



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CIUDAD GUZMÁN

TESIS

TEMA:

**PLATAFORMA PARA CONTROLADOR ACTIVO LINEAL APLICADO A LA
DIRECCIÓN ASISTIDA AUTOMOTRÍZ.**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

PRESENTA:

ING. GAMALIEL RODRÍGUEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SERGIO SANDOVAL PÉREZ

CIUDAD GUZMÁN, JALISCO, DICIEMBRE DEL 2018

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MEXICO

Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán

Cd. Guzmán, Jal. a 19/Junio/2018

Oficio No. DEPI/43/18

ASUNTO : AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

ING. GAMALIEL RODRÍGUEZ GONZÁLEZ
N.C. M16290027

En cumplimiento con el documento normativo de las disposiciones para la operación de estudios de posgrado del Tecnológico Nacional de México y con base en la aprobación del Comité Tutorial comisionado para su revisión; la División de Estudios de Posgrado e Investigación le otorga la autorización de impresión de su trabajo de tesis intitulado:

"Plataforma para Controlador Activo Lineal Aplicado a la Dirección Asistida Automotriz", dirigido por el **Dr. Sergio Sandoval Pérez**, desarrollado como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ingeniería Electrónica, de acuerdo al plan de estudios MPIEO-2011-13.

Sin otro asunto en particular, quedo de usted.

ATENTAMENTE


DR. HUMBERTO BRACAMONTES DEL TORO
JEFE DE DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

C.p. Archivo



S.E.P. TecNM
INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE CD. GUZMAN
DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO E
INVESTIGACION



Av. Tecnológico No. 100 C.P. 49100 A.P. 150
Cd. Guzmán, Jal. Tel. Conmutador (341) 5 75 20 50
www.itcg.edu.mx



www.itcg.edu.mx/Sistemas de Gestión/Calidad

Dedicatoria

A mis padres, el Sr. José Guadalupe Rodríguez Padilla y a la Sra. Ana María González Meza, quienes me han inculcado el amor por el estudio. Así también, por motivarme cada día a continuar con mis estudios, y apoyarme aún cuando creía que no necesitaba su apoyo.

A mi hermano, Nahúm Rodríguez González, por ser como un segundo padre, y apoyarme hasta en mis mayores locuras, cargando con mis problemas como suyos, junto con mis padres.

A mi esposa, la Sra. Laura Janeth Hernández Solorio, por apoyarme en cada paso que doy, incluso sacrificando sus estudios para que yo pudiese continuar con los míos, regalándome lo más importante que existe en este mundo: Tres hermosas vidas.

A mis hijas, Alicia Gisselle, Camila Alejandra y Esther Asenath. Ustedes se han convertido en mi principal razón de esfuerzo.

A todos ustedes, por estar conmigo cada día, dándome fuerzas, aliento, motivación y entendimiento, para que yo pudiese concluir este nuevo logro en mi vida, GRACIAS POR NO DEJARME SÓLO, AÚN EN LOS MALOS TIEMPOS.

Reconocimientos

Por el apoyo que me brindaron para concluir esta tesis, agradezco a mi primer Director, el M.I.E. Jorge Horacio Mejía García por el tiempo, dedicación y paciencia que tuvo para mi persona, al permitirme realizar una investigación sin presiones, cargando con mis errores y motivándome para continuar trabajando; al Dr. Sergio Sandoval Pérez, por tomar el cargo de nuevo Director con liderazgo y entrega, exponiendo sus emociones, para motivarme a continuar con este proyecto. Debo aclarar que no es solo mi reconocimiento al Dr. Sergio, sino también mi más profundo agradecimiento y respeto, por dedicar su tiempo a cada uno de los integrantes de esta Maestría, y enfocar todos sus esfuerzos para permitirnos continuar nuestras investigaciones con mayor tecnología.

Con especial reconocimiento, agradezco a ambos el trabajo realizado en mi persona, impulsándome para ser una mejor persona, y un candidato a Maestro de calidad.

Resumen

El objetivo de este proyecto es crear un controlador lineal analógico de dos grados de libertad, para probar la dirección asistida de los vehículos que se constituyen por este tipo de mecanismo. El trabajo de investigación de observadores y controladores aplicados al automóvil es uno de los proyectos anteriores a este modelo único, tomando en cuenta las dinámicas y variables del vehículo. Iniciando con un modelo matemático no lineal de cinco grados de libertad y haciendo algunas suposiciones se puede reducir a otro modelo matemático no lineal de tres grados de libertad y terminar con la deducción de un modelo sencillo que comprende dos grados de libertad en la parte lineal del vehículo.

Todos estos modelos matemáticos, no lineales y lineales, presentados en la investigación del Doctor Sergio Sandoval, se estudian para compararlos entre sí, obteniendo un conocimiento significativo en cuanto a sus dinámicas.

Además de la deducción de los diferentes modelos matemáticos, se deben de tomar en cuenta las perturbaciones ocasionadas por el viento que afectan la parte longitudinal, lateral y transversal del vehículo, pero no se considerarán en esta tesis, al ser un controlador lineal de dos grados de libertad, es decir, que solo se moverá en torno a los ejes “ x ” y “ y ”.

También se propone una serie de controladores para cada uno de los diferentes modelos matemáticos. Demostrándose la estabilidad de cada controlador a través de la teoría de Lyapunov.

Sin embargo debido a que los controladores necesitan la mayor información posible y en algunos casos los sensores de los vehículos son costosos o por el tamaño de los mismos es imposible colocarlos, se propone para esta tesis diferentes observadores que ayudarán a estimar algunas dinámicas del automóvil, además de establecer la estabilidad de cada observador por medio de la función de Lyapunov.

Para dar certeza a esta tesis, se ha estudiado la tesis del Doctor Sergio Sandoval, con un gran énfasis en el estudio de la utilización del software Matlab-Simulink-CarSim, en el cual se simula una entrada del conductor demostrando que el vehículo se encuentra realizando pruebas de manejo conocidas como doble volanteo y entrada escalón establecidas por normas internacionales ISO-3880 e ISO-7401 respectivamente, con ello se pretende mostrar la formalización matemática y la simulación para los controladores y observadores no lineales y lineales diseñados en esta investigación.

Abstract

This project aims to create an analogic two freedom degrees linear controller, to prove the assisted direction of the type of vehicles made with this mechanism. The Dr. Sergio Sandoval's research work dedicated to observers and controllers applied to the car, taking into account the dynamics and variables of the vehicle. Starting with a nonlinear mathematical model of five degrees of freedom and making some assumptions, it can be reduced to another non-linear mathematical model with three degrees of freedom and ending with the deduction of a simple model that includes two degrees of freedom in the linear part of the vehicle.

All these mathematical models, nonlinear and linear, presented in this investigation are studied to compare them among themselves, obtaining a significant knowledge regarding their dynamics.

In addition to the deduction of the different mathematical models, the disturbances caused by the wind that affect the longitudinal, lateral and transversal part of the vehicle are taken into account.

A series of controllers is also proposed for each of the different mathematical models. Demonstrating the stability of each controller through Lyapunov's theory.

However, because the controllers need as much information as possible and in some cases the sensors of the vehicles are expensive or because of their size it is impossible to place them, this thesis proposes different observers to help estimate some dynamics of the car, besides establishing the stability of each observer by means of the function of Lyapunov.

To give certainty to this thesis, the Matlab-Simulink-CarSim software was used, in which a driver input is simulated, demonstrating that the vehicle is performing steering tests known as double steering and step entry established by ISO 3880 and ISO international standards. 7401

respectively, this is intended to show the mathematical formalization and simulation for nonlinear and linear controllers and observers designed in this research.

Índice general

| | |
|---|----|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Modelo físico de un automóvil | 4 |
| 2.1. Análisis matemático..... | 4 |
| 2.2. Modelo de la bicicleta..... | 6 |
| 2.3. Modelo matemático no lineal del automóvil de cinco grados de libertad..... | 7 |
| 2.4. Modelo matemático no lineal del automóvil de tres grados de libertad..... | 12 |
| 2.5. Modelo matemático lineal del automóvil de dos grados de libertad..... | 16 |
| 2.6. Aerodinámica para el Automóvil..... | 17 |
| 2.6.1. Software CarSim..... | 20 |
| 3. Técnicas de estabilidad de Lyapunov | 32 |
| 3.1. Introducción..... | 32 |
| 3.1.1. Estabilidad asintótica global..... | 35 |
| 3.2. Principio de invarianza..... | 36 |
| 3.3. Estabilidad de Lyapunov..... | 39 |
| 3.4. Teoremas conversos..... | 41 |
| 3.5. Estabilidad en sistemas perturbados..... | 42 |
| 3.5.1. Perturbación de un punto de equilibrio exponencialmente estable..... | 42 |
| 3.6. Perturbación de un punto de equilibrio uniforme y asintóticamente estable..... | 44 |
| 4. Observadores y controladores no lineal y lineal para el automóvil | 47 |
| 4.1. Planta de dos grados de libertad..... | 47 |
| 4.2. Observador lineal de dos grados de libertad aplicado al automóvil..... | 49 |
| 4.3. Controlador lineal de dos grados de libertad aplicado al automóvil..... | 58 |
| 5. Resultados | 67 |

| | |
|--|----|
| 5.1. Observadores CarSim-Matlab-Simulink..... | 67 |
| 5.1.1. Maniobra doble volanteo..... | 67 |
| 5.1.2. Maniobra escalón..... | 71 |
| 5.2. Controladores CarSim-Matlab-Simulink..... | 74 |
| 5.2.1. Maniobra doble volanteo..... | 74 |
| 5.2.2. Maniobra escalón..... | 77 |
| 5.2.3. Resultados de la plataforma..... | 81 |
| 5.2.4. Discusión..... | 85 |
| | |
| 6. Conclusiones..... | 86 |
| | |
| 7. Referencias bibliográficas..... | 87 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Dinámicas y variables del automóvil..... | 4 |
| 2.2. Modelo de la bicicleta..... | 6 |
| 2.3. Movimiento rectilíneo de la partícula..... | 12 |
| 2.4. Velocidad angular y aceleración angular..... | 13 |
| 2.5. Sumatoria de fuerzas en llantas delantera y trasera sobre el eje X y sobre el eje Y | 13 |
| 2.6. Punto de referencia aerodinámico en el Automóvil..... | 17 |
| 2.7. Vectores de velocidad de viento al vehículo..... | 21 |
| 2.8. Configuración de parámetros para fuerzas y momentos aerodinámicos de perturbación..... | 23 |
| 2.9. Configuración de entradas de fuerzas y momentos aerodinámicos de perturbación..... | 24 |
| 2.10. Configuración de salidas para fuerzas y momentos aerodinámicos de perturbación..... | 24 |
| 2.11. Configuración n de parámetros del vehículo..... | 25 |
| 2.12. Configuración n de dinámicas de salida del CarSim..... | 26 |
| 2.13. Configuración de dinámicas de entrada al CarSim..... | 27 |
| 2.14. Configuración de tipo de suspensión, ángulo Camber y toe para llantas..... | 28 |
| 2.15. Valores de suspensión para resorte y amortiguador..... | 29 |
| 2.16. Programación de masa sin suspensión..... | 29 |
| 2.17. Fuerzas laterales a diferentes cargas verticales de la llanta y Momento en z | 30 |
| 3.1. Superficie de Lyapunov..... | 35 |
| 5.1. a) Señal del conductor δ_d [rad vs s]; b) Coeficiente de fricción μ | 69 |

| | |
|--|----|
| 5.2. a) Fuerza de perturbación F_{dx} [N vs s]; | |
| b) Fuerza de perturbación F_{dy} [N vs s]; | |
| c) Momento de perturbación M_{dz} [Nm vs s]..... | 69 |
| 5.3. a) $v_{xCarsim}$ vs \hat{v}_x [m/s vs s]; | |
| b) Error $v_{xCarsim} - \hat{v}_x$ [m/s vs s]..... | 70 |
| 5.4. $\omega_{zCarsim}$ [rad vs s]..... | 70 |
| 5.5. a) Señal del conductor δ_d [rad vs s]; | |
| b) Coeficiente de fricción μ | 72 |
| 5.6. a) Fuerza de perturbación F_{dx} [N vs s]; | |
| b) Fuerza de perturbación F_{dy} [N vs s]; | |
| c) Momento de perturbación M_{dz} [Nm vs s]..... | 72 |
| 5.7. a) $v_{xCarsim}$ vs \hat{v}_x [m/s vs s]; | |
| b) Error $v_{xCarsim} - \hat{v}_x$ [m/s vs s]..... | 73 |
| 5.8. $\omega_{zCarsim}$ [rad vs s]..... | 73 |
| 5.9. a) Señal delta del conductor δ_d [rad vs s]; | |
| b) Señal delta del controlador δ_c [rad vs s]; | |
| c) Señal delta $\delta = \delta_d + \delta_c$ [rad vs s]..... | 76 |
| 5.10. a) ω_z vs $\omega_{z,ref}$ [rad vs s]; | |
| b) Error $(\omega_z - \omega_{z,ref})$ [rad vs s]..... | 76 |
| 5.11. M_z [Nm vs s]..... | 77 |
| 5.12. a) Señal delta del conductor δ_d [rad vs s]; | |
| b) Señal delta del controlador δ_c [rad vs s]; | |
| c) Señal delta $\delta = \delta_d + \delta_c$ [rad vs s]..... | 79 |
| 5.13. a) ω_z vs $\omega_{z,ref}$ [rad vs s]; | |
| b) Error $(\omega_z - \omega_{z,ref})$ [rad vs s]..... | 79 |
| 5.14. M_z [Nm vs s]..... | 80 |
| 5.15. a) Señal δ_d [rad/s]; b) Señal δ_c [rad/s]; c) Señal δ [rad/s]..... | 81 |
| 5.16. Velocidad lateral v_y (solida)..... | 82 |
| 5.17. Velocidad angular de viraje ω_z (solida)..... | 82 |

| | |
|--|----|
| 5.18. Dirección asistida electrónica..... | 83 |
| 5.19. Estación de simulación del Automóvil..... | 83 |
| 5.20. Velocidad lateral v_y [volts vs s]..... | 84 |
| 5.21. Velocidad angular de viraje ω_z [rad/s vs s]..... | 84 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 2.1. Nombre de las dinámicas y variables del vehículo..... | 5 |
| 2.2. Definiciones de variables para modelo masa suspendida del vehículo..... | 7 |
| 2.3. Parámetros para las simulaciones de perturbaciones..... | 20 |
| 5.1. Parámetros para Carsim, controladores no lineales, lineal, Observadores de tres y dos grados..... | 80 |
| 5.2. Parámetros del sistema de referencia para Controladores no lineales y lineal..... | 81 |

Capítulo 1

1. Introducción

En este nuevo siglo de desarrollos tecnológicos, los investigadores en el área de diseño de dispositivos aplicados al control del automóvil tienen que realizar propuestas diferentes para optimizar recursos así como realizar el análisis de modelos matemáticos que contengan las dinámicas del vehículo como son las aceleraciones longitudinal, lateral y angular de viraje [1], [2], [3], [4] donde, en estas dinámicas, se pueden imponer fuerzas y momentos que se reflejan en el automóvil de diferentes maneras [5], [6], [7].

Sin embargo también se debe de tomar en cuenta las aerodinámicas que influyen en el vehículo [8], [9], [10], así como el movimiento de guiñada o nombrado por sus siglas en inglés roll, que usualmente no es considerado en los modelos matemáticos del vehículo que utilizan suspensión no activa [11], [12], [13], pero que se debería incluir en el diseño del control. Además para los controladores de estas aceleraciones descritas en el primer párrafo de esta introducción se encuentran trabajos de investigación sobre estrategias de control diseñadas para tomar en cuenta la interacción entre el vehículo, el conductor y el medio ambiente en el que se conduce [14].

En algunos trabajos previos se ha buscado el control para la velocidad lateral y velocidad angular de viraje del vehículo en [1]; la aplicación de un control por retroalimentación de estados se ha realizado en [15]; así como en [16], [17], y [18], han trabajado sobre la aplicación de control no lineal en el volante para apoyar al conductor a realizar maniobras peligrosas y de alta velocidad, realizándolo por medio de un control activo que necesita obtener algunas variables que en forma práctica necesitan medición pero, al no tener los sensores para estas dinámicas se pueden estimar a partir de observadores [19], [20], [21] y [22].

Esta trabajo, al basarse en la Tesis del Doctor Sergio Sandoval Pérez, estará dedicada a la construcción de un controlador lineal de dos grados de libertad con retroalimentación de estados, el cual se establece en una de las distintas propuestas mediante modelos matemáticos

dinámicos de diferentes grados de libertad, que se utilizan para diseñar observadores no lineales y lineales que tienen implicadas perturbaciones de viento [23], [24]; y que están enfocados a desarrollar a dichos observadores usando la información válida de la velocidad angular de viraje o nombrada por sus siglas en inglés yaw, para estimar la velocidad longitudinal, velocidad lateral y velocidad angular de guiñada.

Como lo menciona el Doctor Sergio Sandoval Pérez en su tesis “Los observadores no lineales y lineales obtienen un error de convergencia exponencial de la estimación de las variables a las reales, además son robustos con respecto a variaciones de varios parámetros”. Uno de los parámetros que se mencionan es el coeficiente de fricción de la llanta con respecto al suelo, es de los más importantes porque su estimación puede ser difícil en el caso de sufrir variaciones en condiciones de cambio de rodado, es decir, al variar el tipo de suelo y la nomenclatura de la llanta (según sea la manufactura generada por la marca que la vende), el coeficiente de fricción no puede unificarse y/o pensarse como un valor estándar.

Por otra parte, para obtener un control satisfactorio, las perturbaciones de viento deben ser consideradas para los controladores activos no lineal y lineal, además de existir las variables que tienen que ser derivadas de otras mediciones tal como la aceleración longitudinal, aceleración lateral, velocidad longitudinal y ángulo de volanteo del conductor.

Para esta investigación se proponen controladores lineales de diferentes grados de libertad, que calculen el ángulo correcto para que el vehículo no caiga en situaciones de sobreviraje por medio de una ley de control que se aplicará a un desplazamiento angular impuesto a la llanta, y también se demuestra matemáticamente la estabilidad de estos controles activos en el sentido de Lyapunov.

Con la comprobación previa, generada en la tesis del autor ya nombrado, para el control de las variables analizadas del automóvil en dicha investigación, se simuló el sistema del vehículo, así como la estimación de las dinámicas y variables en dos software llamados Matlab-Simulink y Carsim. Una vez entendido el trabajo del Doctor Sergio Sandoval Pérez, es muy sencillo fabricar el controlador lineal de dos grados de libertad con retroalimentación de estados.

Finalmente, se hace mención de la manera en que se divide esta tesis: En el primer capítulo se tiene esta breve introducción, que continua con el segundo capítulo, en el que podremos apreciar el modelo físico del automóvil y se explican las dinámicas y variables del vehículo; el tercer capítulo está dedicado a las técnicas de la parte teórica de Lyapunov, que sirven como base para establecer la estabilidad de los observadores y controladores realizados, así como la parte fundamental de este trabajo de investigación, ya que hace referencia al diseño de los observadores y controladores no lineales y lineales, las simulaciones que muestran la señal de entrada del conductor (Doble volanteo y señal de entrada escalón), basadas en normas internacionales ISO de manejo, y los resultados obtenidos en de las diferentes dinámicas de los observadores y controladores en la parte no lineal y lineal del vehículo con sus diferentes grados de libertad; el cuarto capítulo contiene los resultados de la construcción del controlador lineal de dos grados de libertad con retroalimentación de estados; para finalizar, conclusiones y trabajos a futuro, además de las referencias bibliográficas utilizadas.

Capítulo 2

2. Modelo físico de un automóvil.

2.1. Análisis matemático.

Un automotor es un vehículo con propulsión mecánica, el cual se mueve libremente por la superficie terrestre sin restricciones mecánicas o físicas para seguir una determinada trayectoria [25]; y se caracteriza por:

- Conducción: Es la acción y efecto de guiar el automóvil.
- Maniobrabilidad: Confianza al conducir debido a la estabilidad en las dinámicas.
- Calidad de sonido y vibración: Ruido, tren motriz, potencia y camino.
- Suavidad en el manejo: Aceleración, desaceleración y confiabilidad.

Teniendo en cuenta que las características anteriores resultan de las dinámicas y variables del vehículo, éstas pueden ser establecidas con respecto a sus ángulos, velocidades, fuerzas, aceleraciones, momentos de inercia, etc. Sin embargo, el automóvil también puede ser representado como un modelo matemático, debido a sus dinámicas y variables, como se muestran en la figura 2.1, además de su nombre en la tabla 2.1.

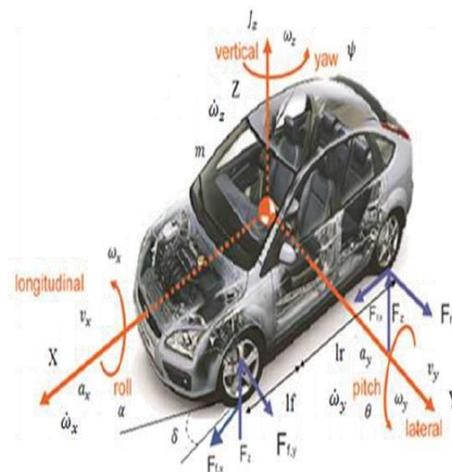


Figura 2.1: Dinámicas y variables del automóvil.

Para analizar la parte física del automóvil se tomará en cuenta el nombre de las dinámicas y variables del vehículo [26], [27], ofreciendo información que servirá para obtener el modelo matemático del automóvil, conocido como modelo de la bicicleta [6]. en éste se implementan algunas características físicas del vehículo.

donde:

Tabla 2.1: Nombre de las dinámicas y variables del vehículo.

| | |
|--------------------------------|---|
| m | Masa del automóvil (kg) |
| J_z | Momento de inercia del vehículo (kgm^2) |
| v_x | Velocidad longitudinal (m/s) |
| v_y | Velocidad lateral (m/s) |
| ω_z | Velocidad angular de viraje (rad/s) |
| a_x | Aceleración longitudinal en x (m/s^2) |
| a_y | Aceleración lateral en y (m/s^2) |
| $\dot{\omega}_x$ | Aceleración angular de guiñada (rad/s^2) |
| $\dot{\omega}_y$ | Aceleración angular de cabeceo o pitch (rad/s^2) |
| $\dot{\omega}_z$ | Aceleración angular de viraje (rad/s^2) |
| α | Ángulo de guiñada en x (rad) |
| θ | Ángulo de cabeceo o pitch en y (rad) |
| ψ | Ángulo de viraje en z (rad) |
| ω_x | Velocidad angular de guiñada (rad/s) |
| ω_y | Velocidad angular de cabeceo o pitch (rad/s) |
| l_f, l_r | Longitud desde el centro del vehículo a la llanta frontal y trasera (m) |
| $\delta = \delta_d + \delta_c$ | Ángulo de llanta-neumático (rad) |
| $F_{f,x}, F_{r,x}$ | Fuerza frontal y trasera longitudinal de la llanta (N) |
| $F_{f,y}, F_{r,y}$ | Fuerza frontal y trasera lateral de la llanta (N) |
| F_z | Fuerza en el eje Z (N) |

2.2. Modelo de la bicicleta.

El modelo de la bicicleta sirve para modelar matemáticamente las dinámicas del vehículo, el cual consiste en unir las dos llantas delanteras del automóvil y representarlas por una sola, de igual manera para las dos llantas traseras obteniendo la figura 2.2a, [28], [29], [30].

En este modelo se puede ver una barra longitudinal que emula el chasis del vehículo, donde se encuentra el centro de masa o centro de gravedad como C.G, obteniéndose de este punto una velocidad lineal considerada como la velocidad longitudinal del automóvil sobre el eje x , de igual manera sobre el eje y se obtiene la velocidad lateral del vehículo, además existirá un ángulo de deslizamiento lateral del chasis (β), el cual relaciona la siguiente fórmula [9]:

$$\tan(\beta) = \frac{v_y}{v_x} \tag{2.1}$$

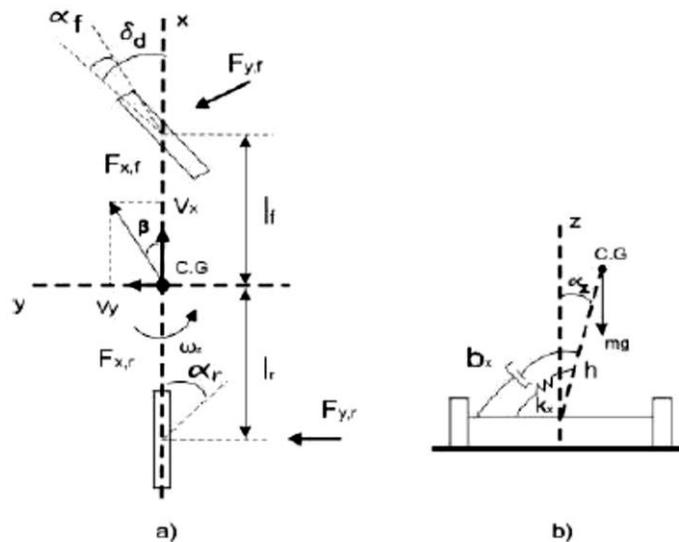


Figura 2.2: Modelo de la bicicleta.

