuga y de Coriolis $\mathcal{C}(\theta(t), \Theta(t))$ se obtiene utilizando la ecuación (3.34) y los resultados de (3.35) dando como resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}(\theta(t), \Theta(t)) &= -m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_2(t), \\ \mathcal{C}_{12}(\theta(t), \Theta(t)) &= -m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) [\Theta_1(t) + \Theta_2(t)], \\ \mathcal{C}_{21}(\theta(t), \Theta(t)) &= m_2 l_1 l_{c_2} \text{sen}(\theta_2(t)) \Theta_1(t), \\ \mathcal{C}_{22}(\theta(t), \Theta(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

como el robot se desplaza en el plano horizontal $x - y$, la energía potencial resulta nula.

3.2. Modelo Takagi-Sugeno

El modelo del manipulador que se utiliza se muestra en la Figura 3.14 donde podemos ver los componentes que lo constituyen.

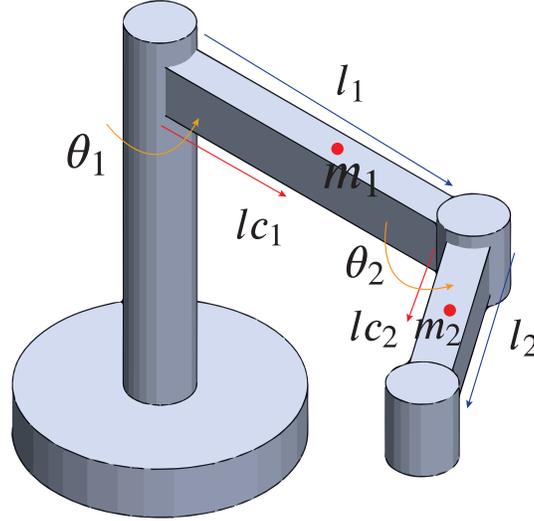


Fig. 3.1. Esquema del manipulador robótico.

Partiendo del análisis por medio de Euler-Lagrange, se obtienen las ecuaciones del manipulador de dos grados de libertad (2GDL) con movimiento horizontal que lo representan las cuales están dadas por la ecuación (3.30), esta ecuación la llevamos una expresión en espacio de estados

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad (3.37)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.38)$$

donde $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son los ángulos de unión del robot, $\Theta_1(t)$ y $\Theta_2(t)$ son las velocidades angulares, $\tau_1(t)$ y $\tau_2(t)$ son los torques de entrada del sistema.

$$x(t) = [\Theta_1(t) \quad \Theta_2(t) \quad \theta_1(t) \quad \theta_2(t)]^T, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}, \quad A(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{P_2}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} & \frac{P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} \\ \frac{P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} & -\frac{P_1 + P_2 + 2P_3 \cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} \end{bmatrix}.$$

Tomando en en cuenta las siguientes igualdades para poder simplificar la notación dentro de las ecuaciones de estado del manipulador:

$$P_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \quad (3.39)$$

$$P_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad (3.40)$$

$$P_3 = m_2 l_1 l_{c2} \quad (3.41)$$

Partiendo de las agrupaciones antes mencionadas se puede desglosar la estructura de la matriz A como:

$$A_{11} = \frac{P_2(b_1 - P_3\Theta_2(t)\sin(\theta_2(t)))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2} - \frac{P_3\Theta_2(t)\sin(\theta_2(t))(P_2 + P_3\cos(\theta_2(t)))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2}$$

$$A_{12} = -\frac{b_2(P_2 + P_3\cos(\theta_2(t)))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2} - \frac{P_2P_3\sin(\theta_2(t))(\Theta_1(t)\dot{\theta}_2(t))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2}$$

$$A_{21} = \frac{P_3\Theta_2(t)\sin(\theta_2(t))(P_1 + P_2 + 2P_3\cos(\theta_2(t)))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2} - \frac{(P_2 + P_3\cos(\theta_2(t)))(b_1 - P_3\Theta_2(t)\sin(\theta_2(t)))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2}$$

$$A_{22} = \frac{b_2(P_1 + P_2 + 2P_3\cos(\theta_2(t)))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2} + \frac{P_3\sin(\theta_2(t))(P_2 + P_3\cos(\theta_2(t)))(\Theta_1(t) + \Theta_2(t))}{P_3^2\cos^2(\theta_2(t)) - P_1P_2}$$

Examinando el modelo no lineal del sistema (3.37)-(3.38) se puede identificar la presencia de $p = 6$ variables premisas, por lo tanto, se tienen $\kappa = 2^p = 64$ modelos locales y número de reglas a construir. Las variables premisas $\rho(t)$ son:

$$\rho_1(t) = \frac{1}{P_3^2\cos(\theta_2(t))^2 - P_1P_2}, \quad \rho_2(t) = \frac{\cos(\theta_2(t))}{P_3^2\cos(\theta_2(t))^2 - P_1P_2}$$

$$\rho_3(t) = \frac{\Theta_2(t)\sin(\theta_2(t))}{P_3^2\cos(\theta_2(t))^2 - P_1P_2}, \quad \rho_4(t) = \frac{\Theta_2(t)\cos(\theta_2(t))\sin(\theta_2(t))}{P_3^2\cos(\theta_2(t))^2 - P_1P_2}$$

$$\rho_5(t) = \frac{\Theta_1(t)\sin(\theta_2(t))}{P_3^2\cos(\theta_2(t))^2 - P_1P_2}, \quad \rho_6(t) = \frac{\Theta_1(t)\cos(\theta_2(t))\sin(\theta_2(t))}{P_3^2\cos(\theta_2(t))^2 - P_1P_2}$$

Si se considera que para ángulos pequeños las siguientes ecuaciones se cumplen, entonces la fuerza Coriolis y las centrífugas pueden omitirse.

$$\Theta_1(t)\sin(\theta_2(t)) \approx 0 \quad (3.42)$$

$$\Theta_2(t)\sin(\theta_2(t)) \approx 0 \quad (3.43)$$

Esto permite simplificar el número de modelos locales lineales a $2^2 = 4$. Sin embargo, es importante mencionar que cuando $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ toman valores grandes, las suposiciones (3.42) y (3.43) dejan de ser válidas, teniendo entonces una variación no contemplada.

Considerando que las suposiciones (3.42) y (3.43) se cumplen, entonces se conservan las variables premisas $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$, las cuales varían en una región acotada $\rho(t) = [\rho_j^0, \rho_j^1]$, donde ρ_j^0 y ρ_j^1 son el límite inferior y superior de variación de $\rho(t)$. Las variables premisas mantienen un comportamiento en las siguientes cotas:

$$\rho_1(t) = [-1.2019, -1.1889], \quad \rho_2(t) = [-1.2019, 1.2019] \quad (3.44)$$

obteniendo así las siguientes matrices reducidas del sistema:

$$A(\rho(t)) = \begin{bmatrix} P_2b_1\rho_1(t) & -P_2b_2\rho_1(t) - P_3b_2\rho_2(t) & 0 & 0 \\ -P_2b_2\rho_1(t) - P_3b_2\rho_2(t) & b_2\rho_1(t)(P_1 + P_2) + 2P_3b_2\rho_2(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$B(\rho(t)) = \begin{bmatrix} -P_2\rho_1(t) & P_2\rho_1(t) + P_3\rho_2(t) \\ P_2\rho_1(t) + P_3\rho_2(t) & -2P_3\rho_2(t) + \rho_1(t)(P_1 + P_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

El sistema simplificado tiene ahora $\kappa = 2^p = 4$ funciones de ponderación, las cuales son obtenidas como:

$$\eta_0^1 = \frac{\rho_1^1 - \rho_1(t)}{\rho_1^1 - \rho_1^0}, \quad \eta_1^1(\rho_1(t)) = 1 - \eta_0^1 \quad (3.47)$$

$$\eta_0^2 = \frac{\rho_2^1 - \rho_2(t)}{\rho_2^1 - \rho_2^0}, \quad \eta_2^1(\rho_2(t)) = 1 - \eta_0^2 \quad (3.48)$$

sustituyendo los valores máximos y mínimos de variación, se puede obtener:

$$\eta_0^1 = \frac{-1.1889 - \rho_1(t)}{0.0130}, \quad \eta_1^1(\rho_1(t)) = 1 - \eta_0^1$$

$$\eta_0^2 = \frac{1.2019 - \rho_2(t)}{2.4038}, \quad \eta_2^1(\rho_2(t)) = 1 - \eta_0^2$$

En este caso el número de funciones de pertenencia son $\kappa = 4$, siendo

$$\mu_1(\rho) = \eta_0^1 \eta_0^2, \quad \mu_2(\rho) = \eta_0^1 \eta_1^2 \quad (3.49)$$

$$\mu_3(\rho) = \eta_1^1 \eta_0^2, \quad \mu_4(\rho) = \eta_1^1 \eta_1^2 \quad (3.50)$$

o bien:

$$\mu_1(\rho) = \left(\frac{-1.1889 - \rho_1(t)}{0.0130} \right) \left(\frac{1.2019 - \rho_2(t)}{2.4038} \right), \quad \mu_2(\rho) = \left(\frac{-1.1889 - \rho_1(t)}{0.0130} \right) (1 - \eta_0^2) \quad (3.51)$$

$$\mu_3(\rho) = (1 - \eta_0^1) \left(\frac{1.2019 - \rho_2(t)}{2.4038} \right), \quad \mu_4(\rho) = (1 - \eta_0^1) (1 - \eta_0^2) \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta estos conjuntos difusos, el modelo Takagi-Sugeno tiene 4 reglas. Para cada regla, existe un modelo matemático local lineal de la forma:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (3.53)$$

Por ejemplo, la regla del primer modelo difuso es: Si $\rho_1 = \rho_1^0$ y $\rho_2 = \rho_2^0$, entonces los límites inferiores de ρ_1 y ρ_2 son directamente reemplazados por las variables premisas en las matrices $A(\rho(t))$ y $B(\rho(t))$ de las ecuaciones (3.45) y (3.46), respectivamente. Resultando el siguiente modelo local:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \quad (3.54)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} P_2 b_1 \rho_1^0 & -P_2 b_2 \rho_1^0 - P_3 b_2 \rho_2^0 & 0 & 0 \\ -P_2 b_2 \rho_1^0 - P_3 b_2 \rho_2^0 & b_2 \rho_1^0 (P_1 + P_2) + 2P_3 b_2 \rho_2^0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -P_2 \rho_1^0 & P_2 \rho_1^0 + P_3 \rho_2^0 \\ P_2 \rho_1^0 P_3 \rho_2^0 & -2P_3 \rho_2^0 + \rho_1^0 (P_1 + P_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el modelo local 2 se consideró $A_2 = A(\rho_1^0, \rho_2^1)$ y $B_2 = B(\rho_1^0, \rho_2^1)$, obteniendo:

$$A_2 = \begin{bmatrix} P_2 b_1 \rho_1^0 & -P_2 b_2 \rho_1^0 - P_3 b_2 \rho_2^1 & 0 & 0 \\ -P_2 b_2 \rho_1^0 - P_3 b_2 \rho_2^1 & b_2 \rho_1^0 (P_1 + P_2) + 2P_3 b_2 \rho_2^1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -P_2 \rho_1^0 & P_2 \rho_1^0 + P_3 \rho_2^1 \\ P_2 \rho_1^0 + P_3 \rho_2^1 & -2P_3 \rho_2^1 + \rho_1^0 (P_1 + P_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el modelo local 3 se consideró $A_3 = A(\rho_1^1, \rho_2^0)$ y $B_3 = B(\rho_1^1, \rho_2^0)$, obteniendo:

$$A_3 = \begin{bmatrix} P_2 b_1 \rho_1^1 & -P_2 b_2 \rho_1^1 - P_3 b_2 \rho_2^0 & 0 & 0 \\ -P_2 b_2 \rho_1^1 - P_3 b_2 \rho_2^0 & b_2 \rho_1^1 (P_1 + P_2) + 2P_3 b_2 \rho_2^0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -P_2 \rho_1^1 & P_2 \rho_1^1 + P_3 \rho_2^0 \\ P_2 \rho_1^1 + P_3 \rho_2^0 & -2P_3 \rho_2^0 + \rho_1^1 (P_1 + P_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y finalmente para el modelo local 4 se consideró $A_4 = A(\rho_1^1, \rho_2^1)$ y $B_4 = B(\rho_1^1, \rho_2^1)$, obteniendo:

$$A_4 = \begin{bmatrix} P_2 b_1 \rho_1^1 & -P_2 b_2 \rho_1^1 - P_3 b_2 \rho_2^1 & 0 & 0 \\ -P_2 b_2 \rho_1^1 - P_3 b_2 \rho_2^1 & b_2 \rho_1^1 (P_1 + P_2) + 2P_3 b_2 \rho_2^1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -P_2 \rho_1^1 & P_2 \rho_1^1 + P_3 \rho_2^1 \\ P_2 \rho_1^1 + P_3 \rho_2^1 & -2P_3 \rho_2^1 + \rho_1^1 (P_1 + P_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando la parametrización de la Tabla 3.1 se obtienen las siguientes matrices A_i y B_i de los sistemas locales:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.5781 & 0.4502 & 0 & 0 \\ 2.2886 & -3.5238 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.4738 & -1.8759 \\ -1.8759 & 14.6827 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -0.5781 & -0.2228 & 0 & 0 \\ -1.1325 & -2.1778 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4738 & 0.9283 \\ 0.9283 & 9.0742 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -0.5718 & 0.4490 & 0 & 0 \\ 2.2824 & -3.4930 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.4687 & -1.8708 \\ -1.8708 & 14.5542 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} -0.5718 & -0.2240 & 0 & 0 \\ -1.1388 & -2.1470 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0.4687 & 0.9334 \\ 0.9334 & 8.9458 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tabla 3.1. Parámetros del robot			
Parámetro	Valor	Unidades	Definición
l_1	0.785	m	Longitud del eslabón 1
l_2	0.35	m	Longitud del eslabón 2
l_{c1}	0.357	m	Distancia al centro de masa del eslabón 1
l_{c2}	0.192	m	Distancia al centro de masa del eslabón 2
I_1	2.6584	Kg m ²	Inercia del eslabón 1
I_2	0.1089	Kg m ²	Inercia del eslabón 2
m_1	16.17	Kg	masa del eslabón 1
m_2	7.74	Kg	masa del eslabón 2
g	9.81	m/s ²	gravedad
b_1	1.22		Coefficiente de fricción del eslabón 1
b_2	0.24		Coefficiente de fricción del eslabón 2

Finalmente, el modelo T-S que representa la dinámica del modelo está dado por:

$$\dot{x}(t) = [\mu_1(\rho(t))A_1 + \cdots + \mu_4(\rho(t))A_4] x(t) + [\mu_1(\rho(t))B_1 + \cdots + \mu_4(\rho(t))B_4] u(t) \quad (3.55)$$

El modelo matemático T-S del brazo robótico de 2GDL simplificado, puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^4 \mu_i(\rho(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.2.1. Simulación de modelos no lineales

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar la diferencia entre el sistema no lineal (3.37)-(3.38) y el sistema no lineal simplificado, el cual no toma en cuenta las no linealidades generadas por la fuerza Coriolis de las ecuaciones (3.42)-(3.43). Para llevar a cabo la simulación se utilizaron los parámetros de la Tabla 3.1, el paso de integración utilizado en la configuración de Matlab R2020a es $T_e = 0.01$. Las condiciones iniciales para el ambos sistemas fueron $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$. En la Figura 3.2 se muestran los pares de entrada aplicados a ambos sistemas.

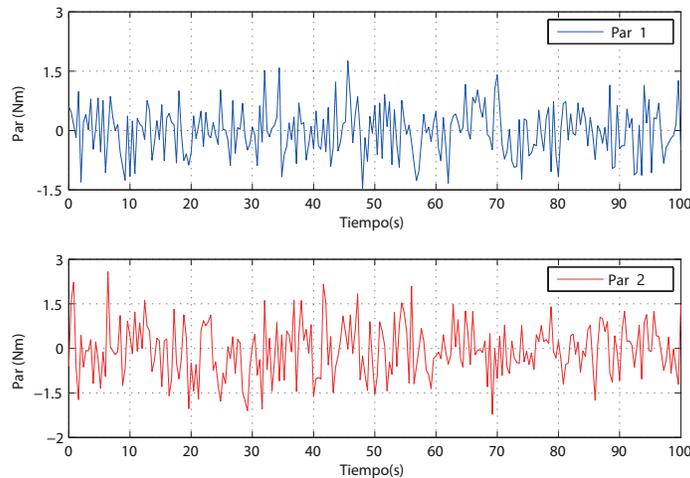


Fig. 3.2. Entrada del sistema para sistemas no lineales.

La Figura 3.3 muestra la comparación entre el sistema no lineal (3.37)-(3.38) y el reducido que considera las condiciones (3.42)-(3.43). En la figura se muestra que entre más grande es el movimiento entre ángulos la diferencia entre modelos es más evidente.

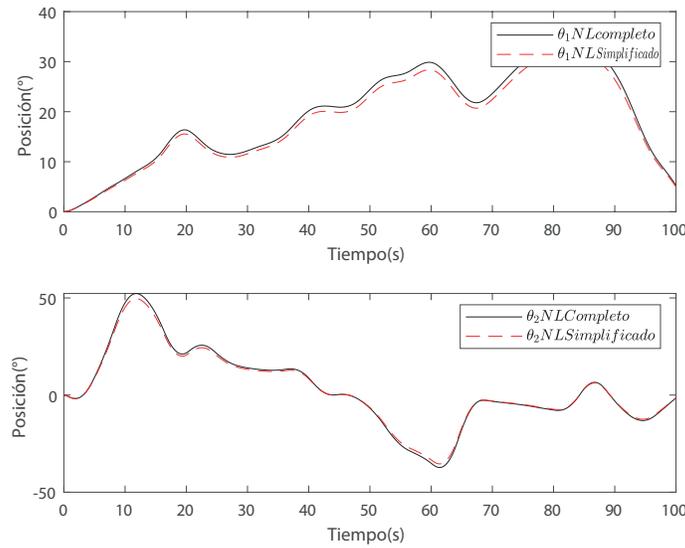


Fig. 3.3. Comparación de posiciones angulares de los sistemas no lineales.

En la Figura 3.4 se muestran las velocidades angulares, donde el comportamiento es practicante similar.

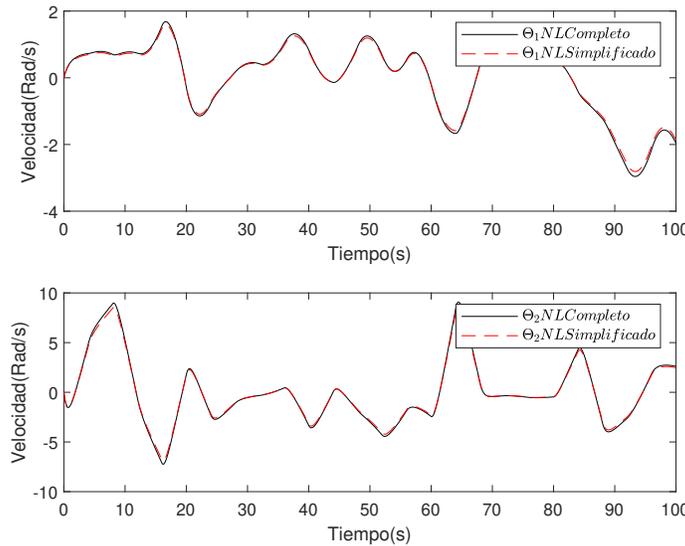


Fig. 3.4. Comparación velocidades del sistema no lineal completo y reducido

3.2.2. Simulación del modelo no lineal reducido y el T-S continuo

Objetivo de la simulación: En esta simulación se compara el sistema no lineal reducido y el sistema Takagi-Sugeno continuo, este paso para que posteriormente se discretice para obtener el sistema Takagi-Sugeno discreto. El sistema reducido es el que no toma en cuenta las no linealidades de las ecuaciones (3.42)-(3.43). Para esta simulación se utilizaron los parámetros de la Tabla 3.1, el

paso de integración utilizado en Matlab R2020a es $T_e = 0.01$. Las condiciones iniciales para ambos sistemas fueron $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$. En la Figura 3.5 se muestran los pares de entrada aplicados a ambos sistemas.

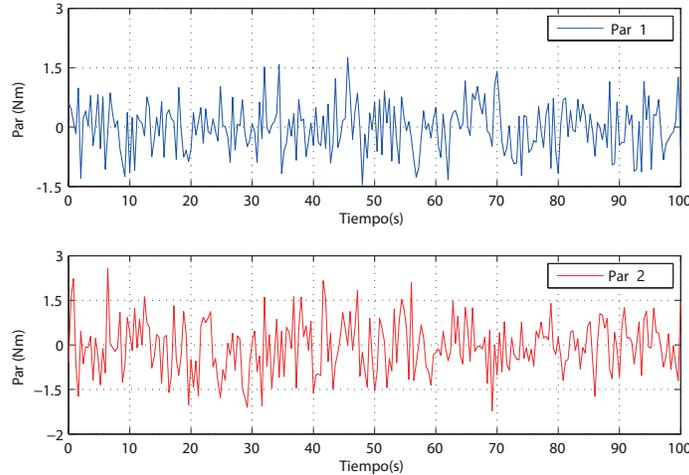


Fig. 3.5. Entrada para el sistema no lineal y T-S continuo.

En las Figuras 3.6 y 3.7 se puede ver que entre la representación del sistema no lineal reducido y el Takagi-Sugeno continuo no existe ninguna diferencia entre los dos sistemas, por lo tanto, se puede decir que la representación Takagi-Sugeno es fiel al sistema no lineal dentro de los parámetros establecidos de cada una de las no linealidades.

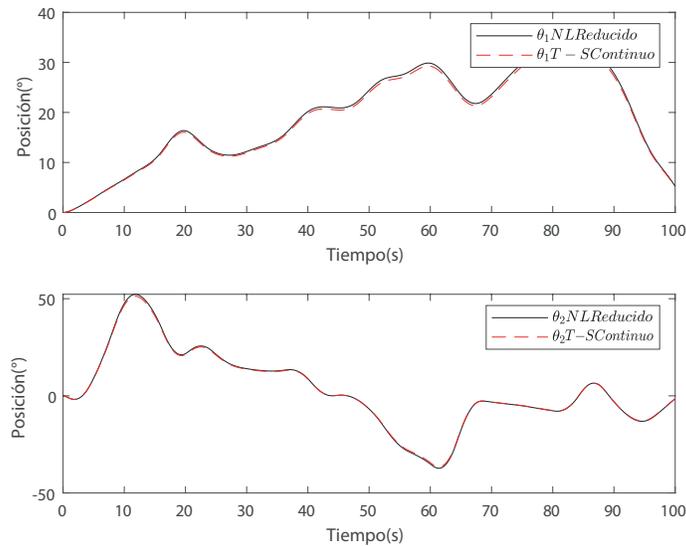


Fig. 3.6. Comparación de posiciones angulares del sistema no lineal reducido y T-S continuo.

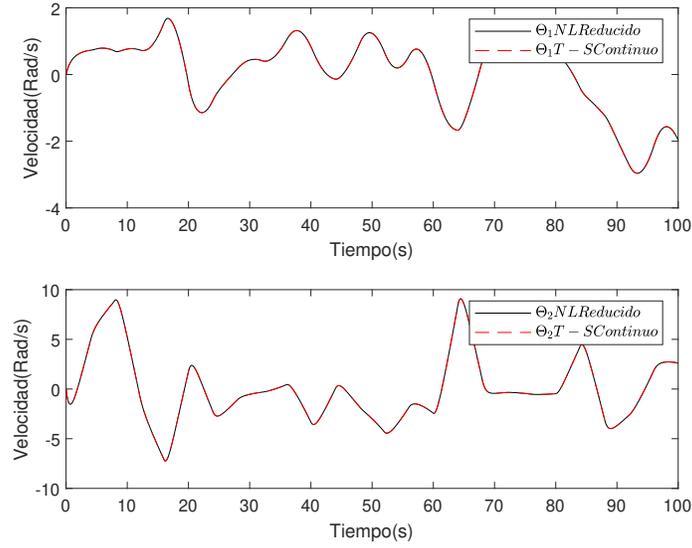


Fig. 3.7. Comparación de velocidades angulares del sistema no lineal reducido y T-S continuo.

3.3. Discretización del modelo Takagi-Sugeno

Una vez obtenido el modelo T-S en tiempo continuo, se utilizó la metodología de Retenedor de Orden Cero, con un tiempo de discretización de $T_d = 0.01$. Obteniendo entonces, el siguiente modelo Takagi-Sugeno discreto

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \quad (3.57)$$

$$y(k) = C x(k) \quad (3.58)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la entrada del sistema y $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ representa las variables de salida medidas. $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ y $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ son matrices conocidas, $\mu_i(\rho(k))$ son las funciones de ponderación y κ es el número de modelos locales lineales.

