



# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Modelación Numérica de la Transferencia de  
Calor Radiativa Multidimensional con Medio  
Participante

presentada por  
**Ing. Daniel García Pérez**

como requisito para la obtención del grado  
de

**Maestro en Ciencias en Ingeniería  
Mecánica**

Director de tesis  
**Dr. Jesús Perfecto Xamán Villaseñor**

Cuernavaca, Morelos, México. Junio de 2019.



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor., 28/mayo/2019

OFICIO No. DIM/157/2019  
Asunto: Aceptación de documento de tesis

**C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del estudiante Ing. Daniel García Pérez, con número de control MI7CE075, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Modelación numérica de la transferencia de calor radiativa multidimensional con medio participante" hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

DR. JESÚS PERFECTO XAMÁN VILLASEÑOR  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
4672156

REVISOR 1

DRA. YVONNE CHÁVEZ CHENA  
Doctora en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
7492003

REVISOR 2

DR. JESÚS ARCE LANDA  
Doctor en Ingeniería  
6170951

REVISOR 3

DR. EFRAÍN SIMÁ MOO  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica  
6601954

C.p. María Elena Gómez Torres Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Daniel García Pérez Estudiante  
Expediente

AAP/MRSR



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor. 31 de mayo de 2019  
OFICIO No. SAC/207/2019

**Asunto:** Autorización de impresión de tesis

**ING. DANIEL GARCÍA PÉREZ**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA MECÁNICA**  
**P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Modelación numérica de la transferencia de calor radiativa multidimensional con medio participante", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®*  
*"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**SEP TecNM**  
**CENTRO NACIONAL**  
**DE INVESTIGACIÓN**  
**Y DESARROLLO**  
**TECNOLÓGICO**  
**SUBDIRECCIÓN**  
**ACADÉMICA**



# *Dedicatoria*

*Dedico este trabajo a la memoria de mi abuela, **Teresa Pérez González**, a quien siempre quise como madre y que me enseñó a nunca rendirme ante las adversidades, ser humilde y honrado.*

*A mi madre **Martha García Pérez**, quien me dio la vida y me ha apoyado en mis decisiones, quien me ha enseñado a conseguir mis metas y a no darme por vencido.*

*A mi padre **Hector Sánchez**, quien me ha enseñado a trabajar y a ganarme la vida horadamente.*

*A mis hermanas **Isabel, Carmen** y a mis hermanos **Misael y Hector** quienes siempre han hecho mi vida muy amena.*

*A mi tía **Carmen** y su esposo **Jaime**, a mi tía **Yolanda** y su esposo **Jorge** por los consejos y apoyo que me han brindado.*

*A mis tíos **Alfonso** y su esposa **Marcela, Evodio, Francisco y Fidel** por sus consejos y apoyo.*

*A mis primos **Jaime y Antonio** por el apoyo que me brindaron.*

*También al **Dr. Jesús Perfecto Xamán**, a doña **Irma Bustamante Mendoza**, a la **Dra. Elva Lilia Reynoso Jardón** y a la **MC. Yessenia Olazon Gómez** por su gran apoyo en mi transición de la licenciatura a la maestría.*

# *Agradecimientos*

*A Dios por permitirme realizar este trabajo y por darme la fuerza para nunca rendirme.*

*Agradezco al Dr. Jesús Perfecto Xamán Villaseñor por la oportunidad de trabajar bajo su dirección y por su conocimiento compartido.*

*Agradezco al Dr. Irving Osiris Hernández López por sus asesorías.*

*Agradezco a la Dra. Ivett Zavala Guillén y al Dr. Irving Osiris Hernández López por el conocimiento compartido que ha permitido la realización de esta tesis.*

*Agradezco a la Dra. Ivonne Chávez Chena, al Dr. Efraín Simá Moo y al Dr. Jesús Arce Landa por sus observaciones y comentarios en la realización de esta tesis.*

*Agradezco a Yessenia Olazo, Miguel Jiménez y Martín Rodríguez por su amistad, apoyo y comentarios durante la realización de la Tesis.*