Este ángulo indica una variación de deslizamiento del vehículo que se refleja en el estudio de la estabilidad.

Continuando con los deslizamientos, es importante mencionar la velocidad angular de viraje del chasis del automóvil, donde esta dinámica se presenta en la orientación del vehículo con

respecto al eje x , y también con los ángulos de deslizamiento que intervienen tanto para la llanta frontal, como para la llanta trasera [5]. Por lo tanto, realizando una investigación de las dinámicas físicas en las llantas y en el automóvil, se pueden diseñar modelos matemáticos del vehículo con diferentes grados de libertad, como los explicados a continuación.

2.3. Modelo matemático no lineal del automóvil de cinco grados de libertad.

Iniciando con el modelado matemático del automóvil, y teniendo como fundamento las leyes físicas de Newton y los conceptos descritos en el subtema 2.2:

Tabla 2.2: Definiciones de variables para modelo masa suspendida del vehículo.

| | |
|---------------------------|--|
| m_s | Masa en suspensión (kg) |
| h | Altura desde el centro de gravedad al suelo (m) |
| d | Altura central de guiñada o roll (m) |
| h_d | Diferencia entre alturas del centro de gravedad y central de guiñada (m) |
| μ | Coefficiente de fricción llanta-neumático |
| M_z | Momento en el eje Z (kg m) |
| J_{zx} | Producto de inercia acerca de los ejes “z” y “x” (kgm^2) |
| J_x | Momento de inercia vehicular al eje x (kgm^2) |
| $J_x = J_x^G + m_s h_d^2$ | Inercia respecto al eje x más el momento de inercia de la placa (I), alrededor del eje centroidal perpendicular a la misma (kgm^2) |
| b_x | Coef. de amortiguamiento de la suspensión de guiñada ($Nm \cdot rad/s$) |
| k_x | Rigidez de suspensión de guiñada (Nm/rad) |
| g | Constante de aceleración gravitacional (m/s^2) |

Ahora se obtendrán las ecuaciones matemáticas del modelo no lineal del automóvil de cinco grados de libertad propuesto con una masa, donde se toma en cuenta el modelo de la bicicleta y la suspensión pasiva como se observa en la figura 2.2, y sus parámetros en la tabla 2.2.

La primera ecuación para este modelo, la velocidad longitudinal, inicia con la deducción de las fuerzas que influyen en el eje X, aplicando la segunda ley de Newton y el análisis de fuerzas se obtiene la siguiente ecuación:

$$m(\dot{v}_x - v_y\omega_z) = ma_x \quad (2.2)$$

La dinámica de la velocidad longitudinal considerando la suspensión, toma en cuenta la sumatoria de fuerzas longitudinales, estableciendo la multiplicación de la masa por la aceleración longitudinal (2.2). Restando la fuerza normal, resulta la primera ecuación del modelo matemático no lineal de cinco grados de libertad:

$$m(\dot{v}_x - v_y\omega_z) = ma_x - m_s h_d \omega_z \omega_x \quad (2.3)$$

Con el estudio de las fuerzas longitudinales, que se aplican al automóvil, se llegan a diferentes cuestiones y una de las más importantes es como analizar otras variables. Siendo el caso de la velocidad lateral, definida en gran parte por las fuerzas en el eje Y del vehículo, ésta se iguala a una fuerza lateral sumada a una fuerza normal (demostración matemática en 2.4):

$$m(\dot{v}_y + v_x\omega_z) = ma_y \quad (2.4)$$

Deduciendo que al producto de la aceleración lateral por la masa (2.4) le falta sumar la fuerza tangencial de guiñada, para obtener la segunda fórmula del modelo matemático no lineal del automóvil de cinco grados de libertad:

$$m(\dot{v}_y + v_x\omega_z) = ma_y + m_s h_d \dot{\omega}_x \quad (2.5)$$

Después se aborda el eje z, donde existe una tercera dinámica importante, denominada aceleración angular de viraje, que puede estar multiplicada por una inercia principal del vehículo, que es igual al producto del coeficiente de fricción de las llantas por la diferencia del momento de la llanta frontal menos el momento de la llanta trasera:

$$J_z \dot{\omega}_z = \mu(F_{f,y} l_f - F_{r,y} l_r) \quad (2.6)$$

Considerando para la ecuación (2.6) a las componentes de los momentos que intervienen, se comienza a describir lo referente al eje X , denominado H_x , y al eje Y , señalado como H_y . Estos componentes se reducen a cero por considerarse el análisis sobre el eje z y solamente se obtiene la componente de momento H_z , mediante:

$$\begin{aligned} H_x &= \bar{I}_x \omega_x - \bar{I}_{xy} \omega_y - \bar{I}_{xz} \omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx} \omega_x + \bar{I}_y \omega_y - \bar{I}_{yz} \omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx} \omega_x - \bar{I}_{zy} \omega_y + \bar{I}_z \omega_z, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde el momento de inercia H_z en la ecuación (2.7), tiene una relación con la velocidad angular de guiñada, además la velocidad angular de cabeceo o pitch no se toma en cuenta y la componente de inercia en z , es considerada en la ecuación (2.6), obteniéndose por lo tanto el momento de inercia H_z , de la siguiente manera:

$$H_z = -I_{zx} \omega_x, \quad (2.8)$$

donde la razón de cambio del momento resultante de las fuerzas externas y la cantidad del movimiento angular, es:

$$\dot{H}_z = -I_{zx} \dot{\omega}_x \quad (2.9)$$

Por lo tanto, para la ecuación (2.9), solamente falta la determinación del signo, lo cual se decide a partir del giro de la aceleración angular ($\dot{\omega}$), si gira en el sentido de las manecillas del reloj es negativa y, en forma contraria a las manecillas del reloj, es positiva; reflejándose con esto el signo del momento H_z , además de tener como base que la razón de cambio del momento centrodial, viene dado por la fórmula:

$$\dot{H}_G = \bar{I} \dot{\omega} = \bar{I} \alpha \quad (2.10)$$

Para sumar el momento de inercia H_z a la ecuación (2.6) y dos dinámicas más compuestas por un momento angular de guiñada, $m_s h_d (\dot{v}_x - v_y \omega_z) \alpha_x$, y un momento en z (M_z), se obtiene la tercera ecuación del modelo matemático no lineal del vehículo de cinco grados de libertad:

$$J_z \dot{\omega}_z = \mu(F_{f,y} l_f - F_{r,y} l_r) + M_z + m_s h_d (\dot{v}_x - v_y \omega_z) \alpha_x + I_{zx} \dot{\omega}_x \quad (2.11)$$

considerando que la nomenclatura de I , puede ser cambiada a J refiriéndose a la inercia.

Para determinar la cuarta fórmula del presente subtema, se realiza un análisis con respecto a la aceleración angular de guiñada considerando la Figura 2.2b. Primero se puede observar que existe un torque o momento en x , (t_x), representado por:

$$t_x = J_x \omega_x \quad (2.12)$$

Igualándose la ecuación (2.12) a un movimiento resorte-amortiguador con un desplazamiento angular de guiñada, obteniéndose lo siguiente:

$$J_x \dot{\omega}_x = -b_x \omega_x - k_x \alpha_x \quad (2.13)$$

Para después sumarle a la ecuación (2.13), un momento en el eje X por un desplazamiento angular senoidal de guiñada, como si fuera un péndulo:

$$J_x \dot{\omega}_x = -b_x \omega_x - k_x \alpha_x + m_s g h_d \sin \alpha_x \quad (2.14)$$

Además para la ecuación (2.14) se debe tomar en cuenta el ángulo de guiñada con respecto al eje Y , lo cual inicia analizando la suma del momento rectilíneo lateral y la aceleración angular normal por el desplazamiento angular de guiñada ($\cos \alpha_x$), estableciéndose una nueva ecuación de la siguiente manera;

$$J_x \dot{\omega}_x = -b_x \omega_x - k_x \alpha_x + m_s g h_d \sin \alpha_x + m_s h_d (\dot{v}_y + v_x \omega_z) \cos \alpha_x$$

$$(2.15)$$

Y solamente falta considerar el eje Z, donde existe una razón de cambio del momento angular en z (H_z) con respecto al ángulo de guiñada mostrado en la ecuación (2.9), resultando la cuarta ecuación del modelo matemático no lineal de este subtema:

$$J_x \dot{\omega}_x = -b_x \omega_x - k_x \alpha_x + m_s g h_d \sin \alpha_x + m_s h_d (\dot{v}_y + v_x \omega_z) \cos \alpha_x + J_{zx} \dot{\omega}_z \quad (2.16)$$

Por último se encuentra una quinta fórmula que será la derivada del ángulo de guiñada, establecida mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\alpha}_x = \omega_x \quad (2.17)$$

Analizando esta última ecuación (2.17) se completa el modelo matemático no lineal de cinco grados de libertad mostrándose a continuación:

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_x - v_y \omega_z) &= m a_x - m_s h_d \omega_z \omega_x \\ m(\dot{v}_y + v_x \omega_z) &= m a_y + m_s h_d \dot{\omega}_x \\ J_z \dot{\omega}_z &= \mu(F_{f,y} l_f - F_{r,y} l_r) + M_z + m_s h_d (\dot{v}_x - v_y \omega_z) \alpha_x + J_{zx} \dot{\omega}_x \\ J_x \dot{\omega}_x &= -b_x \omega_x - k_x \alpha_x + m_s g h_d \sin \alpha_x + m_s h_d (\dot{v}_y + v_x \omega_z) \cos \alpha_x + J_{zx} \dot{\omega}_z \\ \dot{\alpha}_x &= \omega_x \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por lo tanto, a partir de este modelo, la ecuación (2.18) se deduce a tres grados de libertad en el siguiente subtema 2.4.

2.4. Modelo matemático no lineal del automóvil de tres grados de libertad.

Para el modelo físico del automóvil no lineal de tres grados de libertad, se aplica el análisis de fuerzas en un sistema rígido en tres dimensiones analizado por el producto escalar de vectores sin considerar las dinámicas de guiñada o roll, obteniendo una ecuación de Euler y estableciendo un movimiento rectilíneo de la partícula $L = mv$, $L = m[dv/dt]$, mostrándose el análisis del vector velocidad en la Figura 2.3, donde “o” es el centro de masa de gravedad.

Para analizar la velocidad angular y aceleración angular en forma de vectores se pueden observar en la Figura 2.4. La ω es la velocidad angular, y $\alpha = d\omega/dt$, es la aceleración angular. El producto escalar de los vectores que comprenden el movimiento rectilíneo y el movimiento angular como la velocidad angular es el siguiente:

$$\begin{aligned} F_x &= m \cdot \dot{v}_x + m \cdot \omega_y \cdot v_z - m \cdot \omega_z \cdot v_y \\ F_y &= m \cdot \dot{v}_y + m \cdot \omega_z \cdot v_x - m \cdot \omega_x \cdot v_z \\ F_z &= m \cdot \dot{v}_z + m \cdot \omega_x \cdot v_y - m \cdot \omega_y \cdot v_x \end{aligned} \tag{2.19}$$

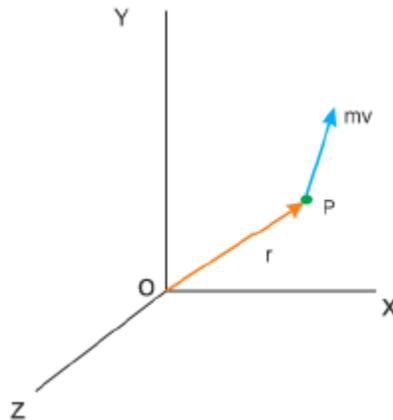


Figura 2.3: Movimiento rectilíneo de la partícula.

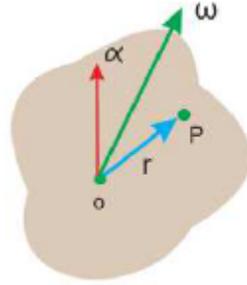


Figura 2.4: Velocidad angular y aceleración angular.

Además para obtener, F_x , F_y , de las fórmulas anteriores de la ecuación (2.19), se tiene como consideración que el movimiento angular ω_z , concuerda con el eje z, así los movimientos angulares, ω_x y ω_y son cero, y en el caso de una partícula que se mueve en el plano x, y, se tiene $z = 0$, $v_z = 0$. También estableciéndose que estas tres ecuaciones de la formula (2.19) se pueden mostrar en ecuaciones de Euler:

$$F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

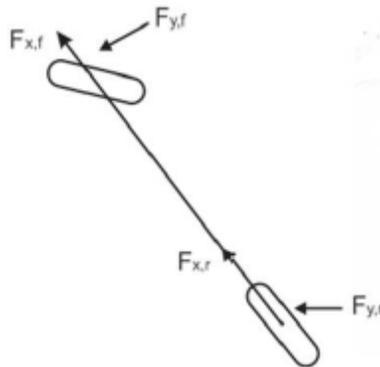


Figura 2.5: Sumatoria de fuerzas en llantas delantera y trasera sobre el eje x y el eje y.

Para la parte de la fuerza F_x , en un automóvil, se modela matemáticamente a partir de una sumatoria de fuerzas en la llanta delantera y trasera sobre el eje x, utilizando el modelo de la bicicleta, (ver Figura 2.5). Por lo tanto, para este modelo matemático se tiene como base la

primer fórmula de (2.19), la cual se considera como la primera ecuación del modelo no lineal de tres grados de libertad:

$$m(\dot{v}_x - \omega_z v_y) = ma_x \quad (2.21)$$

Con estas fuerzas longitudinales modeladas matemáticamente en la ecuación (2.21), se pueden analizar en este momento otras fuerzas denominadas en la parte lateral, (ver figura 2.5), y teniéndose como base las leyes de Newton, se utiliza la sumatoria de fuerzas en F_y de la fórmula (2.19), estableciendo una segunda ecuación para el sistema no lineal de tres grados de libertad aplicado al automóvil como se muestra a continuación;

$$m(\dot{v}_y + \omega_z v_x) = ma_y \quad (2.22)$$

Por lo tanto, con estas fuerzas laterales, deducidas en la formula (2.22), solamente falta analizar al eje z , para obtener la tercera ecuación del modelo no lineal. Refiriéndose primeramente a los momentos angulares de Euler [31], determinados a partir de las ecuaciones del torque angular mostradas en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} t_x &= J_x \cdot \dot{\omega}_x + \omega_y \cdot J_z \cdot \omega_z - \omega_z \cdot J_y \cdot \omega_y \\ t_y &= J_y \cdot \dot{\omega}_y + \omega_z \cdot J_x \cdot \omega_x - \omega_x \cdot J_z \cdot \omega_z \\ t_z &= J_z \cdot \dot{\omega}_z + \omega_x \cdot J_y \cdot \omega_y - \omega_y \cdot J_x \cdot \omega_x \end{aligned} \quad (2.23)$$

Con el torque en z definido solamente por t_z , sin considerar las velocidades del movimiento de cabeceo o pitch y movimiento de guiñada, las dinámicas resultantes son el momento de inercia del vehículo por la aceleración angular de viraje (2.24):

$$t_z = J_z \dot{\omega}_z \quad (2.24)$$

Estableciendo que, para el torque en z (2.24), se puede igualar a los momentos laterales frontales y traseros de las llantas, multiplicados por el coeficiente de fricción de cada neumático, caracterizando estas dinámicas por medio de esta expresión matemática:

$$J_z \dot{\omega}_z = \mu(F_{f,y}l_f - F_{r,y}l_r) \quad (2.25)$$

Mencionando que el coeficiente de fricción está dado por la relación del coeficiente de fricción cinética entre la fuerza normal como se muestra a continuación [32]:

$$\mu = \frac{F_{fc}}{F_N}, \quad (2.26)$$

donde:

F_{fc} Es la fuerza de fricción de oposición.

F_N Es la fuerza normal contraria a la fuerza de gravedad.

Teniendo como una dinámica faltante el momento M_z , donde este momento se refleja en la parte trasera del vehículo y se introduce en la formula (2.25) para obtener una tercera ecuación del sistema no lineal de tres grados de libertad de esta forma:

$$J_z \dot{\omega}_z = \mu(F_{f,y}l_f - F_{r,y}l_r) + M_z \quad (2.27)$$

Para finalizar, se muestran las tres fórmulas dinámicas del modelo no lineal del vehículo de este subtema 2.4, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_x - v_y \omega_z) &= ma_x \\ m(\dot{v}_y + v_x \omega_z) &= ma_y \\ J_z \dot{\omega}_z &= \mu(F_{f,y}l_f - F_{r,y}l_r) + M_z \end{aligned} \quad (2.28)$$

Concluyendo con este modelo matemático, A continuación se realizará el estudio de la parte lineal del vehículo.

2.5. Modelo matemático lineal del automóvil de dos grados de libertad.

En el estudio del automóvil existe en algún momento determinado un funcionamiento de linealidad, donde las dinámicas físicas del vehículo se pueden analizar de una manera particular considerando un modelo lineal de dos grados de libertad.

Entonces el concepto para la velocidad longitudinal de tener un valor casi constante en un cierto tiempo es válido y, a partir de estas características, se podría establecer que se tiene un valor muy pequeño para la aceleración longitudinal.

Resultando con todas estas propiedades dinámicas de este subtema, que al momento de utilizar como base al modelo matemático no lineal de tres grados de libertad de la ecuación (2.28) se pueda reducir a dos grados de libertad para esta parte lineal del automóvil, porque la velocidad longitudinal dependerá prácticamente de la velocidad lateral y velocidad angular de viraje determinadas por el análisis de las fuerzas laterales lineales F_y de las llantas delanteras y traseras vistas en el modelo de la bicicleta de la figura 2.5, obteniendo las dos primeras y únicas ecuaciones del modelo matemático lineal de dos grados de libertad que a continuación se muestran:

$$m(\dot{v}_y + v_x \omega_z) = m a_y \quad (2.29)$$

$$J_z \dot{\omega}_z = \mu(F_{f,y} l_f - F_{r,y} l_r) + M_z \quad (2.30)$$

Realizándose con estas ecuaciones del modelo lineal de este subtema 2.5, con un estudio más preciso en el capítulo cuatro.

Por otra parte, además de estas dinámicas de la ecuación (2.29) y (2.30), se encuentran unas de igual importancia que son las variables o perturbaciones del aire sobre el automóvil, que se tratan en el siguiente subtema 2.6, además de hacer referencia a dos paquetes de software que se utilizan para la demostración matemática y práctica como son el Matlab-Simulink y

el software CarSim, donde este último programa de simulación para el vehículo se explica a continuación en la subsección 2.6.1, por lo tanto con estas líneas se termina esta parte física lineal del vehículo y se comienza un estudio de la aerodinámica del automóvil.

2.6. Aerodinámica para el automóvil.

En la parte aerodinámica del automóvil se establece que una de las principales perturbaciones que se aplican al chasis del vehículo es el aire, existiendo trabajos teóricos sobre este tema de las dinámicas del viento [33] e investigaciones actuales sobre la medición de la aerodinámica [24].

En esta tesis se definen tres dinámicas de perturbación generadas por el viento que afectan de manera directa al movimiento del vehículo que serán denominadas por la fuerza frontal longitudinal F_{dx} , fuerza lateral F_{dy} y el momento en z M_{dz} [23], las cuales son perturbaciones que se suman a los modelos matemáticos no lineales y lineales del automóvil de diferentes grados de libertad y que pueden establecerse a partir de una velocidad de viento (v_w), donde esta dinámica afecta la estabilidad del vehículo al momento de trasladarse con una velocidad longitudinal y afectando también al automóvil en su velocidad lateral, además de generarse un ángulo de viraje o yaw (ψ) que determina la posición angular del vehículo en función del viento.

Con estas características físicas se toma un punto de referencia sobre el automóvil con coordenadas (X, Y, Z), paralelo a las coordenadas de la masa en suspensión del vehículo (ver Figura 2.6).

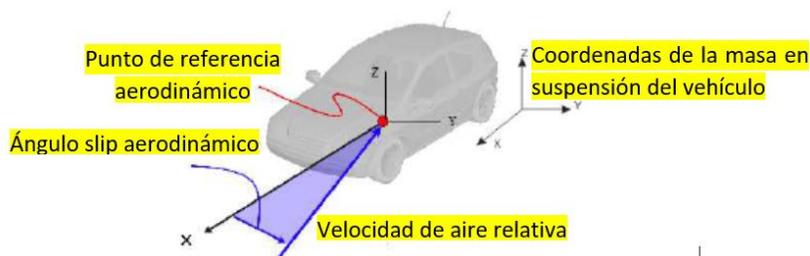


Figura 2.6: Punto de referencia aerodinámico en el Automóvil.

Utilizando las componentes de la velocidad del viento en este punto de referencia se inicia con respecto a la coordenada en X , analizada mediante la ecuación (2.31) sumándole un valor de ruido, para enseguida establecer la componente de la velocidad del aire en la coordenada Y , con una adición también de ruido en la ecuación (2.32) y por último para la velocidad del viento en la coordenada Z se define en cero:

$$v_{w,X} = V_{w0} \cdot \cos(\beta_0) + 0,025 \cdot \text{Noise} \quad (2.31)$$

$$v_{w,Y} = V_{w0} \cdot \sin(\beta_0) + 0,025 \cdot \text{Noise} \quad (2.32)$$

$$v_{w,Z} = 0, \quad (2.33)$$

donde:

V_{w0} Velocidad nominal constante del viento.

β_0 Ángulo slip aerodinámico del punto de referencia.

Noise ruido.

Al tener dichas condiciones nominales se realiza el estudio de las velocidades del viento para la masa en suspensión, con coordenadas (x, y, z) , del automóvil, con sus respectivas componentes de referencia, multiplicándose por el ángulo yaw del vehículo [9]:

$$v_{w,x} = v_{w,X} \cdot \cos(\psi) + v_{w,Y} \cdot \sin(\psi) \quad (2.34)$$

$$v_{w,y} = -v_{w,X} \cdot \sin(\psi) + v_{w,Y} \cdot \cos(\psi) \quad (2.35)$$

$$v_{w,z} = 0 \quad (2.36)$$

Conociendo las componentes establecidas de la velocidad del viento en ecuación (2.33), (2.34) y (2.35), se propone calcular también la velocidad relativa (v_{awx}, v_{awy}) , donde esta dinámica es la diferencia de la velocidad en movimiento directo o longitudinal, con respecto a la componente $(v_{w,x})$, además de la diferencia de la velocidad lateral del automóvil con la

componente ($v_{w,y}$), obteniéndose con este análisis matemático las ecuaciones mostradas a continuación [23]:

$$v_{awx} = v_x - v_{w,x} \quad (2.37)$$

$$v_{awy} = v_y - v_{w,y} \quad (2.38)$$

Una vez establecidas las características de las componentes de la velocidad del viento, es importante señalar que la propuesta de este trabajo de tesis para estos sistemas no lineales y lineal es aplicarle perturbaciones, donde la forma de analizarlos para este caso en particular tiene como base la fórmula que se muestra;

$$d = \frac{A_s(l_f + l_r)\rho c_\psi v_\omega^2}{2}, \quad (2.39)$$

donde:

- A_s Superficie del vehículo.
- ρ Densidad de masa de aire.
- c_ψ Coeficiente aerodinámico constante.

Con la ecuación (2.39), se realiza la propuesta para determinar las perturbaciones de fuerzas F_{dx} , F_{dy} , sobre la masa de suspensión del vehículo, así como el momento en la componente z , denominado M_{dz} , teniendo en cuenta que estas perturbaciones se consideran de la siguiente forma;

$$F_{dx} = -0,5 \cdot A_{sf} \cdot \rho \cdot c_{ax} \cdot v_{a\omega x}^2 \quad (2.40)$$

$$F_{dy} = -0,5 \cdot A_{sl} \cdot \rho \cdot c_{ay} v_{a\omega x}^2 \quad (2.41)$$

$$M_{dz} = -c_z \cdot F_{dy}, \quad (2.42)$$

donde:

A_{sf}, A_{sl} superficie del vehículo frontal y lateral.

c_{ax}, c_{ay} coeficiente aerodinámico longitudinal y lateral constante.

c_z Coeficiente de momento yaw o viraje aerodinámico constante positivo.