Para la ecuación (3.57) se tiene el desarrollo de la sumatoria, la cual penaliza las diferentes dinámicas de cada uno de los modelos

$$x(k+1) = [\mu_1(\rho(k))A_1 + \dots + \mu_4(\rho(k))A_4] x(k) + [\mu_1(\rho(k))B_1 + \dots + \mu_4(\rho(k))B_4] u(k)$$

donde los valores de las matrices A_i y B_i son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.9943 & 0.0044 & 0 & 0 \\ 0.0224 & 0.9654 & 0 & 0 \\ 0.0100 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0001 & 0.0098 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0.9942 & -0.0022 & 0 & 0 \\ -0.0112 & 0.9785 & 0 & 0 \\ 0.0100 & 0 & 1 & 0 \\ -0.0001 & 0.0099 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} 0.9943 & 0.0044 & 0 & 0 \\ 0.0224 & 0.9657 & 0 & 0 \\ 0.0100 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0001 & 0.0098 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} 0.9943 & -0.0022 & 0 & 0 \\ -0.0112 & 0.9788 & 0 & 0 \\ 0.0100 & 0 & 1 & 0 \\ -0.0001 & 0.0099 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0.0047 & -0.0184 \\ -0.0184 & 0.1441 \\ 0 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.0007 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0092 \\ 0.0092 & 0.0897 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0005 \end{bmatrix} \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} 0.0046 & -0.0183 \\ -0.0183 & 0.1428 \\ 0.0000 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.0007 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0092 \\ 0.0092 & 0.0885 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0004 \end{bmatrix} & \text{y } C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.3.1. Simulación del modelo no lineal simplificado y el modelo T-S discreto

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es comparar el comportamiento del modelo no lineal simplificado, que toma en cuenta las consideraciones de las ecuaciones (3.42)-(3.43) y el modelo T-S discreto obtenido a partir del modelo T-S continuo. Para llevar a cabo la simulación se utilizaron los parámetros de la Tabla 3.1, el paso de integración utilizado en Matlab R2020a fue de $T_e = 0.01$ y el paso de discretización del modelo T-S discreto fue de $T_d = 0.01$. Las condiciones iniciales para el ambos sistemas fue $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$. En la Figura 3.8 se muestran los pares de entrada aplicados.

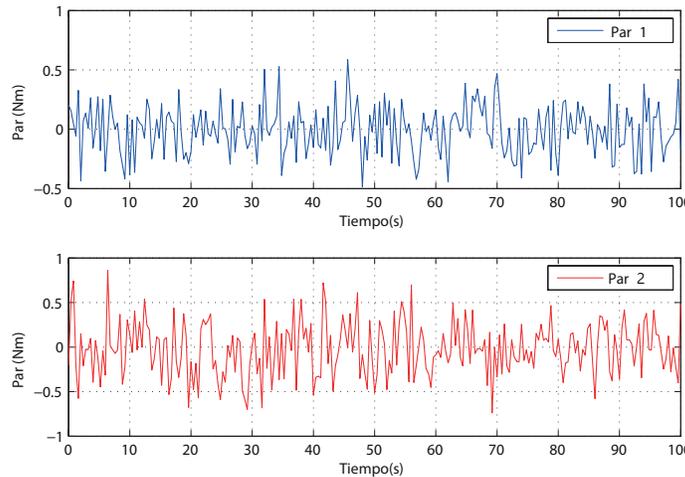


Fig. 3.8. Entrada para sistemas no lineal y T-S Discreto.

En la Figura 3.9 se muestran las funciones de pertenencia del modelo Takagi-Sugeno. En esta gráfica se puede apreciar que cada uno de los modelos locales aporta dinámica al modelo global.

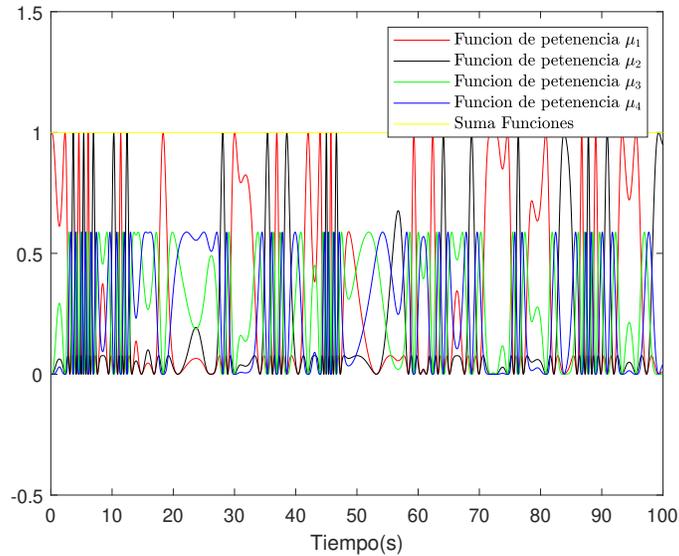


Fig. 3.9. Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno discreto.

En la Figura 3.10 se muestra la comparación entre la dinámica de las posiciones angulares de los dos eslabones del manipulador del sistema no lineal simplificado y el sistema Takagi-Sugeno discreto.

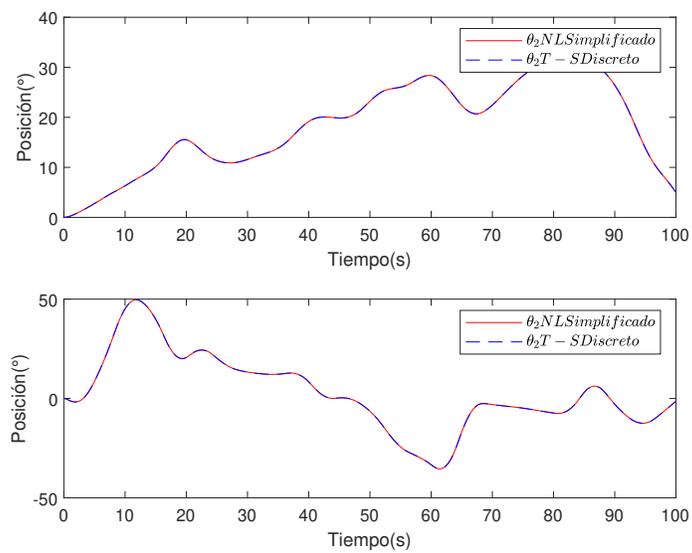


Fig. 3.10. Posiciones angulares del modelo no lineal simplificado y el T-S discreto.

En la Figura 3.11 se muestra el comportamiento de las velocidades angulares.

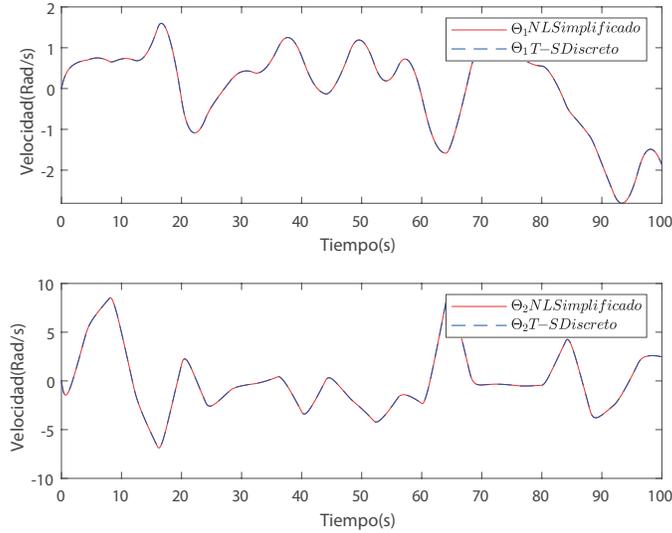


Fig. 3.11. Velocidades angulares del modelo no lineal simplificado y el T-S discreto.

Con las gráficas mostradas podemos concluir que, el modelo T-S discreto representa fielmente la dinámica del modelo no lineal simplificado bajo las mismas consideraciones de paso de integración y paso de discretización.

3.3.2. Simulación 1 en condiciones diferentes

Objetivo de la simulación: En esta simulación se compara el comportamiento del sistema Takagi-Sugeno discreto y el modelo no lineal reducido, bajo condiciones diferentes, es decir, se considera un paso de integración $T_e = 0.01$ y un paso de discretización de $T_d = 0.1$. Esto quiere decir, que una menor cantidad de información sobre la entrada es recibida en el modelo T-S discreto.

Dado que en esta simulación $T_d = 0.1$, el modelo T-S continuo se vuelve a discretizar siguiendo la metodología mostrada en la Sección 3.3, obteniendo entonces las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9483 & 0.0369 & 0 & 0 \\ 0.1874 & 0.7070 & 0 & 0 \\ 0.0973 & 0.0020 & 1 & 0 \\ 0.0100 & 0.0844 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.9450 & -0.0194 & 0 & 0 \\ -0.0988 & 0.8054 & 0 & 0 \\ 0.0972 & -0.0010 & 1 & 0 \\ -0.0052 & 0.0899 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.0424 & -0.1536 \\ -0.1536 & 1.2208 \\ 0.0022 & -0.0082 \\ -0.0082 & 0.0649 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.9488 & 0.0368 & 0 & 0 \\ 0.1872 & 0.7092 & 0 & 0 \\ 0.0973 & 0.0020 & 1 & 0 \\ 0.0100 & 0.0845 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.9456 & -0.0196 & 0 & 0 \\ -0.0995 & 0.8079 & 0 & 0 \\ 0.0972 & -0.0010 & 1 & 0 \\ -0.0052 & 0.0900 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0451 & 0.0810 \\ 0.0810 & 0.8109 \\ 0.0023 & 0.0042 \\ 0.0042 & 0.0421 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.0419 & -0.1535 \\ -0.1535 & 1.2118 \\ 0.0022 & -0.0082 \\ -0.0082 & 0.0644 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0.0446 & 0.0816 \\ 0.0816 & 0.8005 \\ 0.0023 & 0.0043 \\ 0.0043 & 0.0415 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La simulación se realizó en Matlab R2020a y las condiciones iniciales para el sistema fueron $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$. Los pares de entrada se muestran en la Figura 3.12.

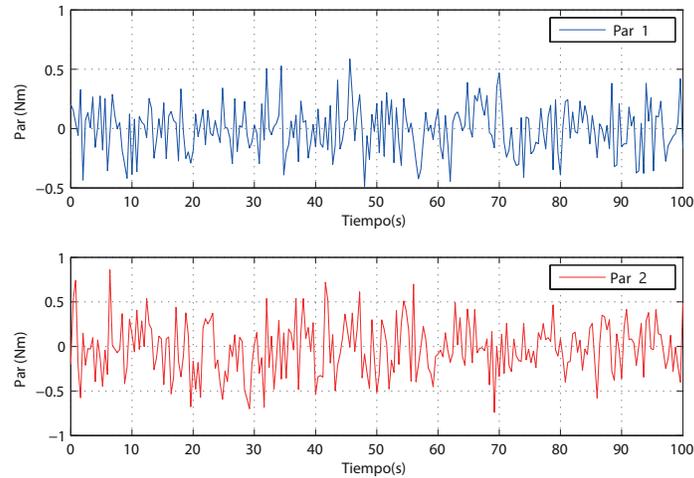


Fig. 3.12. Simulación 1: Gráfica de señales de entrada del manipulador.

En la Figura 3.13 se muestran las funciones de pertenencia del modelo Takagi-Sugeno obtenidas, que muestran la interpolación de los modelos locales.

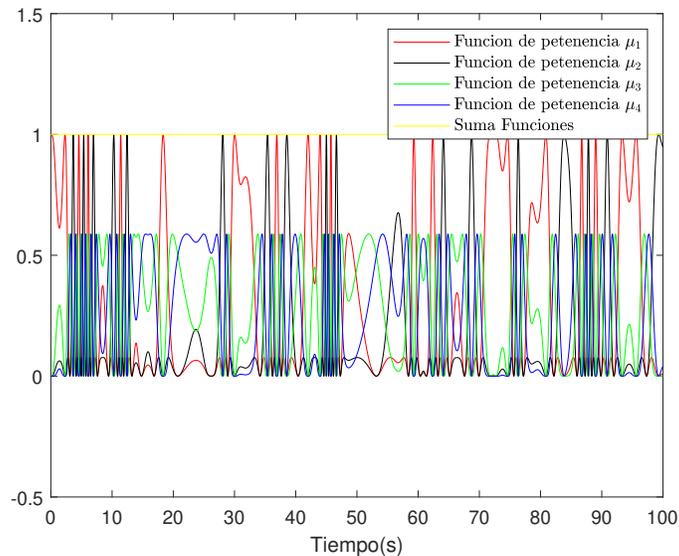


Fig. 3.13. Simulación 1: Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno discreto.

En la Figura 3.14 se muestra la comparación entre la dinámica de las posiciones angulares de los dos eslabones del manipulador entre el sistema no lineal completo y el sistema Takagi-Sugeno discreto considerando configuraciones diferentes.

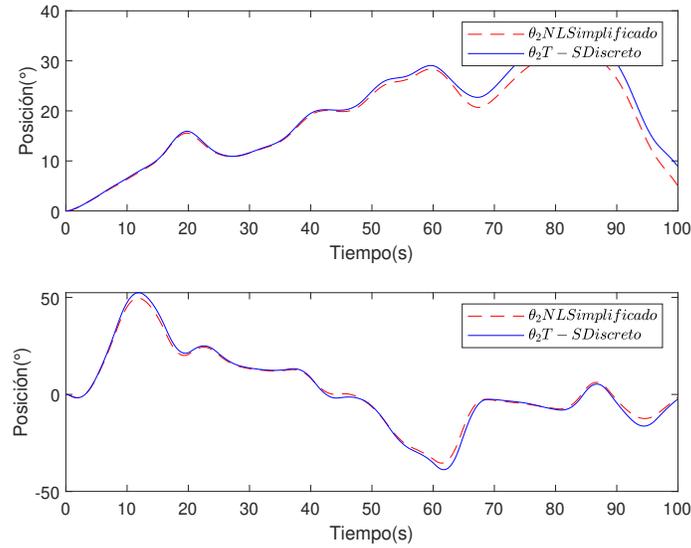


Fig. 3.14. Simulación 1: Posiciones angulares del sistema no lineal y Takagi-Sugeno discreto.

La Figura 3.15 se muestra la comparación de las velocidades angulares.

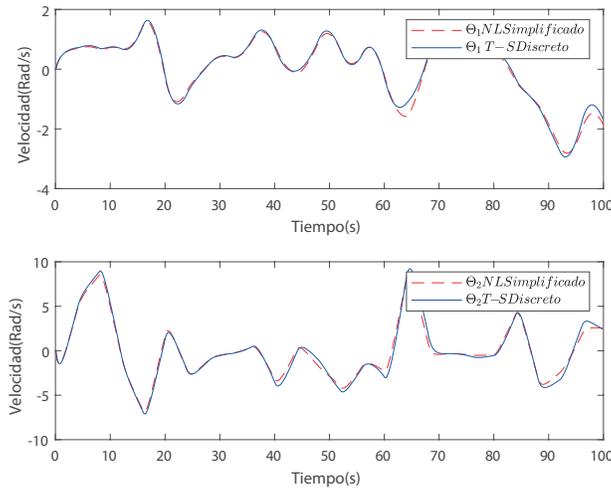


Fig. 3.15. Simulación 1: Velocidades angulares del sistema no lineal y Takagi-Sugeno discreto.

En esta simulación se puede concluir que el sistema Takagi-Sugeno discreto representa al modelo no lineal reducido, a pesar de que el tiempo de discretización e integración son diferentes.

3.3.3. Simulación 2 en condiciones diferentes

Objetivo de la simulación: En esta simulación se compara el comportamiento del sistema Takagi-Sugeno discreto y el modelo no lineal completo y reducido, con un paso de integración $T_e = 0.001$ y un tiempo de discretización de $T_d = 0.1$ del modelo T-S discreto mostrado en la Sección 3.3.2. La simulación se realizó en Matlab R2020a y las condiciones iniciales para los sistemas no lineales fueron $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ y para el T-S discreto $x(0) = [2, 2, 0, 0]^T$. Los pares de entrada se muestran en la Figura 3.16.

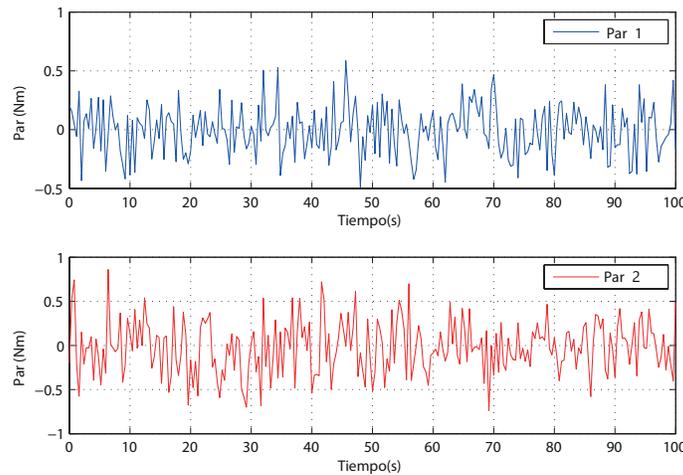


Fig. 3.16. Simulación 2: Gráfica de señales de entrada del manipulador.

La Figura 3.17 muestra las funciones de pertenencia del modelo Takagi-Sugeno.

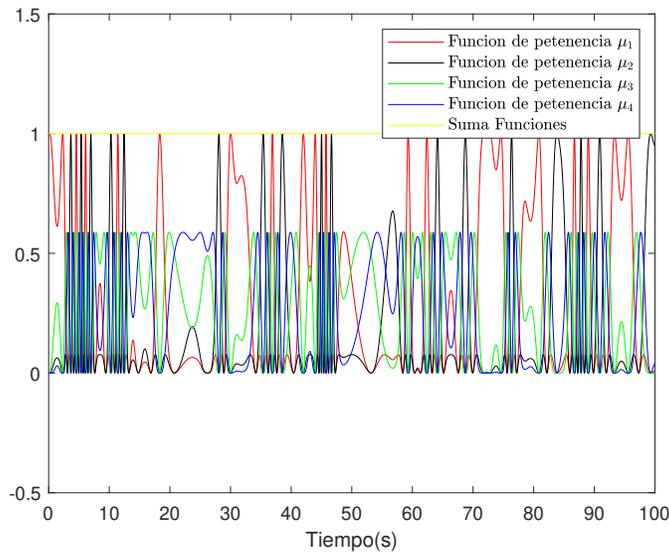


Fig. 3.17. Simulación 2: Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno discreto.

En la Figura 3.18 se muestra la comparación entre la dinámica de los ángulos de los dos eslabones del manipulador, donde podemos observar que el comportamiento de los sistemas no lineales y el sistema Takagi-Sugeno es diferente.

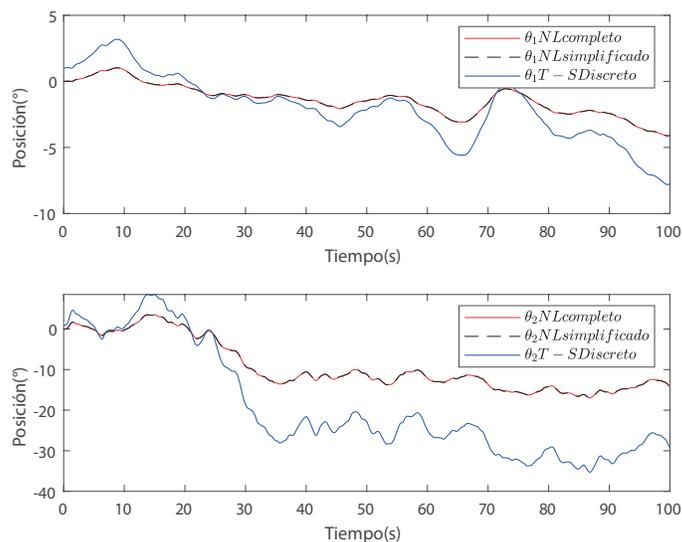


Fig. 3.18. Simulación 2: Ángulos del sistema no lineal y el Takagi-Sugeno discreto

En la Figura 3.19 se muestra la comparación entre las velocidades angulares, donde el comportamiento de la representación T-S discreta se ve afectado por el tiempo de discretización.

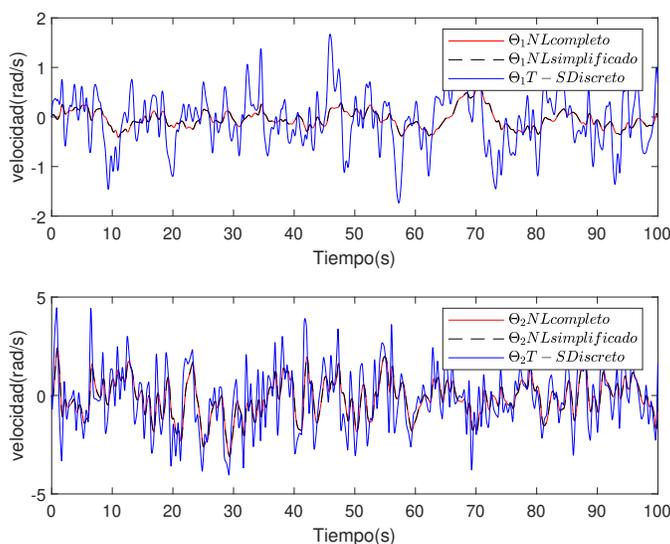


Fig. 3.19. Simulación 2: Velocidades del sistema no lineal y el Takagi-Sugeno discreto

En conclusión, el sistema Takagi-Sugeno discreto con este tiempo de discretización no representa fielmente al modelo no lineal, ya que el tiempo de integración y el de discretización son muy diferentes, es decir, por cada cien datos del sistema no lineal, se tiene uno del Takagi-Sugeno.

3.4. Definición de la trayectoria de referencia

La cinemática inversa consiste en encontrar los valores de las coordenadas articulares del robot $\theta_i = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ conocida la posición y orientación del extremo del robot en un plano cartesiano $x - y$.

La Figura 3.20 permite identificar cada uno de los ángulos y partes del robot manipulador de dos grados de libertad con movimiento horizontal que serán utilizados para determinar la cinemática inversa.

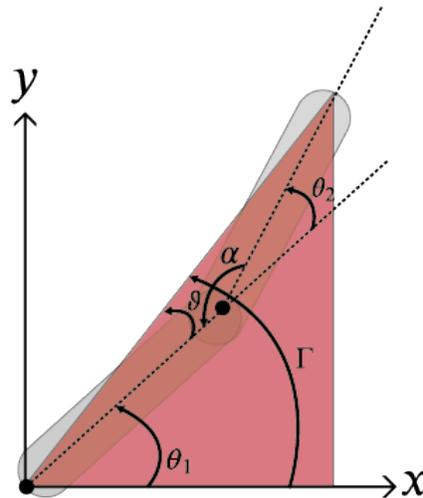


Fig. 3.20. Esquema del manipulador para la cinemática inversa

La cinemática inversa es requerida en este caso, ya que la trayectoria que se define es un círculo en el plano $x - y$ y se necesita su interpretación en términos de las variables del modelo, en este caso, en términos de las variables θ_1 y θ_2 que son posiciones angulares.

De acuerdo a la literatura, el comportamiento de este robot se describe simplemente por dos datos, las coordenadas x e y con respecto al marco de coordenadas del plano cartesiano. Por lo tanto, la cinemática inversa permite obtener las posiciones angulares, θ_1 y θ_2 a partir de una trayectoria en el plano $x - y$.

La solución que se sigue es la geométrica. Se inicia con una suposición en la cual se tiene un triángulo entre la unión de la base del robot y la punta del actuador, y se sabe la coordenada del punto final x e y , por lo tanto, la altura vertical del plano cartesiano es y , la anchura horizontal es x , y usando el teorema de Pitágoras, se puede escribir como:

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{3.59}$$

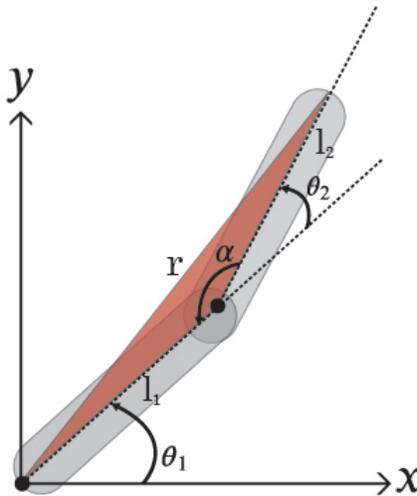


Fig. 3.21. Triángulo para calcular el ángulo α

Tomando la Figura 3.21 se puede calcular el ángulo α . Para poder realizar este paso es necesario usar la regla de los cosenos la cual podemos ver en la Ecuación (3.60).

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\alpha) \tag{3.60}$$

Así también, en la Figura 3.22 se muestran los detalles de las relaciones entre las longitudes y ángulos del triángulo.

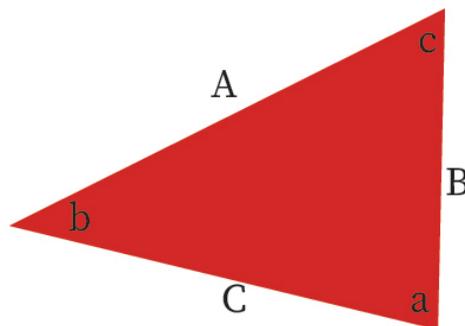


Fig. 3.22. Triángulo para la regla de cosenos

Aplicando la regla del coseno al triángulo que tenemos en la Figura 3.21 se puede formar una relación en particular, donde se aísla el término $\cos(\alpha)$ que da uno de los ángulos que de interés θ_1 , que se define en términos de las longitudes de los eslabones, l_1 y l_2 y la posición final, x e y , teniendo la ecuación de la siguiente manera:

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(\alpha) \quad (3.61)$$

despejando $\cos(\alpha)$ de (3.61) y sustituyendo r de (3.59) da como resultado:

$$\cos(\alpha) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (3.62)$$

El siguiente paso es tomar un triángulo para el segundo eslabón, en la Figura 3.23 se muestra. A este triángulo se le aplica trigonometría simple. Si se conoce θ_1 , entonces se puede determinar las dos longitudes del triángulo las cuales son $l_2\cos(\theta_2)$ y $l_2\sin(\theta_2)$.