*Agradezco a mis compañeros del laboratorio L-MOTCAM a Yessenia Olazo, Martín Rodríguez, Miguel Jiménez, Edgar González, Samanta López, Carlos Torres Javier Uriarte y Rogelio Vargas por su compañerismo y por hacer muy ameno todo este tiempo.*

*Agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por la oportunidad de crecer académicamente.*

*Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico y académico para la realización de esta tesis.*

# Índice general

<b>Capítulo 1 Introducción</b> .....	1
1.1 Estado del arte .....	6
1.1.1 Aproximación angular.....	6
1.1.2 Implementación de esquemas de interpolación espacial .....	14
1.1.3 RTE acoplada a transferencia de calor por convección.....	18
1.1.4 Aceleración de la convergencia de la solución de la RTE .....	20
1.1.5 Formulaciones matemáticas para la implementación de esquemas de interpolación espacial .....	22
1.1.6 Conclusión de la revisión bibliográfica.....	27
1.2 Objetivos .....	28
1.2.1 Objetivo general .....	28
1.2.2 Objetivo específicos .....	28
1.3 Alcances .....	29
1.4 Descripción de los capítulos.....	30
<b>Capítulo 2 Modelo Físico y matemático</b> .....	31
2.1 Ecuación de transporte radiativo (RTE).....	31
2.2 Cavity cubica con medio participante: absorbente-emisor-dispersante.....	35
2.2.1 Modelo físico.....	35
2.2.2 Consideraciones.....	36

2.2.3 Modelo Matemático .....	37
2.2.4 Condiciones de frontera.....	38
2.3 Horno rectangular tridimensional con medio participante: absorbente-emisor .....	40
2.3.1 Modelo físico.....	40
2.3.2 Consideraciones.....	40
2.3.3 Modelo Matemático .....	41
2.3.4 Condiciones de frontera.....	43
<b>Capítulo 3 Metodología: DC .....</b>	<b>45</b>
3.1 Metodología DOM .....	46
3.2 Metodología FVM.....	48
3.2.1 Primer nivel de aproximación.....	48
3.2.2 Segundo nivel de aproximación DC.....	49
3.2.2.1 Discretización de nodos internos .....	49
3.2.2.2 Discretización de nodos adyacentes a las fronteras .....	61
3.2.2.3 Discretización de nodos fronteras .....	63
<b>Capítulo 4 Metodología: NWF .....</b>	<b>69</b>
4.1 Metodología DOM .....	70
4.2 Metodología FVM.....	71
4.2.1 Primer nivel de aproximación.....	72
4.2.2 Segundo nivel de aproximación NWF .....	72
4.2.2.1 Discretización de nodos internos .....	76
4.2.2.2 Discretización de nodos adyacentes a las fronteras .....	81

4.2.2.3	Discretización de nodos fronteras .....	87
4.3	Método de solución de ecuaciones algebraicas .....	88
4.4	Relajación de la solución de la RTE .....	90
4.5	Criterio de convergencia .....	92
<b>Capítulo 5 Verificación numérica .....</b>		<b>97</b>
5.1	Verificación de la solución de la RTE en una dimensión .....	98
5.1.1	Medio absorbente entre dos placas en una dimensión.....	99
5.1.2	Medio dispersante entre dos placas en una dimensión .....	101
5.2	Verificación de la solución de la RTE en dos dimensiones .....	102
5.2.1	Medio dispersante en una cavidad cuadrada .....	104
5.2.2	Medio absorbente en una cavidad cuadrada .....	106
5.3	Verificación de la solución de la RTE en tres dimensiones .....	109
5.3.1	Cavidad cúbica con medio dispersante.....	111
5.3.2	Horno rectangular tridimensional con medio absorbente.....	112
5.4	Estudio de la independencia de malla .....	115
5.4.1	Cavidad cúbica con medio absorbente-emisor-dispersante .....	115
5.4.1.1	Independencia de malla espacial .....	115
5.4.1.2.	Independencia de malla angular .....	117
5.4.2	Horno rectangular tridimensional con medio absorbente .....	118
5.4.2.1.	Independencia de malla espacial .....	118
5.4.2.2.	Independencia de malla angular .....	119