Con las perturbaciones obtenidas, solo se debe señalar que los parámetros que se utilizan para determinar las simulaciones y comprobaciones con el software Matlab-Simulink, se observan en la tabla 2.3.

Tabla 2.3: Parámetros para las simulaciones de perturbaciones

| Variables de viento | |
|----------------------|--------------------|
| $V_{w0} = 28m/s$ | $\beta_0 = -22,5$ |
| $A_{sf} = 2,59m^2$ | $A_{sl} = 5,10m^2$ |
| $c_{ax} = 0,3$ | $c_{ay} = 0,6$ |
| $\rho = 1,206kg/m^3$ | $c_z = 0,20$ |

2.6.1. Software CarSim.

Con las dinámicas entendidas en el subtema 2.6, es momento de mencionar las perturbaciones de aire, las cuales se presentan con un nombre y una sugerencia de valores como se muestra en la propia figura 2.7 que pertenece al menú de ayuda de este software Carsim y que se explican a continuación.

Con la primera variable denominada viento ($V_{wind} = V_{w0}$), que para las simulaciones es de 100 km/h a 45 grados con un ángulo global yaw de viento ($Yaw_{wind} = \psi$) de 225 grados o de -135 grados, además el vehículo tiene un ángulo yaw de 90 grados, con el ángulo slip aerodinámico ($\beta_{Air} = \beta_0$), de -22.5° y una velocidad relativa de viento (V_{air}) de 185 km/h, aproximadamente, donde, con estos parámetros bien definidos en CarSim se pueden relacionar con las fórmulas de perturbaciones aerodinámicas de Matlab/Simulink propuestos en la Tabla 2.3.

Estableciendo que, para las ecuaciones de CarSim, son denominadas por tres fuerzas y tres momentos, cumpliendo con las siguientes formulas, además de mostrar también una relación con las variables de la fuerza frontal longitudinal, fuerza lateral, y el momento en z, estudiadas en el subtema 2.6;

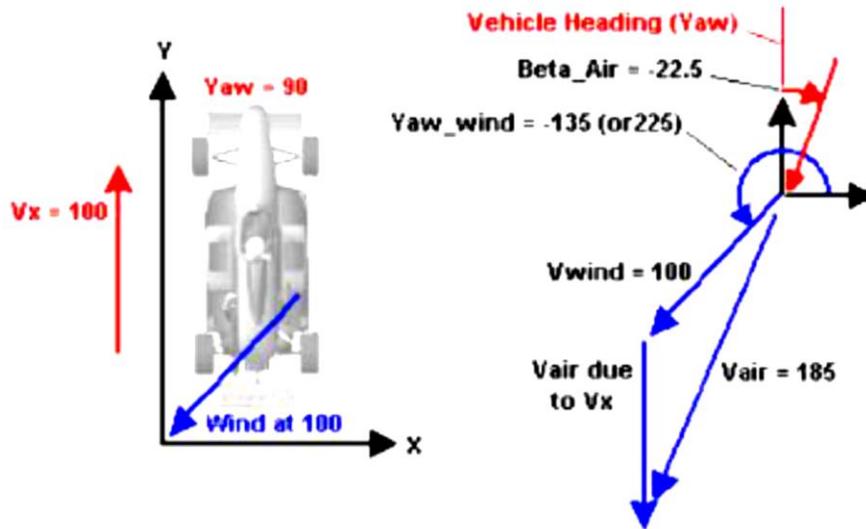


Figura 2.7: Vectores de velocidad de viento al vehículo.

$$F_x = CF_x(\beta_{Air}) * A * Q \tag{2.43}$$

$$F_y = CF_y(\beta_{Air}) * A * Q \tag{2.44}$$

$$F_z = CF_z(\beta_{Air}) * A * Q \tag{2.45}$$

$$M_x = CM_x(\beta_{Air}) * A * L * Q \tag{2.46}$$

$$M_y = CM_y(\beta_{Air}) * A * L * Q \tag{2.47}$$

$$M_z = CM_z(\beta_{Air}) * A * L * Q, \tag{2.48}$$

donde:

| | |
|-------------------|--|
| $F_x = F_{dx}$ | Fuerza aerodinámica longitudinal. |
| $F_y = F_{dy}$ | Fuerza aerodinámica lateral. |
| F_z | Fuerza aerodinámica en z . |
| M_x | Momento aerodinámico Roll. |
| M_y | Momento aerodinámico Pitch. |
| $M_z = M_{dz}$ | Momento aerodinámica Yaw. |
| $CF_x = c_{ax}$ | Coefficiente aerodinámico longitudinal. |
| $CF_y = c_{ay}$ | Coefficiente aerodinámico lateral. |
| CF_z | Coefficiente aerodinámico en z . |
| CM_x | Coefficiente aerodinámico de momento Roll. |
| CM_y | Coefficiente aerodinámico de momento Pitch. |
| $CM_z = c_z$ | Coefficiente aerodinámico de momento Yaw. |
| $A = A_{sf}$ | Sección de área de cruce frontal. |
| L | Longitud de referencia aerodinámica. |
| $D = \rho$ | Densidad del aire. |
| V | Velocidad relativa de viento. |
| $Q = D * V * V/2$ | Promedio entre el coeficiente de la densidad de aire por el cuadrado de la velocidad relativa de viento. |

Continuando con las dinámicas de perturbación se muestra enseguida la configuración de parámetros en fuerzas y momentos aerodinámicos realizándose como se observa en la Figura 2.8. A partir de introducir la información externa de las perturbaciones al software CarSim, donde estas entradas de viento son diseñados en Matlab/Simulink, llevando las fórmulas de la fuerza longitudinal aerodinámica en la ecuación (2.40), de la fuerza lateral en ecuación (2.41) y del momento en z de la ecuación (2.42), a las entradas denominadas IMP FX AERO, IMP FY AERO, IMP MZ AERO, donde su configuración se muestra en la Figura 2.9.

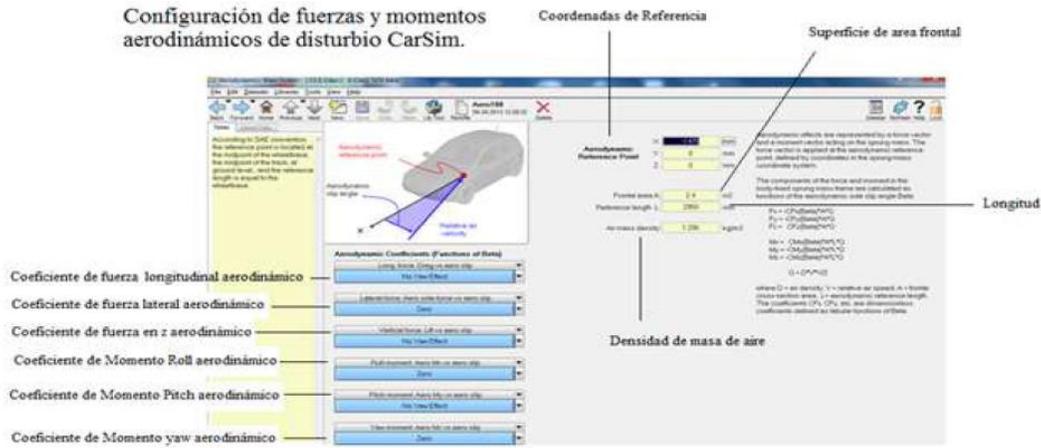


Figura 2.8: Configuración de parámetros para fuerzas y momentos aerodinámicos de perturbación.

Una vez configurado el CarSim para las entradas de las ecuaciones matemáticas de Matlab-Simulink, se configuran ahora las salidas aerodinámicas de perturbación llamadas, F_{xAir} , F_{yAir} , M_{zAir} , como se observa en la Figura 2.10, obteniendo con esto las señales de este software que se pueden comparar con las perturbaciones realizadas en Matlab/Simulink.

Además se considera que estas aerodinámicas de viento expresadas en este subtema 2.6.1, están sobre el vehículo que, para un caso particular, puede ser representado por el software llamado CarSim, el cual simula al automóvil y se propone como una planta de vehículo para configurarlo en cuanto a su masa, masa sin suspensión (m_{uns}), longitud del vehículo ($L = l_f + l_r$), momento de inercia en el eje z o ángulo yaw (J_z), momento de inercia en el eje de guiñada o roll (J_{ax}), momento de inercia en el eje y o ángulo pitch (J_y), altura (h) por mencionar algunos parámetros (Observados Figura 2.11), teniendo como base la ayuda del software y estableciendo los siguientes valores, por ejemplo para la masa del automóvil esta se configura aproximadamente de 1600kg-3000kg, la masa sin suspensión se analiza más adelante, las longitudes con respecto al centro de gravedad se dejan a cargo del diseñador en CarSim, los momentos de inercias se recomiendan por ejemplo para la inercia de guiñada en un vehículo pequeño de 400-600 kgm², o para una SUV's pequeña de 250-650 kgm², aunque el cálculo para esta inercia de guiñada, toma en cuenta a la masa total del vehículo:

$$J_{ax} = 0,25 * masa * Ancho del veh\acute{u}culo * Altura del autom\acute{o}vil \tag{2.49}$$

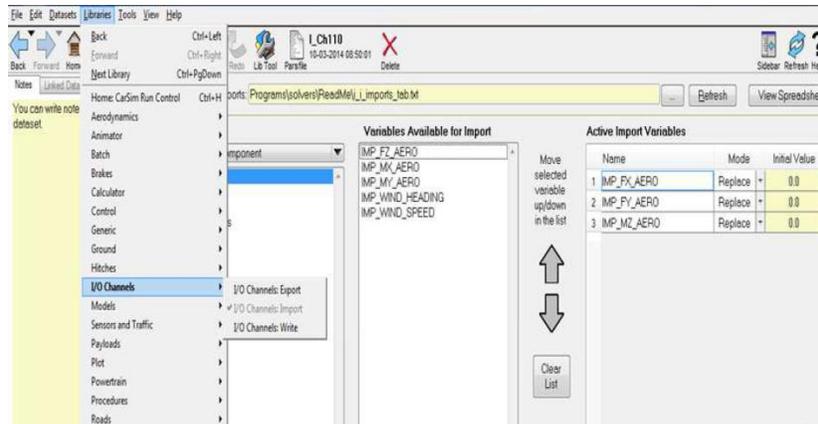


Figura 2.9: Configuración de entradas de fuerzas y momentos aerodinámicos de perturbación.

Además, la inercia de guiñada también se puede calcular con la masa del automóvil, acompañada de los giros de radio de guiñada, los cuales determinan el radio efectivo de la masa suspendida distribuida a cerca del eje roll del vehículo, este giro o radio de guiñada (R_x) es típico de 0.6 m, por lo tanto la inercia roll, se calcula:

$$J_{ax} = m * R_x * R_x \tag{2.50}$$

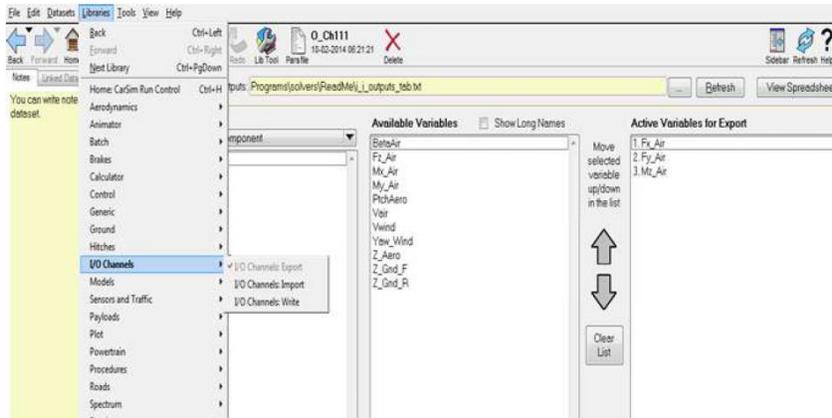


Figura 2.10: Configuración de salidas para fuerzas y momentos aerodinámicos de perturbación.

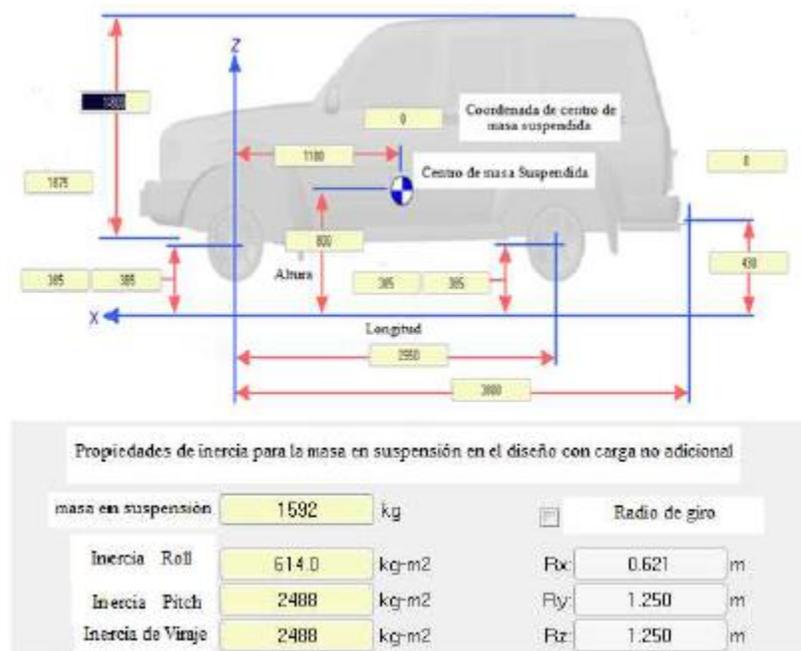


Figura 2.11: Configuración de parámetros del vehículo.

Observando que los momentos de inercia pitch y de viraje o yaw, también se calculan bajo sus radios de giro que para esta tesis son de 1.250 m, correspondiente a cada una de estas inercias, multiplicadas cada una de ellas por la masa del vehículo, obteniendo las siguientes ecuaciones para sus cálculos:

$$J_y = m * R_y * R_y \tag{2.51}$$

$$J_z = m * R_z * R_z, \tag{2.52}$$

donde:

R_y Radio de giro de cabeceo o pitch.

R_z Radio de giro de viraje o yaw.

Configurado el vehículo se puede analizar en este momento otras variables, empezando con el ingreso de dinámicas para la configuración de salidas a partir de diferentes maniobras de volante por parte del conductor, así como entradas de control o perturbaciones y obtener algunas variables para su análisis como pueden ser la aceleración longitudinal, aceleración

lateral, aceleración de viraje, las velocidades longitudinal, lateral, angular yaw o de viraje, velocidad angular de guiñada, ángulo de guiñada, además de poder obtener las fuerzas de las llantas frontales y traseras, mostrando que estas salidas del software CarSim se configuran como se observa en la figura 2.12.

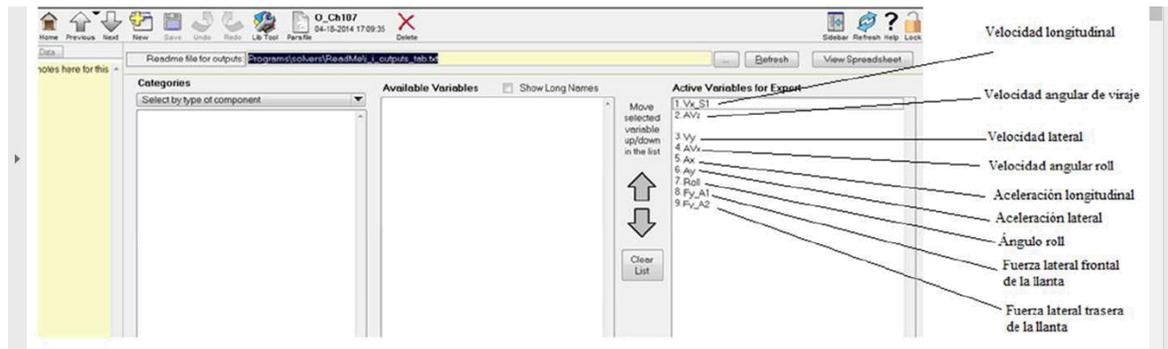


Figura 2.12: Configuración de dinámicas de salida del CarSim.

Configuradas las salidas de este software, se puede continuar con el estudio de programar las entradas al sistema, iniciando con alguna entrada del conductor o de control (IMP STEER SW) en caso de aplicar algún controlador, un momento en z (IMP MZ EXT) o un coeficiente de fricción de las llantas delanteras y traseras del vehículo (IMP MUY), por mencionar algunas entradas a esta planta de simulación llamada CarSim, toda esta programación se muestra en la siguiente figura 2.13.

Para poder obtener las salidas explicadas del software CarSim, a partir de las entradas mostradas en la figura 2.13, se debe configurar al automóvil de este software con referencia a diferentes variables y una de las más importantes son la suspensión utilizada.

Por lo tanto se puede comenzar a explicar la programación de la suspensión CarSim, así como las características de las llantas del vehículo refiriéndose a los ángulos Camber que viene siendo cuando las llantas tienen un ángulo de apertura y al toe que significa un ángulo al cerrarse los neumáticos con respecto al vehículo, que para el caso de las simulaciones de este trabajo de tesis tienen un valor de cero grados de inclinación, importante mencionar que, bajo estas circunstancias, la suspensión frontal del vehículo es independiente, refiriéndose con esto a que en las llantas delanteras no se transmite ningún movimiento una de otra, siempre

y cuando no exista una barra anti-roll conectada entre las dos ruedas frontales izquierda y derecha.

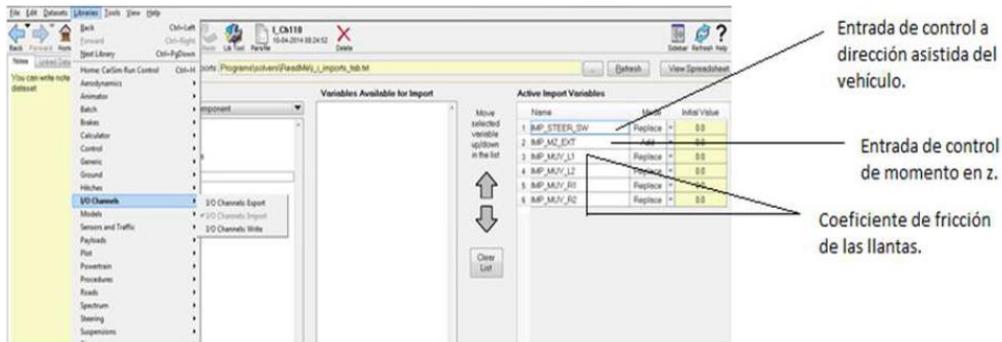


Figura 2.13: Configuración de dinámicas de entrada al CarSim.

Con esto se determina ahora la suspensión trasera que tiene un eje sólido, significándose que las dos llantas traseras al momento de tener un movimiento de guiñada o roll cualquiera de ellas sea la izquierda trasera o derecha trasera se transmite este movimiento, además sus ángulos Camber y toe también son cero grados, por lo tanto la configuración de todas estas propiedades de la suspensión del vehículo CarSim se muestran en la figura 2.14.

Entrando más a detalle sobre la suspensión de esta planta CarSim se debe referir al sistema de resorte (springs) y amortiguador (dampers) utilizado para la suspensión frontal y trasera, donde prácticamente deber ser rígida, conociendo que la rigidez del resorte es una relación de fuerza sobre desplazamiento del resorte ($F/\Delta s$), colocando valores para este caso de Newton sobre milímetros y también el coeficiente de amortiguación que debe ser una relación de fuerza por desplazamiento con respecto al tiempo ($F/\Delta s/tiempo$), observando todas estas propiedades en la figura 2.15.

Teniendo estos conceptos de la suspensión, solo queda señalar a la masa sin suspensión que es diferente a la masa total del vehículo, ya que la masa sin suspensión prácticamente son el eje frontal, el eje trasero y las llantas, proponiendo para esta masa sin suspensión del software CarSim, el peso de 250 kilogramos, como se puede observar en la Figura 2.16.

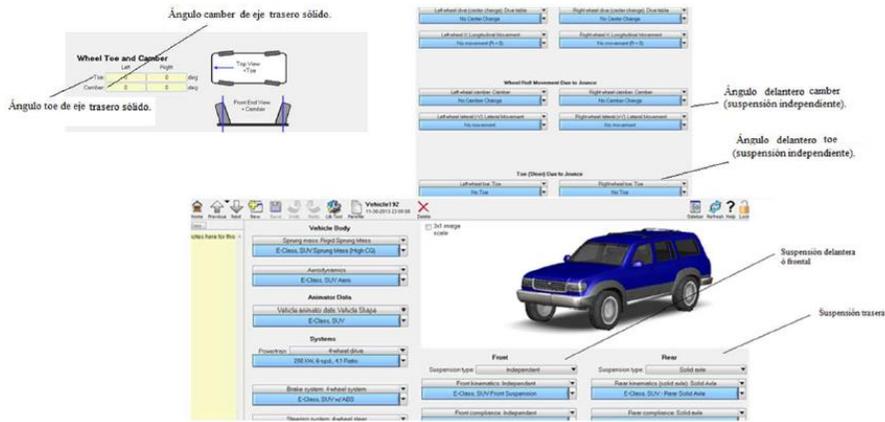


Figura 2.14: Configuración de tipo de suspensión, ángulo Camber y toe para llantas.

Por lo tanto, dejando de lado la configuración de la suspensión, se estudian en este instante otras características de las variables del vehículo como son las llantas refiriéndose a sus fuerzas laterales tanto frontal como trasera, donde el cálculo que realiza este software con respecto a los ángulos slip son desde cero hasta 15 o 20 grados. Teniendo la posibilidad de escoger varios modelos para calcular la fuerza lateral, donde el que se realiza para las simulaciones de este trabajo de tesis es un modelo interno (internal tire Model), escogiendo varias cargas verticales (F_z) a las llantas del automóvil.

Este simulador de CarSim realiza cálculos de las fuerzas longitudinales, de las fuerzas laterales y del Momento en z de las llantas bajo ángulos pequeños de deslizamiento slip (α), como se observa en la siguiente ecuación (2.53) que es una fórmula abreviada de los ángulos de deslizamiento de las llantas frontal y trasera del vehículo, al considerar una velocidad longitudinal de mayor valor con respecto a la velocidad lateral y de establecer que no interviene en gran parte la velocidad angular de viraje de la llantas y el ángulo del volante del conductor para este caso en particular:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) \tag{2.53}$$

Observando las variables en las llantas del automóvil, se determina también el coeficiente de fricción considerado de 0.8 a 1, siendo estos valores acotados por el fabricante del software

y el valor a escoger dependerá del diseñador, además con estas dinámicas de las llantas solo falta configurar sus fuerzas laterales que cumplen para esta configuración del modelo interno del CarSim con la siguiente ecuación:

$$F_y = \frac{\mu_o}{\mu} F_Y \left(F_z, \frac{\mu_o}{\mu} \alpha \right) \tag{2.54}$$

donde:

- $\mu_o = \mu$ Coeficiente inicial de fricción.
- F_Y Fuerza lateral de tabulación en CarSim.

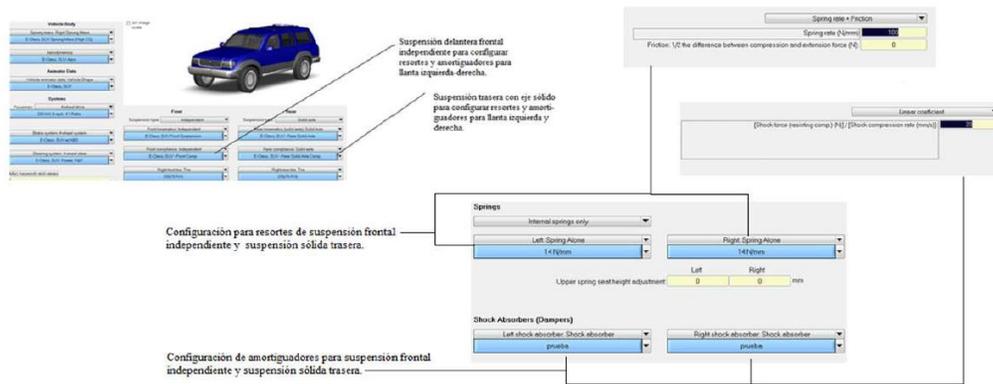


Figura 2.15: Valores de suspensión para resorte y amortiguador.