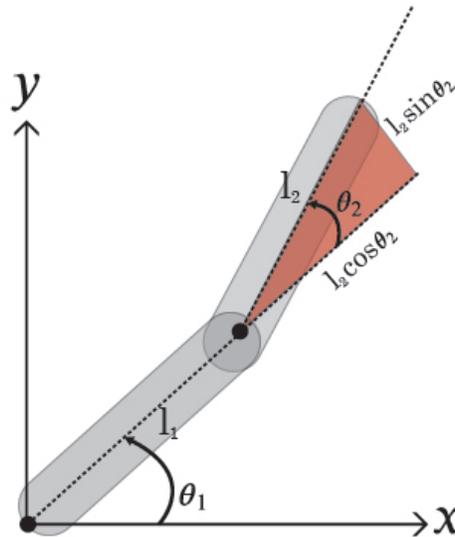


Fig. 3.23. Triángulo para el segundo eslabón

Para poder describir el comportamiento de segundo ángulo θ_2 el cual está constituido por la diferencia de dos ángulos ϑ y Γ es necesario establecer una relación entre θ_1 y la diferencia de estos. Siguiendo esto ahora, se puede escribir una relación entre los ángulos que hemos construido, Γ y ϑ y el ángulo de interés θ_1 .

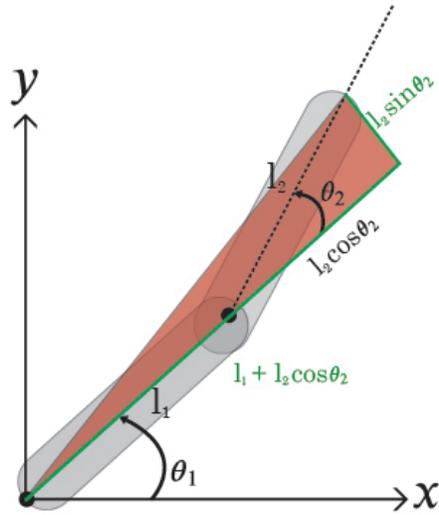


Fig. 3.24. Triángulo de relaciones entre los eslabones

Las ecuaciones que forman esta relación son:

$$\beta = (\tan)^{-1} \left(\frac{l_2 \sin(\theta_2)}{l_1 + l_2 \cos(\theta_2)} \right) \quad (3.63)$$

$$\gamma = (\tan)^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (3.64)$$

Entonces a partir de (3.63) y (3.64) se construye la diferencia:

$$\theta_1 = (\tan)^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - (\tan)^{-1} \left(\frac{l_2 \sin(\theta_2)}{l_1 + l_2 \cos(\theta_2)} \right) \quad (3.65)$$

Finalmente, se despeja la ecuación (3.65) para obtener el valor de θ_2 :

$$\theta_2 = (\cos)^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (3.66)$$

Estas ecuaciones de la cinemática inversa del robot son utilizadas para formar la trayectoria de referencia para este, utilizando dos señales senoidales desfasadas representando el desplazamiento en el plano $x - y$ formando así una trayectoria circular con centro en $(0.37, 0.67)$ y radio 0.15 como se muestra en la Figura 3.25.

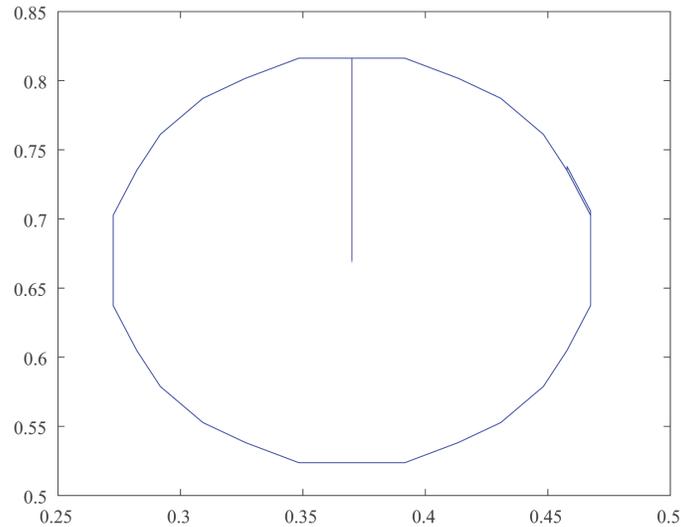


Fig. 3.25. Trayectoria de referencia para las posiciones angulares

3.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se llevó a cabo el análisis por medio de la metodología de Euler-Lagrange la cual permitió obtener una expresión matemática de un manipulador de dos grados de libertad con movimiento horizontal, considerando que las fuerzas Coriolis para ángulos pequeños es aproximadamente cero se redujeron las no linealidades que conforman el sistema no lineal del manipulador así añadiendo a nuestro sistema un error en el modelado ya que la reducción de las no linealidades entre el sistema no lineal reducido y el completo nos da una pequeña diferencia entre estos.

Tomando el sistema no lineal reducido se obtuvo la expresión Takagi-Sugeno por el sector no lineal, se identificaron las variables premisas y construyeron los modelos locales, para así poder llevar a cabo la discretización por medio del método del retenedor de orden cero utilizando un tiempo de integración de $T_e = 0.01$ y un tiempo de discretización $T_d = 0.01$.

Adicionalmente se realizaron dos simulaciones cuando el tiempo de integración $T_e = 0.01$ y el tiempo de discretización $T_d = 0.1$ y la segunda simulación con un tiempo de integración $T_e = 0.001$ y un tiempo de discretización $T_d = 0.1$. En las simulaciones se muestra que la representación Takagi-Sugeno del sistema, representa de manera adecuada el comportamiento del sistema no li-

neal. Finalmente, se abordó la definición de trayectoria de referencia del sistema, utilizando la cinemática inversa del comportamiento de los ángulos de cada uno de los eslabones y por medio de la geometría de los ángulos formados podemos pasar de posiciones en x y y a posiciones de ángulos para cada uno de los eslabones.

Capítulo 4

Diseño del observador funcional para el sistema Takagi-Sugeno discreto

En este capítulo se presenta el diseño del observador funcional dinámico generalizado, para un sistema bajo la representación de Takagi-Sugeno discreta. El primer paso para poder realizar el desarrollo del observador es verificar que cumple con las condiciones las necesarias de diseño.

La Figura 4.1 representa la estructura del esquema de estimación.

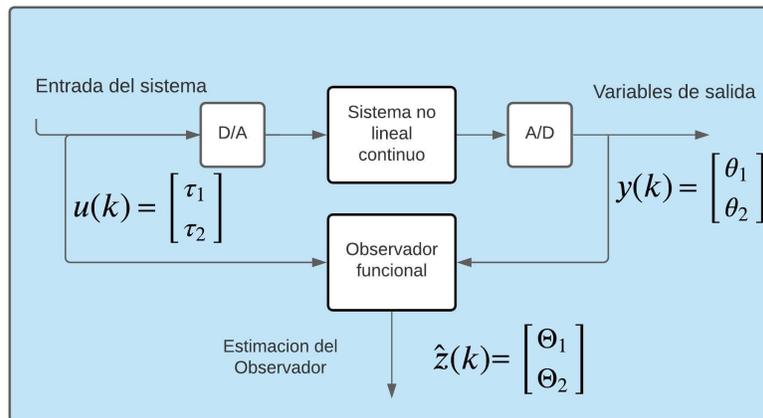


Fig. 4.1. Esquema del observador para la estimación de una función.

4.1. Planteamiento del problema

Considere un sistema no lineal discreto bajo el marco de la representación T-S como:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \quad (4.1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (4.2)$$

$$z(k) = Lx(k) \quad (4.3)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la entrada del sistema, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ representa las variables de salida medidas y $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ es la función lineal que se desea estimar. $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ y $L \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, son matrices conocidas, $\mu_i(\rho(k))$ son las funciones de ponderación y κ es el número de modelos locales lineales, el cual es determinado por $\kappa = 2^s$, siendo s el número de no linealidades en el sistema.

Para poder realizar el diseño del observador funcional, se asume que el sistema T-S cumple con la propiedad de observabilidad funcional.

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} LA_i \\ CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} = \mathbf{rank} \begin{bmatrix} CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} = n_x \quad (4.4)$$

La observabilidad funcional permite comprobar si la función lineal de los estados puede ser estimada, a partir de la información disponible de la entrada y salida del sistema.

Considere el observador funcional dinámico generalizado para el sistema (4.1)

$$\zeta(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k))[N_i \zeta(k) + H_i v(k) + F_i y(k) + J_i u(k)] \quad (4.5)$$

$$v(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k))[S_i \zeta(k) + G_i v(k) + M_i y(k)] \quad (4.6)$$

$$\hat{z}(k) = P\zeta(k) + Qy(k) \quad (4.7)$$

donde $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estado del observador funcional, $v(k) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar y $\hat{z}(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ es el vector de estimación del observador. N_i , H_i , F_i , S_i , L_i , M_i , P y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

Siendo $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n_x}$ una matriz para definir el vector de error transformado

$$\varepsilon(k) = \zeta(k) - Tx(k)$$

de modo que la dinámica del error de estimación puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1) = & \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) [N_i \varepsilon(k) + (N_i T + F_i C - T A_i) x(k) \\ & + H_i v(k) + (J_i - T B_i) u(k)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

usando la definición de $\varepsilon(k)$ en las ecuaciones (4.6) y (4.7), puede ser reescritas como:

$$v(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) [S_i \varepsilon(k) + (S_i T + M_i C) x(k) + G_i v(k)] \quad (4.9)$$

$$\hat{z}(k) = P \varepsilon(k) + (P T + Q C) x(k) \quad (4.10)$$

Se asume que las siguientes condiciones se cumplen

- a) $N_i T + F_i C - T A_i = 0$
- b) $J_i = T B_i$
- c) $S_i T + M_i C = 0$
- d) $P T + Q C = L$

entonces la dinámica del error de observación, formada por (4.8) y (4.9) puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & G_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Usando la condición d) la ecuación (4.10) puede ser expresada como:

$$\hat{z}(k) - z(k) = e_z(k) = P \varepsilon(k) \quad (4.12)$$

en este caso si las matrices \mathbb{A}_i son estables, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ y a su vez $\lim_{k \rightarrow \infty} e_z(k) = 0$.

4.2. Parametrización de las matrices del observador funcional

Partiendo de las condiciones (a-b) se lleva a cabo la parametrización. Considere una matriz $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times n_x}$ de rango fila completo, tal que, $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ es de rango columna completo y además $\Omega = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$.

Las condiciones (c-d) pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Para que la ecuación (4.13) tenga una solución es necesario que se cumpla

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \mathbf{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \\ L \end{bmatrix} = n_x$$

si esta condición se cumple, existen dos matrices de dimensiones $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n_x}$ y $K \in \mathbb{R}^{q_0 \times n_y}$ tal que:

$$T + KC = E \quad (4.14)$$

la cual puede ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}}_{\Omega} = E \quad (4.15)$$

La solución de (4.15) está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} = E\Omega^+ \quad (4.16)$$

que puede ser descompuesta como:

$$T = E\Omega^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = E\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Considerando la matriz T de la ecuación (4.14) en la condición a) se puede escribir como:

$$N_i E + \bar{K}_i C = T A_i \quad (4.18)$$

donde $\bar{K}_i = F_i - N_i K$, la ecuación (4.18) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} N_i & \bar{K}_i \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}}_{\Sigma} = T A_i \quad (4.19)$$

cuya solución general está dada por

$$\begin{bmatrix} N_i & \bar{K}_i \end{bmatrix} = T A_i \Sigma^+ - Z_i (I - \Sigma \Sigma^+) \quad (4.20)$$

donde Z_i es una matriz de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios

$$N_i = \underbrace{T A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}}_{N_{1i}} - \underbrace{Z_i (I - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}}_{N_2} \quad (4.21)$$

$$\overline{K}_i = \underbrace{TA_i\Sigma^+}_{\overline{K}_{1i}} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} - \underbrace{Z_i(I - \Sigma\Sigma^+)}_{\overline{K}_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Por otro lado, usando la ecuación (4.14) obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{bmatrix} \Sigma \quad (4.23)$$

Remplazando la ecuación (4.23) en (4.13) se tiene:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

la cual tiene la siguiente solución general:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \Sigma^+ - \begin{bmatrix} W_{1i} \\ W_2 \end{bmatrix} (I - \Sigma\Sigma^+) \right) \times \begin{bmatrix} I & K \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

donde W_{1i} y W_2 son matrices de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios. Entonces las matrices S_i , M_i , P y Q pueden ser escritas como:

$$S_i = -W_{1i}(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$M_i = -W_{1i}(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$P = L\Sigma^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$Q = L\Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Por simplicidad se asume que $W_2 = 0$. Al usar (4.21) y (4.26) la dinámica de error del observador (4.11) puede escribirse como:

$$\varphi(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \varphi(k) \quad (4.30)$$

donde $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Z_i & H_i \\ W_{1i} & G_i \end{bmatrix}$ y $\varphi(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$.

El problema ahora consiste en encontrar la matriz \mathbb{Y}_i , tal que (4.30) sea estable.

En la siguiente sección se presenta el análisis de estabilidad basado en Lyapunov, teniendo que resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI) para obtener la matriz \mathbb{Y}_i .

4.3. Análisis de estabilidad del observador

Considere la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\varphi(k)) = \varphi^T(k)X\varphi(k) > 0 \quad (4.31)$$

donde $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$, con $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$ y $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$. La diferencia de $V(\varphi(k))$ es

$$\begin{aligned} \Delta V(\varphi(k)) &= V(\varphi(k+1)) - V(\varphi(k)) < 0 \\ &= \varphi^T(k+1)X\varphi(k+1) - \varphi^T(k)X\varphi(k) < 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

reemplazado $\varphi(k+1)$ de la ecuación (4.30), se obtiene

$$\Delta V(\varphi(k)) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \varphi^T(k) [(\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) - X] \varphi(k) < 0 \quad (4.33)$$

La desigualdad $\Delta V(\varphi(k)) < 0$ se cumple para todo $\varphi(k) \neq 0$ si y solo si

$$(\mathbb{A}_{i1} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X (\mathbb{A}_{i1} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) - X < 0, \quad (4.34)$$

donde

$$\mathbb{A}_{i1}^T X \mathbb{A}_{i1} - \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i X \mathbb{A}_{1i} - \mathbb{A}_{1i}^T X \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_2 \mathbb{Y}_i X \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 - X < 0, \quad (4.35)$$

Considerando $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$, el complemento de Schur menciona que las siguientes condiciones son equivalentes

1. $S < 0$
2. $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$
3. $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$

Aplicando entonces, el complemento de Schur a la desigualdad (4.35), tomando la consideración 3 mostrada arriba

$$\underbrace{-X}_{S_{22}} < 0, \quad \underbrace{-X}_{S_{11}} - \underbrace{[(\mathbb{A}_{i1} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X]}_{S_{12}} \underbrace{(-X^{-1})}_{S_{22}^{-1}} \underbrace{[X(\mathbb{A}_{i1} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)]^T}_{S_{12}^T} < 0 \quad (4.36)$$

quedando como:

$$\begin{bmatrix} -X & (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X \\ X(\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (4.37)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_i\mathcal{C} + (\mathcal{B}\mathcal{X}_i\mathcal{C})^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (4.38)$$

donde $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} -X & \mathbb{A}_{1i}^T X \\ X\mathbb{A}_{1i} & -X \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix}$, $\mathcal{C} = [0 \quad \mathbb{A}_2]$ y $\mathcal{X}_i = X\mathbb{Y}_i$, $\forall i = [1, \dots, \kappa]$.

De acuerdo al lema de eliminación la desigualdad (4.38) es equivalente a las siguientes dos condiciones (Skelton, 2019):

(D1) Existe una \mathcal{X}_i que satisface:

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_i\mathcal{C} + (\mathcal{B}\mathcal{X}_i\mathcal{C})^T + \mathcal{D}_i < 0$$

(D2) Las dos condiciones siguientes se cumplen:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad o \quad \mathcal{B}\mathcal{B}^T > 0 \\ \mathcal{C}^{T\perp} \mathcal{D}_i \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad o \quad \mathcal{C}^T \mathcal{C} > 0 \end{aligned}$$

suponiendo que (D2) se cumple, entonces tenemos que $(\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_r)$ y $(\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_r)$ son factores de rango completo de \mathcal{B} y \mathcal{C} respectivamente tales que se cumpla: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$.

Entonces la matriz \mathcal{X}_i en la declaración (D1) puede ser obtenida como:

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{C}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+$$

donde \mathcal{Z} es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas y las matrices \mathcal{K}_i , \mathcal{S}_i y \mathcal{V}_i son:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i &= -\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-\frac{1}{2}} \\ \mathcal{S}_i &= \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T [\mathcal{V}_i - \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \mathcal{V}_i] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \\ \mathcal{V}_i &= (\mathcal{B}_r \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}_i)^{-1} > 0 \end{aligned}$$

donde \mathcal{L} y \mathcal{R} son matrices arbitrarias que cumplan $\|\mathcal{L}\| < 1$ y $\mathcal{R} > 0$ tal que \mathcal{V}_i sea positiva definida.

Considerando $\mathcal{B}^\perp = [I \ 0]$ y la matriz \mathcal{D}_i en la ecuación (4.38) se obtiene:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.39)$$

De igual forma, considerando $\mathcal{C}^{T\perp} = \begin{bmatrix} [N_2^{T\perp} \ 0] & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ y la matriz \mathcal{D}_i en la ecuación (4.38) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} N_2^{T\perp} X_1 N_2^{T\perp T} & N_2^{T\perp} N_{1i} X_1 & 0 \\ X_1 N_{1i}^T N_2^{T\perp T} & -X_1 & 0 \\ 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.40)$$

Entonces las matrices \mathbb{Y}_i son parametrizadas de la siguiente manera:

$$\mathbb{Y}_i = X^{-1}(\mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{B}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+) \quad (4.41)$$

donde $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} -X_1 & 0 & N_{1i}^T X_1 & 0 \\ 0 & -X_2 & 0 & 0 \\ X_1 N_{1i}^T & 0 & -X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ y $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$

Las matrices \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{Z} son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas que satisfacen $\mathcal{V}_i > 0$.

A continuación, se muestran una serie de pasos para llevar a cabo el diseño del observador funcional:

Algoritmo:

1. Elige una matriz $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times n_x}$ tal que la matriz Σ sea de rango columna completo.
2. Calcular las matrices $N_{1i}, N_2, T_1, T_2, K_1, K_2, P, Q$.
3. Resolver las LMIs de las ecuaciones (4.39) y (4.40) para encontrar las matrices X y \mathcal{X}_i .
4. Utilizando (4.41) se pueden obtener las matrices \mathbb{Y}_i .
5. Calcular el resto de las matrices del observador funcional, usando (4.21) para calcular N_i , para calcular S_i, M_i, P, Q la ecuación (4.25) tomando la matriz $W_2 = 0$

4.4. Simulación 1 del observador funcional

Objetivo de la simulación: En esta simulación se muestra la estimación de estados del observador funcional. Como parámetros para la validación del observador funcional se utilizó un paso de integración de $T_e = 0.01$ y un tiempo de discretización de $T_d = 0.01$.

Para obtener las matrices del observador se considera el sistema T-S discreto de la sección 3.3, donde $y(k) = [\theta_1(k) \ \theta_2(k)]^T$, siendo entonces

$$z(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_L x(k) = \begin{bmatrix} \Theta_1(k) \\ \Theta_2(k) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Siguiendo el algoritmo de la Sección 4.3 obtenemos:

1. Se define $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tal que la matriz Σ es de rango columna completo.

2. Se calculan las matrices

$$N_{11} = \begin{bmatrix} 0.0295 & 0.9705 & -0.1963 & 0.1963 \\ 0.0363 & 0.9637 & -0.1428 & 0.1428 \\ -0.3734 & 0.3734 & -1.3117 & 2.3117 \\ -0.1221 & 0.1221 & -0.8209 & 1.8209 \end{bmatrix}, \quad N_{12} = \begin{bmatrix} 0.0254 & 0.9746 & -0.1863 & 0.1863 \\ 0.0365 & 0.9635 & -0.1425 & 0.1425 \\ -0.3735 & 0.3735 & -1.2978 & 2.2978 \\ -0.1221 & 0.1221 & -0.8161 & 1.8161 \end{bmatrix}$$

$$N_{13} = \begin{bmatrix} 0.0343 & 0.9657 & -0.1930 & 0.1930 \\ 0.0356 & 0.9644 & -0.1410 & 0.1410 \\ -0.3792 & 0.3792 & -1.2816 & 2.2816 \\ -0.1242 & 0.1242 & -0.8102 & 1.8102 \end{bmatrix}, \quad N_{14} = \begin{bmatrix} 0.0300 & 0.9700 & -0.1822 & 0.1822 \\ 0.0358 & 0.9642 & -0.1406 & 0.1406 \\ -0.3794 & 0.3794 & -1.2662 & 2.2662 \\ -0.1242 & 0.1242 & -0.8048 & 1.8048 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0.2727 & -0.2727 & 0.0909 & -0.0909 \\ -0.2727 & 0.2727 & -0.0909 & 0.0909 \\ 0.0909 & -0.0909 & 0.3636 & -0.3636 \\ -0.0909 & 0.0909 & -0.3636 & 0.3636 \\ 0.1818 & -0.1818 & -0.2727 & 0.2727 \\ 0.2727 & -0.2727 & 0.0909 & -0.0909 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.3636 & -0.3636 & 0.4545 & 0.5455 \\ 0.3636 & 0.6364 & -0.5455 & -0.4545 \end{bmatrix} \text{ y } Q = \begin{bmatrix} -0.0455 & -0.3182 \\ -0.0455 & 0.1818 \end{bmatrix}$$