<b>Capítulo 6 Resultados</b> .....	121
6.1 Cavity cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante .....	122
6.1.1 Malla computacional espacial .....	123
6.1.2 Esquema de cuadratura .....	131
6.1.3 Coeficiente de absorción .....	140
6.1.4 Emisividad de las paredes .....	147
6.1.5 Bajo-relajación de la intensidad radiativa.....	151
6.1.6 Coeficiente de dispersión de albedo .....	155
6.2 Horno rectangular tridimensional con medio participante absorbente-emisor.....	161
6.2.1 Malla computacional espacial .....	163
6.2.2 Esquema de cuadratura.....	168
6.2.3 Coeficiente de absorción .....	172
6.2.4 Emisividad de las paredes .....	178
6.2.5 Coeficiente de relajación .....	182
6.2.6 Generación volumétrica .....	188
<b>Capítulo 7 Conclusiones</b> .....	193
7.1 Conclusión caso uno.....	193
7.2 Conclusión caso dos .....	196
7.3 Conclusión general.....	198
7.4 Recomendaciones.....	199
<b>Referencias</b> .....	201
<b>Anexos</b> .....	207
Anexo 1 Esquemas HO y HR con DC .....	207

Anexo 2 Esquemas HO y HR con NWF .....	209
Anexo 3 Ejemplos de esquemas de cuadraturas.....	210
Anexo 4 Conceptos fundamentales .....	210

# Índice de figuras

<b>Figura 2. 1</b> Atenuación de energía radiativa por dispersión y absorción. ....	32
<b>Figura 2. 2</b> Aumento de energía radiativa por dispersión y emisión. ....	33
<b>Figura 2. 3</b> Cavity cúbica con medio absorbente-emisor-dispersante. ....	37
<b>Figura 2. 4</b> Horno rectangular tridimensional con medio absorbente-emisor. ....	41
<b>Figura 3. 1</b> Dominio computacional. ....	45
<b>Figura 3. 2</b> División de volumen de control en octantes. ....	46
<b>Figura 3. 3</b> Ejemplo de cuadratura. ....	47
<b>Figura 3. 4</b> Efecto rayo. ....	48
<b>Figura 3. 5</b> Volumen de control interno para la discretización espacial en tres dimensiones. ....	50
<b>Figura 3. 6</b> Flujo diagonal de la intensidad radiativa. ....	51
<b>Figura 3. 7</b> Acotabilidad. ....	53
<b>Figura 3. 8</b> Variable en nodos principales. ....	54
<b>Figura 3. 9</b> casos de la variable normalizada $\bar{\varphi}_C$ . ....	55
<b>Figura 3. 10</b> NVD para diferentes esquemas. ....	56
<b>Figura 3. 11</b> Comparación de los esquemas SMART y QUICK en NVD. ....	58
<b>Figura 3. 12</b> Proceso iterativo de la solución de la variable. ....	59
<b>Figura 3. 13</b> Nodos adyacentes a la frontera. ....	62
<b>Figura 3. 14</b> Nodo espejo $\varphi_{U,x}$ . ....	63
<b>Figura 3. 15</b> Volúmenes de control de las fronteras. ....	64
<b>Figura 3. 16</b> Pared opaca para la discretización de las fronteras. ....	65
<b>Figura 3. 17</b> Pared negra para la discretización de las fronteras. ....	65
<b>Figura 3. 18</b> Energía incidente en las fronteras para paredes negras. ....	66
<b>Figura 4. 1</b> Volumen de control dividido en octantes. ....	70
<b>Figura 4. 2</b> Variable en nodos principales. ....	73
<b>Figura 4. 3</b> NVD para diferentes esquemas. ....	75

**Figura 4. 4** Diagrama de flujo para la solución de la RTE en tres dimensiones con la formulación matemática NWF y DC. .... 95

**Figura 5. 1** Transferencia de calor por radiación entre dos paredes en una dimensión..... 99

**Figura 5. 2** Modelo físico para la transferencia de calor por radiación con medio participante en una cavidad cuadrada. .... 103