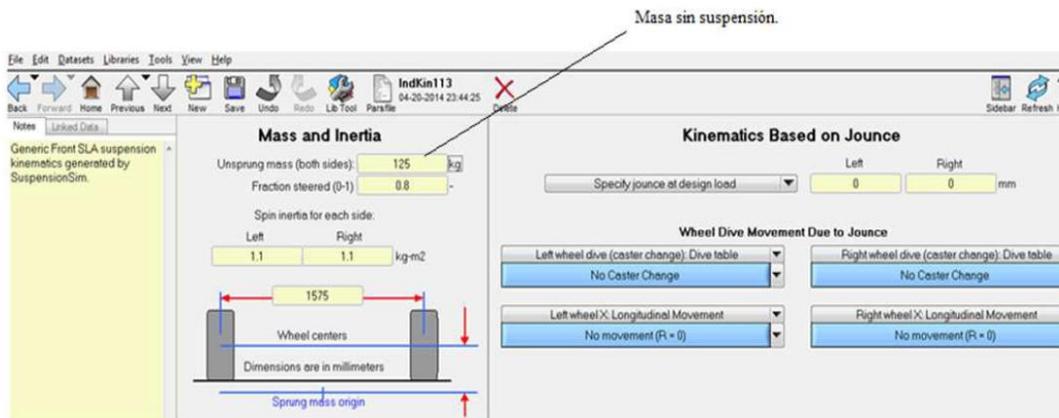


Figura 2.16: Programación de masa sin suspensión.

Pero a partir de las fuerzas laterales en las llantas, también existe otra variable relacionada a los neumáticos refiriéndose al momento en z de alineación establecida mediante la fórmula que a continuación se muestra:

$$M_z = \frac{\mu}{\mu_o} M_z \left(F_z, \frac{\mu_o}{\mu} \alpha \right), \quad \{ \kappa = 0 \}, \tag{2.55}$$

donde:

$M_z = M_z$ Momento de alineación z en las llantas de Carsim.

k Slip longitudinal.

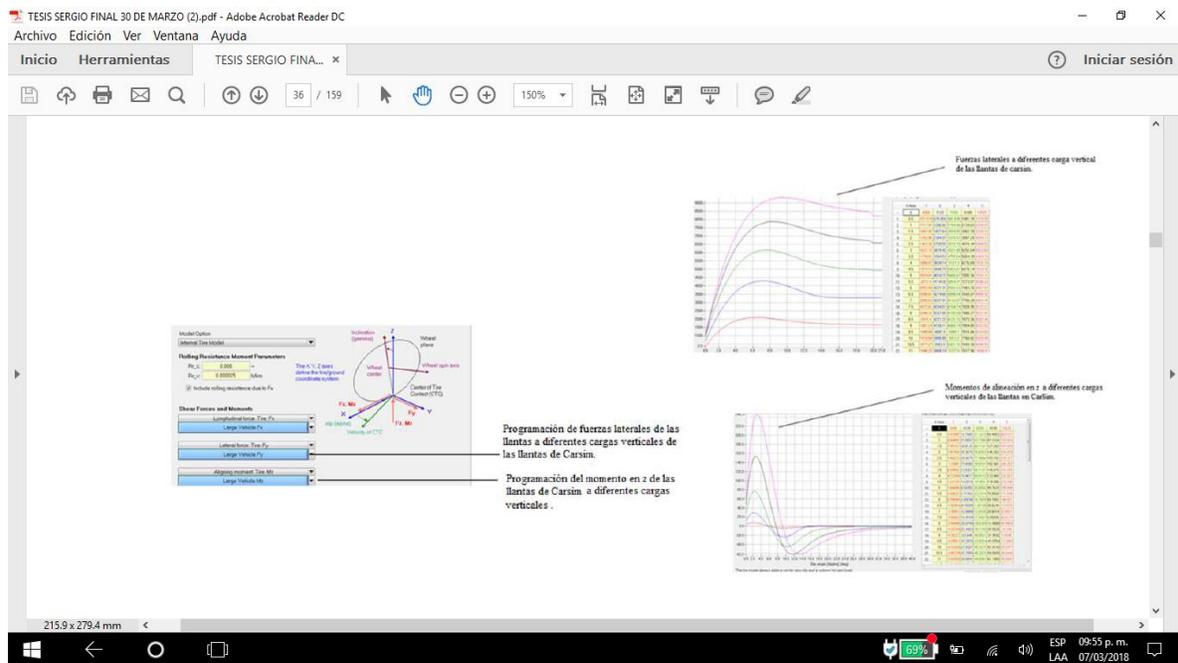


Figura 2.17: Fuerzas laterales a diferentes cargas verticales de la llanta y momento en z .

Mencionando que el momento de alineación de las llantas para este modelo interno del software CarSim tiene un ángulo de deslizamiento longitudinal de cero, resultando con esto que las fuerzas longitudinales no sean consideradas, por lo tanto solo influyen las fuerzas laterales y el momento en z de alineación mostrándose las gráficas en la siguiente figura 2.17. A partir de estas dinámicas analizadas que ofrece el software CarSim se realizó un estudio solamente de algunas variables del automóvil utilizadas para el trabajo de investigación del

Doctor Sergio Sandoval Pérez, enseguida se realiza el estudio de la estabilidad de sistemas por medio de la teoría de Lyapunov, la cual forma parte de la base matemática al proponer los controladores y observadores para que funcionen correctamente, comenzando con las técnicas de estabilidad de Lyapunov.

Capítulo 3

3. Técnicas de estabilidad de Lyapunov.

3.1. Introducción.

En la parte que corresponde a un determinado sistema de control se puede utilizar los métodos de Lyapunov para demostrar la estabilidad de sistemas no lineales variables en el tiempo y también de los sistemas lineales invariantes en el tiempo [34]. Estos sistemas deben ser dinámicos y establecidos por ecuaciones diferenciales ordinarias o de ecuaciones de estado, sin la necesidad de resolver estas últimas ecuaciones. Aplicando los conceptos anteriores se pueden considerar los modelos matemáticos no lineales y lineales de diferentes grados de libertad en variables de estado de esta tesis, que al momento de analizarlos matemáticamente se les puede demostrar su estabilidad y por lo tanto es necesario entender las técnicas de Lyapunov de este capítulo tres como bases matemáticas para establecer diferentes conceptos en esta investigación como a continuación se describen. Iniciando con la teoría de este subtema 3.1 se estudia un enfoque en la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema en el sentido de Lyapunov. Un punto de equilibrio es estable, si todas las soluciones que inician en la vecindad permanecen en ella; de otra manera el punto de equilibrio es inestable. Se dice que el punto de equilibrio es asintóticamente estable si todas las soluciones que inician en la vecindad, no solo permanecen en ella, sino que además tienden al punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a infinito.

Teorema de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Consideremos el sistema:

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.1}$$

donde $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ es un mapeo localmente Lipschitz desde un dominio $D \subset \mathbf{R}^n$ en \mathbf{R}^n . Supongamos que $\bar{x} \in D$ y es un punto de equilibrio del sistema (3.1) entonces $f(\bar{x}) = 0$.

El objetivo es caracterizar y estudiar la estabilidad de \bar{x} . Para el análisis se trabaja en el origen con $\bar{x} = 0$. Esto no representa pérdida de generalidad, dado que cualquier punto de equilibrio

puede ser trasladado al origen mediante el cambio de variable $y = x - \bar{x}$. Donde la derivada de y está dada por:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \Rightarrow g(y), \quad \text{donde: } g(0) = 0 \quad (3.2)$$

El sistema en la variable y , tiene un punto de equilibrio en el origen, por lo que sin pérdida asumimos que $f(x)$ cumple con $f(0) = 0$ por lo que podemos analizar la estabilidad en el origen sin pérdida de generalidad.

Definición 3.1.1. El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (3.1) es:

- Estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (3.3)$$

- Inestable, si no es estable.
- Asintóticamente estable (AE) si es estable y δ puede tomarse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (3.4)$$

La definición 3.1.1 tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo $t \geq 0$. La existencia de tal solución no necesariamente está garantizada debido a la Lipchitzida local de la función $f(x)$. Sin embargo con ayuda de las condiciones adicionales del teorema de Lyapunov se puede garantizar la existencia global de la solución.

Con la definición de estabilidad y estabilidad asintótica dada previamente, en donde la tarea sería encontrar estrategias que ayuden a determinar la estabilidad del sistema que se analiza. En 1802, Lyapunov muestra que no solo las funciones de energía pueden usarse para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema, por ejemplo la función $V: D \rightarrow \mathbf{R}$ continuamente diferenciable en un dominio $D \subset \mathbf{R}^n$, que contiene al origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (3.1) denotada por $\dot{V}(x)$ esta dada por,

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right], \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (3.5)$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias de un sistema es dependiente de la ecuación del sistema. Entonces $\dot{V}(x)$ que puede o no ser diferente para diferentes sistemas.

Teorema 3.1.1. Si $x = 0$ es un punto de equilibrio del sistema (3.1), y $D \subset \mathbf{R}^n$ es un dominio que contiene al origen. Sea $V: D \rightarrow \mathbf{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (3.6)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \quad (3.7)$$

Entonces el origen es estable, además si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (3.8)$$

Entonces $x = 0$ es asintóticamente estable (Ver [22]).

Una función continuamente diferenciable que satisface las condiciones de (3.6) y (3.7) es llamada función de Lyapunov. La superficie $V(x) = c$, se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel. La condición (3.8) implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ entra al conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbf{R}^n | V(x) \leq c\}$ del cual no podrá salir. Cuando $\dot{V} < 0$, la trayectoria decrece, moviéndose de una superficie de Lyapunov a otra de radio menor, es decir con una c menor. A medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$, se reduce hasta convertirse en un punto situado en el origen cuando $t \rightarrow \infty$ (ver Figura 3.1). Con lo que se puede concluir que el punto de equilibrio, en este caso el origen es estable por que la trayectoria puede ser encerrada en cualquier esfera B_ϵ cumpliendo con que el estado inicial $x(0)$ sea parte de una superficie de Lyapunov contenida en dicha esfera B_ϵ .

Una función $V(x)$ que satisface la condición (3.6) es llamada función definida positiva. Si satisface $V(x) \geq 0$ para $x = 0$, Se dice función semidefinida positiva. Una función se dice definida negativa o semidefinida negativa si $-V(x)$ es definida positiva o semidefinida positiva respectivamente. Si $V(x)$ no tiene signo definido, se dice que es una función indefinida.

Entonces el teorema de Lyapunov se puede enunciar de la siguiente manera: el origen de un sistema es estable si existe una función definida positiva $V(x)$ y continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x)$ es semi definida negativa, o bien el origen del sistema será asintóticamente estable si \dot{V} es definida negativa.

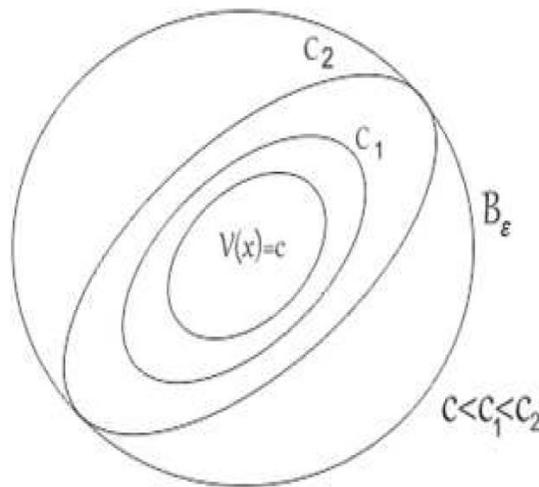


Figura 3.1: Superficie de Lyapunov.

3.1.1. Estabilidad asintótica global.

Dejando que $\varphi(t, x)$ sea una solución del sistema (3.1) que inicia en un tiempo cero, además suponemos que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Se define como región de atracción del punto de equilibrio al conjunto de soluciones x tal que $\lim \varphi(t, x) = 0$. En muchos casos resulta bastante complejo encontrar analíticamente la región de atracción. Sin embargo se puede estimar un conjunto contenido en esta región, con ayuda de la función de Lyapunov. El teorema 3.1.1 nos indica que de existir una función de Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio D y $\Omega_c =$

$\{x \in R^n | V(x) \leq c\}$, entonces toda trayectoria que inicia en Ω_c permanece en Ω_c y decreciente tendiendo al origen conforme $t \rightarrow \infty$.

Buscando las condiciones para que la región de atracción sea igual a el espacio R^n . Esto se puede probar si para todo estado inicial x , la trayectoria $\varphi(t, x)$ tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$, sin importar la magnitud de $\|x\|$. Si se presenta esta característica en un punto de equilibrio asintóticamente estable, y además se dice que el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

Teorema 3.1.2. *Barbashin- Krasovskii.*

Sea el origen un punto de equilibrio del sistema (3.1) y sea $V: R^n \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0; \forall(x) = 0 \tag{3.9}$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \tag{3.10}$$

$$\dot{V}(x) < 0; \forall(x) = 0 \tag{3.11}$$

Entonces se dice que $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

3.2. Principio de Invarianza.

En ciertos sistemas la función de energía no es suficiente confiable para probar que el origen sea asintóticamente estable, para asegurar que un sistema cumpla con las condiciones necesarias de estabilidad, haciendo uso del principio de invarianza de Lasalle.

Teorema 3.2.1. *Lasalle*

➤ Sea $x(t)$ una solución para el sistema 3.1

- Un punto p es un límite positivo de $x(t)$ si existe una secuencia $\{t_n\}$, con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- El conjunto de todos los puntos límites positivos del conjunto límite positivo de $x(t)$.
- Un conjunto M es un conjunto invariante con respecto al sistema de 3.1, si

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$$

- Un conjunto M es un conjunto invariante positivo con respecto al sistema 3.1, si

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0$$

- Se dice que $x(t)$ tiende a M conforme t tiende a infinito, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $T \geq 0$ tal que

$$\text{dist}(x(t), M) < \varepsilon, \forall t > T,$$

donde $\text{dist}(p, M)$ indica la distancia de un punto p a un conjunto M , es decir,

$$\text{dist}(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|$$

Un punto de equilibrio asintóticamente estable es un conjunto límite positivo de toda solución que inicie suficientemente cerca del ciclo límite. La solución tiende al ciclo límite conforme $t \rightarrow \infty$ pero no necesariamente en algún punto específico del ciclo límite, en otras palabras el $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ no necesariamente existe. El punto de equilibrio y el ciclo límite son conjuntos invariantes porque toda solución que inicie sobre ellos se mantiene para todo $t \in \mathbb{R}$. El conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\}$ con $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_c$ es un conjunto invariante positivo.

Lema 3.2.2. Si la solución $x(t)$ del sistema (3.1) es acotada y permanece en la región D para todo $t \geq 0$, entonces su conjunto límite positivo L^+ es un conjunto invariante, no vacío y compacto. Más aún si

$$x(t) \rightarrow L^+ \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Teorema 3.2.3. De Lasalle. Sea $\Omega \subset D$ un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto al sistema (3.1). Sea $V: D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos de Ω para los cuales $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el mayor conjunto invariante dentro de E . Entonces toda solución que inicia en Ω tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 3.2.4. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (3.1). Sea $V: D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable y definida positiva en un dominio D que contiene al origen $x = 0$, y tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en D . Sea $S = \{x \in D | \dot{V}(x) = 0\}$ y se supone que ninguna solución, excepto la trivial $x(t) = 0$, puede permanecer idénticamente en S . Entonces el origen es asintóticamente estable.

Corolario 3.2.5. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (3.1). Sea $V: R^n \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable, radialmente acotada y definida positiva, tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en R^n . Sea $S = \{x \in R^n | \dot{V}(x) = 0\}$ y se supone que ninguna solución, excepto la trivial $x(t) = 0$, puede permanecer idénticamente en S . Entonces el origen es globalmente asintóticamente estable.

El teorema de Lasalle no solo es menos riguroso que el teorema de Lyapunov con respecto a la condición $\dot{V}(x) \leq 0$, además lo extiende en tres direcciones.

- *Da una estimación de la región de atracción.*
- *Se extiende a un conjunto de puntos de equilibrio.*
- *La función $V(x)$ no tiene que ser definida positiva.*

Como $V(x)$ es radialmente no acotada, el conjunto $\Omega_c = \{x \in R^2 | V(x) \leq c\}$ es un conjunto invariante positivo compacto. Por lo tanto, tomando $\Omega = \Omega_c$ se cumplen todas las condiciones. El conjunto E está dado por (3.12)

$$E = \{x \in \Omega_c | \dot{x}_1 = 0\} \tag{3.12}$$

3.3. Estabilidad de Lyapunov.

Teorema 3.3.1. *Estabilidad de Lyapunov.*

Consideremos el sistema inestacionario de (3.13).

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.13)$$

donde $f: [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ es continua en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times D$, y $D \subset R^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$. El origen es un punto de equilibrio del sistema (3.14) para $t = 0$ si

$$f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0 \quad (3.14)$$

Un equilibrio en el origen puede ser la traslación de un punto de equilibrio que no está precisamente en cero o más generalmente, la traslación de una solución no nula del sistema. Para ver este último punto, supongamos que $\bar{y}(\tau)$ es una solución del sistema (3.15).

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y) \quad (3.15)$$

Definida para todo $\tau \geq a$. El cambio de variables

$$x = y - \bar{y}(\tau); \quad t = \tau - a$$

Transformar al sistema (3.15) en la forma de

$$\dot{x} = g(t + a, x + \bar{y}(t + a)) - \dot{\bar{y}}(t + a) \triangleq f(t, x) \quad (3.16)$$

y como

$$\bar{y}(t + a) = g(t + a, \bar{y}(t + a)), \forall t \geq 0 \quad (3.17)$$

El origen es un punto de equilibrio del sistema transformado (3.16) para $t = 0$ por lo tanto, se realiza la prueba de la estabilidad del origen considerándolo como un punto de equilibrio del sistema transformado, para determinar la estabilidad de la solución $y(\tau)$ del sistema original. Es importante tener en cuenta que si $y(\tau)$ no es un valor constante, el sistema transformado es inestacionario aunque el sistema original sea estacionario. Por lo que el análisis de estabilidad de soluciones en sentido de Lyapunov solo puede ser aplicado a puntos de equilibrio de sistemas estacionarios.

Definición 3.3.1. *El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (3.13) es:*

- *Estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (3.18)$$

- *Uniformemente estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, independientemente de t_0 , tal que la ecuación (3.18) se satisface.*
- *Inestable, si no es estable.*
- *Asintóticamente estable, si es estable y existe $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $\|x(t_0)\| < c$.*
- *Uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y además existe $c > 0$ independiente de t_0 tal que para todo $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow \infty$ uniformemente en t_0 ; es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon)$ tal que*

$$\|x(t_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon), \forall \|x(t_0)\| < c \quad (3.19)$$

- *Globalmente uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y para cada par de números positivos ε y c , existe $T = T(\varepsilon, c)$ tal que*

$$\|x(t_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c), \forall \|x(t_0)\| < c \quad (3.20)$$

3.4. Teoremas conversos.

Los teoremas conversos ayudan a determinar, si existe una función de que cumpla con las condiciones del teorema de estabilidad de Lyapunov.

Teorema 3.4.1. *Sea el origen un punto de equilibrio del sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.21)$$

donde $f: [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ es continuamente diferenciable, $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ y la matriz jacobiana $\frac{\partial f}{\partial x}$ es acotada en D , uniformemente en t . Sean k, γ , y r_0 constantes positivas con $r_0 < \frac{r}{k}$. Sean $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_0\}$. Supongamos que las trayectorias del sistema satisfacen

$$\|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \forall x(t_0) \in D_0, \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.22)$$

Entonces existe la función $V: [0, \infty) \times D_0 \rightarrow R$ que satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -\alpha_0 \|x\|^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial t} \right\| \leq \alpha_4 \|x\|,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, son funciones definidas en $[0, r_0]$. Si el sistema es estacionario, V puede elegirse independiente de t .

3.5. Estabilidad en sistemas perturbados.

Consideremos el sistema dado por (3.24)

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \quad (3.24)$$

donde $f: [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ son seccionalmente continuas en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times D$ y $D \subset R^n$ es un dominio que contiene al origen.

Consideremos a $g(t, x)$ como una perturbación del sistema

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3.25)$$

La perturbación $g(t, x)$ puede ser causa de errores de modelado, envejecimiento de los componentes del sistema, incertidumbre, etc.

Suponiendo que el sistema 3.25 tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. Vamos analizar el caso donde la perturbación se anula en el origen, es decir $g(t, 0) = 0$, de tal forma que el origen sigue siendo un punto de equilibrio del sistema perturbado.

3.5.1. Perturbación de un punto de equilibrio exponencialmente estable.

Supongamos que la perturbación $g(t, x) = 0$ y que el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema 3.25. Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov que satisface a 3.26, 3.27 y 3.28.

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_0 \|x\|^2 \quad (3.27)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial t} \right\| \leq c_4 \|x\| \quad (3.28)$$

Para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ y para ciertas constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 . La existencia de una función de Lyapunov que satisface 3.26, 3.27 y 3.28, es garantizada por el teorema 3.4.1. Suponiendo que la perturbación $g(t, x)$ satisface la cota de crecimiento lineal.

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \forall t \geq 0, \forall x \in D, \quad (3.29)$$

donde γ es una constante negativa. De acuerdo a la consideración acerca de $g(t, x)$ es igual a cero en el origen y es localmente Lipschitz cerca al origen, entonces se puede probar que se cumple 3.29, para esta región. Utilizando a V como función de energía para el sistema perturbado 3.24. Planteando entonces a

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \quad (3.30)$$

De acuerdo a 3.26, 3.27 y 3.28, se puede acotar \dot{V} a la expresión 3.31.

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \gamma \|x\|^2 \quad (3.31)$$

Se busca que γ sea lo suficiente pequeña para satisfacer 3.32.

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} \quad (3.32)$$

Entonces se tiene

$$\dot{V}(t, x) \leq -(c_3 - c_4 \gamma) \|x\|^2 < 0, \forall x \in D - \{0\} \quad (3.33)$$

Lo que permite probar el lema 3.5.1, que dice: *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable, del sistema 3.25. Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface 3.26, 3.27 y 3.28 en $[0, \infty) \times D$. Supongamos que la perturbación $g(t, x)$ satisface 3.30 y 3.33. Entonces el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado 3.24. Si las hipótesis pueden ser aplicadas globalmente, entonces el origen es global y exponencialmente estable.*

Sin la necesidad de conocer $V(t, x)$ explícitamente, solo queda por conocer que si el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal, para garantizar la existencia de una función $V(t, x)$ que cumple con 3.26, 3.27 y 3.28. De no conocer la función $V(t, x)$ explícitamente entonces no es posible determinar la cota 3.32 y en este caso solo podríamos afirmar que el origen es exponencialmente estable para toda perturbación que cumpla con 3.29 para una γ suficientemente pequeña.

3.6. Perturbación de un punto de equilibrio uniforme y asintóticamente estable.

Si el origen del sistema 3.25 no es exponencial sino uniformemente estable, el análisis se complica. Suponiendo un sistema con función de Lyapunov definida positiva y decreciente $V(t, x)$ que satisface a 3.34:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \quad (3.34)$$

Para todo $(t, x) [0, \infty) \times D$, donde $W_3(x)$ es definida positiva y continua. La derivada de $V(t, x)$ sobre las trayectorias del sistema 3.24 satisface 3.35.

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -W_3(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\| \quad (3.35)$$

Para asegurar que $\dot{V}(t, x)$ sea definida negativa se necesita que

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\| < W_3(x) \quad (3.36)$$

Para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$. Es evidente la necesidad de una cota para $\|g(t, x)\|$ que va a depender de la naturaleza de la función de energía del sistema. Una clase de funciones de Lyapunov para las cuales el análisis es tan simple como para el caso de la estabilidad exponencial en el caso en que $V(t, x)$ es definida positiva, decreciente y satisface 3.37 y 3.38.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \varphi^2(x) \quad (3.37)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| < c_3 \varphi(x) \quad (3.38)$$

Para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$, para ciertas constantes positivas c_3 y c_4 , donde $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es definida positiva y continua. Una función de Lyapunov que satisface 3.37 y 3.38 es cuadrática.

El sistema nominal 3.25 tiene una función de Lyapunov tipo cuadrática, entonces su derivada sobre las trayectorias del sistema 3.24 satisface

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \varphi^2 + c_4 \varphi(x) \|g(t, x)\| \quad (3.39)$$

Supongamos que la perturbación $\|g(t, x)\|$ está acotada por

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \varphi(x), \gamma < \frac{c_3}{c_4} \quad (3.40)$$

Entonces

$$\dot{V}(t, x) \leq -(c_3 - \gamma c_4) \varphi^2(x) \quad (3.41)$$

Lo que muestra que $\dot{V}(t, x)$ es definida negativa. Teniendo en cuenta toda esta información se establece las bases matemáticas de estabilización para los sistemas que servirán para diseñar los observadores y controladores en la parte no lineal y lineal del automóvil, comenzando el siguiente capítulo cuatro con el observador no lineal de cinco grados de libertad que a continuación se explica.