3. Resolviendo las LMI se obtiene $X = \begin{bmatrix} 63.9578 & -59.0749 & 4.4701 & -3.0115 \\ -59.0749 & 134.0987 & -14.0432 & 15.7535 \\ 4.4701 & -14.0432 & 109.4474 & -152.4744 \\ -3.0115 & 15.7535 & -152.4744 & 272.9952 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_1 &= \begin{bmatrix} 18.4068 & -18.4068 & 2.5089 & -2.5089 & 15.8979 & 18.4068 & 0 & 0 \\ 19.0192 & -19.0192 & 7.3728 & -7.3728 & 11.6464 & 19.0192 & 0 & 0 \\ -0.5709 & 0.5709 & 12.7796 & -12.7796 & -13.3505 & -0.5709 & 0 & 0 \\ 22.2760 & -22.2760 & 57.3994 & -57.3994 & -35.1235 & 22.2760 & 0 & 0 \\ 2.7904 & -2.7904 & 1.6940 & -1.6940 & 1.0964 & 2.7904 & -6.7769 & -6.7769 \\ 2.7904 & -2.7904 & 1.6940 & -1.6940 & 1.0964 & 2.7904 & -6.7769 & -6.7769 \end{bmatrix} \\
 \mathcal{X}_2 &= \begin{bmatrix} 18.3969 & -18.3969 & 2.4964 & -2.4964 & 15.9005 & 18.3969 & 0 & -0 \\ 19.4041 & -19.4041 & 6.4753 & -6.4753 & 12.9289 & 19.4041 & 0 & -0 \\ -0.5021 & 0.5021 & 12.7020 & -12.7020 & -13.2041 & -0.5021 & 0 & 0 \\ 22.3533 & -22.3533 & 56.4986 & -56.4986 & -34.1452 & 22.3533 & 0 & 0 \\ 2.8501 & -2.8501 & 1.9070 & -1.9070 & 0.9431 & 2.8501 & -6.7769 & -6.7769 \\ 2.8501 & -2.8501 & 1.9070 & -1.9070 & 0.9431 & 2.8501 & -6.7769 & -6.7769 \end{bmatrix} \\
 \mathcal{X}_3 &= \begin{bmatrix} 18.4340 & -18.4340 & 2.4363 & -2.4363 & 15.9977 & 18.4340 & 0 & 0 \\ 18.5491 & -18.5491 & 7.1710 & -7.1710 & 11.3781 & 18.5491 & 0 & 0 \\ -0.6903 & 0.6903 & 12.9252 & -12.9252 & -13.6156 & -0.6903 & 0 & 0 \\ 22.4907 & -22.4907 & 55.7767 & -55.7767 & -33.2860 & 22.4907 & 0 & 0 \\ 2.8914 & -2.8914 & 2.0336 & -2.0336 & 0.8578 & 2.8914 & -6.7769 & -6.7769 \\ 2.8914 & -2.8914 & 2.0336 & -2.0336 & 0.8578 & 2.8914 & -6.7769 & -6.7769 \end{bmatrix} \\
 \mathcal{X}_4 &= \begin{bmatrix} 18.4239 & -18.4239 & 2.4218 & -2.4218 & 16.0021 & 18.4239 & 0 & 0 \\ 18.9542 & -18.9542 & 6.2049 & -6.2049 & 12.7493 & 18.9542 & 0 & 0 \\ -0.6186 & 0.6186 & 12.8444 & -12.8444 & -13.4630 & -0.6186 & 0 & 0 \\ 22.5773 & -22.5773 & 54.7830 & -54.7830 & -32.2057 & 22.5773 & 0 & 0 \\ 2.9460 & -2.9460 & 2.2370 & -2.2370 & 0.7090 & 2.9460 & -6.7769 & -6.7769 \\ 2.9460 & -2.9460 & 2.2370 & -2.2370 & 0.7090 & 2.9460 & -6.7769 & -6.7769 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4. Obteniendo entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Y}_1 &= \begin{bmatrix} 0.6932 & -0.6932 & 0.1073 & -0.1073 & 0.5860 & 0.6932 & 0 & 0 \\ 0.4597 & -0.4597 & 0.1514 & -0.1514 & 0.3083 & 0.4597 & 0 & 0 \\ 0.5085 & -0.5085 & 1.8666 & -1.8666 & -1.3581 & 0.5085 & 0 & 0 \\ 0.3467 & -0.3467 & 1.2452 & -1.2452 & -0.8985 & 0.3467 & 0 & 0 \\ 0.0227 & -0.0227 & 0.0138 & -0.0138 & 0.0089 & 0.0227 & -0.0551 & -0.0551 \\ 0.0227 & -0.0227 & 0.0138 & -0.0138 & 0.0089 & 0.0227 & -0.0551 & -0.0551 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{Y}_2 &= \begin{bmatrix} 0.6974 & -0.6974 & 0.0971 & -0.0971 & 0.6002 & 0.6974 & 0 & 0 \\ 0.4646 & -0.4646 & 0.1396 & -0.1396 & 0.3250 & 0.4646 & 0 & 0 \\ 0.5137 & -0.5137 & 1.8413 & -1.8413 & -1.3276 & 0.5137 & 0 & 0 \\ 0.3497 & -0.3497 & 1.2284 & -1.2284 & -0.8787 & 0.3497 & 0 & 0 \\ 0.0232 & -0.0232 & 0.0155 & -0.0155 & 0.0077 & 0.0232 & -0.0551 & -0.0551 \\ 0.0232 & -0.0232 & 0.0155 & -0.0155 & 0.0077 & 0.0232 & -0.0551 & -0.0551 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Y}_3 &= \begin{bmatrix} 0.6884 & -0.6884 & 0.1040 & -0.1040 & 0.5844 & 0.6884 & 0 & 0 \\ 0.4539 & -0.4539 & 0.1479 & -0.1479 & 0.3060 & 0.4539 & 0 & 0 \\ 0.5078 & -0.5078 & 1.8349 & -1.8349 & -1.3271 & 0.5078 & 0 & 0 \\ 0.3474 & -0.3474 & 1.2218 & -1.2218 & -0.8744 & 0.3474 & 0 & 0 \\ 0.0235 & -0.0235 & 0.0165 & -0.0165 & 0.0070 & 0.0235 & -0.0551 & -0.0551 \\ 0.0235 & -0.0235 & 0.0165 & -0.0165 & 0.0070 & 0.0235 & -0.0551 & -0.0551 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{Y}_4 &= \begin{bmatrix} 0.6927 & -0.6927 & 0.0931 & -0.0931 & 0.5997 & 0.6927 & 0 & 0 \\ 0.4591 & -0.4591 & 0.1352 & -0.1352 & 0.3239 & 0.4591 & 0 & 0 \\ 0.5134 & -0.5134 & 1.8072 & -1.8072 & -1.2939 & 0.5134 & 0 & 0 \\ 0.3506 & -0.3506 & 1.2033 & -1.2033 & -0.8527 & 0.3506 & 0 & 0 \\ 0.0239 & -0.0239 & 0.0182 & -0.0182 & 0.0058 & 0.0239 & -0.0551 & -0.0551 \\ 0.0239 & -0.0239 & 0.0182 & -0.0182 & 0.0058 & 0.0239 & -0.0551 & -0.0551 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5. Finalmente, se obtienen el resto de matrices del observador funcional:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} -0.0268 & -0.0268 \\ -0.0260 & -0.0260 \\ -0.2436 & -0.2436 \\ -0.1486 & -0.1486 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} -0.8394 & -0.8394 \\ -0.5347 & -0.5347 \\ 0.0601 & 0.0601 \\ 0.0597 & 0.0597 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0047 \\ -0.0136 & -0.0136 \\ -0.3691 & -0.3691 \\ -0.1334 & -0.1334 \end{bmatrix} \\
 H_4 &= \begin{bmatrix} -0.9038 & -0.9038 \\ -0.5889 & -0.5889 \\ -0.3000 & -0.3000 \\ -0.1593 & -0.1593 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -0.3769 & -0.4754 \\ 0.1195 & 0.0129 \\ 0.9987 & -0.2017 \\ 0.3978 & -0.0836 \end{bmatrix}, F_2 = F_3 = \begin{bmatrix} -0.3844 & -0.4774 \\ 0.0797 & 0.0207 \\ 0.9524 & -0.1943 \\ 0.3563 & -0.0685 \end{bmatrix} \\
 F_4 &= \begin{bmatrix} -0.3841 & -0.4748 \\ 0.0770 & 0.0441 \\ 0.9326 & -0.1738 \\ 0.3093 & -0.0381 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} -0.0002 & 0.0006 \\ -0.0163 & 0.0635 \\ -0.0160 & 0.0625 \\ -0.0315 & 0.0941 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0003 \\ 0.0162 & 0.0317 \\ 0.0162 & 0.0314 \\ 0.0005 & 0.0310 \end{bmatrix}, \\
 J_3 &= \begin{bmatrix} -0.0002 & -0.0003 \\ -0.0175 & -0.0316 \\ -0.0175 & -0.0313 \\ -0.0012 & -0.0302 \end{bmatrix}, J_4 = \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0007 \\ 0.0174 & -0.0673 \\ 0.0171 & -0.0663 \\ 0.0337 & -0.1001 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} -0.0045 & -0.0113 \\ -0.0045 & -0.0113 \end{bmatrix}, \\
 M_2 &= \begin{bmatrix} -0.0038 & -0.0116 \\ -0.0038 & -0.0116 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} -0.0035 & -0.0118 \\ -0.0035 & -0.0118 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} -0.0029 & -0.0120 \\ -0.0029 & -0.0120 \end{bmatrix} \\
 G_1 &= G_2 = G_3 = G_4 = \begin{bmatrix} -0.0551 & -0.0551 \\ -0.0551 & -0.0551 \end{bmatrix}, \\
 S_1 &= \begin{bmatrix} -0.0227 & 0.0227 & -0.0138 & 0.0138 \\ -0.0227 & 0.0227 & -0.0138 & 0.0138 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} -0.0232 & 0.0232 & -0.0155 & 0.0155 \\ -0.0232 & 0.0232 & -0.0155 & 0.0155 \end{bmatrix} \\
 S_3 &= \begin{bmatrix} -0.0235 & 0.0235 & -0.0165 & 0.0165 \\ -0.0235 & 0.0235 & -0.0165 & 0.0165 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} -0.0239 & 0.0239 & -0.0182 & 0.0182 \\ -0.0239 & 0.0239 & -0.0182 & 0.0182 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La simulación se realizó en Matlab R2020a y las condiciones iniciales para el sistema fueron $x(0) = [2, 2, 2, 2]^T$, $\zeta(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

Para la construcción de las señales de entrada utilizamos Simulink (véase Anexo A), los dos pares aplicados a los eslabones se muestran en la Figura 4.2.

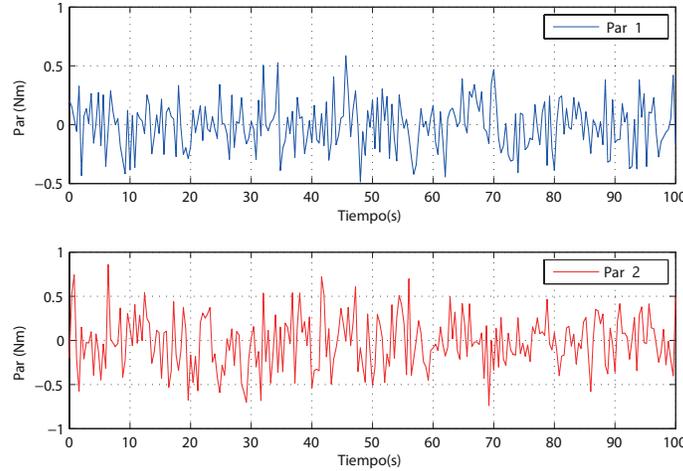


Fig. 4.2. Simulación 1: Gráfica de señales de entrada del manipulador.

En la Figura 4.3 se muestra la función estimada que, en este caso, son las velocidades angulares, ya que no se encuentran disponibles para su medición.

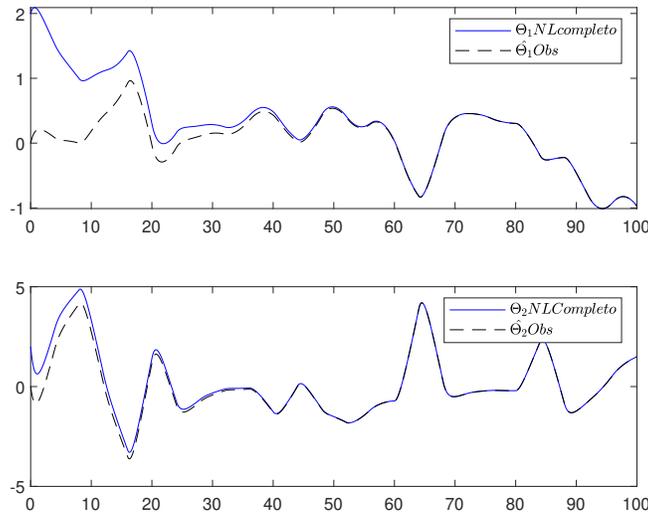


Fig. 4.3. Simulación 1: Estimación de las velocidades angulares del sistema.

En esta simulación se realizó la validación de la estimación del observador funcional discreto. En conclusión, la estimación de estados no tienen error, ya que al tener el mismo tiempo de discretización e integración el error de la estimación es prácticamente nulo.

4.5. Simulación 2 del observador funcional

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar la estimación de una función lineal, considerando parámetros de configuración diferentes. La configuración utilizada para la simulación fue: un tiempo de integración de $T_e = 0.01$ y un tiempo de discretización de $T_d = 0.1$.

Para obtener las matrices del observador funcional se considera el sistema T-S discreto descrito en la Sección 3.3.2, donde $y(k) = [\theta_1(k) \ \theta_2(k)]^T$. Considerando que la función a estimar contiene las variables no disponibles a la salida, es decir $z(k) = [\Theta_1(k) \ \Theta_2(k)]^T$.

Siguiendo el algoritmo de diseño del observador de la Sección 4.3, se obtiene:

1. Se define $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tal que la matriz Σ es de rango columna completo.
2. Se calculan las matrices

$$N_{11} = \begin{bmatrix} 0.1314 & 0.8686 & -0.0613 & 0.0613 \\ 0.1053 & 0.8947 & -0.0323 & 0.0323 \\ -0.1068 & 0.1068 & -0.5428 & 1.5428 \\ -0.0174 & 0.0174 & -0.3678 & 1.3678 \end{bmatrix}, N_{12} = \begin{bmatrix} 0.1221 & 0.8779 & -0.0416 & 0.0416 \\ 0.1065 & 0.8935 & -0.0340 & 0.0340 \\ -0.1045 & 0.1045 & -0.5147 & 1.5147 \\ -0.0167 & 0.0167 & -0.3613 & 1.3613 \end{bmatrix},$$

$$N_{13} = \begin{bmatrix} 0.1482 & 0.8518 & -0.0630 & 0.0630 \\ 0.1026 & 0.8974 & -0.0297 & 0.0297 \\ -0.1304 & 0.1304 & -0.4514 & 1.4514 \\ -0.0232 & 0.0232 & -0.3460 & 1.3460 \end{bmatrix}, N_{14} = \begin{bmatrix} 0.1327 & 0.8673 & -0.0220 & 0.0220 \\ 0.1045 & 0.8955 & -0.0327 & 0.0327 \\ -0.1310 & 0.1310 & -0.3693 & 1.3693 \\ -0.0232 & 0.0232 & -0.3268 & 1.3268 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0.2727 & -0.2727 & 0.0909 & -0.0909 \\ -0.2727 & 0.2727 & -0.0909 & 0.0909 \\ 0.0909 & -0.0909 & 0.3636 & -0.3636 \\ -0.0909 & 0.0909 & -0.3636 & 0.3636 \\ 0.1818 & -0.1818 & -0.2727 & 0.2727 \\ 0.2727 & -0.2727 & 0.0909 & -0.0909 \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.3636 & -0.3636 & 0.4545 & 0.5455 \\ 0.3636 & 0.6364 & -0.5455 & -0.4545 \end{bmatrix} \text{ y } Q = \begin{bmatrix} -0.0455 & -0.3182 \\ -0.0455 & 0.1818 \end{bmatrix}$$

3. Resolviendo las LMIs se obtiene $X =$

$$\begin{bmatrix}
 11.9605 & -11.1001 & 0.1437 & 0.1362 \\
 -11.1001 & 17.9757 & -0.4546 & 0.4202 \\
 0.1437 & -0.4546 & 29.1443 & -36.3992 \\
 0.1362 & 0.4202 & -36.3992 & 66.7865
 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}_1 = \begin{bmatrix}
 2.6816 & -2.6816 & -0.9059 & 0.9059 & 3.5875 & 2.6816 & 0 & 0 \\
 0.3066 & -0.3066 & 1.7283 & -1.7283 & -1.4217 & 0.3066 & 0 & 0 \\
 -1.4309 & 1.4309 & 1.3342 & -1.3342 & -2.7650 & -1.4309 & 0 & 0 \\
 6.6973 & -6.6973 & 17.2438 & -17.2438 & -10.5465 & 6.6973 & 0 & 0 \\
 1.3282 & -1.3282 & 1.9366 & -1.9366 & -0.6084 & 1.3282 & -2.4732 & -2.4732 \\
 1.3282 & -1.3282 & 1.9366 & -1.9366 & -0.6084 & 1.3282 & -2.4732 & -2.4732
 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_2 = \begin{bmatrix}
 2.3625 & -2.3625 & -0.2671 & 0.2671 & 2.6296 & 2.3625 & 0 & 0 \\
 0.9434 & -0.9434 & 0.4208 & -0.4208 & 0.5227 & 0.9434 & 0 & 0 \\
 -1.1359 & 1.1359 & 1.3624 & -1.3624 & -2.4983 & -1.1359 & 0 & 0 \\
 6.8398 & -6.8398 & 15.3101 & -15.3101 & -8.4704 & 6.8398 & 0 & 0 \\
 1.3377 & -1.3377 & 1.9863 & -1.9863 & -0.6486 & 1.3377 & -2.4732 & -2.4732 \\
 1.3377 & -1.3377 & 1.9863 & -1.9863 & -0.6486 & 1.3377 & -2.4732 & -2.4732
 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_3 = \begin{bmatrix}
 3.2817 & -3.2817 & -1.0687 & 1.0687 & 4.3504 & 3.2817 & 0 & 0 \\
 -0.8635 & 0.8635 & 1.9596 & -1.9596 & -2.8230 & -0.8635 & 0 & 0 \\
 -2.3448 & 2.3448 & 3.1823 & -3.1823 & -5.5271 & -2.3448 & 0 & 0 \\
 7.4066 & -7.4066 & 12.7633 & -12.7633 & -5.3567 & 7.4066 & 0 & 0 \\
 1.3344 & -1.3344 & 2.0442 & -2.0442 & -0.7098 & 1.3344 & -2.4732 & -2.4732 \\
 1.3344 & -1.3344 & 2.0442 & -2.0442 & -0.7098 & 1.3344 & -2.4732 & -2.4732
 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_4 = \begin{bmatrix}
 2.7521 & -2.7521 & 0.2506 & -0.2506 & 2.5015 & 2.7521 & 0 & 0 \\
 0.1868 & -0.1868 & -0.7240 & 0.7240 & 0.9109 & 0.1868 & 0 & 0 \\
 -1.9418 & 1.9418 & 3.6899 & -3.6899 & -5.6317 & -1.9418 & 0 & 0 \\
 7.8627 & -7.8627 & 7.5582 & -7.5582 & 0.3045 & 7.8627 & 0 & 0 \\
 1.3597 & -1.3597 & 2.1298 & -2.1298 & -0.7701 & 1.3597 & -2.4732 & -2.4732 \\
 1.3597 & -1.3597 & 2.1298 & -2.1298 & -0.7701 & 1.3597 & -2.4732 & -2.4732
 \end{bmatrix}$$

4. Obteniendo entonces

$$\mathbb{Y}_1 = \begin{bmatrix}
 0.5511 & -0.5511 & -0.0062 & 0.0062 & 0.5573 & 0.5511 & 0 & 0 \\
 0.3581 & -0.3581 & 0.1008 & -0.1008 & 0.2572 & 0.3581 & 0 & 0 \\
 0.2342 & -0.2342 & 1.1558 & -1.1558 & -0.9216 & 0.2342 & 0 & 0 \\
 0.2246 & -0.2246 & 0.8875 & -0.8875 & -0.6629 & 0.2246 & 0 & 0 \\
 0.0387 & -0.0387 & 0.0564 & -0.0564 & -0.0177 & 0.0387 & -0.0720 & -0.0720 \\
 0.0387 & -0.0387 & 0.0564 & -0.0564 & -0.0177 & 0.0387 & -0.0720 & -0.0720
 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Y}_2 = \begin{bmatrix}
 0.5649 & -0.5649 & -0.0353 & 0.0353 & 0.6002 & 0.5649 & 0 & 0 \\
 0.4024 & -0.4024 & 0.0094 & -0.0094 & 0.3931 & 0.4024 & 0 & 0 \\
 0.2750 & -0.2750 & 1.0441 & -1.0441 & -0.7690 & 0.2750 & 0 & 0 \\
 0.2486 & -0.2486 & 0.7983 & -0.7983 & -0.5497 & 0.2486 & 0 & 0 \\
 0.0389 & -0.0389 & 0.0578 & -0.0578 & -0.0189 & 0.0389 & -0.0720 & -0.0720 \\
 0.0389 & -0.0389 & 0.0578 & -0.0578 & -0.0189 & 0.0389 & -0.0720 & -0.0720
 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Y}_3 &= \begin{bmatrix} 0.5272 & -0.5272 & -0.0039 & 0.0039 & 0.5311 & 0.5272 & 0 & 0 \\ 0.2772 & -0.2772 & 0.1159 & -0.1159 & 0.1613 & 0.2772 & 0 & 0 \\ 0.1762 & -0.1762 & 1.0923 & -1.0923 & -0.9161 & 0.1762 & 0 & 0 \\ 0.2041 & -0.2041 & 0.7857 & -0.7857 & -0.5816 & 0.2041 & 0 & 0 \\ 0.0388 & -0.0388 & 0.0595 & -0.0595 & -0.0207 & 0.0388 & -0.0720 & -0.0720 \\ 0.0388 & -0.0388 & 0.0595 & -0.0595 & -0.0207 & 0.0388 & -0.0720 & -0.0720 \end{bmatrix}, \\
 \mathbb{Y}_4 &= \begin{bmatrix} 0.5489 & -0.5489 & -0.0602 & 0.0602 & 0.6091 & 0.5489 & 0 & 0 \\ 0.3498 & -0.3498 & -0.0696 & 0.0696 & 0.4194 & 0.3498 & 0 & 0 \\ 0.2474 & -0.2474 & 0.8388 & -0.8388 & -0.5914 & 0.2474 & 0 & 0 \\ 0.2493 & -0.2493 & 0.5709 & -0.5709 & -0.3216 & 0.2493 & 0 & 0 \\ 0.0396 & -0.0396 & 0.0620 & -0.0620 & -0.0224 & 0.0396 & -0.0720 & -0.0720 \\ 0.0396 & -0.0396 & 0.0620 & -0.0620 & -0.0224 & 0.0396 & -0.0720 & -0.0720 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

5. Finalmente, se obtienen el resto de matrices del observador funcional:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} -0.0815 & -0.0815 \\ -0.1318 & -0.1318 \\ -0.1241 & -0.1241 \\ -0.0621 & -0.0621 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -0.0889 & -0.0889 \\ -0.1521 & -0.1521 \\ -0.1436 & -0.1436 \\ -0.0647 & -0.0647 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} -0.0790 & -0.0790 \\ -0.1239 & -0.1239 \\ -0.1172 & -0.1172 \\ -0.0574 & -0.0574 \end{bmatrix}, \\
 H_4 &= \begin{bmatrix} -0.0870 & -0.0870 \\ -0.1455 & -0.1455 \\ -0.1379 & -0.1379 \\ -0.0597 & -0.0597 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0.5588 & 0.5848 \\ 0.6924 & 0.9973 \\ 0.7214 & 0.5220 \\ 0.2398 & 0.2629 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.5575 & 0.5875 \\ 0.6755 & 1.0025 \\ 0.7066 & 0.5278 \\ 0.2177 & 0.2595 \end{bmatrix}, \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 0.5574 & 0.5834 \\ 0.6824 & 0.9951 \\ 0.7124 & 0.5204 \\ 0.2295 & 0.2620 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0.5562 & 0.5864 \\ 0.6654 & 1.0009 \\ 0.6976 & 0.5269 \\ 0.2063 & 0.2580 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0049 \\ -0.0130 & 0.2001 \\ -0.0125 & 0.1947 \\ -0.0201 & 0.2150 \end{bmatrix}, \\
 J_2 &= \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.0043 \\ 0.0134 & 0.1749 \\ 0.0133 & 0.1707 \\ 0.0056 & 0.1653 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0033 \\ -0.0133 & 0.1332 \\ -0.0128 & 0.1295 \\ -0.0177 & 0.1473 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.0026 \\ 0.0135 & 0.1072 \\ 0.0132 & 0.1048 \\ 0.0084 & 0.0966 \end{bmatrix}, \\
 S_1 &= S_2 = S_3 = S_4 = \begin{bmatrix} -0.0572 & -0.0429 & 0.0429 & 0 \\ -0.0572 & -0.0429 & 0.0429 & 0 \end{bmatrix}, \\
 G_1 &= G_2 = G_3 = G_4 = \begin{bmatrix} -0.0616 & -0.0616 \\ -0.0616 & -0.0616 \end{bmatrix}, \\
 M_1 &= M_3 = \begin{bmatrix} 0.0286 & 0.0500 \\ 0.0286 & 0.0500 \end{bmatrix}, \quad M_2 = M_4 = \begin{bmatrix} 0.0286 & 0.0501 \\ 0.0286 & 0.0501 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

La simulación se realizó en Matlab R2020a siguiendo el esquema de la Figura 4.1, es decir, para el cálculo de las matrices del observador se consideró el modelo T-S discreto de la Sección 3.3.2 con un tiempo de discretización $T_d = 0.1$, pero en simulación se tomó el sistema no lineal completo, de las ecuaciones (3.37)-(3.38) con un tiempo de integración $T_e = 0.01$. Las condiciones iniciales para el sistema fueron $x(0) = [2, 2, 2, 2]^T, \zeta(0) = [0, 0, 0, 0]^T$. Para la construcción de las señales de

entrada se utilizó Simulink (véase Anexo A), los dos pares aplicados a los eslabones se muestran en la Figura 4.4.

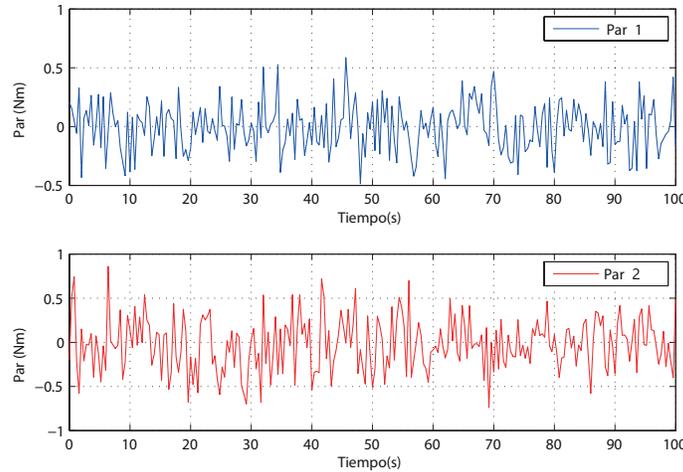


Fig. 4.4. Simulación 2: Gráfica de señales de entrada del manipulador para el observador funcional.

En la Figura 4.5 se muestra la convergencia y estimación de las velocidades angulares, siendo éstas definidas como la función lineal a estimar $z(k)$.

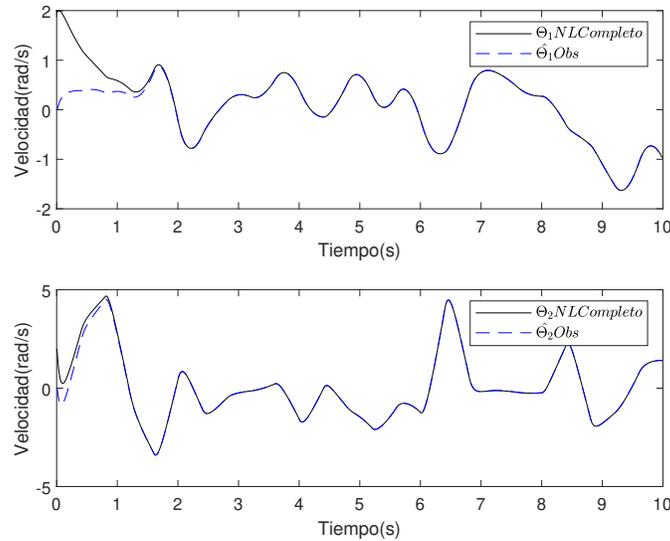


Fig. 4.5. Simulación 2: Estimación de las velocidades angulares del sistema

En esta simulación se mostró el comportamiento de cada una de las velocidades angulares que componen al sistema. Se puede concluir que la estimación del observador funcional discreto representa al modelo no lineal completo, a pesar de que se hicieron simplificaciones en el sistema y el tiempo de discretización con el de integración para el diseño del sistema Takagi-Sugeno son diferentes.