Capítulo 4

4. Observadores y controladores no lineal y lineal para el automóvil.

4.1. Planta de dos grados de libertad.

Para la planta de dos grados de libertad se utiliza la ecuación (2.29) presentada en el capítulo dos como se recuerda a continuación en ecuación (4.1), considerando a la velocidad longitudinal (v_x) como dinámica, ya que se utilizará en la parte del observador para estimarla:

$$m(\dot{v}_x - v_y\omega_z) = ma_x \quad (4.1)$$

Esta ecuación (4.1) será establecida conjuntamente con la velocidad lateral, donde esta fue presentada en el capítulo dos como la ecuación (2.29), y se muestra a continuación;

$$m(\dot{v}_y - v_x\omega_z) = ma_y \quad (4.2)$$

Estas dos ecuaciones dinámicas (4.1) y (4.2), son la base para poder realizar un observador lineal que se propone en el subtema 4.2, pero es importante introducirles una perturbación de viento conocida como las estudiadas en esta tesis, por el momento se puede establecer a las dos dinámicas de velocidad lateral y velocidad longitudinal con perturbaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= v_y\omega_z + a_x + \frac{F_{dx}}{m} \\ \dot{v}_y &= -v_x\omega_z + a_y + \frac{F_{dy}}{m} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Además con respecto a la velocidad angular de viraje, la cual se propone para el observador lineal de dos grados de libertad como conocida y medible. Aunque para el caso del cálculo

matemático y simulación de esta planta lineal de dos grados de libertad se establece con la siguiente fórmula:

$$J_z \dot{\omega}_z = \mu(F_{f,y}l_f - F_{r,y}l_r) + M_z + M_{dz} \quad (4.4)$$

por lo tanto el sistema para el observador lineal de dos grados de libertad esta completado, realizando solamente el comentario sobre las aceleraciones longitudinal y lateral establecidas para la planta de dos grados de libertad en ecuación (4.3) que tienen la misma forma que las empleadas para los controladores y observadores no lineales, donde se pueden ver:

$$a_x = \mu \frac{F_{f,x} + F_{r,x}}{m} \quad (4.5)$$

$$a_y = \mu \frac{F_{f,y} + F_{r,y}}{m} \quad (4.6)$$

Pero sus fuerzas son lineales, por estar el sistema del automóvil modelándose en su parte lineal.

Es importante señalar que, además de un observador no lineal de dos grados, también se propone un controlador con dos dinámicas: velocidad lateral y velocidad angular de viraje, siendo una planta de dos grados de libertad [7], pues la velocidad longitudinal se considera constante obteniendo el modelo matemático como se observó para ecuación (4.2) refiriéndose a la velocidad lateral y para la ecuación (4.4) que representa a la velocidad angular de viraje, solamente que para la planta de dos grados de libertad en el controlador propuesto en el subtema 4.3. modelo matemático sin perturbaciones:

$$\begin{aligned} \dot{v}_y &= -v_x \omega_z + a_y + \frac{F_{dy}}{m} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{\mu}{J_x} (F_{f,y}l_f - F_{r,y}l_r) + \frac{M_z}{J_z} + \frac{M_{dz}}{J_z} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Con estos modelos de planta de dos grados de libertad en ecuación (4.4) para el observador lineal, como en la ecuación (4.7) para el controlador lineal, funcionan correctamente en el estudio de la parte lineal del automóvil y por lo tanto se continua con el subtema 4.2, donde se realiza el diseño de un observador lineal.

4.2. Observador lineal de dos grados de libertad Aplicado al Automóvil.

Los modelos dinámicos estudiados y diseñados hasta este momento son de cinco grados de libertad para un controlador y observador no lineal, a la vez se redujeron los grados de libertad para proponer un observador no lineal de tres grados de libertad y un controlador no lineal también con estos últimos grados, pero que sucede cuando el automóvil el cual es una planta y que puede ser observada o controlada con respecto a sus dinámicas y variables en su parte lineal, entonces existe otra manera de poder abordar a los observadores y controladores como fuente de investigación de esta tesis, ofreciendo la propuesta de poder realizar un observador lineal al utilizar el modelo de dos grados de libertad, para considerar a la aceleración longitudinal y a la aceleración lateral como dinámicas estimadas, proponiendo que la ecuación (4.3) sea el modelo de sistema de planta para este subtema 4.2, además de utilizarlo como base para diseñar un observador lineal de dos grados de libertad con sus ganancias, el cual aparece en la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\hat{v}_x &= \hat{v}_y \omega_z + a_x + k_1(v_x - \hat{v}_x) + \frac{F_{dx}}{m} \\ \hat{v}_y &= -\hat{v}_x \omega_z + a_y + (k_2 - \omega_z)(v_x - \hat{v}_x) + \frac{F_{dy}}{m}\end{aligned}\tag{4.8}$$

Tomando en cuenta la aceleración longitudinal definida por la fórmula (4.5), y la aceleración lateral por ecuación (4.6), donde incluyen a la fuerza longitudinal y lateral, que pueden ser definidas por la ecuación (4.9) llamada fórmula de Pacejka, pero en este caso es linealizada, lo cual consiste en que las funciones de seno y Arco tangente no implican mayor impacto en

la fórmula mágica, siempre y cuando se utilicen ángulos de deslizamiento slip no mayores a 10 grados:

$$F_{i,j} = D_{i,j} \cdot C_{i,j} \cdot B_{i,j} \cdot \alpha_j \quad (4.9)$$

con $i = x, y; j = f, r$. Las constantes $B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}$ en (4.9) son experimentalmente determinadas (ver Tabla 5.2). Los ángulos slip de las llantas $\hat{\alpha}_f$, definido en ecuación (4.10) y $\hat{\alpha}_r$ en fórmula (4.11), del capítulo 4.2, de la tesis del Dr. Sergio Sandoval Pérez son escritos en esta parte de nuevo para observarlos:

$$\hat{\alpha}_f = \delta_d - \frac{\hat{v}_y + l_f \omega_z}{\hat{v}_x} \quad (4.10)$$

$$\hat{\alpha}_r = -\frac{\hat{v}_y + l_r \omega_z}{\hat{v}_x} \quad (4.11)$$

Una vez explicado el cómo se modelan las fuerzas y ángulos de deslizamiento de la parte lineal del vehículo, sin olvidar que también influye el coeficiente de fricción para las llantas del automóvil, que se considera con un valor de 0.9 en cierto instante, para fines prácticos de simulación. Una vez con estas características de la planta en ecuación (4.3) es momento de compararla con el modelo del observador lineal de dos grados de libertad mostrado en la ecuación (4.8), para analizar cómo trabaja este último y observar que tanto error existe, por lo que se obtiene las dinámicas de la estimación de errores mediante la siguiente fórmula:

$$e_x = v_x - \hat{v}_x \quad (4.12)$$

$$e_y = v_y - \hat{v}_y$$

La derivada de la ecuación (4.12):

$$\dot{e}_x = \dot{v}_x - \dot{\hat{v}}_x \quad (4.13)$$

$$\dot{e}_y = \dot{v}_y - \dot{\hat{v}}_y$$

Implementando el sistema real (4.3) y el sistema del observador (4.8), las próximas dinámicas de estimación de errores son;

$$\dot{e}_x = -k_1 e_x + \omega_z e_y \quad (4.14)$$

$$\dot{e}_y = -k_2 e_x$$

para este modelo matemático del observador lineal en (4.98) la velocidad longitudinal, se puede considerar casi constante y por este concepto la aceleración longitudinal tiende a cero [35], pero la aceleración lateral existe, teniendo un valor considerable y utilizando la ecuación (4.96) se puede calcular, donde la fuerza lateral trasera y frontal aplicadas a las llantas del automóvil y que son utilizadas para el modelo del observador lineal, también se pueden considerar de esta otra manera simplificando su estructura algebraica mediante las siguientes ecuaciones;

$$F_{yf} = C_f \alpha_f \quad (4.15)$$

$$F_{yr} = C_r \alpha_r, \quad (4.16)$$

donde:

$$C_f = D_{yf} \cdot C_{yf} \cdot B_{yf} \quad (4.17)$$

$$C_r = D_{yr} \cdot C_{yr} \cdot B_{yr} \quad (4.18)$$

Cambiando con esta nueva propuesta el observador en ecuación (4.8), porque la aceleración lateral tiene estas últimas consideraciones.

$$\dot{\hat{v}}_x = \hat{v}_y \omega_z + k_1 (v_x - \hat{v}_x) + \frac{F_{dx}}{m}$$

$$\hat{v}_y = \left(\frac{-\mu C_f - \mu C_r}{m v_x} \right) v_y + \left(\frac{\mu C_r l_r - \mu C_f l_f}{m v_x} - v_x \right) \omega_z + \left(\frac{\mu C_f}{m} \right) \delta_d + k_2 (v_x - \hat{v}_x) + \frac{F_{dy}}{m} \quad (4.19)$$

Con este modelo del sistema en (4.19), se propone un observador lineal para estimar la velocidad longitudinal y la velocidad lateral en Matlab-Simulink, pero existe la necesidad de saber los valores de las ganancias del observador refiriéndose a k_1 y k_2 , donde estas son diseñadas mediante una función candidata de Lyapunov por medio de los errores dinámicos, pero se tendrá que proponer una linealización de esta función para que sea mayor a cero, entendiéndose como semidefinida positiva y la derivada de la función de Lyapunov tiene que ser negativa implicando con esto que sea asintóticamente estable. Con esta secuencia de diseño se propone manejar a los errores mediante una matriz, utilizando a la ecuación (4.14), obteniendo con esta fórmula una ecuación de matrices de este tipo:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & \omega_z \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Que se puede reducir matemáticamente, considerando las siguientes propuestas:

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -k_1 & \omega_z \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

Permitiendo establecer estas últimas matrices una ecuación en forma reducida para el sistema de errores de la forma:

$$\dot{e} = Ae \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta que la matriz A es la matriz del sistema de errores y que al momento de analizar su determinante ($|A|$), este tiene un resultado diferente de cero, proponiendo con esto que el sistema tiene solución y se puede apreciar en la siguiente fórmula;

$$|A| = k_2 \omega_z \quad (4.22)$$

Considerando a $\omega_z = 0$, con $\omega_{zmin} \leq |\omega_z|$, y para $|\omega_z| > 0$.

Con todas estas cuestiones se puede establecer la función candidata de Lyapunov;

$$V = e^T P e \quad (4.23)$$

Donde se deben tener en cuenta estas particularidades:

$$P = P^T > 0 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Con la condición de la determinante de la matriz de linealización $|P|$:

$$p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad (4.25)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov en ecuación (4.113);

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (4.26)$$

Considerando las derivadas de los errores siguientes para la ecuación (4.26):

$$\dot{e} = A e; \quad \therefore \dot{e}^T = e^T A^T$$

Realizando una factorización de la ecuación (4.26) con respecto a las derivadas de errores se obtiene el resultado:

$$\dot{V} = e^T (A^T P + P A) e \quad (4.27)$$

Y no olvidando que $A^T P + P A = -Q$, puede ser una acotación e introduciéndola a la derivada de función de Lyapunov de la fórmula (4.27), se tiene como resultado la ecuación:

$$\dot{V} = -e^T Q e \quad (4.28)$$

Linealizando los errores mediante la función candidata de Lyapunov propuesta en (4.23), esta ecuación se puede traducir a una matriz;

$$V = \begin{pmatrix} e_x & e_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Para con esta última ecuación (4.119) la función candidata de Lyapunov linealizada es;

$$V = e_x^2 p_{11} + e_y^2 p_{22} + 2e_x e_y p_{12} \quad (4.30)$$

Proponiendo valores de acotación para esta función candidata de Lyapunov (4.30), se puede establecer de esta forma;

$$V = r_1 e_x^2 + e_y^2 - 2\kappa_1 \text{sign}(\omega_z) e_x e_y \quad (4.31)$$

Con $\gamma_1 > \kappa_2 > 0$, $\kappa_1 = 0$, y $\text{sign}(\bullet)$ la función signum:

$$\text{sign}(\omega_z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_z > 0 \\ 0 & \text{si } \omega_z = 0 \\ -1 & \text{si } \omega_z < 0 \end{cases}$$

Derivando la función de Lyapunov en (4.31) se obtiene:

$$\dot{V} = 2r_1 e_x \dot{e}_x - 2e_y \dot{e}_y - 2\kappa_1 \text{sign}(\omega_z) (e_x \dot{e}_y + e_y \dot{e}_x) - 2\kappa_1 \delta_D(\omega_z) \dot{\omega}_z e_{v_x} e_{v_y} \quad (4.32)$$

Para después sustituir las estimaciones dinámicas de errores de la ecuación (4.14), en esta derivada de la función de Lyapunov (4.32), para obtener la fórmula:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (2r_1 k_1 + 2\kappa_1 k_2 \text{sign}(\omega_z)) e_x^2 - (2\kappa_1 |\omega_z|) e_y^2 \\ & + (2r_1 \omega_z - 2k_2 + 2\kappa_1 k_1 \text{sign}(\omega_z)) e_x e_y \end{aligned} \quad (4.33)$$

Entendiendo que la derivada de la función de Lyapunov (4.33) se puede establecer como un sistema algebraico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -2r_1k_1 + 2\kappa_1k_2\text{sign}(\omega_z) &= 2\kappa_1|\omega_z| \\ 2r_1\omega_z - 2k_2 + 2\kappa_1k_1\text{sign}(\omega_z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Continuando con el sistema de la ecuación (4.34) se convierte a una matriz;

$$\begin{pmatrix} -2r_1 & 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) \\ 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\kappa_1|\omega_z| \\ -2r_1\omega_z \end{pmatrix}$$

Usando el método de Cramer se puede solucionar y encontrar las ganancias (k_1, k_2) , del sistema en matriz de ecuación (4.34):

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2r_1 & 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) \\ 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) & -2 \end{vmatrix} = 4r_1 - 4\kappa_1^2$$

Para encontrar la Δ_1 de cramer:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -2r_1 & 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) \\ 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) & -2 \end{vmatrix} = 4\kappa_1|\omega_z| + 4\kappa_1r_1|\omega_z| \\ k_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4\kappa_1|\omega_z|(r_1 + 1)}{4r_1 - 4\kappa_1^2} \end{aligned}$$

Para encontrar la Δ_2 de cramer:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -2r_1 & 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) \\ 2\kappa_1\text{sign}(\omega_z) & -2r_1\omega_z \end{vmatrix} = 4r_1^2\omega_z + 4\kappa_1^2\omega_z \\ k_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4r_1^2\omega_z + 4\kappa_1^2\omega_z}{4r_1 - 4\kappa_1^2} \end{aligned}$$

Encontrando k_1, k_2 , el modelo matemático en (4.19) es completado, esto es el observador lineal propuesto y ahora se tiene que calcular la estabilidad de la derivada de función de Lyapunov. Utilizando las ganancias k_1 y k_2 se colocan dentro de la ecuación (4.33), para obtener el siguiente resultado:

$$\dot{V} = -(2\kappa_1|\omega_z|)e_x^2 - (2\kappa_1|\omega_z|)e_y^2 \quad (4.35)$$

Pero se tendrán las características siguientes para esta última ecuación (4.35);

$$\kappa_1 = \frac{\lambda_s}{2}|\omega_z|; \lambda_s > 0$$

Resultando con esto que la derivada de función de Lyapunov, mostrada a continuación será estable y la estimación de errores en (4.12) tiende exponencialmente a cero.

$$V = -\lambda_s(e_x^2 + e_y^2) \quad (4.36)$$

Ahora con respecto a los parámetros de linealización de la función de Lyapunov (4.30), se comienza por encontrar a p_{11} , p_{12} , p_{22} , pero recordando que se tiene la ecuación $A^T P + PA = -Q$, y las matrices de esta fórmula se pueden considerar de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & \omega_z \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix},$$

donde, al introducir la ecuación $A^T P + PA = -Q$, en realidad se están multiplicando las matrices de esta manera:

$$\begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_1 & \omega_z \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix}$$

Resultando la matriz de linealización igualada a la matriz Q, de acotación:

$$\begin{pmatrix} -2k_1 p_{11} - 2k_2 p_{12} & -k_1 p_{12} - k_2 p_{22} + \omega_z p_{11} \\ -k_1 p_{12} - k_2 p_{22} + \omega_z p_{11} & 2p_{12} \omega_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix}$$

Proponiendo que esta última matriz, se pueda escribir como un sistema lineal de la siguiente manera, para poder encontrar las incógnitas, p_{11} , p_{12} , y p_{22} :

$$\begin{aligned} -2k_1 p_{11} - 2k_2 p_{12} &= -q_1 \\ -k_1 p_{12} - k_2 p_{22} + \omega_z p_{11} &= 0 \end{aligned}$$

$$2p_{12}\omega_z = -q_2 \quad (4.37)$$

Los valores de p_{11} , p_{12} , p_{22} , se solucionan mediante el método de Cramer, donde las variables que se buscan obtener son:

$$p_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad p_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad p_{22} = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Para calcular la delta (Δ):

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2k_1 & -2k_2 & 0 \\ \omega_z & -k_1 & -k_2 \\ 0 & 2\omega_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_1 \\ 0 \\ -q_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2k_1 & -2k_2 & 0 \\ \omega_z & -k_1 & -k_2 \\ 0 & 2\omega_z & 0 \end{vmatrix} = -4k_1k_2\omega_z$$

Δ_1 , mediante la siguiente determinante:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -q_1 & -2k_2 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ -q_2 & 2\omega_z & 0 \end{vmatrix} = -2q_1k_2\omega_z - 2k_2^2q_2$$

$$p_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2q_1k_2\omega_z - 2k_2^2q_2}{-4k_1k_2\omega_z} = \frac{q_1\omega_z + k_2q_2}{2k_1\omega_z}$$

La determinante Δ_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2k_1 & -q_1 & 0 \\ \omega_z & 0 & -k_2 \\ 0 & -q_2 & 0 \end{vmatrix} = 2k_1k_2q_2$$

$$p_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2k_1k_2q_2}{-4k_1k_2\omega_z} = -\frac{q_2}{2\omega_z}$$

Y por último se resuelve para la Δ_3 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2k_1 & -2k_2 & -q_1 \\ \omega_z & -k_1 & 0 \\ 0 & 2\omega_z & -q_2 \end{vmatrix} = -2k_1^2q_2 - 2q_1\omega_z^2 - 2k_2\omega_zq_2$$

$$p_{22} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2k_1^2 q_2 - 2q_1 \omega_z^2 - 2k_2 \omega_z q_2}{-4k_1 k_2 \omega_z} = \frac{k_1^2 q_2 + q_1 \omega_z^2 + k_2 \omega_z q_2}{2k_1 k_2 \omega_z}$$

Con estos valores encontrados ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$), esta pendiente establecer los valores para q_1 y q_2 , que deben ser mayores a cero, y con los parámetros encontrados p_{11}, p_{12}, p_{22} , la función de Lyapunov es completada en (4.30), teniendo como resultado que esta función sea positiva, por lo tanto la parte de estabilidad está finalizada, solamente se argumenta que este modelo el cual se puede simular en Matlab-Simulink para estimar la velocidad longitudinal y la velocidad lateral para el vehículo se muestran sus resultados en el capítulo cinco, además se comparan con las señales de salida de CarSim de estas mismas dinámicas, para comprobar que este modelo de observador lineal de dos grados de libertad es un diseño adecuado para la aplicación al automóvil. Por lo tanto, se comienza con una nueva propuesta para la tesis del Doctor Sergio Sandoval Pérez de trabajo la cual ofrece un diseño de un controlador lineal el cual se explica y se comprueba matemáticamente en el siguiente subtema.

4.3. Controlador lineal de dos grados de libertad aplicado al automóvil.

En el estudio del controlador y observador diseñados en los subtemas anteriores de este capítulo cuatro, se utilizan para la parte no lineal del sistema del vehículo, ahora en este subtema 4.3 se diseña un controlador para la parte lineal del sistema del automóvil teniendo algunas características dinámicas para este controlador como se pueden mencionar, con la fuerza lateral frontal y la fuerza trasera lateral de la llanta, como inicio, que pueden ser definidas mediante la fórmula de Pacejka (4.9), utilizando el modelo matemático lineal del automóvil que se presenta a continuación, conjuntamente con los ángulos de deslizamiento (slip) de los neumáticos (α_f) y (α_r) que son definidos por las ecuaciones (4a) y (4b), respectivamente con sus variables dinámicas lineales [35] y donde este modelo matemático se muestra a partir de la ecuación (4.7) para la velocidad lateral, sumándole una fuerza de perturbación (F_{dy}) y para la velocidad angular de viraje, que se le agrega un momento en el eje z (M_z) [38] [39] y una perturbación en el momento z (M_{dz}), con estas dinámicas se realiza

el siguiente análisis para la obtención del modelo matemático de dos grados de libertad con entradas al sistema como a continuación se muestra:

$$\alpha_f = \delta - \frac{v_y + l_f \omega_z}{v_x} \quad (4a)$$

$$\alpha_r = -\frac{v_y + l_r \omega_z}{v_x} \quad (4b)$$

$$\dot{v}_y = -v_x \omega_z + \frac{\mu(F_{f,y} + F_{r,y})}{m} + F_{dy} \quad (4.38)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{1}{J_z} [\mu(l_f F_{r,y} - l_r F_{f,y}) + M_z + M_{dz}] \quad (4.39)$$

Teniendo en cuenta las características de las fuerzas frontales y traseras laterales de las llantas en su parte lineal, las dos ecuaciones anteriores (4.38) y (4.39) se modifican, tanto para la velocidad lateral, como para la velocidad angular de viraje, observándose los siguientes cambios con entradas al sistema esto debido a los ángulos de deslizamiento frontal y trasero de las llantas como a continuación se demuestra [40]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_y &= -v_x \omega_z + \frac{\mu(C_f \alpha_f + C_r \alpha_r)}{m} + F_{dy} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{1}{J_z} [\mu(C_f \alpha_f l_f - C_r \alpha_r l_r) + M_z + M_{dz}] \\ \dot{v}_y &= -v_x \omega_z + \frac{\mu C_f}{m} \left(\delta - \frac{v_y + l_f \omega_z}{v_x} \right) + \frac{\mu C_r}{m} \left(-\frac{v_y - l_r \omega_z}{v_x} \right) + F_{dy} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{\mu C_f \alpha_f l_f}{J_z} \left(\delta - \frac{v_y + l_f \omega_z}{v_x} \right) - \frac{\mu C_r \alpha_r l_r}{J_z} \left(-\frac{v_y - l_r \omega_z}{v_x} \right) + \frac{M_z}{J_z} + \frac{M_{dz}}{J_z} \end{aligned}$$

Además se debe tomar en cuenta que el ángulo que transmite el conductor al neumático puede ser visto en realidad como la suma de dos ángulos $\delta = \delta_d + \delta_c$, el ángulo del conductor δ_d y el ángulo del controlador δ_c . Este último ángulo, será diseñado para apoyar al conductor

en caso de un subviraje, ya sea agregando o restando ángulo a las ruedas para una conducción segura. Por lo tanto teniendo en cuenta estas últimas características, el sistema matemático del automóvil de dos grados de libertad se obtiene de esta forma:

$$\dot{v}_y = \frac{-\mu C_f - \mu C_r}{m v_x} v_y + \left(\frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{m v_x} - v_x \right) \omega_z + \frac{\mu C_f}{m} \delta_d + \frac{\mu C_f}{m} \delta_c + F_{dy} \quad (4.40)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{\mu C_f l_f}{J_z} \left(\delta - \frac{v_y + l_f \omega_z}{v_x} \right) - \frac{\mu C_r l_r}{J_z} \left(-\frac{v_y - l_r \omega_z}{v_x} \right) + \frac{M_z}{J_z} + \frac{M_{dz}}{J_z} \quad (4.41)$$

Con este modelo matemático anterior se tomará un sistema lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

donde los estados son

$$x = \begin{bmatrix} v_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

La matriz de los estados $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, la matriz de entrada de control $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ y los parámetros del sistema son:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-\mu C_f - \mu C_r}{m v_x} \\ a_{12} &= \frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{m v_x} - v_x \\ a_{21} &= \frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{J_x v_x} \\ a_{22} &= \frac{-\mu C_f l_f^2 - \mu C_r l_r^2}{J_x v_x} \\ b_1 &= (\mu C_f \quad 0) \\ b_2 &= \left(\frac{\mu C_f l_f}{J_x} \quad \frac{1}{J_z} \right) \end{aligned}$$

Estos parámetros ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$) son conocidos por que se pueden medir y con esta información el objetivo del controlador es realizar que el automóvil sea estable para todo tipo de manejo por parte del conductor a la hora de conducir el vehículo.

Con esta idea se tiene que la matriz de este sistema \mathbf{A} , es Hurwitz refiriéndose a que todos sus eigenvalores tienen parte real negativa, considerando con esto que se encuentra dentro de la estabilidad, para ciertos parámetros, donde se puede establecer que con una ley de control de la forma $(A + Bk)x$, con una u de control, ($u = kx$), se podría realizar un controlador pero al momento de cambiar parámetros del sistema demasiado alejados, esta última ley no funciona correctamente, porque la ganancia k , debe de ser siempre de valor grande, para mantener los eigenvalores negativos y al momento de cambiar bruscamente las variables del automóvil, esta ley de control ya no funciona correctamente.

Por lo que se debe proponer una u de control diferente, recordando que el sistema puede trabajar en lazo abierto donde en un momento dado al cambiar sus parámetros demasiado a los mencionados anteriormente se desestabiliza y por lo tanto se está proponiendo un lazo cerrado donde se aplican dos entradas de control δ_c, M_z , diseñadas para que el sistema bajo ciertas condiciones sea estable, además de sumarle perturbaciones a este sistema (F_{dy}, M_{dz}), obteniendo de esta forma el modelo matemático del sistema del automóvil de dos grados de libertad con entradas de control como a continuación se muestra:

$$\begin{aligned}\dot{v}_y &= \frac{-\mu C_f - \mu C_r}{mv_x} v_y + \left(\frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{mv_x} - v_x \right) \omega_z + (\mu C_f \quad 0) \begin{pmatrix} \delta \\ M_z \end{pmatrix} + F_{dy} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{J_z v_x} v_y + \frac{-\mu C_f l_f^2 - \mu C_r l_r^2}{J_z v_x} \omega_z + \begin{pmatrix} \mu C_f l_f & 1 \\ J_z & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ M_z \end{pmatrix} + \frac{M_{dz}}{J_z}\end{aligned}\tag{4.42}$$

Con este modelo implementado con dinámicas de control de entrada (4.42) se asegura que funcione correctamente al momento de seguir alguna guía la cual puede ser un modelo matemático de referencia como a continuación se analiza:

$$\dot{v}_{y,ref} = -v_x \omega_{z,ref} + \frac{\mu_{ref}(F_{f,yref} + F_{r,yref})}{m}\tag{4.43}$$

$$\dot{\omega}_{z,ref} = \frac{1}{J_{z,ref}} \mu_{ref} (F_{f,yref} l_f + F_{r,yref} l_r),$$

donde $J_{z,ref} = J_z$, $\mu_{ref} = \mu$, son parámetros apropiados y $F_{f,yref}, F_{r,yref}$, son curvas ideales, dependiendo de:

$$\alpha_{f,ref} = \delta_d - \frac{v_{y,ref} + l_f \omega_{z,ref}}{v_x}$$

$$\alpha_{r,ref} = -\frac{v_{y,ref} + l_r \omega_{z,ref}}{v_x}$$

Agregando que las fuerzas frontales y traseras de las llantas del automóvil para el modelo de referencia deben cumplir con las siguientes ecuaciones basadas en la fórmula de Pacejka:

$$F_{f,yref} = C_{f,ref} \alpha_{f,ref}$$

$$F_{r,yref} = C_{r,ref} \alpha_{r,ref}$$

Donde: $C_{f,ref} \neq C_f$, y $C_{r,ref} \neq C_r$. (Ver Tabla 5.2 [1])

Por lo que se obtiene el siguiente sistema de referencia:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{y,ref} \\ \dot{\omega}_{z,ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\mu_{ref} C_{f,ref} - \mu_{ref} C_{r,ref}}{m v_x} & \left(\frac{-\mu_{ref} C_{f,ref} l_f + \mu_{ref} C_{r,ref} l_r}{m v_x} - v_x \right) \\ \frac{-\mu_{ref} C_{f,ref} l_f + \mu_{ref} C_{r,ref} l_r}{J_{z,ref} v_x} & \frac{-\mu_{ref} C_{f,ref} l_f^2 - \mu_{ref} C_{r,ref} l_r^2}{J_{z,ref} v_x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{y,ref} \\ \omega_{z,ref} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mu_{ref} C_{f,ref}}{m} \\ \frac{\mu_{ref} C_{f,ref} l_f}{J_{z,ref}} \end{pmatrix} \delta_d$$

(4.44)

Estableciendo que los parámetros de la aceleración lateral de referencia, así como la aceleración angular de viraje de referencia, además de las velocidades laterales y angular de viraje del sistema de referencia son conocidos y acotados.

Por lo tanto una vez teniendo el sistema real y el sistema de referencia, se pueden realizar las siguientes consideraciones para obtener el error de la velocidad lateral y el error de la velocidad angular de viraje y comprobar que el sistema real (4.42) sigue a la referencia (4.44) con un error de casi cero, con estas consideraciones anteriores las dinámicas de la estimación de errores son [36];

$$\begin{aligned} e_{v_y} &= v_y - v_{y,ref} \\ e_{\omega_z} &= \omega_z - \omega_{z,ref} \end{aligned} \quad (4.45)$$

La derivada de la ecuación (4.45) es;

$$\begin{aligned} \dot{e}_{v_y} &= \dot{v}_y - \dot{v}_{y,ref} \\ \dot{e}_{\omega_z} &= \dot{\omega}_z - \dot{\omega}_{z,ref} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Con los resultados de los errores de la velocidad lateral (e_{v_y}) y velocidad angular (e_{ω_z}), se propone una función de estabilidad de Lyapunov para comprobar que el sistema es asintóticamente estable, además aportará la ley de control necesaria para implementarla a nuestro vehículo. La función candidata que se propone es:

$$V = \frac{1}{2} e_{v_y}^2 + \frac{1}{2} e_{\omega_z}^2 \quad (4.47)$$

Donde la función candidata de Lyapunov (4.47) debe ser definida positiva para mostrar que es continuamente decreciente a lo largo de cualquier trayectoria y la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa asegurando que el sistema tenga estabilidad asintótica, como se demuestra a continuación:

$$\dot{V} = e_{v_y} \dot{e}_{v_y} + e_{\omega_z} \dot{e}_{\omega_z} \quad (4.48)$$

Utilizando los errores de la ecuación (4.46) en la ecuación anterior (4.48) se obtiene la derivada de la función de Lyapunov con los siguientes parámetros;

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_{v_y} \left[\frac{-\mu C_f - \mu C_r}{m v_x} v_y + \left(\frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{m v_x} - v_x \right) \omega_z + \left(\frac{\mu C_f}{m} \right) \delta_d + \left(\frac{\mu C_f}{m} \right) \delta_c + F_{dy} \right. \\ & \left. - \dot{v}_{y,ref} \right] \\ & + e_{\omega_z} \left[\frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{J_z v_x} v_y + \frac{-\mu C_f l_f^2 - \mu C_r l_r^2}{J_z v_x} \omega_z + \frac{\mu C_f l_f}{J_z} \delta_d + \frac{\mu C_f l_f}{J_z} \delta_c + \frac{M_z}{J_z} + \frac{M_{dz}}{J_z} \right. \\ & \left. - \dot{\omega}_{z,ref} \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ahora de los términos de la última derivada de la función de Lyapunov (4.49) se establecen dos expresiones matemáticas de menor a cero como se observa:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-\mu C_f - \mu C_r}{m v_x} v_y + \left(\frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{m v_x} - v_x \right) \omega_z + \left(\frac{\mu C_f}{m} \right) \delta_d + \left(\frac{\mu C_f}{m} \right) \delta_c + F_{dy} - \dot{v}_{y,ref} \right] \\ & < 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-\mu C_f l_f + \mu C_r l_r}{J_z v_x} v_y + \frac{-\mu C_f l_f^2 - \mu C_r l_r^2}{J_z v_x} \omega_z + \frac{\mu C_f l_f}{J_z} \delta_d + \frac{\mu C_f l_f}{J_z} \delta_c + \frac{M_z}{J_z} + \frac{M_{dz}}{J_z} - \dot{\omega}_{z,ref} \right] \\ & < 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Y con estas expresiones matemáticas menor a cero (4.50) y (4.51), se puede obtener dos igualaciones en función de las entradas de control δ_c y M_z , las cuales se establecen de la siguiente forma;

$$\delta_c < \left(\frac{m}{\mu C_f} \right) \left[\frac{\mu C_f + \mu C_r}{m v_x} v_y + \left(\frac{\mu C_f l_f - \mu C_r l_r}{m v_x} + v_x \right) \omega_z - \left(\frac{\mu C_f}{m} \right) \delta_d - F_{dy} + \dot{v}_{y,ref} \right] \quad (4.52)$$

$$M_z < J_z \left[\frac{\mu C_f l_f - \mu C_r l_r}{J_z v_x} v_y + \frac{\mu C_f l_f^2 + \mu C_r l_r^2}{J_z v_x} \omega_z - \frac{\mu C_f l_f}{J_z} \delta_d - \frac{\mu C_f l_f}{J_z} \delta_c - \frac{M_{dz}}{J_z} + \dot{\omega}_{z,ref} \right]$$

(4.53)

Además para estas expresiones matemáticas δ_c , (4.52) y M_z , (4.53), se diseña una ley de control por medio de la teoría de retroalimentación de estados, y se propone como entradas dinámicas de control, las cuales se determinan a continuación:

$$\delta_c = \left(\frac{1}{v_x} + \frac{C_r}{C_f v_x} \right) v_y + \left(\frac{l_f}{v_x} - \frac{C_r l_r}{C_f v_x} + \frac{m v_x}{\mu C_f} \right) \omega_z - \delta_d - \left(\frac{m}{\mu C_f} \right) F_{dy} + \left(\frac{m}{\mu C_f} \right) \dot{v}_{y,ref} - k_1 e_{v_y} \quad (4.54)$$

$$M_z = \frac{\mu C_f l_f - \mu C_r l_r}{v_x} v_y + \frac{\mu C_f l_f^2 + \mu C_r l_r^2}{v_x} \omega_z - (\mu C_f l_f) (\delta_d + \delta_c) - M_{dz} + J_z \dot{\omega}_{z,ref} - k_2 e_{\omega_z} \quad (4.55)$$

con estas entradas dinámicas de control aplicadas al automóvil, se puede ver que los parámetros de δ_c y M_z son medibles, aun las perturbaciones de F_{dy} y M_{dz} también son conocidos, por lo tanto se puede obtener la comprobación de estabilidad del sistema aplicando estas dinámicas de entrada proponiéndolas que sean menores a cero como se establece en la ecuación (4.50) y (4.51) y sustituyendo las ecuaciones (4.54) y (4.55) en la derivada de la función de Lyapunov (4.49), se obtiene el siguiente resultado, comprobando que la derivada de Lyapunov es menor a cero como se determina a continuación:

$$\dot{V} = -k_1 e_{v_y}^2 - k_2 e_{\omega_z}^2 \quad (4.56)$$

A la vez se diseñan las ganancias, k_1 , k_2 , para la derivada de la función de Lyapunov, y con esto se puede establecer la función en forma de matriz, de la ecuación (4.56), mediante la siguiente forma:

$$\dot{V} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{v_y}^2 \\ e_{\omega_z}^2 \end{pmatrix},$$

donde la matriz de errores se estableció anteriormente de la siguiente manera:

$$e = \begin{pmatrix} e_{v_y}^2 \\ e_{\omega_z}^2 \end{pmatrix}$$

por último, se establece la función de Lyapunov para comprobar que es asintóticamente estable:

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min} \|e\|^2$$

Con este controlador lineal se diseña primeramente en un software como el Matlab-Simulink, donde este se aplica a una planta la cual es el automóvil y que viene representada por el software CarSim, esta planta genera señales como son la velocidad lateral, velocidad angular, la fuerza lateral frontal y fuerza lateral trasera, por mencionar algunas dinámicas que tienen control y las cuales son comparadas con el modelo de referencia realizado en Matlab-Simulink, además como se describe el controlador también genera las entradas de control al software CarSim, obteniendo que las señales de la planta sigan a las señales de referencia como se observa en el capítulo cinco llamado resultados y por último se establece que este controlador es una idea original como una propuesta para la parte lineal del sistema del automóvil, por lo tanto en este momento se termina el capítulo cuatro y continúa la parte de resultados de esta tesis.

Capítulo 5

5. Resultados

5.1. Resultados obtenidos por los observadores CarSim-Matlab-Simulink.

5.1.1. Maniobra doble volanteo.

Para iniciar el estudio de la parte de resultados de CarSim-Matlab-Simulink que se obtienen con los modelos matemáticos propuestos en el capítulo cuatro, una idea principal es de separar las simulaciones por maniobra de entrada al automóvil, teniendo en cuenta que estas señales cumplen con normas standard de pruebas al vehículo a nivel internacional.

En la primera parte de este subtema están las simulaciones de los observadores y para el subtema 5.2 los controladores, obteniendo gráficas importantes en el software Carsim-Matlab Simulink.

Con esta pequeña introducción se puede empezar con el análisis de la demostración en la figura 5.1a de la maniobra de entrada denominada por la norma ISO 3888-1, para los observadores no lineales de cinco y tres grados, considerando también al observador lineal para esta maniobra desarrollada por el conductor (δ_d), donde tiene un primer valor pico de 0.22 rad/s a los dos segundos y un segundo pico de 0.24 rad/s a los cuatro segundos, teniendo que ser multiplicados estos valores por el coeficiente de giro de rueda (16) y después por la conversión de $180/\pi$ para obtener los valores adecuados, equivalentes a 200 y 220 grados respectivamente a los dos y cuatro segundos. Recordando que al software CarSim se le introducen valores en grados y es un concepto que funciona para todos estos observadores y controladores diseñados en esta tesis.

Por lo tanto continuando con las simulaciones se tiene la aplicación de un coeficiente de fricción variable a las llantas del vehículo como se muestra en la gráfica 5.1b, realizando con esto una prueba a las dinámicas del automóvil y ver cómo responden los observadores no lineales y lineales.

Además se puede destacar que aparte del coeficiente de fricción cambiante, se aplica otras entradas variables como son una fuerza de perturbación longitudinal que se observa en la figura 5.2a, otra fuerza establecida de viento es lateral como se analiza en la figura 5.2b y un momento de perturbación en el eje z , visto en la figura 5.2c, donde estas perturbaciones se reflejan en cada una de las dinámicas del vehículo y ofrecen una mejor validez a este trabajo de investigación.

Con estas partes dinámicas se pueden ahora retomar algunas importantes como puede ser la aceleración longitudinal, que viene siendo una señal de valor cercano a 0.13 m/s^2 , por considerar fuerzas longitudinales del software CarSim dentro del modelo interno (internal Tire Model), aplicándose para el observador lineal.

Con estos observadores dinámicos no lineales y lineal, también se propone la estimación de errores de la velocidad longitudinal para el observador no lineal de cinco grados en figura 5.4b, que tiene un valor fluctuante de casi cero, alrededor de 0.06, como también se puede ver para el observador lineal de dos grados con el valor de 0.1.

En este momento se analiza a la velocidad de viraje lineal aplicada al observador de dos grados de la figura 5.5, es mayor que las aplicadas para los observadores no lineales, puntualizando que este observador está comparado con parámetros de diseño iguales, teniendo con esto resultados adecuados.

Con estos resultados solamente queda informar el comportamiento para el observador de dos grados, que prácticamente es mayor al ángulo slip frontal de la planta no lineal, dejando una importante propuesta.

Llegando al punto de mencionar que todo este trabajo de tesis de los observadores se realiza con exactitud o muy cercano a las variables de la planta con los valores de simulación que se pueden observar en la tabla 5.1 y tabla 5.2, al final de este capítulo de resultados.

Considerando estos parámetros se termina de explicar este subtema y esperando realizar otra propuesta importante para el aprendizaje de las dinámicas del automóvil en forma profesional con el software CarSim, se simula en el siguiente subtema 5.1.2, la aplicación de la maniobra de entrada steering input para estos observadores, no lineales y lineal.

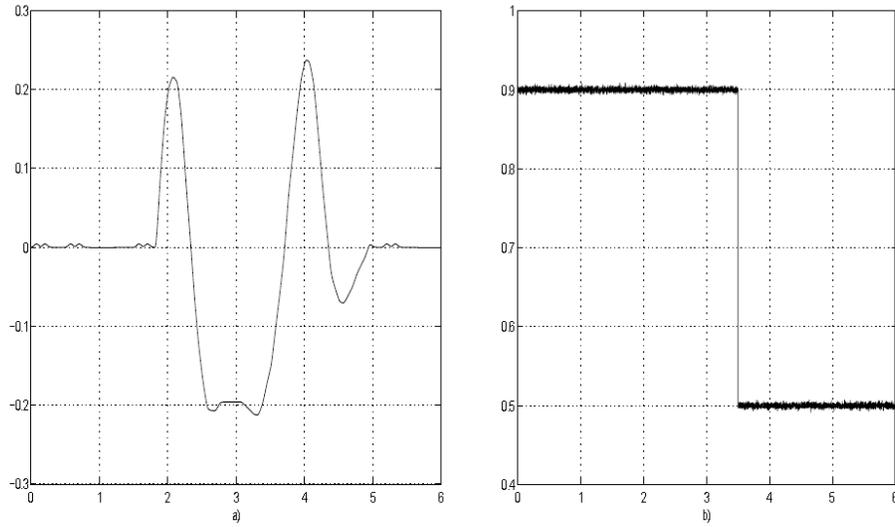


Figura 5.1: a) Señal del conductor δ_d [rad vs s]; b) Coeficiente de fricción μ .

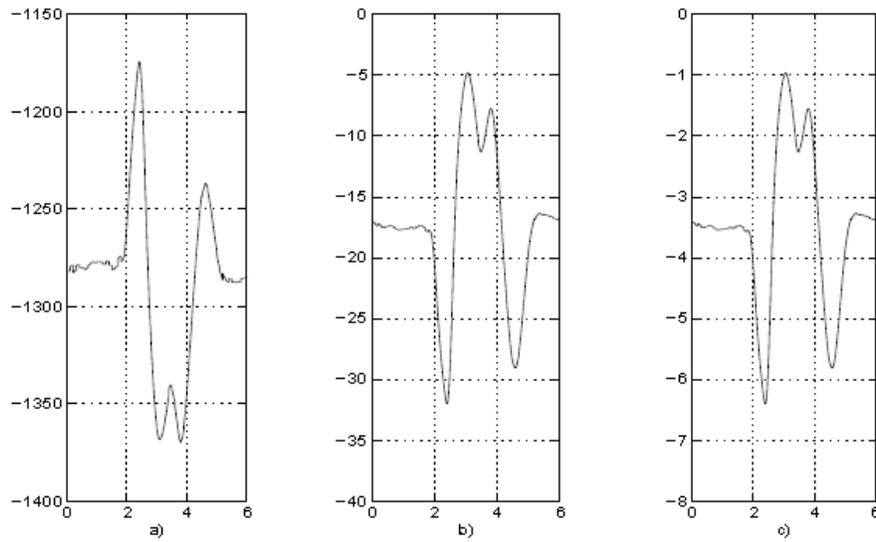


Figura 5.2: a) Fuerza de perturbación F_{dx} [N vs s]; b) Fuerza de perturbación F_{dy} [N vs s];
c) Momento de perturbación M_{dz} [Nm vs s].

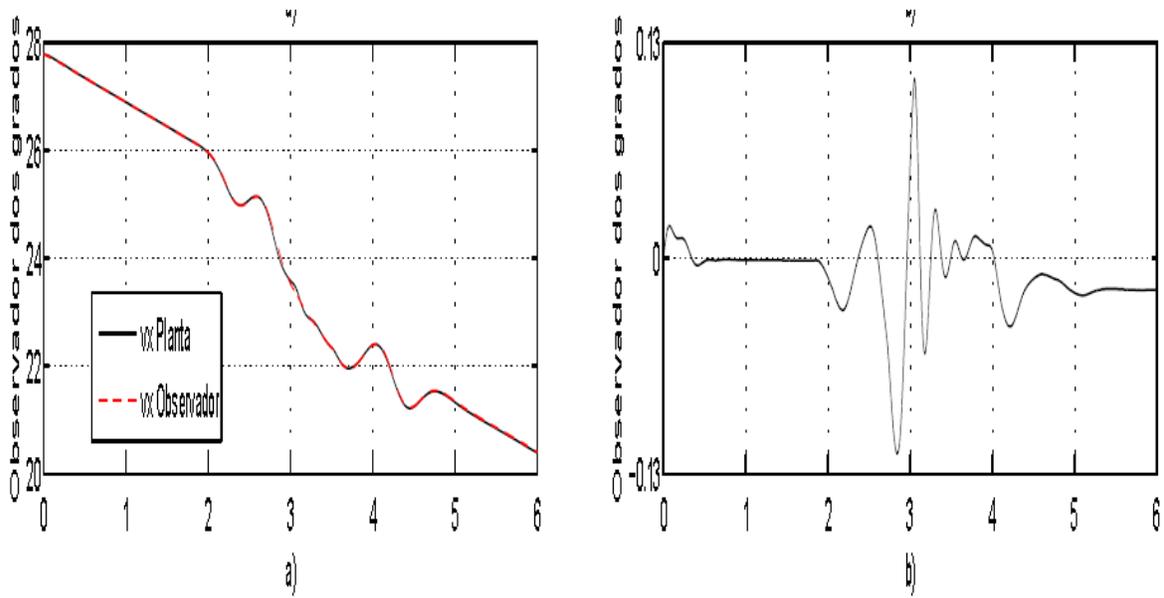


Figura 5.3: a) $v_{xCarsim}$ vs \hat{v}_x [m/s vs s]; b) Error $v_{xCarsim} - \hat{v}_x$ [m/s vs s].

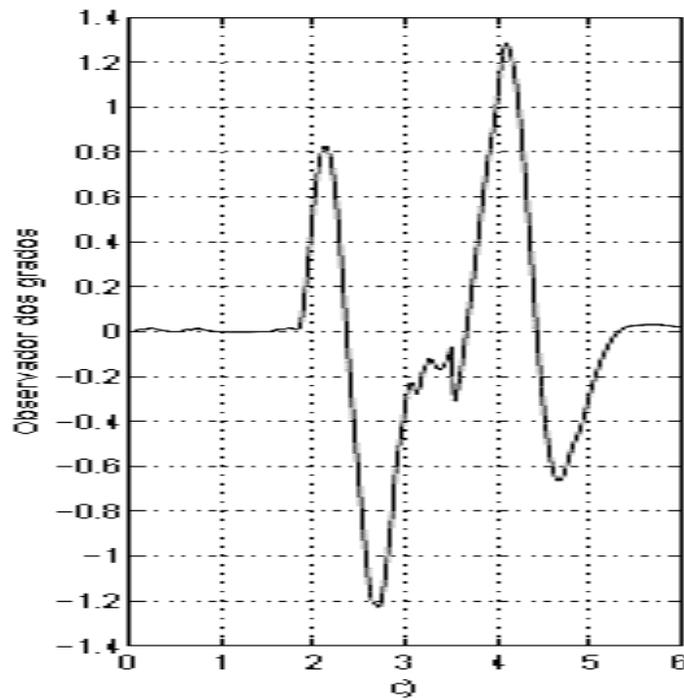


Figura 5.4: $\omega_{zCarsim}$ [rad vs s].

5.1.2. Maniobra escalón

Con el subtema anterior 5.1.1 se introduce una maniobra profesional y es momento en este subtema 5.1.2 de introducir otra reconocida como entrada de maniobra escalón o se describe en inglés como step-steering-input denominada por la norma ISO 7400/2011, mencionando que esta entrada tiene particularidades muy importantes por iniciar en un tiempo de 0.6 segundos como se puede ver en 5.5a, con una amplitud de 40 grados y, con esta maniobra de entrada, se observarán el comportamiento dinámico del vehículo, así como el coeficiente de fricción cambiante visto en figura 5.5b, y las perturbaciones de viento de la fuerza longitudinal en 5.6a, además de la fuerza lateral en 5.6b, así como el momento de perturbación M_{dz} en figura 5.6c.

Por lo tanto la variable del automóvil de comienzo de estudio es la aceleración longitudinal, la cual tiene un valor de inclinación por tener las fuerzas longitudinales configuradas en CarSim con una pendiente, además esto mismo se toma en cuenta también para la aceleración del observador no lineal de tres grados, así como para el observador lineal, entendiéndose que esta aceleración longitudinal se introduce de la planta CarSim o automóvil al observador que se está diseñando.