4.6. Simulación 3 del observador funcional

Objetivo de la simulación: En esta simulación se muestra la estimación del observador funcional. Como parámetros para la validación del observador funcional se utilizó un paso de integración de $T_e = 0.001$ y un tiempo de discretización de $T_d = 0.1$. En este caso las ganancias del observador son la mismas que las mostradas en la sección 4.5. La simulación se realizó en Matlab R2020a y las condiciones iniciales para el sistema fueron $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$, $\zeta(0) = [0, 0, 0, 0]^T$. Las señales de entrada se muestran en la Figura 4.6.

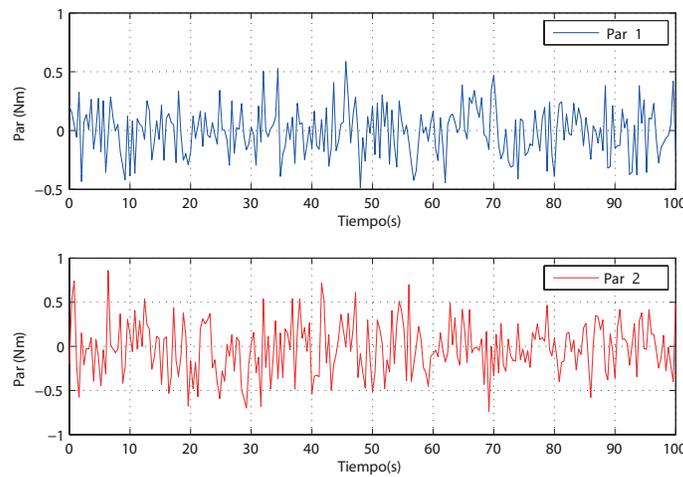


Fig. 4.6. Simulación 3: Gráfica de señales de entrada del manipulador.

En la Figura 4.7 se muestra la estimación de las velocidades angulares.

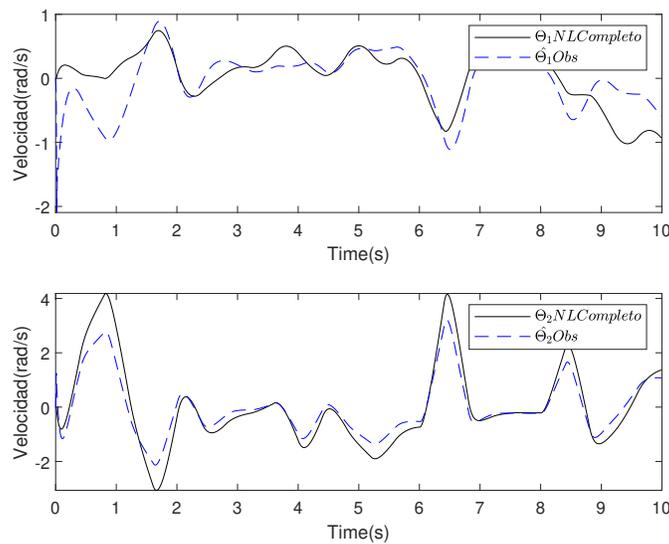


Fig. 4.7. Simulación 3: Estimación de las velocidades angulares del sistema.

En esta simulación se realizó la validación de la estimación del observador funcional discreto. Se muestra que el observador a pesar de que los sistemas Takagi-Sugeno y el no lineal completo no son similares estima las variables con error, pero sigue los cambios de las variables por lo tanto se puede decir que las estimaciones son representativas de la variable.

4.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el diseño de un observador funcional dinámico generalizado. El cual cuenta con las condiciones suficientes y necesarias para su existencia, el observador propuesto tiene como objetivo el estimar aquellas variables que no se tienen disponibles a la salida o no son medibles. Se comprobó la estabilidad del mismo mediante la solución de las LMI's por medio de una función candidata de Lyapunov.

Posteriormente, se realizaron diversas simulaciones para someter ante diferentes parámetros de tiempo el observador funcional que estima los estados no disponibles a la salida.

Capítulo 5

Cálculo de un controlador PI basado en el observador funcional

En este capítulo se presenta el diseño de un controlador basado en un observador funcional dinámico generalizado para un sistema bajo la representación Takagi-Sugeno discreto. El cual es aplicado al sistema del manipulador robótico generando una ley de control adecuada para la aplicación del par que permita formar la trayectoria deseada.

En el enfoque desarrollado en este trabajo, se considera que el observador funcional estima la ley de control necesaria para realizar el seguimiento de trayectorias, dicha ley de control es la función lineal a estimar $\hat{z}(t)$, sin embargo, es necesario conocer previamente la estructura de la función lineal $z(t)$, por lo que el diseño del controlador basado en el observador está seccionado en dos partes: (1) obtención de la función lineal que representa las ganancias del controlador, una vez se tenga determinado esto se realizará, (2) la estimación de dicha función lineal, por el observador funcional.

5.1. Planteamiento del controlador PI

Como se mencionó, primero se determinará la función lineal a estimar.

Considere un sistema no lineal discreto bajo el marco de la representación T-S discreto como:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \quad (5.1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (5.2)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la entrada del sistema y $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ representa las variables de salida medidas. $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ y $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ son matrices conocidas, $\mu_i(\rho(k))$ son las funciones de ponderación y κ es el número de modelos locales lineales, el cual es determinado por $\kappa = 2^s$, siendo s el número de no linealidades en el sistema.

Se propuso utilizar un controlador PI de la siguiente forma:

$$u(k) = k_I \sum_{j=0}^{k-1} e(j) - k_p x(k) \quad (5.3)$$

donde $e(k) = r(k) - y(k)$ es el error de seguimiento de trayectoria, es decir, la diferencia entre la referencia $r(k)$ y la salida $y(k)$. Sustituyendo $e(k)$ en (5.3):

$$u(k) = k_I \sum_{j=0}^{k-1} (r(j) - y(j)) - k_p x(k) \quad (5.4)$$

Considerando el siguiente cambio de variable en (5.4) de la forma:

$$u(k) = k_I \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} r(j)}_{r_e(j)} - k_I \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} y(j)}_{y_e(j)} - k_p x(k) \quad (5.5)$$

dando como resultado la siguiente ecuación:

$$u(k) = k_I r_e(k) - k_I y_e(k) - k_p x(k) \quad (5.6)$$

Obteniendo la expresión en lazo cerrado utilizando el sistema (5.1) y la ley de control (5.6) se tiene:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) [A_i x(k) + B_i (k_I r_e(k) - k_I y_e(k) - k_p x(k))] \quad (5.7)$$

Considerando que $y_e(j) = \sum_{j=1}^{k-1} y(j)$ de la ecuación (5.6) se hace la siguiente proposición

$$y_e(k+1) = \sum_{j=0}^k y(j) = y(k) + \sum_{k=0}^{k-1} y(k) \quad (5.8)$$

$$= Cx(k) + y_e(k) \quad (5.9)$$

Expresando el sistema en lazo cerrado (5.7) y la ecuación (5.9) como un sistema de vector aumentado se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y_e(k+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A_i & 0 \\ C & I \end{bmatrix}}_{\bar{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ y_e(k) \end{bmatrix}}_{\beta} - \underbrace{\begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} k_p & k_I \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ y_e(k) \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_i k_I \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_i} r_e(k) \right) \quad (5.10)$$

La ecuación de salida tiene la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(k) \\ y_e(k) \end{bmatrix}}_{\bar{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_c \begin{bmatrix} x(k) \\ y_e(k) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

obteniendo entonces,

$$\beta(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \left(\underbrace{(\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K})}_{\mathcal{A}_i} \beta(k) + \mathcal{B}_i r_e(k) \right) \quad (5.12)$$

se define entonces la función lineal, en términos de la ley de control como:

$$z(k) = u(k) = k_I r_e(k) - k_I y_e(k) - k_p x(k) \quad (5.13)$$

En este punto es necesario determinar las matrices del controlador k_I y k_p para estructurar la función lineal a estimar por el observador, para lo cual, se utiliza el enfoque basado en el análisis de estabilidad de Lyapunov, aplicado al sistema de vector aumentado (5.12).

5.2. Análisis de estabilidad del controlador PI

Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V(k) = \beta^T(k) P \beta(k) > 0 \quad (5.14)$$

donde $P = P^T > 0$, con $P \in \mathbb{R}^{n_x + n_y}$. La diferencia de $V(k)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) < 0 \\ &= \beta^T(k+1) P \beta(k+1) - \beta^T(k) P \beta(k) < 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

reemplazado $\beta(k+1)$ de la ecuación (5.12), se obtiene

$$\Delta V(k) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \left(\beta^T(k) [(\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K})^T P (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}) - P] \beta(k) \right) < 0 \quad (5.16)$$

La desigualdad $\Delta V(k) < 0$ se cumple para todo $\beta(k) \neq 0$ si y solo si:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \left((\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K})^T P (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}) \right) - P < 0, \quad (5.17)$$

analizando (5.17) se tiene una desigualdad no lineal al desarrollar la multiplicación de matrices, obteniendo el producto entre las matrices $\bar{K}^T \bar{B}_i^T P B K$, de forma tal que no podría resolverse utilizando las herramientas disponibles en la literatura. Para solucionar este inconveniente se recurre a propiedades de desigualdades matriciales, pre-multiplicando la desigualdad (5.17) por P^{-1} y post-multiplicando por su elemento transpuesto $P^{-T} = P^{-1}$, entonces la negatividad de la desigualdad no es alterada, obteniendo:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \left((P^{-1} \bar{A}_i^T - P^{-1} \bar{K}^T \bar{B}_i^T) P^{-1} (\bar{A}_i P^{-1} - \bar{B}_i \bar{K} P^{-1}) \right) - P^{-1} < 0 \quad (5.18)$$

Aplicando un cambio de variable donde $S = P^{-1}$ y $Y = \bar{K} P^{-1}$ dando como resultado:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \left((S \bar{A}_i^T - Y^T \bar{B}_i^T) S (\bar{A}_i S - \bar{B}_i Y) \right) - S < 0 \quad (5.19)$$

Utilizando el complemento de Schur, mostrado en la Sección 4.3, se puede reescribir la desigualdad (5.19) como

$$\begin{bmatrix} -S & (\bar{A}_i - Y \bar{B}_i) \\ (\bar{A}_i - Y \bar{B}_i)^T & -S \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i = [1, \dots, \kappa] \quad (5.20)$$

Para mantener coherencia en las variables de la LMI, aplicamos la misma estrategia de pre y post-multiplicar a la desigualdad (5.14), siendo

$$\begin{aligned} P^{-1}(P)P^{-1} &> 0 \\ P^{-1} &> 0 \\ S &> 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

A partir de las desigualdades (5.20) y (5.21) y utilizando la herramienta de Yalmip de Matlab para resolver LMIs, se puede obtener una solución que permite obtener los valores del controlador y por consecuente determinar la estructura de la función a estimar (5.13).

A continuación, se muestran los pasos para obtener las ganancias de controlador PI:

Algoritmo:

1. Resolver las LMIs (5.20) y (5.21) para obtener las matrices Y y S .
2. A partir de las matrices Y y S se obtiene $\bar{K} = YS^{-1}$, siendo $\bar{K} = [k_p \quad k_I]$.

5.3. Planteamiento del observador funcional

En esta sección se plantea el observador funcional que estima la ley de control previamente determinada. La Figura 5.1 muestra un diagrama del observador funcional para la estimación de la ley de control que permite controlar nuestro sistema.

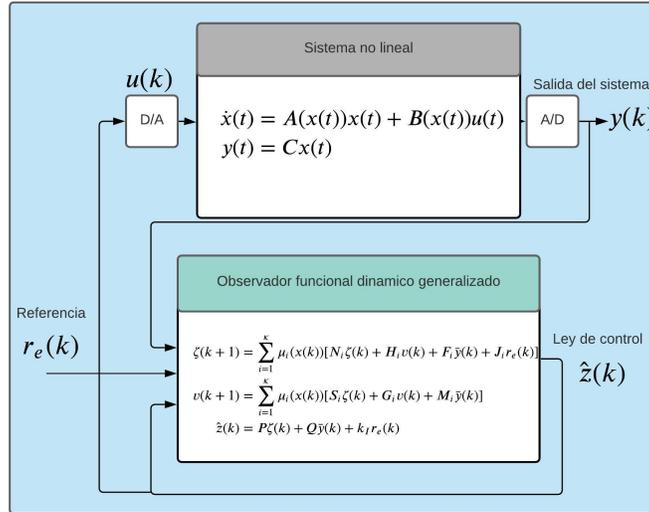


Fig. 5.1. Esquema del observador funcional para la estimación de ley de control

Considere el sistema de vector aumentado en lazo cerrado

$$\beta(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) (\mathcal{A}_i \beta(k) + \mathcal{B}_i r_e(k)) \quad (5.22)$$

$$\bar{y}(k) = \mathcal{C} \beta(k) \quad (5.23)$$

$$z(k) = \mathcal{L} \beta(k) + k_I r_e(k) \quad (5.24)$$

donde $\beta(k) \in \mathbb{R}^{n_x+n_y}$, $r_e \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\bar{y}(k) \in \mathbb{R}^{2n_y}$ y $z(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$. Además $\mathcal{A}_i = \bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times (n_x+n_y)}$, $\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} \bar{B}_i k_I \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times n_u}$, $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_y \times (n_x+n_y)}$ y $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -k_p & -k_I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_y)}$ son matrices conocidas.

Considere el observador funcional dinámico generalizado para el sistema (5.22)-(5.24)

$$\zeta(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) [N_i \zeta(k) + H_i v(k) + F_i \bar{y}(k) + J_i r_e(k)] \quad (5.25)$$

$$v(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) [S_i \zeta(k) + G_i v(k) + M_i \bar{y}(k)] \quad (5.26)$$

$$\hat{z}(k) = P \zeta(k) + Q \bar{y}(k) + k_I r_e(k) \quad (5.27)$$

donde $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estado del observador funcional, $v(k) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar y $\hat{z}(k)$ es el vector de estimación del observador. N_i , H_i , F_i , S_i , L_i , M_i , P y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

Considere una matriz $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times (n_x + n_y)}$ para definir el vector de error transformado $\varepsilon(k) = \zeta(k) - T\beta(k)$ de modo que la dinámica del error de estimación puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) [N_i \varepsilon(k) + (N_i T + F_i \mathcal{C} - T \mathcal{A}_i) \beta(k) \\ + H_i v(k) + (J_i - T \mathcal{B}_i) r_e(k)] \end{aligned} \quad (5.28)$$

usando la definición de $\varepsilon(k)$ en las ecuaciones (5.26) y (5.27), puede ser reescritas como:

$$v(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) [S_i \varepsilon(k) + (S_i T + M_i \mathcal{C}) \beta(k) + G_i v(k)] \quad (5.29)$$

$$\hat{z}(k) = P \varepsilon(k) + (PT + QC) \beta(k) + k_I r_e(k) \quad (5.30)$$

Obteniendo de (5.30)

$$\hat{z}(k) - z(k) = e_z(k) = P \varepsilon(k) \quad (5.31)$$

Suponiendo que las siguientes condiciones se cumplen

- a). $N_i T + F_i \mathcal{C} - T \mathcal{A}_i = 0$
- b). $J_i = T \mathcal{B}_i$
- c). $S_i T + M_i \mathcal{C} = 0$
- d). $PT + QC = \mathcal{L}$

entonces la dinámica del error, formada por (5.28) y (5.29) puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & G_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ v(k) \end{bmatrix}}_{\varphi(k)} \quad (5.32)$$

en este caso si las matrices \mathbb{A}_i son estables, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} e_z(k) = 0$.

Tomando como referencia la parametrización mostrada en la Sección 4.2, se define una matriz $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times (n_x + n_y)}$ de rango fila completo, de forma tal que $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ \mathcal{C} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n_y + q_0) \times (n_x + n_y)}$ es de rango columna completo, y además $\Omega = \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{C} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(3n_y + n_x) \times (n_x + n_y)}$.

Obteniendo entonces, la siguiente parametrización:

$$T = E\Omega^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = E\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$N_i = N_{1i} - Z_i N_2, \quad \bar{K}_i = \bar{K}_{1i} - Z_i \bar{K}_2 \quad (5.34)$$

donde $\bar{K}_i = F_i - N_i K$, $N_{1i} = T\mathcal{A}_i\Sigma^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $N_2 = (I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{K}_{1i} = T\mathcal{A}_i\Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$,

$\bar{K}_2 = (I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ y Z_i es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios.

Igualmente, se obtienen las formas de las matrices S_i , M_i , P y Q , como:

$$S_i = -W_{1i}(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_i = -W_{1i}(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$P = \mathcal{L}\Sigma^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \mathcal{L}\Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

donde W_{1i} es una matriz de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios.

Utilizando la matriz N_i de la ecuación (5.34) y la matriz S_i de la ecuación (5.35), la dinámica de error del observador (5.32) puede escribirse como:

$$\varphi(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(\rho(k)) (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \varphi(k) \quad (5.37)$$

donde $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Z_i & H_i \\ W_{1i} & G_i \end{bmatrix}$ y $\varphi(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$.

El problema ahora consiste en encontrar la matriz \mathbb{Y}_i , tal que (5.37) sea estable. En la Sección 4.3 se muestra el análisis de estabilidad basado en Lyapunov, teniendo que resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI) para obtener la matriz \mathbb{Y}_i .

Es importante mencionar que en este diseño el observador estima la función $z(k)$ que representa la ley de control para el seguimiento de trayectoria. La función $z(k)$ requiere ser conocida previamente al diseño del observador, es decir, el diseño del observador parte de conocer el modelo matemático del sistema (la dinámica del sistema, la salida y la función que se desea estimar). Por esto, la metodología que se desarrolló en este trabajo de investigación es, primero determinar las ganancias k_I y k_p del controlador, como se muestra en la sección 5.2 y posteriormente diseñar el observador funcional para estimar la ley de control.

5.4. Simulación 1 del controlador

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar que la ley de control que estima el observador dinámico generalizado permite el seguimiento de trayectoria para el manipulador robótico. La trayectoria realizada es la mostrada en la Figura 3.25 un círculo con centro en (0.37,0.67) y radio 0.15.

Como parámetros para la validación del observador funcional se utilizó un paso de integración de $T_e = 0.01$ y un tiempo de discretización de $T_d = 0.1$, utilizando entonces el modelo T-S discreto de la Sección 3.3.2.

Obtenemos primero las ganancias del controlador, para determinar la función a estimar, siguiendo el algoritmo mostrado en la Sección 5.2.

1. Resolvemos las LMIs (5.20) y (5.21) para obtener las matrices

$$S = \begin{bmatrix} 0.7808 & 0.0184 & -0.1334 & 0.0005 & -0.1008 & 0 \\ 0.0184 & 1.3842 & 0.0005 & -0.1166 & 0 & -0.1058 \\ -0.1334 & 0.0005 & 0.3383 & 0 & 0.2460 & 0 \\ 0.0005 & -0.1166 & 0 & 0.3378 & 0 & 0.2468 \\ -0.1008 & 0 & 0.2460 & 0 & 1.3327 & 0 \\ 0 & -0.1058 & 0 & 0.2468 & 0 & 1.3321 \end{bmatrix} y$$

$$Y = \begin{bmatrix} 19.5984 & 4.0980 & 0.7569 & 0.1312 & 0.0982 & 0.1300 \\ 0.6371 & 2.2186 & 0.0186 & 0.1122 & 0.0016 & 0.0962 \end{bmatrix}$$

2. A partir de las matrices Y y S se obtiene

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 27.2515 & 2.7024 & 13.2009 & 1.2192 & -0.3027 & 0.0859 \\ 0.8417 & 1.6685 & 0.3894 & 0.8760 & -0.0071 & 0.0425 \end{bmatrix}$$

de la cual se obtienen las ganancias del controlador

$$k_I = \begin{bmatrix} -0.3027 & 0.0859 \\ -0.0071 & 0.0425 \end{bmatrix} \text{ y } k_p = \begin{bmatrix} 27.2515 & 2.7024 & 13.2009 & 1.2192 \\ 0.8417 & 0.8417 & 0.3894 & 0.8760 \end{bmatrix}$$

Una vez determinadas las ganancias del controlador, y considerando el sistema T-S discreto descrito en la Sección 3.3.2, podemos obtener el sistema de vector aumentado en lazo cerrado de las ecuaciones (5.22)-(5.24). Siguiendo el algoritmo de diseño del observador de la Sección 4.3, pero aplicado al sistema de vector aumentado para estimar la ley de control, se obtiene:

1. Se define una matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, de tal forma que la matriz Σ es de rango columna completo.

2. Se calculan las matrices

$$N_{11} = \begin{bmatrix} 0.9865 & 0.0878 & -0.1064 & -0.1214 & -0.1092 & 0.0322 \\ 0.0688 & 0.0435 & 0.3787 & -0.3702 & -0.0358 & 0.4987 \\ 0.0687 & -0.1574 & 0.5531 & -0.0950 & 0.1093 & 0.5219 \\ 0.0035 & -0.0574 & -0.0048 & 0.1821 & -0.0299 & 0.0622 \\ 0 & -0.0599 & 0.0890 & 0.2146 & 0.1495 & -0.0290 \\ 0.0687 & -0.1192 & 0.4383 & -0.3437 & -0.0820 & 0.5984 \end{bmatrix},$$

$$N_{12} = \begin{bmatrix} 0.9862 & 0.1399 & -0.1949 & -0.0805 & -0.1895 & 0.0479 \\ -0.0361 & 0.4481 & 0.0214 & -0.0931 & -0.3305 & 0.4915 \\ -0.0360 & 0.2197 & 0.2239 & 0.1662 & -0.1612 & 0.5139 \\ 0.0035 & -0.0453 & -0.0244 & 0.1918 & -0.0503 & 0.0698 \\ 0 & -0.0607 & 0.0891 & 0.2146 & 0.1497 & -0.0284 \\ -0.0360 & 0.2580 & 0.1092 & -0.0824 & -0.3524 & 0.5904 \end{bmatrix},$$

$$N_{13} = \begin{bmatrix} 0.9867 & 0.0846 & -0.1021 & -0.1232 & -0.1050 & 0.0310 \\ 0.0687 & 0.0353 & 0.3906 & -0.3747 & -0.0242 & 0.4957 \\ 0.0685 & -0.1649 & 0.5641 & -0.0991 & 0.1199 & 0.5191 \\ 0.0035 & -0.0582 & -0.0036 & 0.1817 & -0.0287 & 0.0619 \\ 0 & -0.0600 & 0.0890 & 0.2146 & 0.1495 & -0.0290 \\ 0.0685 & -0.1267 & 0.4493 & -0.3477 & -0.0714 & 0.5956 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 N_{14} &= \begin{bmatrix} 0.9863 & 0.1380 & -0.1936 & -0.0815 & -0.1887 & 0.0485 \\ -0.0363 & 0.4585 & 0.0148 & -0.0883 & -0.3345 & 0.4883 \\ -0.0362 & 0.2296 & 0.2177 & 0.1708 & -0.1649 & 0.5109 \\ 0.0035 & -0.0460 & -0.0240 & 0.1915 & -0.0500 & 0.0699 \\ 0 & -0.0607 & 0.0891 & 0.2146 & 0.1497 & -0.0284 \\ -0.0362 & 0.2679 & 0.1029 & -0.0778 & -0.3562 & 0.5874 \end{bmatrix}, \\
 N_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3846 & -0.1538 & 0 & 0.0769 & -0.2308 \\ 0 & -0.1538 & 0.4615 & 0 & -0.2308 & -0.3077 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0769 & -0.2308 & 0 & 0.6154 & 0.1538 \\ 0 & -0.2308 & -0.3077 & 0 & 0.1538 & 0.5385 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3846 & 0.1538 & 0 & -0.0769 & 0.2308 \\ 0 & -0.0769 & 0.2308 & 0 & 0.3846 & -0.1538 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 T_1 &= \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 T_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 \\ 0 & 0 & -0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 \\ 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix}, \\
 K_1 &= \begin{bmatrix} 0.5000 & 0 & -0.5000 & -0.5000 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5000 & 0 \\ 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 7.8637 & 9.6802 & -69.6081 & -176.3369 \\ 0.2640 & -3.8336 & -2.5967 & -5.9704 \end{bmatrix}, \\
 P &= \begin{bmatrix} -350.0119 & -39.9217 & 70.1350 & 121.9131 & 139.6977 & -69.5628 \\ -10.5970 & -5.8630 & 0.2269 & 3.7083 & 5.1878 & -4.9609 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Resolviendo las LMIs (4.39) y (4.40) se obtiene

$$X = \begin{bmatrix}
 485.0713 & -38.0484 & -17.0533 & -103.2989 & 0 & -17.0533 & 0 & 0 & 0 \\
 -38.0484 & 258.0080 & -93.6565 & 4.2878 & 0 & -93.6565 & 0 & 0 & 0 \\
 -17.0533 & -93.6565 & 272.1284 & -0.9684 & 0 & -85.2331 & 0 & 0 & 0 \\
 -103.2989 & 4.2878 & -0.9684 & 378.9085 & 0 & -0.9684 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.0000 & 0 & 0 & 0 & 357.3616 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\
 -17.0533 & -93.6565 & -85.2331 & -0.9684 & 0.0000 & 272.1284 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 357.3616 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 357.3616 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 357.3616 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 357.3616 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}_1 = \begin{bmatrix}
 0 & 38.9928 & -25.5365 & 31.9524 & -16.6182 & -13.4563 & -31.9524 & -38.9928 \\
 0 & 26.3710 & -13.4059 & 23.9913 & -6.5873 & -12.9651 & -23.9913 & -26.3710 \\
 0 & 25.9093 & -12.9900 & 24.4788 & -6.2391 & -12.9193 & -24.4788 & -25.9093 \\
 0 & 7.7978 & 9.1480 & 12.6743 & 14.8579 & -16.9458 & -12.6743 & -7.7978 \\
 0 & 7.6789 & 9.4463 & 12.6597 & 15.3088 & -17.1253 & -12.6597 & -7.6789 \\
 0 & 25.9842 & -13.2146 & 23.9922 & -6.6134 & -12.7696 & -23.9922 & -25.9842 \\
 0 & 7.7538 & 9.2218 & 12.1731 & 14.9345 & -16.9756 & -12.1731 & -7.7538 \\
 0 & 7.7538 & 9.2218 & 12.1731 & 14.9345 & -16.9756 & -12.1731 & -7.7538 \\
 0 & 7.7538 & 9.2218 & 12.1731 & 14.9345 & -16.9756 & -12.1731 & -7.7538 \\
 0 & 7.7538 & 9.2218 & 12.1731 & 14.9345 & -16.9756 & -12.1731 & -7.7538 \\
 -42.1547 & 0 & -6.2111 & -6.2111 & -6.2111 & -6.2111 & -6.2111 & 0 \\
 -19.9932 & 0 & -8.4125 & -8.4125 & -8.4125 & -8.4125 & -8.4125 & 0 \\
 -19.2292 & 0 & -8.4424 & -8.4424 & -8.4424 & -8.4424 & -8.4424 & 0 \\
 24.0059 & 0 & -15.3781 & -15.3781 & -15.3781 & -15.3781 & -15.3781 & 0 \\
 24.7551 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & 0 \\
 -19.8280 & 0 & -8.4424 & -8.4424 & -8.4424 & -8.4424 & -8.4424 & 0 \\
 24.1563 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & 0 \\
 24.1563 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & 0 \\
 24.1563 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & 0 \\
 24.1563 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}_2 = \begin{bmatrix}
 0 & 40.8082 & -15.1302 & 28.8903 & -1.0892 & -25.6780 & -28.8903 & -40.8082 \\
 0 & -5.1844 & 16.6756 & 6.6651 & 18.1302 & -11.4913 & -6.6651 & 5.1844 \\
 0 & -5.5906 & 17.0385 & 7.1794 & 18.4351 & -11.4480 & -7.1794 & 5.5906 \\
 0 & 8.0913 & 9.0867 & 12.6635 & 14.7945 & -17.1781 & -12.6635 & -8.0913 \\
 0 & 7.9390 & 9.3838 & 12.6367 & 15.2257 & -17.3229 & -12.6367 & -7.9390 \\
 0 & -5.5157 & 16.8140 & 6.6928 & -18.0608 & -11.2983 & -6.6928 & 5.5157 \\
 0 & 8.0139 & 9.1592 & 12.1501 & 14.8514 & -17.1731 & -12.1501 & -8.0139 \\
 0 & 8.0139 & 9.1592 & 12.1501 & 14.8514 & -17.1731 & -12.1501 & -8.0139 \\
 0 & 8.0139 & 9.1592 & 12.1501 & 14.8514 & -17.1731 & -12.1501 & -8.0139 \\
 0 & 8.0139 & 9.1592 & 12.1501 & 14.8514 & -17.1731 & -12.1501 & -8.0139 \\
 & -16.2195 & 0 & -15.6245 & -15.6245 & -15.6245 & -15.6245 & \\
 & 34.8058 & 0 & -13.4759 & -13.4759 & -13.4759 & -13.4759 & \\
 & 35.4736 & 0 & -13.4956 & -13.4956 & -13.4956 & -13.4956 & \\
 & 23.8812 & 0 & -15.4007 & -15.4007 & -15.4007 & -15.4007 & \\
 & 24.6096 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 34.8747 & 0 & -13.4956 & -13.4956 & -13.4956 & -13.4956 & \\
 & 24.0107 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.0107 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.0107 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.0107 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.0107 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 0 & 39.8697 & -26.7340 & 32.4299 & -17.7950 & -13.1357 & -32.4299 & -39.8697 \\
 0 & 26.9672 & -14.2447 & 24.3151 & -7.4204 & -12.7225 & -24.3151 & -26.9672 \\
 0 & 26.5049 & -13.8276 & 24.8024 & -7.0708 & -12.6773 & -24.8024 & -26.5049 \\
 0 & 7.8024 & 9.1423 & 12.6784 & 14.8532 & -16.9448 & -12.6784 & -7.8024 \\
 0 & 7.6823 & 9.4429 & 12.6633 & 15.3065 & -17.1252 & -12.6633 & -7.6823 \\
 0 & 26.5797 & -14.0521 & 24.3159 & -7.4451 & -12.5276 & -24.3159 & -26.5797 \\
 0 & 07.7571 & 9.2183 & 12.1767 & 14.9322 & -16.9755 & -12.1767 & -7.7571 \\
 0 & 7.7571 & 9.2183 & 12.1767 & 14.9322 & -16.9755 & -12.1767 & -7.7571 \\
 0 & 7.7571 & 9.2183 & 12.1767 & 14.9322 & -16.9755 & -12.1767 & -7.7571 \\
 0 & 7.7571 & 9.2183 & 12.1767 & 14.9322 & -16.9755 & -12.1767 & -7.7571 \\
 & -44.5290 & 0 & -5.7443 & -5.7443 & -5.7443 & -5.7443 & \\
 & -21.6651 & 0 & -8.0734 & -8.0734 & -8.0734 & -8.0734 & \\
 & -20.8983 & 0 & -8.1041 & -8.1041 & -8.1041 & -8.1041 & \\
 & 23.9956 & 0 & -15.3770 & -15.3770 & -15.3770 & -15.3770 & \\
 & 24.7494 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & -21.4972 & 0 & -8.1041 & -8.1041 & -8.1041 & -8.1041 & \\
 & 24.1505 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.1505 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.1505 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.1505 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 & 24.1505 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & \\
 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 42.3868 & -16.2135 & 29.6330 & -1.7401 & -26.1733 & -29.6330 & -42.3868 \\ 0 & -6.0800 & 17.2733 & 6.2494 & 18.4755 & -11.1933 & -6.2494 & 6.0800 \\ 0 & -6.4841 & 17.6348 & 6.7647 & 18.7796 & -11.1508 & -6.7647 & 6.4841 \\ 0 & 8.1070 & 9.0758 & 12.6696 & 14.7877 & -17.1828 & -12.6696 & -8.1070 \\ 0 & 7.9503 & 9.3758 & 12.6408 & 15.2207 & -17.3261 & -12.6408 & -7.9503 \\ 0 & -6.4092 & 17.4103 & 6.2782 & 18.4053 & -11.0010 & -6.2782 & 6.4092 \\ 0 & 8.0252 & 9.1512 & 12.1542 & 14.8464 & -17.1764 & -12.1542 & -8.0252 \\ 0 & 8.0252 & 9.1512 & 12.1542 & 14.8464 & -17.1764 & -12.1542 & -8.0252 \\ 0 & 8.0252 & 9.1512 & 12.1542 & 14.8464 & -17.1764 & -12.1542 & -8.0252 \\ 0 & 8.0252 & 9.1512 & 12.1542 & 14.8464 & -17.1764 & -12.1542 & -8.0252 \\ -17.9536 & 0 & -15.7085 & -15.7085 & -15.7085 & -15.7085 & -15.7085 & -15.7085 \\ 35.7489 & 0 & -13.4143 & -13.4143 & -13.4143 & -13.4143 & -13.4143 & -13.4143 \\ 36.4145 & 0 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 \\ 23.8635 & 0 & -15.4010 & -15.4010 & -15.4010 & -15.4010 & -15.4010 & -15.4010 \\ 24.5965 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 \\ 35.8156 & 0 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 & -13.4342 \\ 23.9977 & & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 \\ 23.9977 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 \\ 23.9977 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 \\ 23.9977 & 0 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 & -15.4149 \end{bmatrix}$$

4. Obteniendo entonces los valores para las matrices \mathbb{Y}_i

$$\mathbb{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1451 & -0.0786 & 0.1281 & -0.0415 & -0.0664 & -0.1281 & -0.1451 & -0.1202 \\ 0 & 0.3667 & -0.1882 & 0.3358 & -0.0939 & -0.1785 & -0.3358 & -0.3667 & -0.2821 \\ 0 & 0.3360 & -0.1712 & 0.3107 & -0.0846 & -0.1648 & -0.3107 & -0.3360 & -0.2558 \\ 0 & 0.0577 & 0.0040 & 0.0662 & 0.0285 & -0.0617 & -0.0662 & -0.0577 & -0.2558 \\ 0 & 0.0215 & 0.0264 & 0.0354 & 0.0428 & -0.0479 & -0.0354 & -0.0215 & 0.0325 \\ 0 & 0.3362 & -0.1719 & 0.3093 & -0.0856 & -0.1643 & -0.3093 & -0.3362 & 0.0693 \\ 0 & 0.0217 & 0.0258 & 0.0341 & 0.0418 & -0.0475 & -0.0341 & -0.0217 & -0.2575 \\ 0 & 0.0217 & 0.0258 & 0.0341 & 0.0418 & -0.0475 & -0.0341 & -0.0217 & 0.0676 \\ 0 & 0.0217 & 0.0258 & 0.0341 & 0.0418 & -0.0475 & -0.0341 & -0.0217 & 0.0676 \\ 0 & 0.0217 & 0.0258 & 0.0341 & 0.0418 & -0.0475 & -0.0341 & -0.0217 & 0.0676 \\ 0 & -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 \\ 0 & -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 \\ 0 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 \\ 0 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 \\ 0 & -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 \\ 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ 0 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 \\ 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Y}_4 = \begin{bmatrix}
 0 & 0.0900 & 0.0023 & 0.0883 & 0.0412 & -0.0923 & -0.0883 & -0.0900 \\
 0 & -0.0471 & 0.2125 & 0.1064 & 0.2389 & -0.1654 & -0.1064 & 0.0471 \\
 0 & -0.0497 & 0.2009 & 0.0973 & 0.2238 & -0.1512 & -0.0973 & 0.0497 \\
 0 & 0.0462 & 0.0232 & 0.0568 & 0.0487 & -0.0694 & -0.0568 & -0.0462 \\
 0 & 0.0222 & 0.0262 & 0.0354 & 0.0426 & -0.0485 & -0.0354 & -0.0222 \\
 0 & -0.0495 & 0.2003 & 0.0959 & 0.2227 & -0.1507 & -0.0959 & 0.0495 \\
 0 & 0.0225 & 0.0256 & 0.0340 & 0.0415 & -0.0481 & -0.0340 & -0.0225 \\
 0 & 0.0225 & 0.0256 & 0.0340 & 0.0415 & -0.0481 & -0.0340 & -0.0225 \\
 0 & 0.0225 & 0.0256 & 0.0340 & 0.0415 & -0.0481 & -0.0340 & -0.0225 \\
 0 & 0.0225 & 0.0256 & 0.0340 & 0.0415 & -0.0481 & -0.0340 & -0.0225 \\
 0.0435 & 0 & -0.0717 & -0.0717 & -0.0717 & -0.0717 & -0.0717 \\
 0.4515 & 0 & -0.1866 & -0.1866 & -0.1866 & -0.1866 & -0.1866 \\
 0.4247 & 0 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 \\
 0.0719 & 0 & -0.0590 & -0.0590 & -0.0590 & -0.0590 & -0.0590 \\
 0.0688 & 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\
 0.4230 & 0 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 \\
 0.0672 & 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\
 0.0672 & 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\
 0.0672 & 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\
 0.0672 & 0 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431
 \end{bmatrix}$$

5. Finalmente, se obtienen el resto de matrices del observador funcional:

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 & -0.0402 \\ -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 & -0.1153 \\ -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 \\ -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 & -0.0508 \\ -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 & -0.1069 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -0.0716 & -0.0716 & -0.0716 & -0.0716 \\ -0.1874 & -0.1874 & -0.1874 & -0.1874 \\ -0.1729 & -0.1729 & -0.1729 & -0.1729 \\ -0.0589 & -0.0589 & -0.0589 & -0.0589 \\ -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ -0.1729 & -0.1729 & -0.1729 & -0.1729 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0.0384 & -0.0384 & -0.0384 & -0.0384 \\ -0.1106 & -0.1106 & -0.1106 & -0.1106 \\ -0.1025 & -0.1025 & -0.1025 & -0.1025 \\ -0.0503 & -0.0503 & -0.0503 & -0.0503 \\ -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ -0.1025 & -0.1025 & -0.1025 & -0.1025 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} -0.0717 & -0.0717 & -0.0717 & -0.0717 \\ -0.1866 & -0.1866 & -0.1866 & -0.1866 \\ -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 \\ -0.0590 & -0.0590 & -0.0590 & -0.0590 \\ -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 & -0.1723 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.5674 & 0.4561 & -0.1146 & -0.0067 \\ 0.1507 & 0.4783 & 0.2059 & 0.0344 \\ 0.5132 & 0.0787 & -0.1345 & 0.0343 \\ 0.4072 & 0.0287 & -0.0156 & 0.0017 \\ 0.3927 & 0.0300 & -0.3808 & -0.0000 \\ 0.1375 & 0.0596 & 0.2125 & 0.0343 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.5472 & 0.4300 & -0.1991 & -0.0069 \\ 0.0646 & 0.2759 & -0.1726 & -0.0180 \\ 0.4349 & -0.1099 & -0.4866 & -0.0180 \\ 0.4024 & 0.0227 & -0.0356 & 0.0017 \\ 0.3927 & 0.0303 & -0.3806 & -0.0000 \\ 0.0592 & -0.1290 & -0.1396 & -0.0180 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= \begin{bmatrix} 0.5682 & 0.4577 & -0.1102 & -0.0067 \\ 0.1530 & 0.4824 & 0.2175 & 0.0343 \\ 0.5153 & 0.0825 & -0.1238 & 0.0343 \\ 0.4074 & 0.0291 & -0.0144 & 0.0017 \\ 0.3927 & 0.0300 & -0.3808 & 0 \\ 0.1396 & 0.0633 & 0.2232 & 0.0343 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} 0.5476 & 0.4310 & -0.1980 & -0.0068 \\ 0.0623 & 0.2707 & -0.1780 & -0.0181 \\ 0.4327 & -0.1148 & -0.4917 & -0.0181 \\ 0.4025 & 0.0230 & -0.0353 & 0.0017 \\ 0.3927 & 0.0304 & -0.3806 & 0 \\ 0.0570 & -0.1339 & -0.1447 & -0.0181 \end{bmatrix}, \\
 J_1 &= \begin{bmatrix} 0.0070 & 0.0194 \\ -0.0290 & -0.1561 \\ -0.0290 & -0.1558 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0290 & -0.1558 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0.0067 & -0.0388 \\ 0.0133 & -0.1583 \\ 0.0132 & -0.1580 \\ 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 \\ 0.0132 & -0.1580 \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 0.0069 & 0.0195 \\ -0.0290 & -0.1545 \\ -0.0289 & -0.1542 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0289 & -0.1542 \end{bmatrix}, \\
 J_4 &= \begin{bmatrix} 0.0066 & -0.0387 \\ 0.0134 & -0.1566 \\ 0.0133 & -0.1564 \\ 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 \\ 0.0133 & -0.1564 \end{bmatrix}, S_1 = S_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0217 & -0.0258 & -0.0341 & -0.0418 & 0.0475 \\ 0 & -0.0217 & -0.0258 & -0.0341 & -0.0418 & 0.0475 \\ 0 & -0.0217 & -0.0258 & -0.0341 & -0.0418 & 0.0475 \\ 0 & -0.0217 & -0.0258 & -0.0341 & -0.0418 & 0.0475 \end{bmatrix}, \\
 S_2 = S_4 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0224 & -0.0256 & -0.0340 & -0.0416 & 0.0481 \\ 0 & -0.0224 & -0.0256 & -0.0340 & -0.0416 & 0.0481 \\ 0 & -0.0224 & -0.0256 & -0.0340 & -0.0416 & 0.0481 \\ 0 & -0.0224 & -0.0256 & -0.0340 & -0.0416 & 0.0481 \end{bmatrix}, \\
 G_1 = G_2 = G_3 = G_4 &= \begin{bmatrix} -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \\ -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 & -0.0431 \end{bmatrix}, \\
 M_1 = M_3 &= \begin{bmatrix} 0.0170 & 0.0108 & -0.0338 & 0 \\ 0.0170 & 0.0108 & -0.0338 & 0 \\ 0.0170 & 0.0108 & -0.0338 & 0 \\ 0.0170 & 0.0108 & -0.0338 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = M_4 = \begin{bmatrix} 0.0170 & 0.0112 & -0.0336 & 0 \\ 0.0170 & 0.0112 & -0.0336 & 0 \\ 0.0170 & 0.0112 & -0.0336 & 0 \\ 0.0170 & 0.0112 & -0.0336 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Una vez calculadas las ganancias del observador, se procede a realizar la simulación siguiendo el esquema presentado en la Figura 5.1. La simulación se realizó en Matlab R2020a y las condiciones iniciales para el sistema fueron $x(0) = [4, 4, 4, 4]^T$, $\zeta(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, $v(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

En la Figura 5.2 se muestran las posiciones angulares deseadas, que corresponden a la formación del círculo de la Figura 3.25. En la figura se puede ver la comparación entre la referencia y el comportamiento del sistema no lineal, que es alimentado por la ley de control que genera el observador funcional.

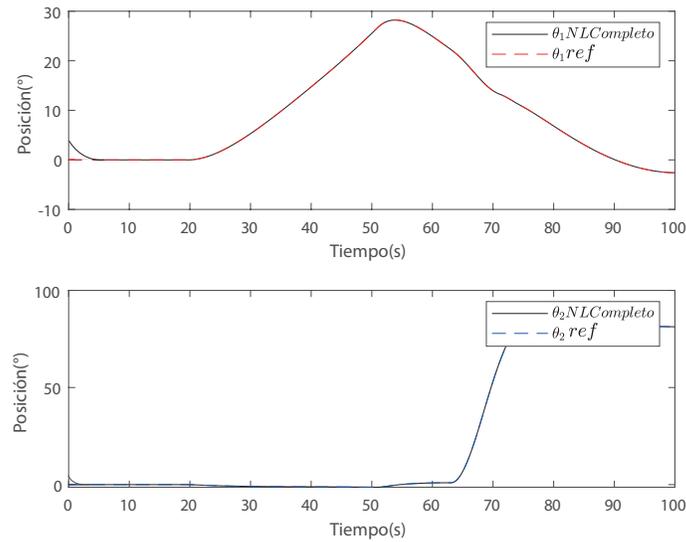


Fig. 5.2. Simulación 1: Posición angular de referencia y del sistema no lineal controlado.

En la Figura 5.3 se muestra la ley de control estimada por el observador funcional (líneas roja y azul) y la ley de control generada por el controlador PI asumiendo que se tienen disponibles todas las variables de estado para realizar la retroalimentación, es decir, sin considerar las estimaciones del observador. En general, se puede apreciar que la estimación sigue la forma de onda de la ley de control del PI, teniendo ligeras variaciones, que pueden deberse a la incertidumbre entre el modelo no lineal completo y el T-S discreto.

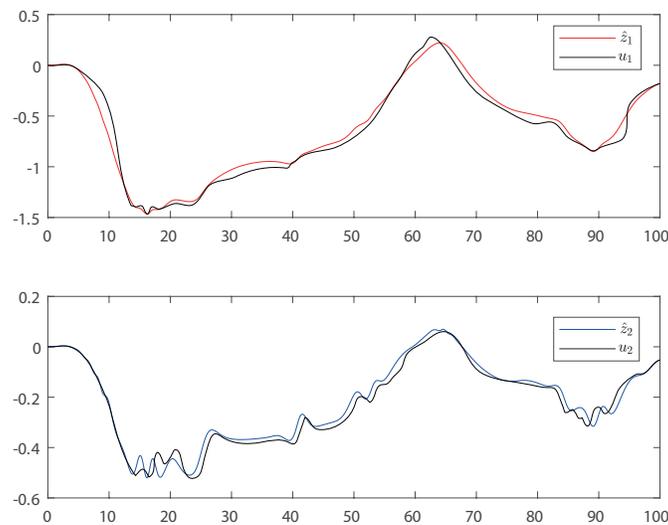


Fig. 5.3. Simulación 1: Comparación de la ley de control.

En la Figura 5.4 se muestra el espacio de trabajo del manipulador, así como el círculo de referencia para el seguimiento de trayectoria en un plano $x - y$, se muestra también que la trayectoria deseada está dentro del espacio de trabajo del manipulador.

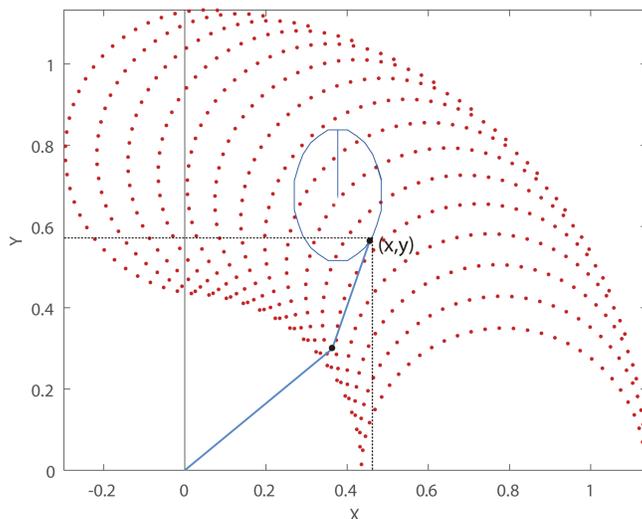


Fig. 5.4. Simulación 1: Área de trabajo del manipulador robótico con la referencia 1

5.5. Simulación 2 del controlador

Objetivo de la simulación: En esta simulación se muestra el desempeño del esquema de control al considerar un círculo que tiene parte de él fuera del área de trabajo del robot. En la Figura 5.5 se muestra la referencia que se utiliza para el sistema la cual es un círculo con centro en $(0.87,0.6)$ y radio 0.15.

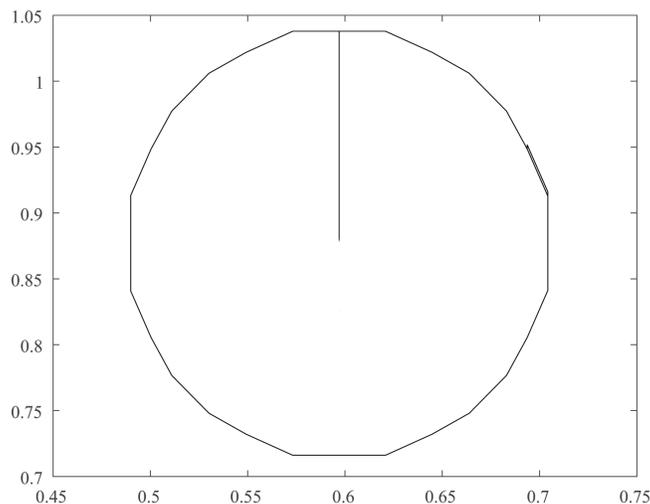


Fig. 5.5. Simulación 2: Referencia para el seguimiento de trayectoria.

Para esta simulación se utilizaron las matrices del observador funcional de la Sección 5.4, donde se considera el sistema T-S discreto con un tiempo de discretización $T_d = 0.1$ mostrado en la Sección 3.3.2. En la Figura 5.6 se muestran las posiciones angulares que corresponden al círculo.

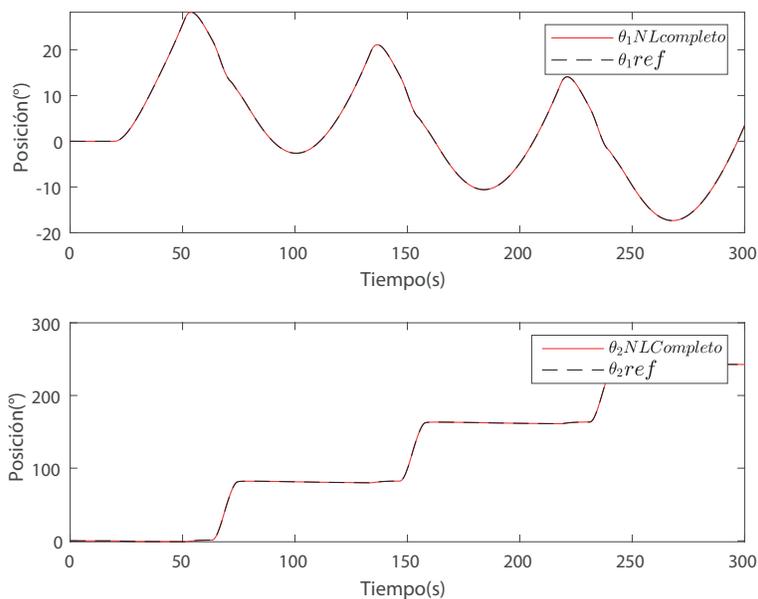


Fig. 5.6. Simulación 2: Comportamiento de los ángulos del manipulador.