Otra aceleración que se necesita en los observadores es la aceleración lateral con un margen de 3.8 m/s^2 para el observador de dos grados de libertad.

Enseguida se toma a la velocidad longitudinal para describir su valor, empezando con la Figura 5.7a en el modelo de la planta no lineal de cinco grados, la cual es observada en forma adecuada y para el observador lineal de dos grados que estima a esta velocidad longitudinal correctamente.

Toda esta comprobación de funcionamiento correcto de los observadores se refleja cuando se abordan los errores. Analizando al error de la velocidad longitudinal en la Figura 5.7b, el que resultado del observador lineal de dos grados de libertad tiene error igual al de los observadores no lineales, que es cero.

Teniendo en cuenta este concepto se sigue con otra variable denominada velocidad lateral que tiene un valor cercano a -1.5 m/s , y después de entrar un coeficiente de fricción aumenta cercano a -1.8 m/s , estas características se reflejan para el observador de dos grados.

Ahora se analiza el caso de la velocidad angular de viraje, vista en la figura 5.8 con un valor promedio de 0.12 rad , con un poco de menos amortiguación.

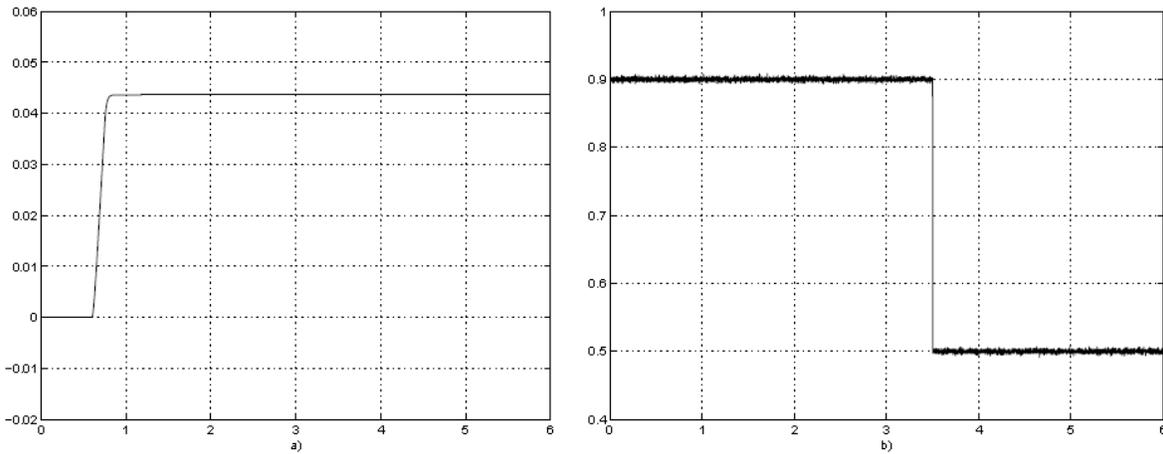


Figura 5.5: a) Señal del conductor δ_d [rad vs s]; b) Coeficiente de fricción μ .

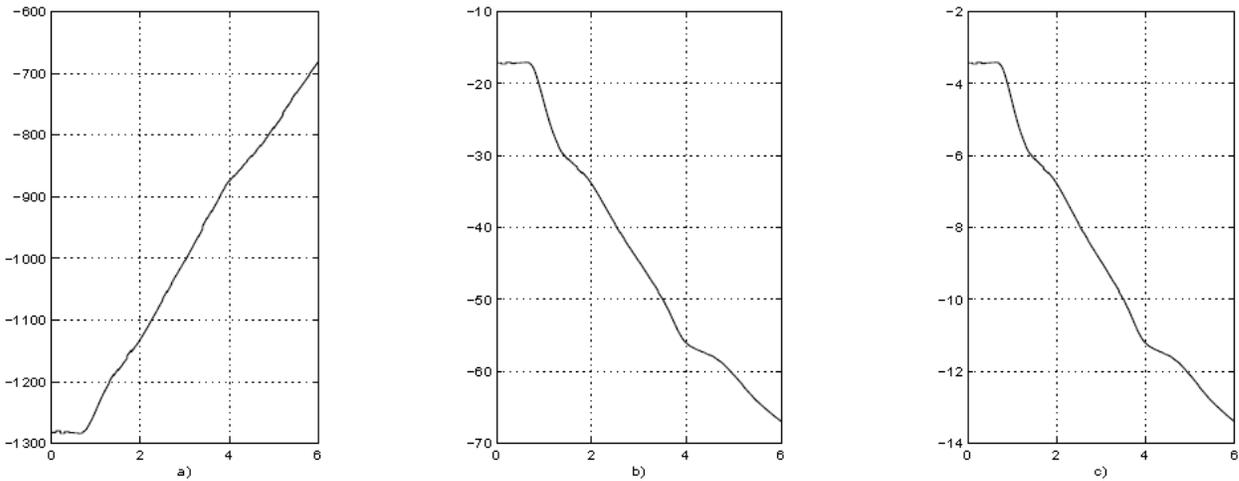


Figura 5.6: a) Fuerza de perturbación F_{dx} [N vs s]; b) Fuerza de perturbación F_{dy} [N vs s]; c) Momento de perturbación M_{dz} [Nm vs s].

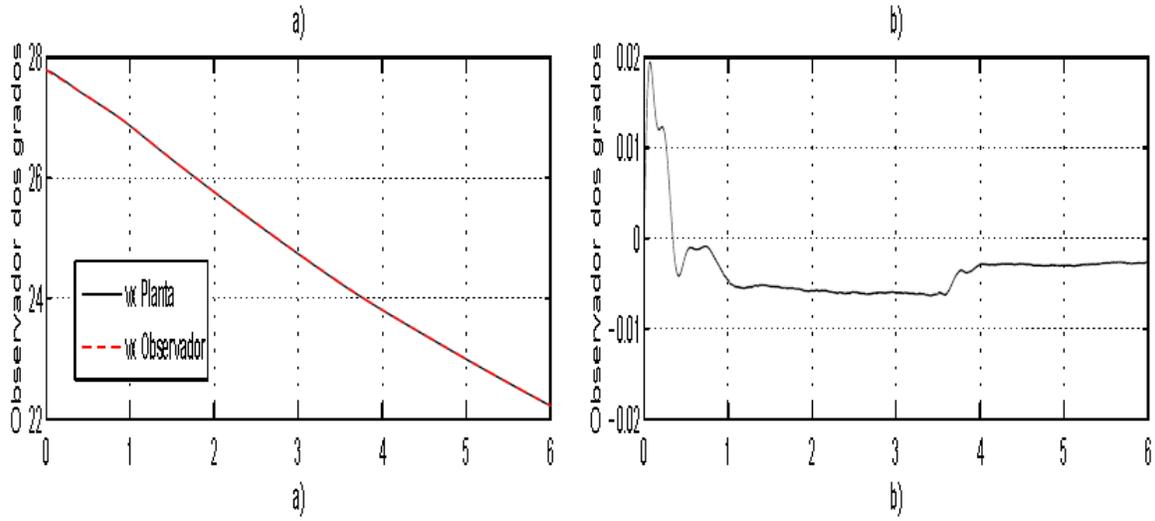


Figura 5.7: a) $v_{xCarsim}$ vs \hat{v}_x [m/s vs s]; b) Error $v_{xCarsim} - \hat{v}_x$ [m/s vs s].

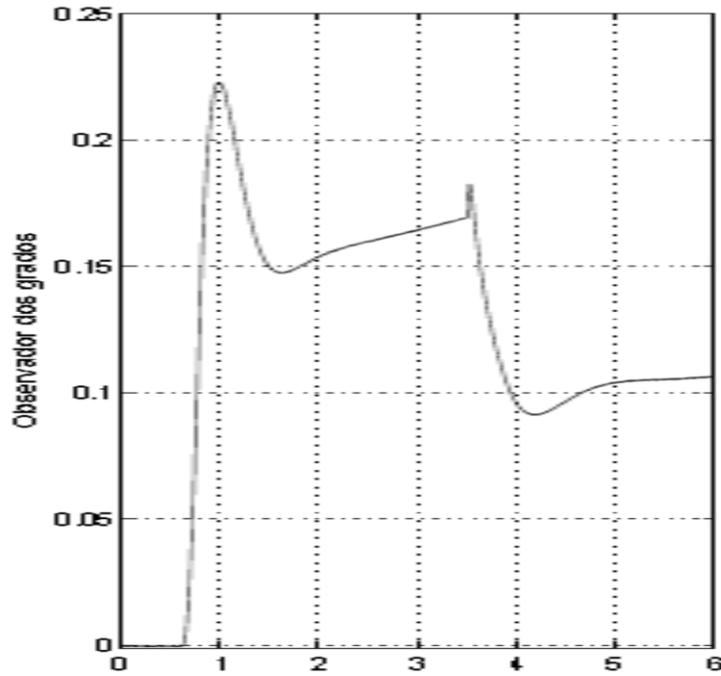


Figura 5.8. $\omega_{zCarsim}$ [rad vs s].

5.2. Controladores CarSim-Matlab-Simulink

5.2.1. Maniobra doble volanteo

En el control de plantas, en especial para el vehículo, se tiene representado por este software Carsim, considerando esta propuesta de controladores en Carsim-Matlab-Simulink se extiende para cualquier universidad o centro de investigación donde se necesita conocer señales dinámicas del automóvil, ya que precisamente existen software automotrices en la actualidad que cuentan con sistemas de traficación de algunas variables y el investigador, ingeniero o estudiante técnico no sabe muchas veces como entenderlas y para esta problemática y muchas más se puede acceder a esta información para empezar a relacionar variables y entenderlas en forma particular o general, de antemano la propuesta de estos controladores son para los modelos descritos en este trabajo de investigación con un máximo nivel de complejidad de cinco grados de libertad en cuanto a los modelos matemáticos.

Es importante señalar que hoy en día existe una gran necesidad en la parte automotriz de capacitación científica y por esto se realiza la investigación de estos controladores, no lineales y lineal, los cuales se utilizarán en futuro para trabajos de investigaciones más complejas.

Por lo tanto se inicia con aplicaciones de entrada al sistema del vehículo ya conocidas al mostrarse en diseños de observador lineal en CarSim-Matlab-Simulink. Continuando con los controladores también existe la respuesta de la señal que ofrece el controlador lineal a partir de la señal de entrada vista en la figura 5.9a, aplicada por el conductor al software CarSim, donde el controlador lineal muestra una gráfica como en la figura 5.9b, además se observa la suma del control activo y del conductor en la figura 5.9c.

En este momento se analiza a la velocidad angular de viraje vista en la figura 5.10a, para el controlador lineal, que presenta un cambio, porque la velocidad angular de viraje controlada no sigue a la velocidad angular de referencia sobre todo en el tiempo de 2.5 segundos a 4 segundos, por ser un controlador lineal con dinámicas faltantes en comparación con el software CarSim, ofreciendo para esta dinámica en particular de la velocidad angular de viraje un correcto desempeño.

A la par se puede observar los errores de la velocidad angular de viraje, visto en la figura 5.10b, existe un valor de error con respecto a la velocidad angular, para el controlador lineal de dos grados. Con estos errores se evalúa el funcionamiento de los controladores, pero es necesario establecer otras características prácticas al momento de realizar control, siendo el caso de las dinámicas en las llantas del vehículo.

En este momento se toma en cuenta el comportamiento de las fuerzas traseras del automóvil con respecto a los controladores, no lineales y lineal. Comenzando con la fuerza trasera del controlador no lineal de cinco grados, teniendo un valor cercano a los 5000 N mientras que la fuerza trasera de referencia es de 6000 N, con un seguimiento de la fuerza controlada a la de referencia de forma adecuada, y con estos conceptos se puede observar al controlador no lineal de tres grados, que ofrece una fuerza de control y de referencia igual a la de cinco grados, por lo tanto en este instante se analizaron los dos controladores no lineales, siendo ahora el momento de estudiar al controlador lineal respecto a su fuerza trasera controlada y su fuerza trasera de referencia, teniendo un seguimiento correcto.

Además una vez entendidas las fuerzas traseras llega ahora el tiempo de analizar el momento de alineación en z de las llantas para el controlador no lineal de cinco grados en Figura 5.11, donde este momento en z tiene valores pico de 10000 N • m.

Para el controlador no lineal de tres grados en cuanto a su amplitud tiene un valor de 5500 N • m, en la parte positiva y de -10000 N • m, para la parte negativa. En forma diferente esta la gráfica del controlador lineal, con valores cercanos positivos a los 22000 N • m, y de -33000 N • m.

Todos estos momentos están presentados para la parte de control activo no lineal y lineal, quedando pendiente presentar a la otra entrada de control para el controlador no lineal de cinco grados refiriéndose a la $\Delta F_{y,f}$, donde esta entrada de fuerza de control al sistema no está saturada, así como para el controlador no lineal de tres grados con respecto a la fuerza de control de entrada con una amplitud no saturada y menos dinámica que la fuerza de control de los cinco grados de libertad. Con estas características se termina el análisis de estas dinámicas controladas estableciendo que estas variables tienen los valores de simulación de la Tabla 5.1 para los controladores no lineales y lineal, además de utilizar los parámetros del

sistema de referencia de la tabla 5.2 y con esta información se continua ahora con la entrada escalón diseñada en Matlab-Simulink en el siguiente subtema 5.2.2, como se observa enseguida al terminar las gráficas de este subtema 5.2.1.

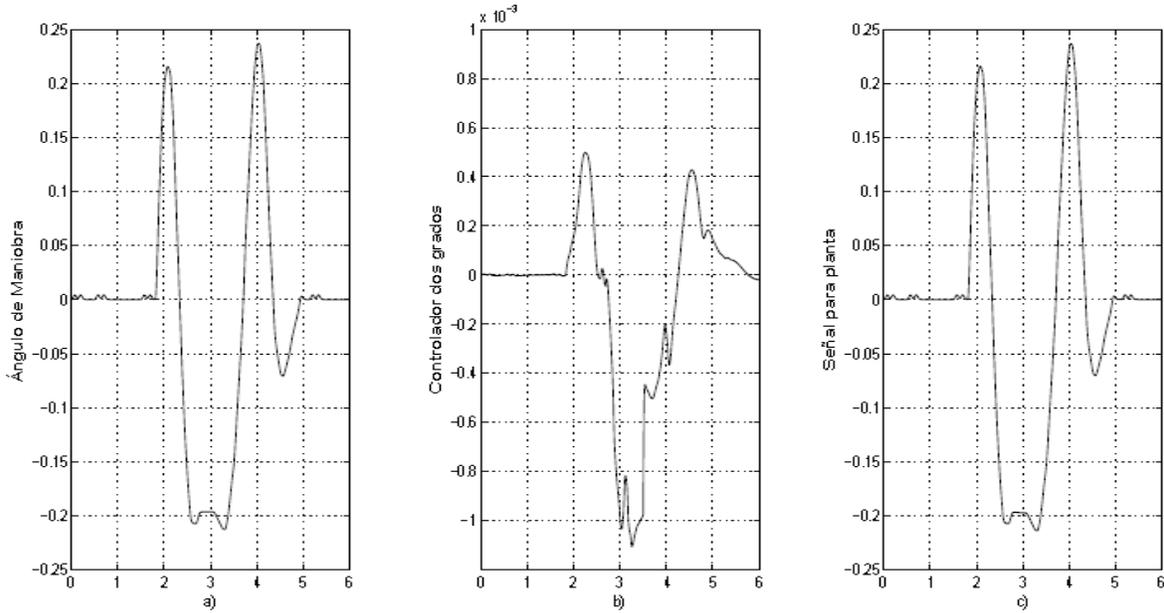


Figura 5.9: a) Señal delta del conductor δ_d [rad vs s]; b) Señal delta del controlador δ_c [rad vs s]; c) Señal delta $\delta = \delta_d + \delta_c$ [rad vs s].

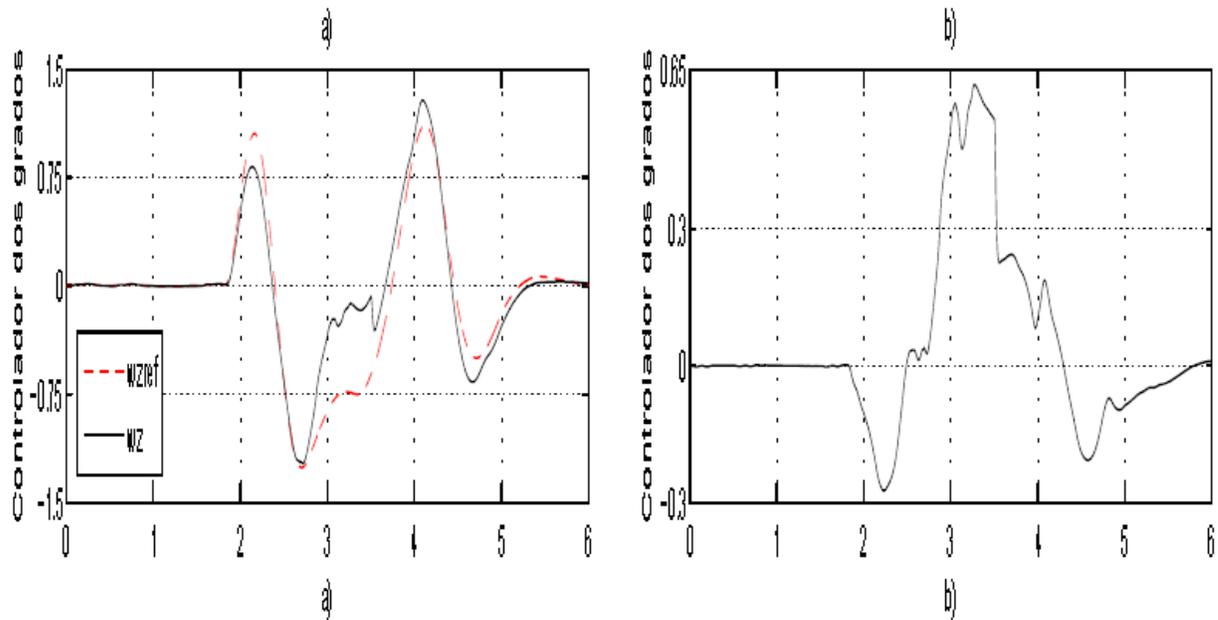


Figura 5.10: a) ω_z vs $\omega_{z,ref}$ [rad vs s]; b) Error $(\omega_z - \omega_{z,ref})$ [rad vs s].

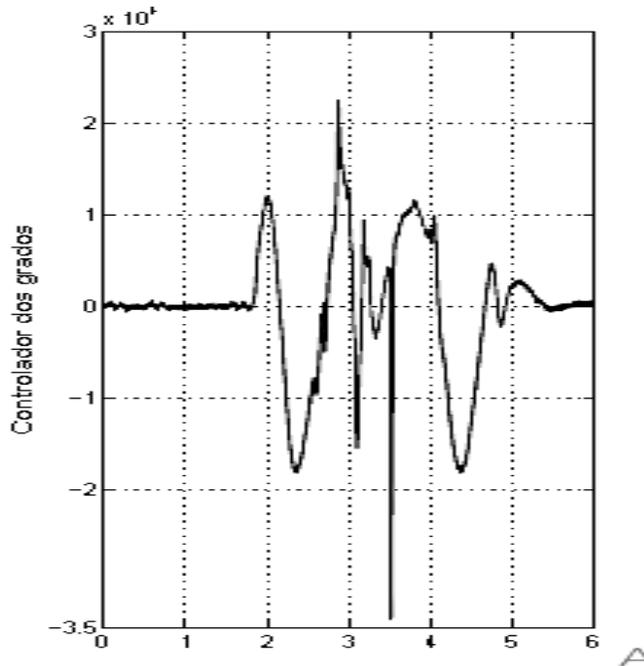


Figura 5.11: M_z [Nm vs s].

5.2.2. Maniobra escalón

Para concluir este trabajo de tesis de investigación se realiza ahora la entrada escalón al sistema CarSim, una entrada de 40 grados, donde esta maniobra de entrada del conductor es modificada al sumarle la entrada del control activo, que corresponde o resulta a la maniobra controlada de entrada, todo esto para el controlador de cinco grados no lineal.

Para la parte de maniobra de entrada se tiene el resultado de un controlador lineal de dos grados con la misma entrada que se utilizó para los controladores no lineales y que se puede observar en la figura 5.12a, con su entrada de control en figura 5.12b mostrándose no muy linealizada a comparación de la ofrecida por los controles activos de cinco y tres grados. Concluyendo con la maniobra de entrada controlada en figura 5.12c de este control activo lineal.

Ahora se estudia a la velocidad angular de viraje, donde se puede ver en la figura 5.13a representando al controlador lineal con una velocidad angular de viraje muy parecida a 0.07 rad/s con una conversión de grados a 4.01.

Y con esta dinámica angular de viraje, se define la comparación para el controlador con respecto a sus errores, como se ve en la figura 5.13b, que por algunos momentos tiene valores muy cercanos a cero y en otros prácticamente es cero, reflejándose este resultado también para el controlador no lineal de tres grados y de la misma forma para el controlador lineal.

Se analiza ahora a la fuerza trasera de la llanta del vehículo, como primer término se puede mostrar al controlador no lineal de cinco grados con esta variable, teniendo la cantidad de 3500 N y su fuerza de referencia de alrededor de 4500 N, con resultados muy similares para el controlador no lineal de tres grados y para el controlador de dos grados referente a su fuerza trasera controlada de inicio que está en 3500 N, para terminar con un valor igual a la fuerza de referencia de 2000 N.

Con estas deducciones se puede estudiar ahora el momento angular de z observado para el controlador lineal en figura 5.14, que tiene una menor de 3500 N.

Concluyendo con esta dinámica en forma correcta, y para finalizar este estudio de los controladores en Carsim-Matlab-Simulink, solamente se estudia a la fuerza lateral de control $\Delta F_{y,f}$.

Faltando señalar las tablas de valores de simulación de estos controladores no lineales y lineal que son definidos al final de estos resultados en la tabla 5.1 y para el sistema de referencia en tabla 5.2. Por lo tanto como final se puede deducir que existirán en futuro investigaciones de otros parámetros del vehículo, pero lo que se realizó hasta este momento es el principio de una línea de investigación de algoritmos de control para el automóvil y que el término de este trabajo para estos controladores y observadores deja un precedente importante, siendo la primera investigación a nivel tesis de doctorado del Centro universitario de la Ciénega del Módulo Ocotlán de la Universidad de Guadalajara.

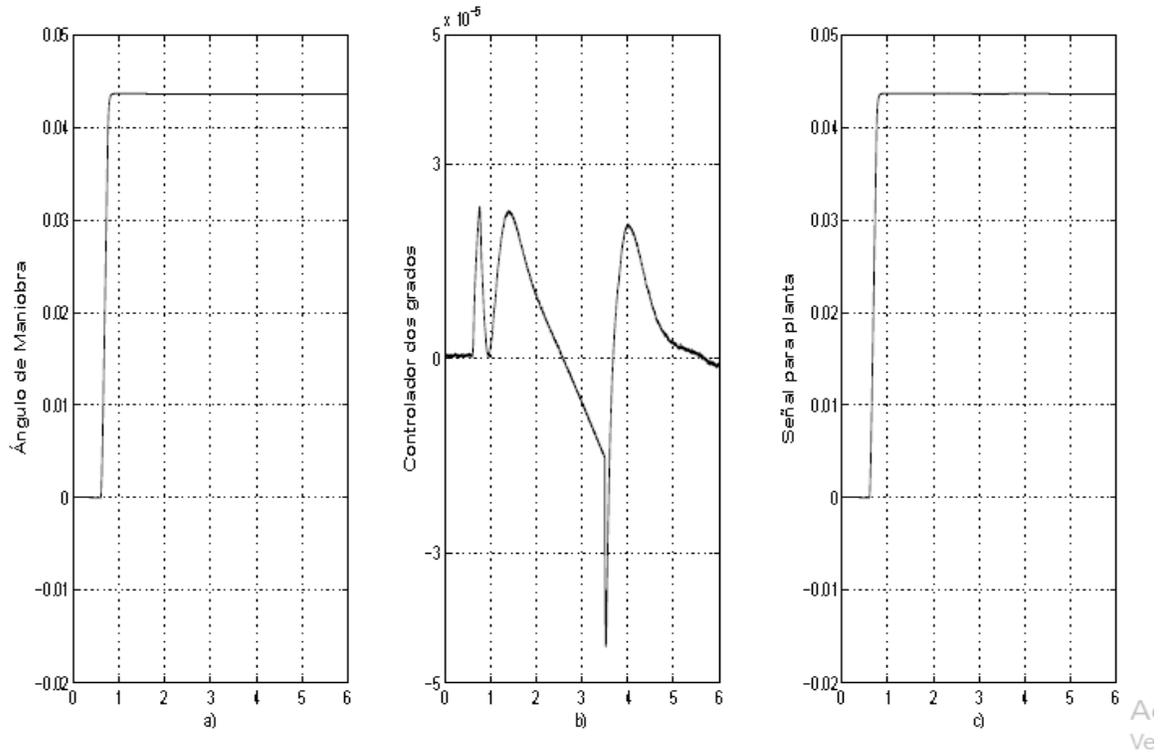


Figura 5.12: a) Señal delta del conductor δ_d [rad vs s]; b) Señal delta del controlador δ_c [rad vs s]; c) Señal delta $\delta = \delta_d + \delta_c$ [rad vs s].