La ley de control, que en este enfoque es estimada por el observador funcional, se muestra en la Figura 5.7.

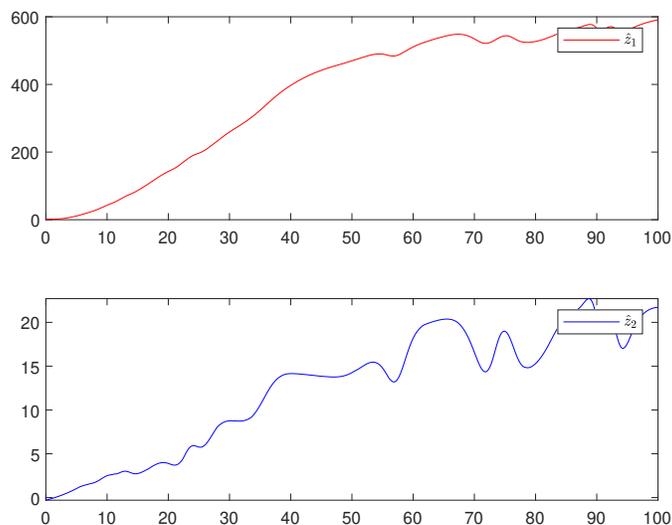


Fig. 5.7. Simulación 2: Ley de control estimada.

En la Figura 5.8 se muestra el comportamiento de los eslabones al utilizar una referencia circular que está en una sección fuera del espacio de trabajo del robot la cual está marcada en rojo.

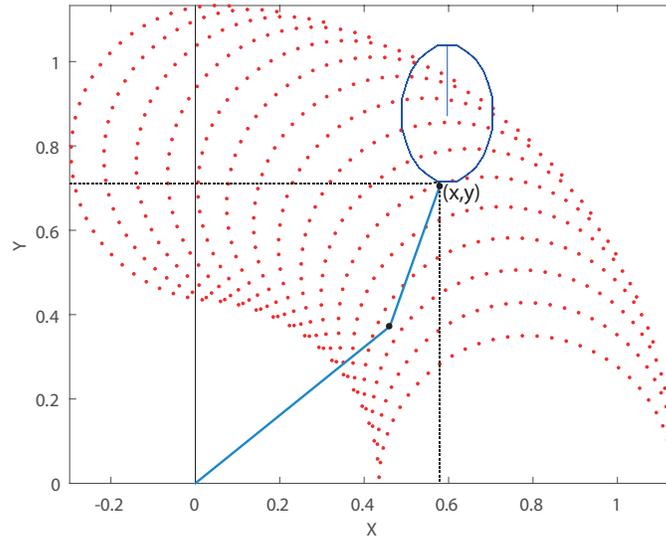


Fig. 5.8. Simulación 2: Área de funcionamiento del manipulador robótico.

En esta prueba se puede concluir que cuando se tiene una sección del círculo fuera del espacio de trabajo del manipulador, las posiciones angulares muestran un comportamiento tipo senoidal en θ_1 , y en el eslabón 2 los datos generados no representan algunas posiciones posibles del manipulador.

5.6. Simulación 3 del controlador

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar el espacio de trabajo del manipulador robótico cuanto todo el círculo está fuera del área de trabajo del robot.

Para llevar a cabo la simulación se utilizaron las matrices del observador funcional que se calcularon en la Sección 5.4, donde se considera el sistema T-S discreto con un tiempo de discretización $T_d = 0.1$ mostrado en la Sección 3.3.2.

En la Figura 5.9 se muestra círculo propuesto para el seguimiento de trayectoria con centro en $(0.97,0.97)$ y radio 0.15.

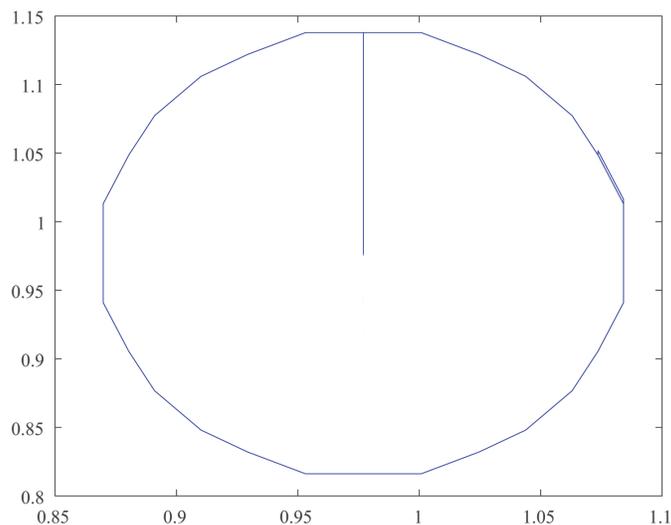


Fig. 5.9. Simulación 3: Referencia para el seguimiento de trayectoria.

En la Figura 5.10 se muestra el espacio de trabajo del robot, donde el círculo propuesto se encuentra fuera de esta región.

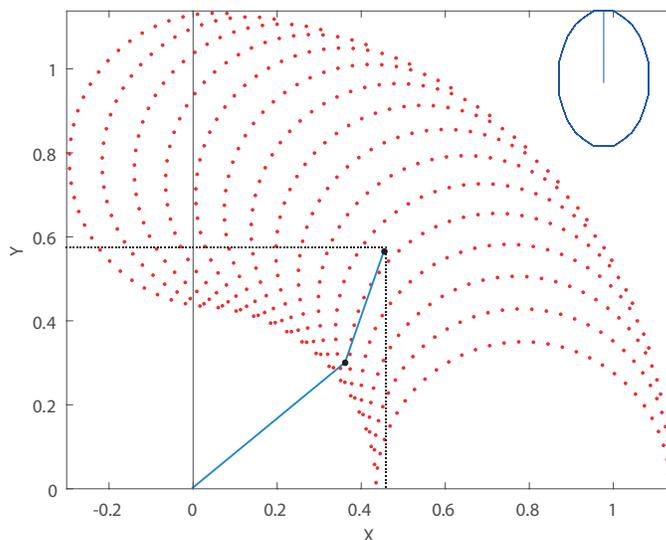


Fig. 5.10. Simulación 3: Área de funcionamiento del manipulador robótico.

En la Figura 5.11 se muestran las posiciones angulares, se puede observar que la posición tiene un comportamiento indeterminado, llegando a valores grandes al considerar una colocación fuera del alcance del robot manipulador.

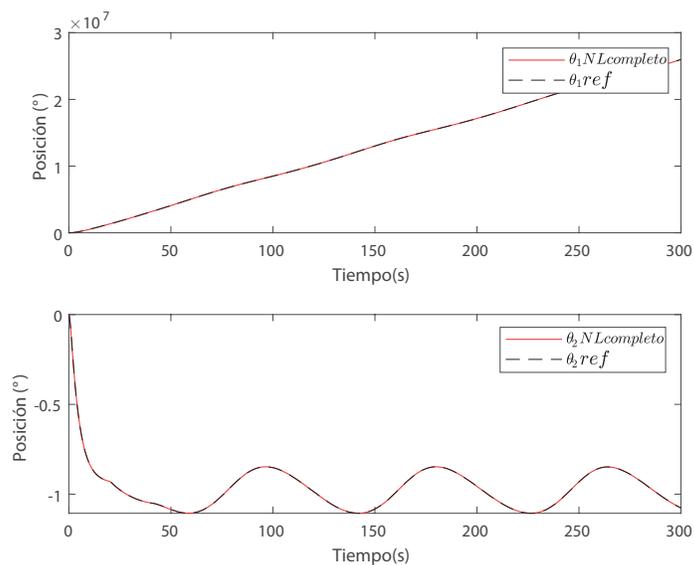


Fig. 5.11. Simulación 3: Comportamiento de los ángulos del manipulador.

La ley de control, que estima el observador funcional, se muestra en la Figura 5.12.

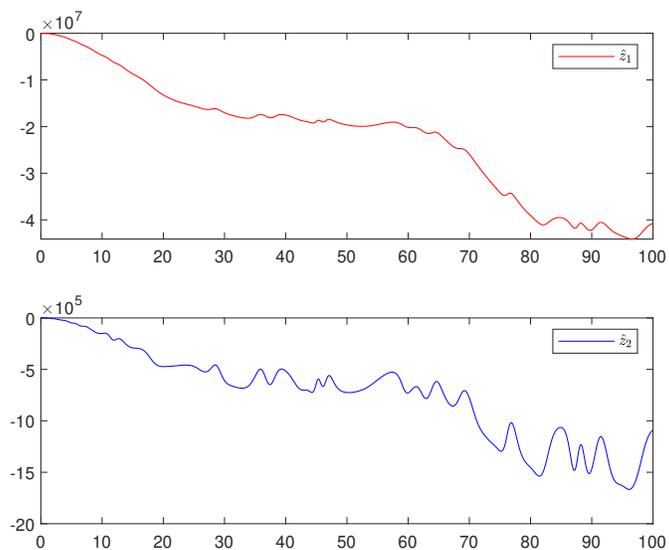


Fig. 5.12. Simulación 3: Ley de control.

Como conclusión de esta prueba, cuando se tiene el círculo de referencia fuera del espacio de trabajo del manipulador las posiciones angulares de este, muestran un comportamiento que tiende a valores grandes, como se muestra en la Figura 5.11.

5.7. Simulación 4 cambios en la masa

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar el comportamiento del manipulador robótico controlado, bajo escenarios de cambio de la masa del segundo eslabón, comparándolo con la trayectoria de referencia a seguir.

Para llevar a cabo la simulación se utilizaron las matrices del observador funcional que se calcularon en la Sección 5.4, donde se considera el sistema T-S discreto con un tiempo de discretización $T_d = 0.1$ mostrado en la Sección 3.3.2, así también, los parámetros de la Tabla 3.1 con únicamente variaciones en la masa m_2 agregando un +20 %, +30 % y +50 % de su valor nominal.

Se define una trayectoria circular con centro en $(0.37, 0.67)$ y radio 0.15 como se muestra en la Figura 5.13.

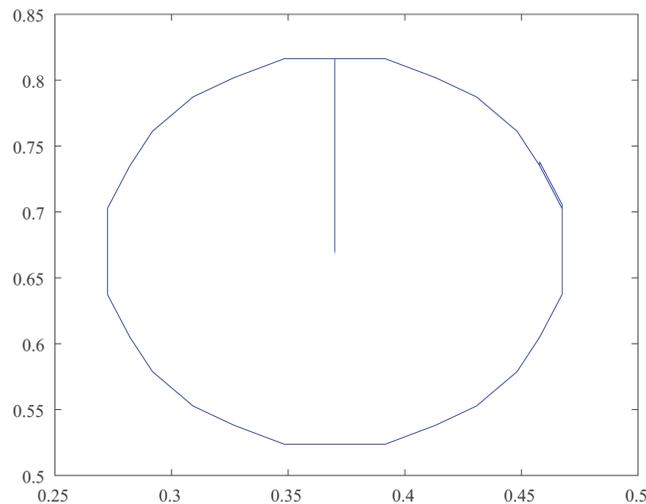


Fig. 5.13. Trayectoria de referencia para las posiciones angulares

Cuya interpretación en movimiento angular de los eslabones se muestra en la Figura 5.14, mostrando diferentes escenarios de variaciones de masa en el eslabón 2. Cabe mencionar que la variación de masa, solo se realizó a nivel simulación, de forma tal, que para el cálculo de las ganancias del controlador y del observador se utilizaron los parámetros nominales de la Tabla 3.1.

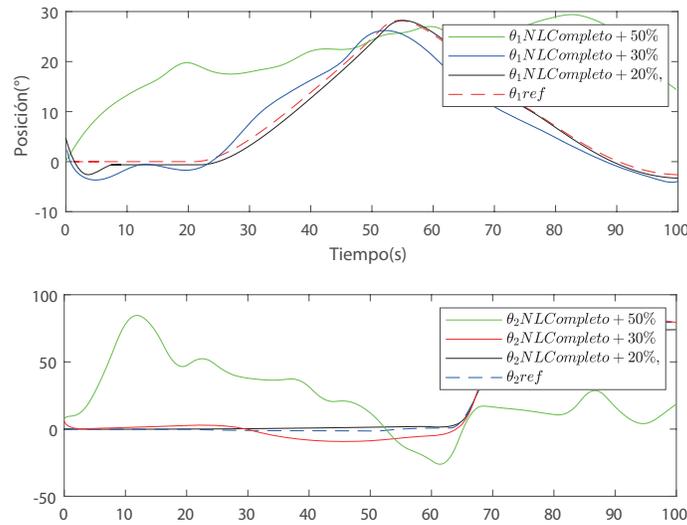


Fig. 5.14. Simulación 4: Seguimiento de trayectoria ante cambios de masa.

En la Figura 5.14 se puede apreciar que en el escenario de incremento de masa en un +20% la variación es ligera, sin embargo, mientras más incrementa la masa el error en el seguimiento de trayectoria incrementa por igual.

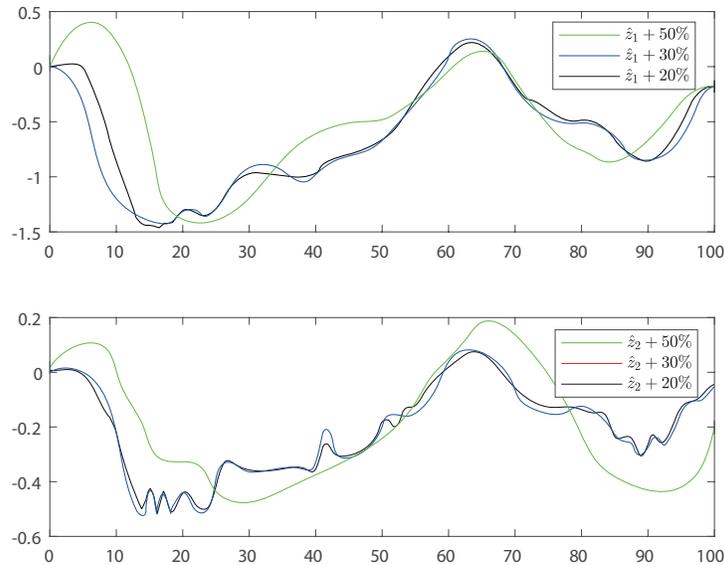


Fig. 5.15. Simulación 4: Comparación ley de control masas.

Como conclusión de esta prueba, se puede decir que a pesar de que los cambios de masa del segundo eslabón en diferentes porcentajes, la ley de control estimada muestra un comportamiento aceptable en el seguimiento de la trayectoria, sin embargo, cuando el incremento es significativo, el control se ve comprometido.

5.8. Simulación 5 cambio en la trayectoria

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es mostrar el comportamiento del controlador aplicando otra figura de referencia, en este caso se utiliza un rectángulo. En la Figura 5.16 se muestra un rectángulo propuesto para el seguimiento de trayectoria con centro en $(0.43, 0.53)$.

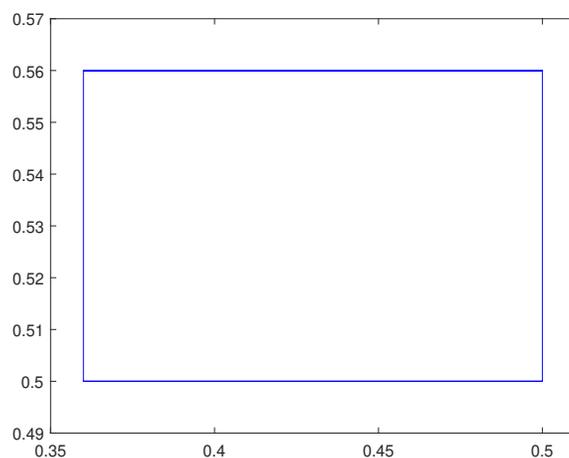


Fig. 5.16. Simulación 5: Referencia rectangular para seguimiento.

En la Figura 5.17 se muestra la comparación entre la referencia y el comportamiento del sistema no lineal, que es alimentado por la ley de control que genera el observador funcional.

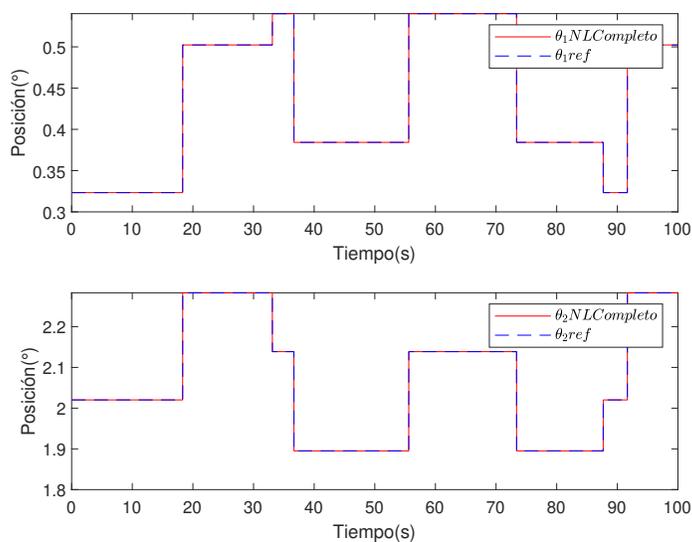


Fig. 5.17. Simulación 5: Posición angular de referencia y del sistema no lineal controlado.

En la Figura 5.18 se muestra la ley de control generada por el observador funcional, para reconstruir la trayectoria definida.

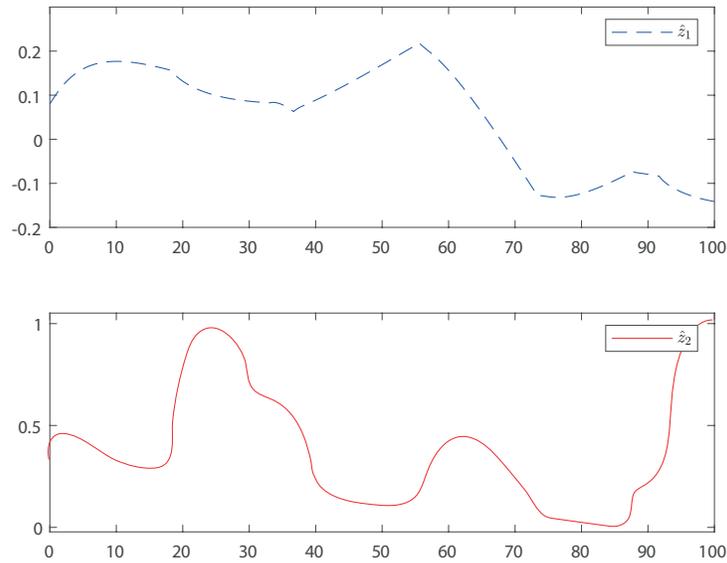


Fig. 5.18. Simulación 5: Ley de control estimada rectángulo.

En esta simulación se concluye que el observador funcional estima la ley de control necesaria para seguir la referencia deseada, siempre y cuando la región definida se encuentre dentro del área de trabajo del robot.

Capítulo 6

Conclusiones generales

Al realizar la investigación de la teoría de los manipuladores queda claro que el control y optimización para el uso de los manipuladores en el ámbito industrial es uno de los temas con mayor interés actualmente, ya que la mayoría de los procesos requieren el uso de manipuladores robóticos para realizar las actividades. Es por eso que el conocimiento de las variables que no se tienen disponibles a la salida, así como obtener una representación matemática lo más fiel posible al comportamiento físico del manipulador y llevar a cabo el control de estos son temáticas abiertas a su investigación.

En este trabajo de tesis se presentó la representación no lineal de un manipulador de 2 grados de libertad con movimiento horizontal obtenida a partir del análisis de Euler-Lagrange. Para posteriormente representarlo bajo el esquema de Takagi-Sugeno por el sector no lineal. Este enfoque tiene como objetivo representar el modelo no lineal del manipulador de una manera más simple. Siempre y cuando este se encuentra dentro de los límites con los que se formó la representación Takagi-Sugeno.

Se realizó la comparación del modelo no lineal completo y el modelo no lineal simplificado este obtenido a partir de la omisión de las fuerzas Coriolis en el sistema, las cuales en ángulos pequeños son prácticamente cero, esto tomándolo como incertidumbre de modelado para verificar la estimación del observador, estos dos modelos se compararon con el modelo Takagi-Sugeno. Verificando que el sistema Takagi-Sugeno desarrollado representa nuestro sistema no lineal siempre y cuando este dentro de los límites con los que se formó esta representación.

En la teoría del control existen diversos tipos de observadores y son clasificados por el orden o por la estructura que los constituyen. En este tema de tesis se propuso utilizar un observador funcional dinámico generalizado, el cual permite estimar funciones lineales del sistema, dando como ventaja la disminución de gasto computacional para su programación, así como el aumento de los grados de libertad para poder compensar diferentes incertidumbres, en este caso, una incertidumbre de modelado y de tiempos de adquisición, ya que nosotros utilizamos un sistema discreto el cual tiene un tiempo diferente al de integración.

Para nuestro observador funcional dinámico generalizado consideramos que existen las condiciones suficientes y necesarias para que este observador pueda ser utilizado. Este observador se utilizó para estimar las variables no disponibles en el sistema para su medición, posteriormente se verificó que las condiciones de estabilidad de este observador se cumplan. Se utiliza el lema de eliminación para asegurar que el solucionador de LMIs obtenga una solución factible. A partir de este observador se llevó a cabo la publicación de un artículo para el Congreso Nacional de Control Automático (CNCA).

Así también se llevó a cabo el diseño de un observador dinámico generalizado el cual permita estimar la ley de control que proporcione el seguimiento de trayectoria deseado, en este caso generado a partir de la cinemática inversa del manipulador, formando una circunferencia.

Se realizaron múltiples simulaciones con objetivo de mostrar diferentes escenarios en los que se puede considerar al robot manipulador. El esquema de control basado en el observador funcional, fue validado considerando el modelo no lineal, obteniendo resultados favorables, cuando el círculo de trayectoria se encuentra dentro del área de trabajo del robot manipulador. El controlador mostró un comportamiento robusto ante incertidumbres de modelado, ya que los esquemas fueron diseñados considerando el modelo T-S discreto, que partió del modelo no lineal reducido.

Finalmente, se concluye que se cumplieron con todos los objetivos marcados para este tema de tesis. Además, se mostró que se puede estimar una ley de control capaz de seguir la trayectoria establecida para el manipulador.

6.1. Trabajos futuros

A partir de este trabajo de investigación se pueden derivar diversos trabajos, algunos de estos se presentan a continuación:

1. Explorar las posibilidades teóricas para calcular de forma simultánea las ganancias del control y del observador.
2. Implementación del controlador para un manipulador robótico físico para la estimación de estados no disponibles o la estimación de la ley de control que permita el seguimiento de alguna trayectoria deseada.
3. Utilizar el observador funcional dinámico generaliza discreto para poder estimar los estados no disponibles o la ley de control de algún otro caso de estudio.

Bibliografía

- Akhenak, A., C.-M. Abdelkader, D. Maquin y J. Ragot (2003). State estimation via multiple observer with unknown inputs : Application to the three tank system. En: *5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess*. Washington, United States.
- Akhenak, A., M. Chadli, J. Ragot y D. Maquin (2007). Design of sliding mode unknown input observer for uncertain Takagi-Sugeno model. En: *2007 IEEE Mediterranean Conference on Control Automation*. Athens, Greece. 1–6.
- Bouassem, K., J. Soulami, A.-A. El y Y.-H. El (2017). Fuzzy observer design for a class of Takagi-Sugeno descriptor systems subject to unknown inputs. *Nonlinear Analysis and Differential Equations* **5**, 117–134.
- Cero, I., J.-F. Herver-Acuña, S. Castillo-Castillo y W. Aritzel (2019). *Metodología de programación de trayectorias de un robot de 2GDL. Utilizando la tarjeta STM32L476RG*. Congreso nacional de robótica y mecatrónica. Asociación mexicana de mecatrónica AC.
- Chadli, M., M. Didier y J. Ragot (2002). Observer-based controller for Takagi-Sugeno models. En: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Vol. 5. 6–9.
- Darouach, M. y M. Boutayeb (1995). Design of observers for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(40), 1323–1327.
- Dezhi, X., J. Bin y S. Peng (2012). Nonlinear actuator fault estimation observer: An inverse system approach via a Takagi-Sugeno fuzzy model. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **22**(1), 183–196.

- Flores-Martínez, M.-A., G.-L. Osorio-Gordillo, R.-A. Vargas-Méndez y J. Reyes-Reyes (2019). Fuzzy functional observer for the control of the glucose-insulin system. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems* **37**, 5085–5096.
- Gomez-Peñate, S., J. Zepeda-Hernández, F.-R. López-Estrada, R. Osornio-Ríos y C. Ríos-Rojas (2017). Diseño de un observador Takagi-Sugeno aplicado a un vehículo eléctrico. *Congreso Nacional de Control Automático*.
- Gyongy, I. y D.-W. Clarke (2006). On the automatic tuning and adaptation of PID controllers. *Control Engineering Practice* **14**(2), 149–163.
- Hieu, T. y F. Tyrone (2011). *Functional Observers for Dynamical Systems*. Vol. 420. Springer Berlin Heidelberg.
- Jianglin, L. y R.-J. Patron (2015). Robust fault-tolerant control based on a functional observer for linear descriptor systems. *IFAC-PapersOnLine* **48**(14), 138–143.
- Kermadi, M., E.-M. Berkouk y A. Benachour (2016). Design of discrete PI-based current controller for reversible buck boost converter. digital implementation using arduino due board. En: *2016 8th IEEE International Conference on Modelling, Identification and Control*. Algiers, Algeria. 863–866.
- Kruszewski, A. (2006). Lois de commande pour une classe de modeles non lineaires sous la forme Takagi-Sugeno Mise sous forme LMI. Phd thesis. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.
- Lendek, Z., G. Thierry-Marie, R. Babuskaand y B. De-Schutter (2011). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Vol. 262. Springer Berlin Heidelberg.
- Lendek, Z., T.-M. Guerra, R. Babuska y B.-D. Schutter (2010). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Vol. 262. 2011 ed.. Springer-Verlag.
- Lewis, F.-L., D.-M. Dawson y C.-T. Abdallah (1993). *Control Of Robot Manipulators*. Prentice Hall PTR1. Upper Saddle River, NJ. United States.
- Luenberger, D. (1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**(2), 190–197.

- Miranda, Carlos (2012). *Sistemas de control continuos y discretos*. Vol. 312. Paraninfo. Madrid.
- Miranda-Colorado, R. (2016). *Cinemática y dinámica de robots manipuladores*. Alfaomega. Ciudad de México.
- Nagesh, S.-B., Z. Lendek, A.-A. Khalate y R. Babuska (2012). Adaptive fuzzy observer and robust controller for a 2-DOF robot arm. En: *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. 1–7.
- Nagy-Kiss, A.-M., B. Marx, G. Mourot, G. Schutz y J. Ragot (2011). Observers design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. application to a wastewater treatment plant. *Journal of Process Control* **21**(7), 1105–1114.
- Ohtake, H., K. Tanaka y O. Wang (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering* **10**, 333–341.
- Osorio-Gordillo, G.-L., M. Darouach, C.-M. Astorga-Zaragoza y L. Boutat-Baddas (2015). Fault diagnosis for discrete-time descriptor linear systems. *IFAC PapersOnLine* **48**(21), 1238–1243.
- Osorio-Gordillo, Gloria L., Mohamed Darouach, Carlos M. Astorga-Zaragoza y Latifa Boutat-Baddas (2016). New dynamical observers design for linear descriptor systems. *IET Control Theory & Applications* **10**(17), 2223–2232.
- Patton, R.-J., J. Chen y C.-J. Lopez-Toribio (1998). Fuzzy observers for nonlinear dynamic systems fault diagnosis. En: *IEEE Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*. Vol. 1. 84–89.
- Reyes-Cortes, F. (2013). *Robótica. Control de Robots Manipulador*. Vol. 35. AlfaOmega.
- Ríos-Ruiz, C. (2016). Estabilización y Control de Velocidad de una Bicicleta Mediante el Enfoque Takagi-Sugeno. Master thesis. Tecnológico Nacional de México/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Shodan, A.-R. y D. Singh (2016). Observer based controller for nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy model. En: *10th IEEE International Conference on Intelligent Systems and Control*. Coimbatore, India. 1–5.

- Skelton, R.-E. (2019). Linear matrix inequality techniques in optimal control. En: *Encyclopedia of Systems and Control*. 1–10. Springer London. London.
- Souad, B. (2013). Commande tolérante aux de fautes de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno. Phd thesis. Université de Lorraine.
- Souad, B., M. Benoit, M. Didier y J. Ragot (2013). Model reference tracking control for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno structure. En: *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. 1–8.
- Tanaka, K., T. Hori y H. Wang (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(4), 582–589.
- Tanaka, K. y O. Wang (2000). Takagi-Sugeno fuzzy model and parallel distributed compensation. En: *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. Chap. 2, 5–48. John Wiley Sons, Inc.
- Tyrone, F.-L., J.-S. Lee y M.-T. Hieu (2011). Generality of functional observer structures. En: *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, FL, USA. 4000–4004.
- Tyrone, F.-L. y T. Hieu (2014). A system decomposition approach to the design of functional observers. *International Journal of Control* **87**(9), 1846–1860.
- Yacine, Z., D. Ichalal, N.-A. Oufroukh y S. Mammar (2013). Vehicle nonlinear observer for state and tire-road friction estimation. En: *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems ITSC*. Vol. 28. 2181–2186.
- Yacine, Z., D. Ichalal, N. Oufroukh y S. Mammar (2014). Detection of critical situations in vehicle lateral dynamics by LPV unknown input observers with finite time property. En: *IEEE Conference on Control Applications*. Vol. 5. 117–134.

Apéndice A

Obtención de señal de entrada para el sistema no lineal

Para llevar a cabo la construcción de las señales de entrada ocupadas en el Capítulo 3 para la verificación de nuestro sistema Takagi-Sugeno es necesario establecer los límites de los ángulos de nuestro manipulador robótico por lo cual utilizando la referencia del artículo Skelton (2019) se considera que $-1.6 \leq \theta_1 \leq 1.6rad$ y $-1.6 \leq \theta_2 \leq 1.6rad$. Los parámetros de par aplicado son obtenidos con la ayuda de la herramienta Simulink del programa MATLAB R2020a. A continuación, se demuestran los pasos a seguir para generar las señales:

Primer paso: Crear un archivo nuevo en Simulink en el que se construirá el programa como se muestra en la Figura A.1

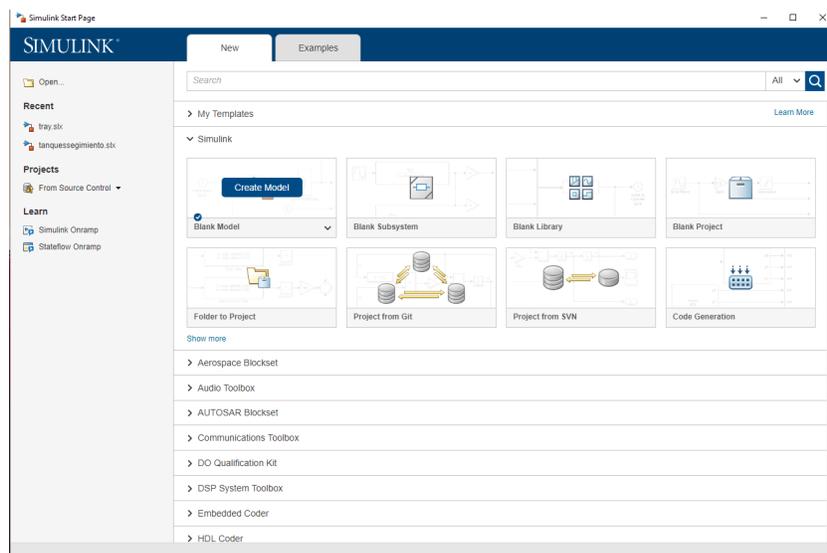


Fig. A.1. Crear programa nuevo en Simulink

Segundo paso: Tomar de la librería de Simulink la herramienta de Signal Builder y colocarla en el área de trabajo, en la Figura A.2 podemos ver el proceso:

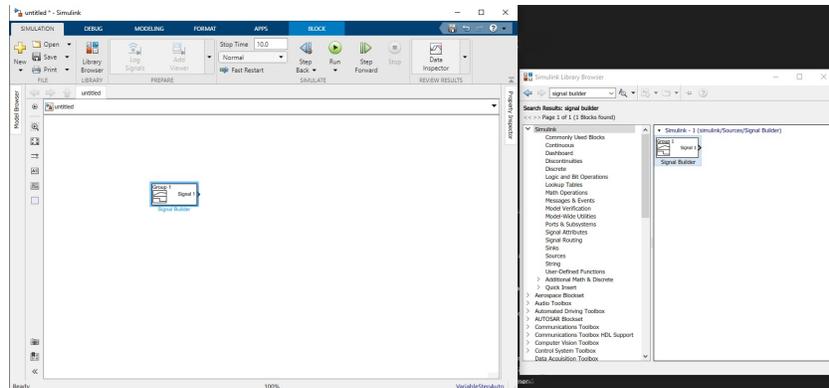


Fig. A.2. Colocar la herramienta Signal Builder

Tercer paso: Para empezar a configurar la herramienta Signal Builder damos doble clic sobre el icono e ingresamos en el menú de la herramienta Signal, para posteriormente seleccionar la opción New y finalmente seleccionamos la señal Sampled Gaussian Noise.

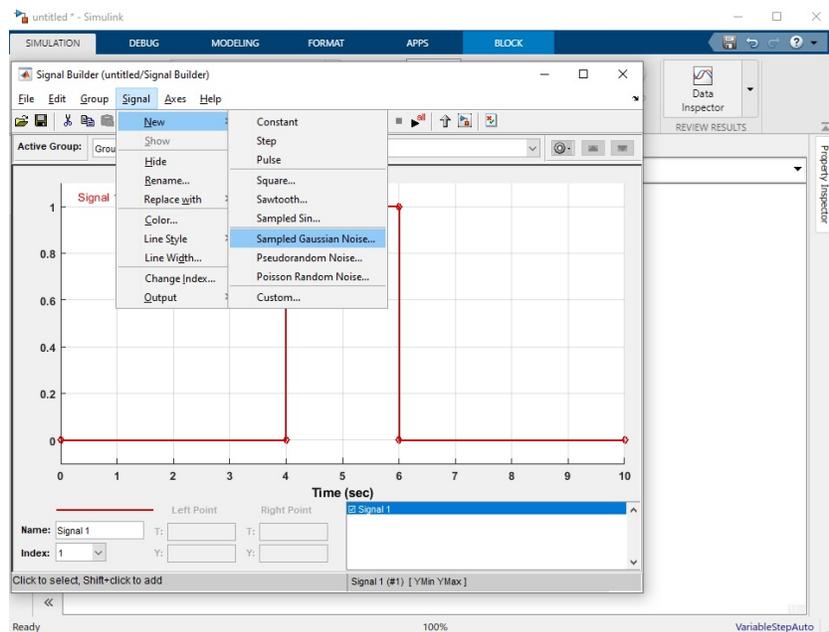


Fig. A.3. Configurar la herramienta Signal Builder

Cuarto paso: Se configura la señal Sampled Gaussian Noise: frecuencia con valor de diez, el valor promedio igual a cero y la desviación estándar igual a 1 esto nos permitirá tener distintos puntos entre los rangos antes establecidos para las dos señales de entrada.

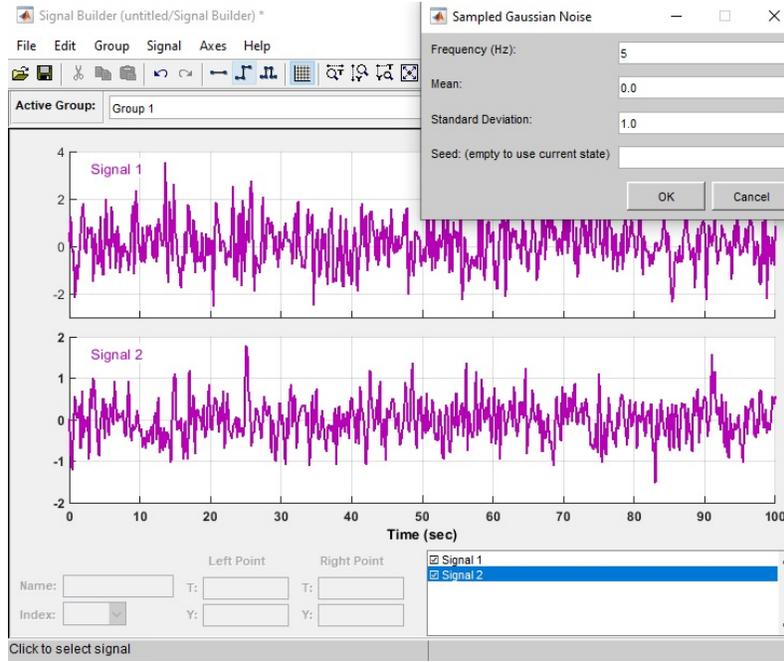


Fig. A.4. Creación de señales en Signal Builder

Quinto paso: Finalmente las señales son enviadas a la plataforma de Matlab con la herramienta to workspace.

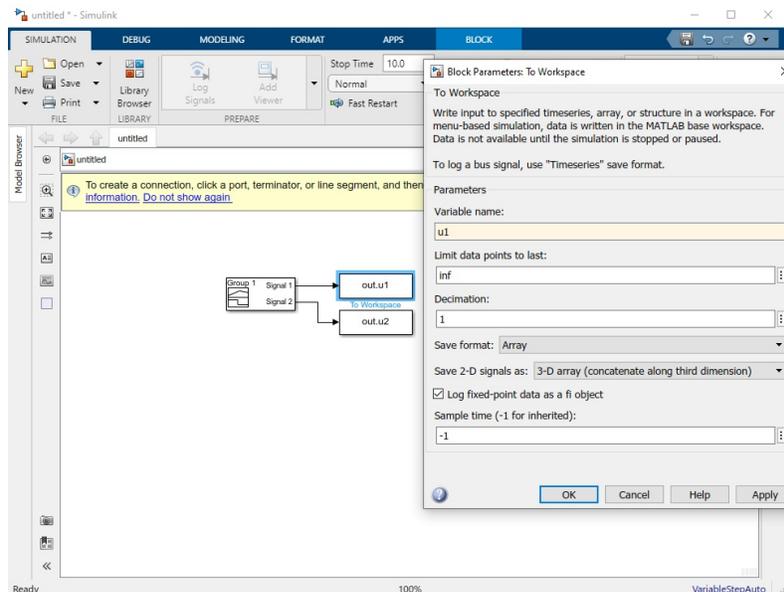


Fig. A.5. Enviar las señales a Matlab.

Apéndice B

Pruebas de cambio de parámetros para el manipulador

Objetivo de la simulación número 1: En esta sección llevaremos a cabo diferentes pruebas de cambio de parámetros para nuestro manipulador y ver el comportamiento de sus variables. En la Tabla B.1 podemos ver los diferentes valores de cada una de las partes que conforman al manipulador.

Tabla B.1. Parámetros del robot prueba 2

Parámetro	Valor	Unidades	Definición
l_1	1.321	m	Longitud del eslabón 1
l_2	0.85	m	Longitud del eslabón 2
l_{c1}	0.725	m	Distancia al centro de masa del eslabón 1
l_{c2}	0.398	m	Distancia al centro de masa del eslabón 2
I_1	2.6584	Kg m ²	Inercia del eslabón 1
I_2	0.1089	Kg m ²	Inercia del eslabón 2
m_1	19.27	Kg	masa del eslabón 1
m_2	10.14	Kg	masa del eslabón 2
g	9.81	m/s ²	gravedad
b_1	1.22		Coefficiente de fricción del eslabón 1
b_2	0.24		Coefficiente de fricción del eslabón 2

En la Figura B.1 se muestra la posición angular de los tres diferentes sistemas. El sistema no lineal completo el cual está representado por la línea roja, el sistema no lineal simplificado por la línea negra y el sistema Takagi-Sugeno discreto por la línea de color azul. Los cuales son alimentados por la señal obtenida en el Anexo A y como tiempo de integración $T_e = 0.001$ y un tiempo de discretización de $T_d = 0.01$.

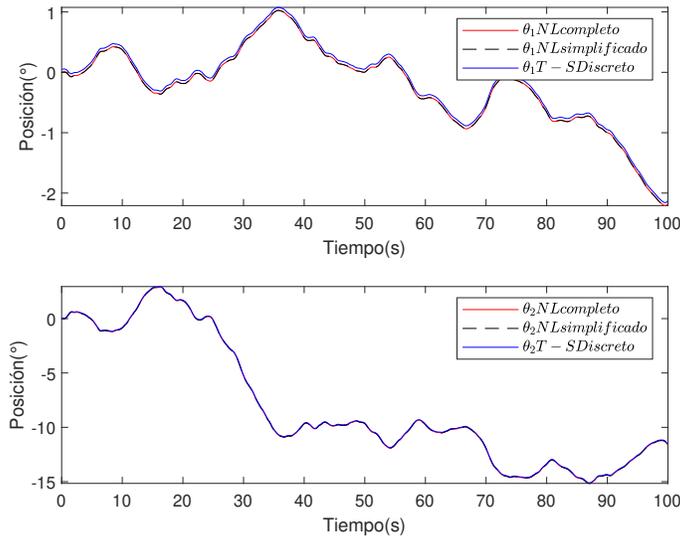


Fig. B.1. Simulación 1: Comparación ángulos del sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno discreto.

En la Figura B.2 podemos ver la velocidad angular de los tres sistemas.

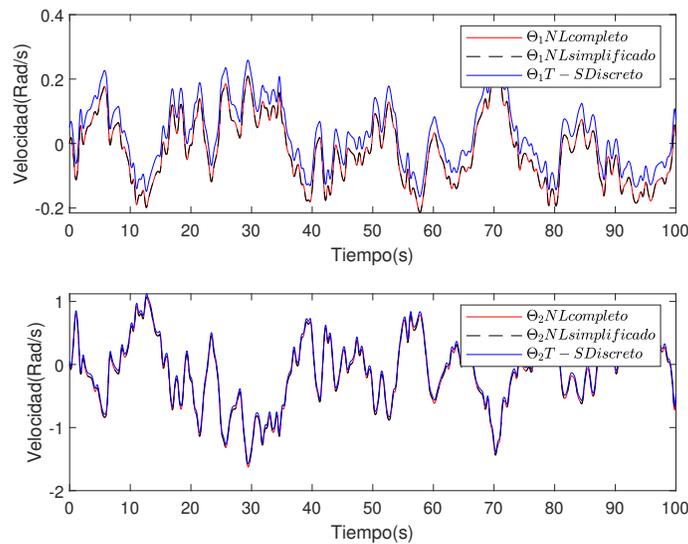


Fig. B.2. Simulación 1: Comparación velocidades del sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno discreto.

Finalmente, en la Figura B.3 se muestra la respuesta del observador que estima las velocidades

angulares que no están disponibles a la salida del sistema por lo cual se deduce que el observador estima de forma precisa.

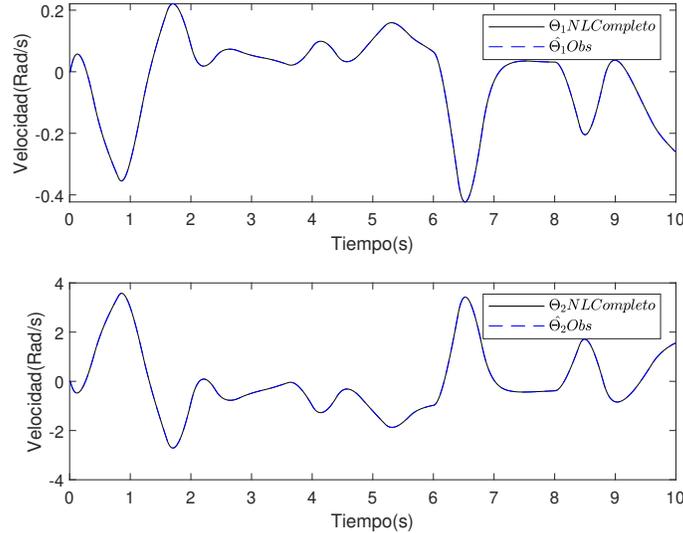


Fig. B.3. Simulación 1: Estimación de las velocidades angulares del sistema.

Objetivo de la simulación número 2: En la Tabla B.2 se muestran otros valores de cada una de las partes que conforman al manipulador.

Tabla B.2. Parámetros del robot prueba 3

Parámetro	Valor	Unidades	Definición
l_1	0.512	m	Longitud del eslabón 1
l_2	0.178	m	Longitud del eslabón 2
l_{c1}	0.221	m	Distancia al centro de masa del eslabón 1
l_{c2}	0.12	m	Distancia al centro de masa del eslabón 2
I_1	2.6584	Kg m ²	Inercia del eslabón 1
I_2	0.1089	Kg m ²	Inercia del eslabón 2
m_1	9.27	Kg	masa del eslabón 1
m_2	5.14	Kg	masa del eslabón 2
g	9.81	m/s ²	gravedad
b_1	1.22		Coefficiente de fricción del eslabón 1
b_2	0.24		Coefficiente de fricción del eslabón 2

En la Figura B.4 se muestra la posición angular de los tres diferentes sistemas. El sistema no

lineal completo, el sistema no lineal reducido y el sistema Takagi-Sugeno discreto. Los cuales son alimentados por la señal obtenida en el Anexo A y como tiempo de integración $T_e = 0.001$ y un tiempo de discretización de $T_d = 0.01$.

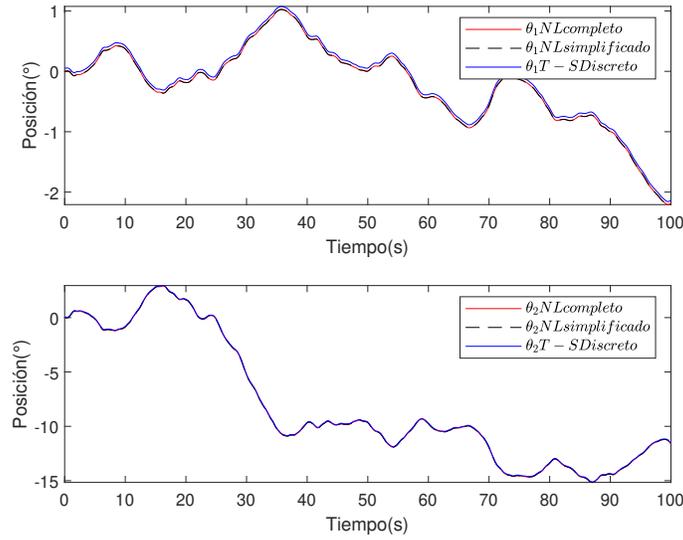


Fig. B.4. Simulación 2: Comparación ángulos del sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno discreto.

En la Figura B.5 podemos ver la velocidad angular de los tres sistemas.

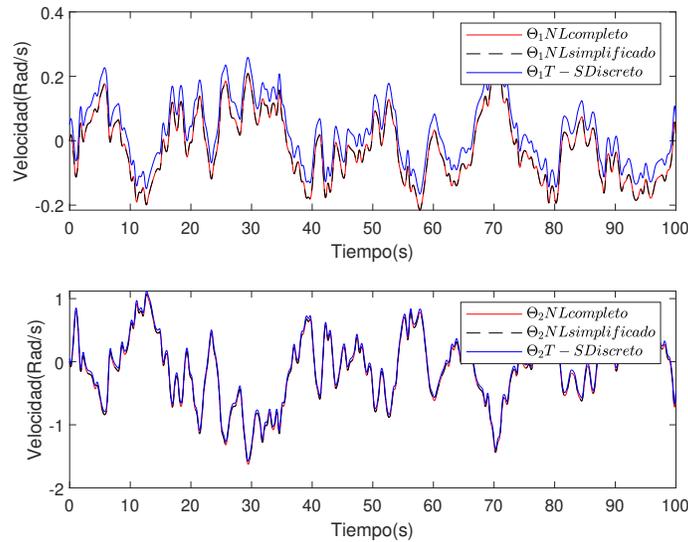


Fig. B.5. Simulación 2: Comparación velocidades del sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno discreto.

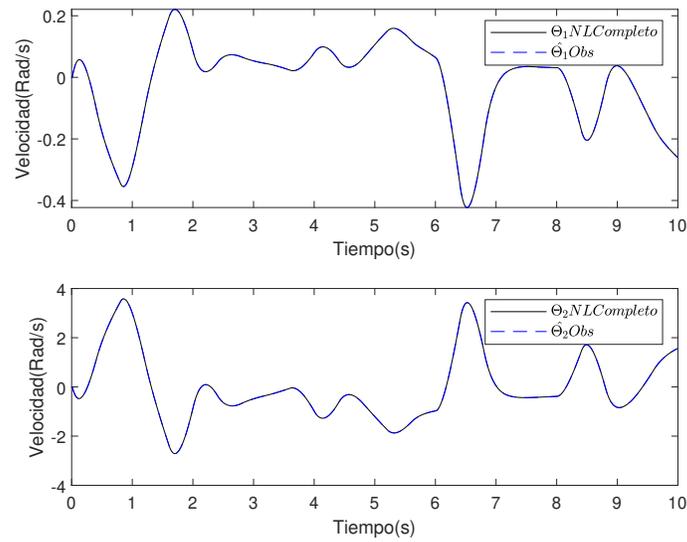


Fig. B.6. Simulación 2: Estimación de las velocidades angulares del sistema.

Finalmente, en la Figura B.3 se muestra respuesta del observador que estima las velocidades angulares que no están disponibles a la salida del sistema.

Apéndice C

Código para obtener la posición angular a partir del círculo de referencia

A continuación agregamos el código utilizado para obtener la posición angular de cada uno de los eslabones a partir de la cinemática inversa del robot desarrollada en base al círculo de referencia deseado el cual programamos en Simulink herramienta de Matlab.

```
load referencias

rx=ref1(1:100001,1)';
ry=ref2(1:100001,1)';
ref=[rx;ry];

q2ref=acos((rx.*rx+ry.*ry-l1*l1-l2*l2)/(2*l1*l2));
q1ref=atan(ry./rx)-atan((l2*sin(q2ref))./(l1+l2*cos(q2ref)));

Qref=[q1ref;q2ref];
QQref(:,1)=[0;0];

figure
subplot(2,1,1)
plot(time(1:100/Te),QQref(1,1:100/Te),'r')

title('Grafica círculo referencia - Posiciones Angulares');
legend({'\theta_1'}referencia$','Interpreter','latex')

subplot(2,1,2)
plot(time(1:100/Te),QQref(2,1:100/Te),'k')

legend({'\theta_2'}referencia$','Interpreter','latex')
```

Fig. C.1. Código para gráficas los ángulos del círculo de referencia.