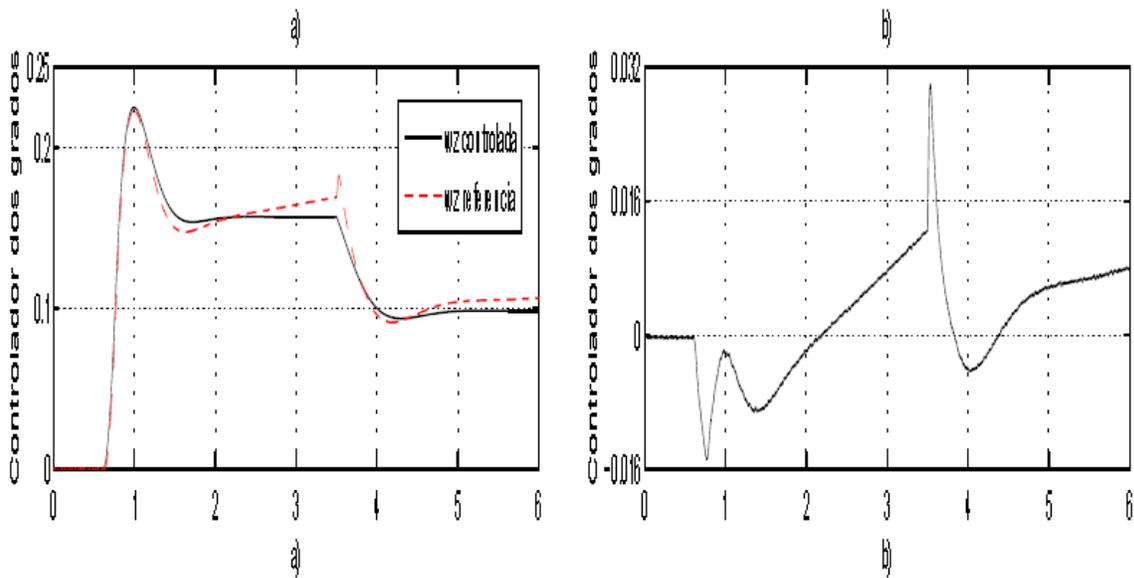


Figura 5.13: a) ω_z vs $\omega_{z,ref}$ [rad vs s]; b) Error $(\omega_z - \omega_{z,ref})$ [rad vs s].

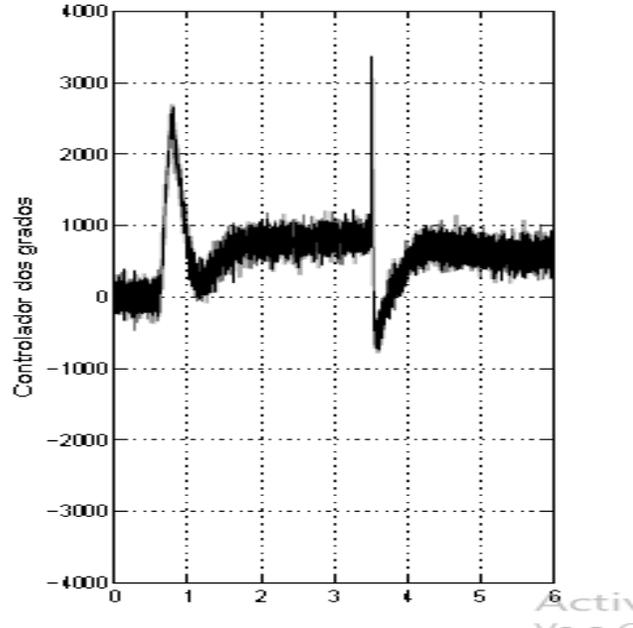


Figura 5.14: M_z [Nm vs s].

Tabla 5.1: Parámetros para Carsim, controladores no lineales, lineal, observadores de tres y dos grados.

| Variables de Simulación | |
|-------------------------|-------------------|
| $v_x = 28m/s$ | $B_{yf} = 6.9$ |
| $m = 1800kg$ | $C_{yf} = 1.78$ |
| $J_z = 2552kgm^2$ | $D_{yf} = 7240N$ |
| $l_r = 1.5416m$ | $B_{yr} = 10$ |
| $l_f = 1.3674m$ | $C_{yr} = 1.32$ |
| $l = 2.909m$ | $D_{yr} = 7834N$ |
| $\mu = 0.9 - 0.4$ | $m_s = 1550kg$ |
| $J_x = 600kgm^2$ | $\mu_{ref} = 0.9$ |

Tabla 5.2: Parámetros del sistema de referencia para controladores no lineal y lineal.

| Variables de Referencia | |
|-------------------------|-----------------------|
| $B_{yref} = 6.2$ | $B_{yrref} = 7.0$ |
| $C_{yref} = 1.21$ | $C_{yrref} = 1.38$ |
| $D_{yref} = 10,000N$ | $D_{yrref} = 10,000N$ |

5.2.3. Resultados de la plataforma.

A. Maniobra en una dirección.

En esta sección el comportamiento del modelo matemático del automóvil se simula bajo una maniobra en una dirección ISO 7401, de manera repentina, con un ángulo δ_d , enseguida se observa la delta del controlador δ_c y por último la delta del conductor sumándose a la delta del controlador, dando como resultado la delta δ , como se muestra en la Figura 5.15.

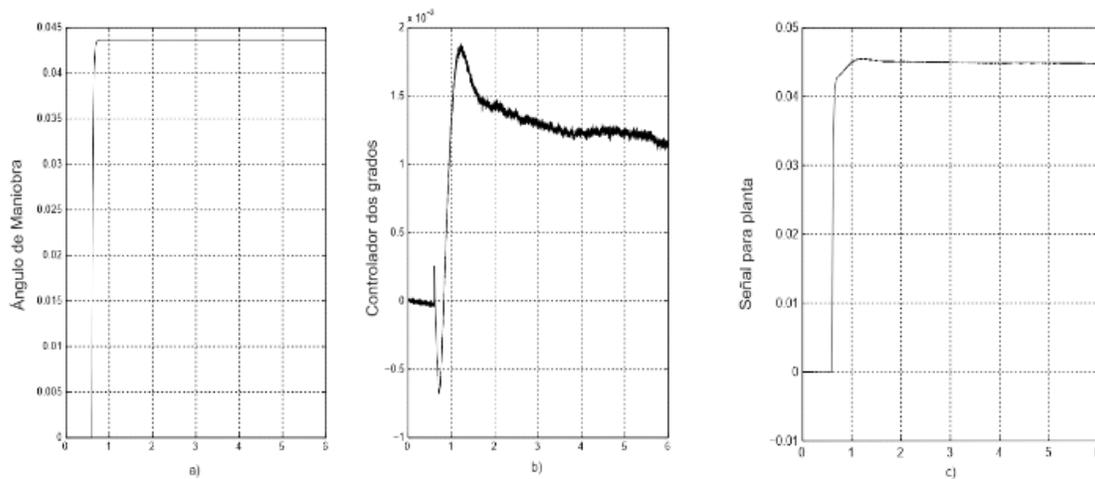


Figura 5.15: a) Señal δ_d [rad/s]; b) Señal δ_c [rad/s]; c) Señal δ [rad/s].

Para la figura 5.16, se muestra la velocidad lateral del sistema de referencia ($v_{y,ref}$) y la salida de la velocidad lateral del sistema real (v_y).

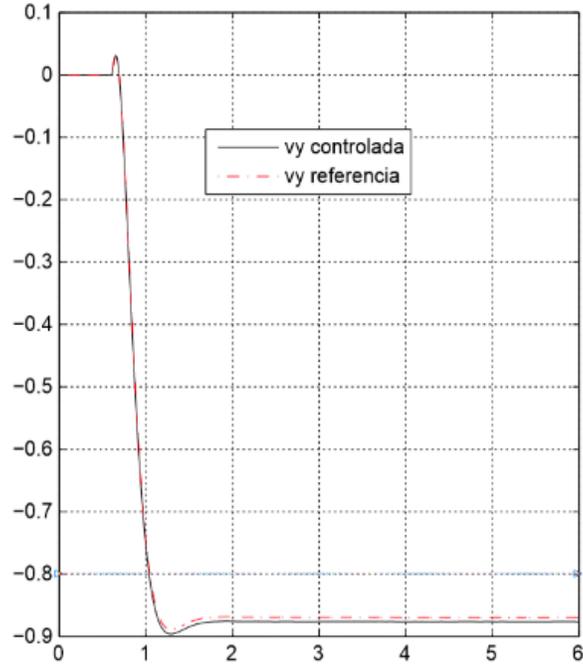


Figura 5.16: Velocidad lateral v_y (sólida) y $v_{y,ref}$ (interlínea) [m/s vs s].

Considerando la figura 5.17, se muestra la velocidad angular de viraje del sistema de referencia ($\omega_{z,ref}$) y la salida de la velocidad angular de viraje del sistema real (ω_z), la cual tiene un seguimiento adecuado a la velocidad de viraje de referencia en un trayecto de 0s a los 6s.

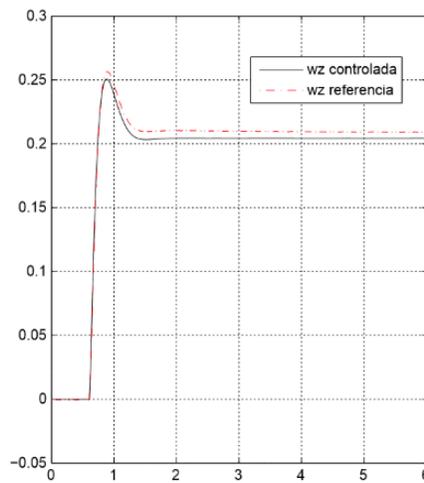


Figura 5.17: Velocidad angular de viraje ω_z (sólida) y $\omega_{z,ref}$ (interlínea) [rad/s vs s].

B. Aplicación de la plataforma de Hardware propia a una dirección asistida.

La dirección asistida que se utiliza para las pruebas del controlador activo de este trabajo de investigación, es una dirección electrónica de un Volkswagen (Bora), la cual se muestra a continuación (ver figura 5.18):

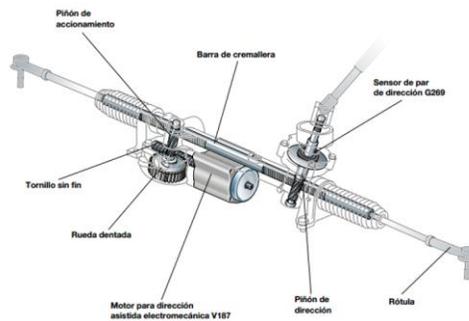


Figura 5.18: Dirección Asistida Electrónica.

La plataforma para velocidades longitudinal, lateral y de viraje para manipular la dirección asistida; La aplicación se realiza en una estación de pruebas del Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, en el estado de Jalisco en México, simulando un automóvil Bora Volkswagen. Esto se puede observar en la figura 5.19



Figura 5.19: Estación de simulación del Automóvil.

Las pruebas finales se establecen con la obtención de las dinámicas del vehículo por medio de la plataforma de la figura 5.19, donde se diseña el algoritmo del controlador δ_c , para la dirección asistida automotriz. Por último se muestran los resultados de las velocidades lateral y angular de viraje de la plataforma diseñada en hardware (ver figura 5.20 y 5.21), la cual ofrece el control lineal de la velocidad de viraje y velocidad lateral para conectarse a la dirección asistida, donde ayudará al conductor a no tener un subviraje al momento de ir conduciendo.

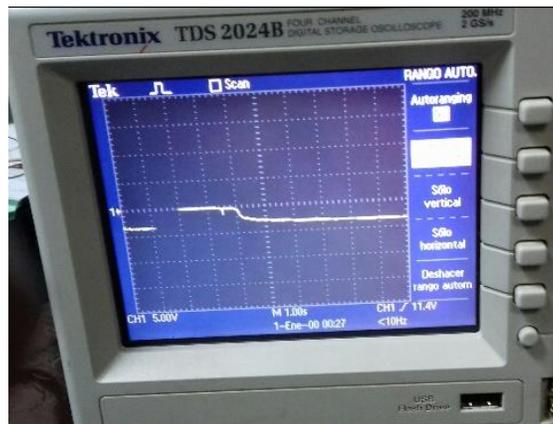


Figura 5.20: Velocidad lateral v_y [volts vs s].

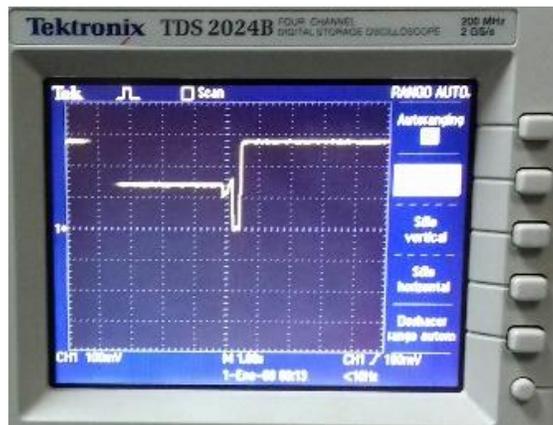


Figura 5.21: Velocidad angular de viraje ω_z [rad/s vs s].

5.2.4. Discusión.

Este trabajo se realiza con la finalidad de proponer un controlador para el automóvil con velocidad lateral, partiendo del modelo matemático de la bicicleta. El objetivo del controlador será buscar el control para todo tipo de manejo por parte del conductor, imponiendo un ángulo en las llantas con el afán de no caer en sub viraje o en sobre viraje, ya que son los errores comunes a la hora de conducir un vehículo. El diseño de los algoritmos que contienen las ganancias k_1, k_2 , las cuales se proponen para la ley de control por retroalimentación de estados, se utilizan para ampliar o disminuir a la M_z y al control activo δ_c , además de cambiar estos últimos parámetros para establecer valores diferentes tanto para la velocidad lateral y velocidad angular de viraje aplicadas a las ruedas del automóvil. Esta investigación también genera una plataforma de hardware la cual puede utilizarse para entender de forma fácil las dinámicas controladas, el sistema de dinámicas de referencia y el control por retroalimentación de estados aplicado al vehículo, todo esto como una idea original, sin embargo se deja como discusión el análisis de las gráficas para que se observen las tres plataformas que se utilizaron, empezando con Matlab-Simulink para el sistema de referencia $(v_{y,ref}, \omega_{z,ref})$, CarSim (v_y, ω_z) y las velocidades lateral y viraje en la figura 20 y 21 respectivamente, pertenecientes a la plataforma de diseño propio, como una propuesta para esta tesis. Por último en trabajo a futuro se debe comparar los resultados obtenidos de simulación de esta investigación y plataforma de hardware propia con otros como por ejemplo con la plataforma Hil de National Instruments

Capítulo 6

6. Conclusiones.

Se obtiene con este trabajo de investigación, las bases fundamentales para el diseño de un controlador lineal de dos grados de libertad, con tentativa a aplicar un observador de esta misma índole, o mismas características, mediante los modelos matemáticos previstos por el Doctor Sergio Sandoval Pérez, logrando así la posibilidad de introducir herramientas de apoyo, para el estudio del funcionamiento de las direcciones asistidas, ya sea de manera local o nacional, en México.

Haciendo uso de información obtenida de trabajos realizados por investigadores distinguidos, además del apoyo de software especializados en el ámbito automotriz, se otorga la experiencia de aplicar parámetros a la dirección del automóvil de manera real para, así poder generar y/o visualizar el comportamiento de dicho sistema; lo que ayudará a tener una vista más clara del trabajo que desempeñan las direcciones asistidas.

7. Referencias bibliográficas

- [1] D. Bianchi, A. Borri, G. Burgio, M. D. Di Benedetto, and S. Di Gennaro, Adaptive Integrated Vehicle Control using Active Front Steering and Rear Torque Vectoring, *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, Special Issue on: “Autonomous and Semi–Autonomous Control for Safe Driving of Ground Vehicles”, Vol. 8, No. 2/3/4, pp. 85–105, 2010.
- [2] S. Di Cairano, H.E. Tseng, D. Bernardini, and A. Bemporad, Vehicle Yaw Stability Control by Coordinated Active Front Steering and Differential Braking in the Tire Sideslip Angles Domain, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 21, No. 4, pp. 1236–1248, 2013.
- [3] N. Hamzah, Y.M. Sam, H. Selamat, M.K. Aripin, and M.F. Ismail, Yaw Stability Improvement for Four–Wheel Active Steering Vehicle using Sliding Mode Control, 2012 IEEE 8th International Colloquium on Signal Processing and its Applications (CSPA), pp. 127–132, 2012.
- [4] A.Y. Ungoren, H. Peng and H. Tseng, A Study on Lateral Speed Estimation Methods, *International Journal on Vehicle Autonomous Systems*, Vol. 2, pp. 126–144, 2004.
- [5] J. Ackermann, D.Odenthal and T.Bunte, Advantages of Active Steering for Vehicle Dynamics Control *International Symposium on Automotive Technology and Automotion*, Viena, Austria, 1999.
- [6] S. C. Baslamisli, I. Polat, and I. E. Kose, Gain Scheduled Active Steering Control Based on a Parametric Bicycle Model, *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pp.1168–1173, 2007.
- [7] R. Karbalaei, A. Ghaffari, R. Kazemi, and S. H. Tabatabaei, Design of an Integrated AFS/DYC Based on Fuzzy Logic Control, *IEEE International Conference on Vehicle Electronics and Safety*, pp. 1–6, 2007.

- [8] J. Fuller, Matt. Best, Nikhil. Garret, Martin. Passmore, The importance of unsteady aerodynamics to road vehicle dynamics, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 117, No. 1, pp. 1–10, 2013.
- [9] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*, Springer, New York, 2006.
- [10] S.Y. Cheng, M. Tsubokura, Y. Okada, T. Nouzawa, T. Nakashima, D. H. Doh, Aerodynamic stability of road vehicles in dynamic pitching motion, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 22, No. 1, pp. 146–156, 2013.
- [11] H. Ren, S. Chen, G. Liu and K. Zheng, Vehicle State Information Estimation with the Unscented Kalman Filter, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 2014, pp.11, 2014.
- [12] J. Stephant, A. Charara and D. Meizel, Evaluation of Sliding Mode Observer for Vehicle Sideslip Angle, *Control Engineering Practice*, vol. 15, pp. 803–812, 2007.
- [13] W. Sun, J. Tian, S. Li, Z. Yang, Z. Ma, Stability Analysis of Vehicle Negotiating a Curve in the Plan, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 2013, pp. 9, 2013.
- [14] A. T. Van Zanten, Bosch ESP System: 5 Years of Experience, *Proceedings of the Automotive Dynamics and Stability Conference*, pp. 354, Paper No. 2000–01–1633, 2000.
- [15] S. Sastry e Isidori, Adaptive Control of Linearizable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 11, pp. 1123–1131, 1989.
- [16] C. Acosta–Lua, B. Castillo–Toledo and S. Di Gennaro and A. Toro, Nonlinear Robust Regulation of Ground Vehicle Motion, *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3871–3876, 2007.
- [17] M. Canale, L. Fagiano, M. Milanese and P. Barodani, Robust Vehicle Yaw Control using an Active Differential and IMC techniques, *Control Engineering Practice*, Vol. 15, No. 8, pp. 923–941, 2007.
- [18] C. Chapuis, Eric. Bideaux, Xavier. Brun and Nicoleta. Minoiu, Comparison of Feedback Linearization and Flatness control for Anti-Slip Regulation (ASR) of an Hybrid

Vehicle: From Theory to Experimental Results, 2013 European Control Conference (Ecc), pp. 446–451, 2013.

[19] G. Baffet, A. Charara, and G. Dherbomez, An Observer of Tire–Road Forces and Friction for Active Security Vehicle Systems, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 12, No. 6, pp. 651–661, 2007.

[20] J. Farrelly and P. Wellstead, Estimation of Vehicle Lateral Velocity, *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 552–557, 1996.

[21] U. Kiencke and A. Daiss, Observation of Lateral Vehicle Dynamics, *Control Engineering Practice*, Vol. 5, No. 8, pp. 1145–1150, 1997.

[22] L. R. Ray, Nonlinear State and Tire Force Estimation for Advanced Vehicle Control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 3, No. 1, pp. 117–124, 1995.

[23] C. Acosta Lua, B. Castillo-Toledo and S. Di Gennaro, Nonlinear Output Robust Regulation of Ground Vehicles in Presence of Disturbances and Parameter Uncertainties, *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008.

[24] N. Sahoo, R. Babu, Calibration Technique for Recovery of Short Duration Aerodynamic Force, *Journal of Aerodynamics*, Vol. 2014, pp. 5, 2014.

[25] Genta, G., *Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific, Singapore, 1997.

[26] H. B. Pacejka, *Tyre and Vehicle Dynamics*, Elsevier Butterworth–Hein, 2005.

[27] J. Sou, J. Y. Joeng, K. I. Lee and K. Yi, Vehicle Stability Control System for Enhancing Steerability, Lateral Stability, and Roll Stability, *International Journal of Automotive Technology*, Vol. 9, No. 5, 571–576, 2008.

[28] C. Earl Beal and J. Christian Gerdes, Model Predictive Control for Vehicle Stabilization at the Limits of Handling, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 21, No. 4, pp. 1258–1269, 2013.

- [29] H. Hamann, J. Karl Hedrick, S. Rhode and F. Gauterin, Tire Force Estimation for a Passenger Vehicle with the Unscented Kalman Filter, 2014 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), pp. 814–819, 2014.
- [30] S. Rezaei and R. Sengupta, Kalman Filter-Based Integration of DGPS and Vehicle Sensors for localization, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 15, No. 6, pp. 1080–1088, 2007.
- [31] T. L. Lam, H. Qian, and Y. Xu, Omnidirectional Steering Interface and Control for a Four-Wheel Independent Steering Vehicle, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 15, No. 3, pp. 329–338, 2010.
- [32] C. Canudas de Wit, P. Tsiotras, E. Velenis, M. Basset, and G. Gissinger, Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction, Vehicle System Dynamics, Vol. 39, No. 3, pp. 189–226, 2003.
- [33] O. Hank, T. Bertram and M. Hiller, Analysis and Control of Vehicle Dynamics Under Crosswind Conditions, IEEE/ASME Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 9, pp. 1395–1398, 1992.
- [34] H.K.Khalil, Nonlinear System, Third Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2002.
- [35] P. Setlur, J. R. Wagner, D. M. Dawson and D. Braganza, A Trajectory Tracking Steer-by-Wire Control System for Ground Vehicles, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 55, No. 1, pp. 76–85, 2006.
- [36] H. Ohara, and T. Murakami, A Stability Control by Active Angle Control of Front-Wheel in a Vehicle System, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 55, No. 3, pp. 1277–1285, 2008.
- [37] D. Rubin, and S. Arogeti, Vehicle Yaw Stability Control Using Rear Active Differential via Sliding Mode Control Methods, 2013 21st Mediterranean Conference on Control & Automation (MED), Platania-Chania, Crete, Greece, pp. 317–322, 2013.

[38] Li Gang, Zong Chang-fu, Zheng Hong-yu, Hong Wei, Vehicle Active Front Steering and Yaw Moment Integrated Control, 2011 International Conference on Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE), Changchun, China, pp. 787–790, 2009.

[39] H. Pan, Y. Zhang and W. Sun, Robust Tracking Control for Vehicle Lateral Dynamics with Uncertain Parameters and External Nonlinearities, Shock and Vibration, Vol. 2014, pp. 12, 2014.

[40] J. Song, Design and Comparison of AFS Controllers with PID, Fuzzy-Logic, and Sliding-Mode Controllers, Advances in Mechanical Engineering, Vol. 2013, pp. 13, 2013.