**Figura 5. 3** Flux de calor adimensional para un medio dispersante. .... 105

**Figura 5. 4** Flux de calor adimensional para un medio absorbente. .... 107

**Figura 5. 5** Modelo físico de la cavidad cúbica con medio participante. .... 109

**Figura 5. 6** Modelo físico del horno tridimensional con medio participante. .... 110

**Figura 5. 7** Zona seleccionada para la comparación del Flux de calor. .... 111

**Figura 5. 8** Valores del Flux de calor obtenido con ambas formulaciones. .... 112

**Figura 5. 9** Zona seleccionada para la comparación. .... 113

**Figura 5. 10** Flux de calor obtenido con cada formulación..... 114

**Figura 5. 11** Perfil de temperatura obtenido con cada formulación. .... 114

**Figura 5. 12** Variación del Flux de calor adimensional local con base a la malla espacial. .... 116

**Figura 5. 13** Variación del Flux de calor adimensional con la malla angular. .... 117

**Figura 5. 14** Variación del Flux de calor con respecto a la malla espacial. .... 119

**Figura 5. 15** Variación del Flux de calor con respecto al esquema de cuadratura. .... 120

**Figura 6. 1** Tiempo computacional obtenido con DC y NWF en función de la malla computacional. .... 125

**Figura 6. 2** Tiempo computacional con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura. .... 132

**Figura 6. 3** Relación de iteración-residual obtenido con las formulaciones DC y NWF. .... 138

**Figura 6. 4** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del coeficiente de absorción. .... 143

**Figura 6. 5** Relación de iteración-residual con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura. .... 146

**Figura 6. 6** Tiempo computacional obtenido con la DC y NWF en función de la emisividad. .... 148

**Figura 6. 7** Tiempo computacional de las formulaciones DC y NWF en función de la baja relajación. .... 153

**Figura 6. 8** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de dispersión de albedo. .... 157

<b>Figura 6. 9</b> Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la malla $N_x = N_y ; N_z$ .....	164
<b>Figura 6. 10</b> Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura. ....	169
<b>Figura 6. 11</b> Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del coeficiente de absorción. ....	174
<b>Figura 6. 12</b> Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la emisividad de las paredes. ....	180
<b>Figura 6. 13</b> Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del coeficiente de relajación. ....	184
<b>Figura 6. 14</b> Tiempo computacional obtenido con las formulación DC y NWF en función de la generación de calor volumetrica. ....	190
<b>Figura A4. 1</b> Transferencia de calor por radiación entre dos cuerpos.....	211
<b>Figura A4. 2</b> Características de una onda electromagnética. ....	212
<b>Figura A4. 3</b> Espectro electromagnético. ....	213
<b>Figura A4. 4</b> Dependencia angular y direccional. ....	214
<b>Figura A4. 5</b> Ángulo sólido.....	215
<b>Figura A4. 6</b> Interacción de la energía radiativa con varios tipos de superficies.....	217
<b>Figura A4. 7</b> Dispersión de la energía radiativa con la interacción con una partícula. ....	219

# Índice de tablas

<b>Tabla 4. 1</b> Equivalencias de subíndices para la Ecuación (4.20).....	80
<b>Tabla 5. 1</b> Comparación de resultados con Heaslet y Warming (1965).....	100
<b>Tabla 5. 2</b> Continuación de la Tabla 5.1.....	100
<b>Tabla 5. 3</b> Valores obtenidos y comparados con los presentados por Fiveland (1987).....	102
<b>Tabla 5. 4</b> Error porcentual máximo de cada esquema para un medio con $\tau = 0.25$ mediante DC. .....	106
<b>Tabla 5. 5</b> Error porcentual máximo del Flux de calor para $\kappa = 10.0$ mediante DC. ....	108
<b>Tabla 5. 6</b> Diferencia maxima del Flux de calor adimensional entre DC y NWF para diferentes esquemas. ....	108
<b>Tabla 5. 7</b> Variación del Flux promedio con la malla espacial .....	116
<b>Tabla 5. 8</b> Variación del Flux de calor adimensional promedio con la malla angular .....	117
<b>Tabla 5. 9</b> Variación del Flux de calor con respecto a la malla espacial.....	118
<b>Tabla 5. 10</b> Variación del Flux de calor promedio con respecto al esquema de cuadratura .....	119
<b>Tabla 6. 1</b> Valores de parametros fijos para el caso referencia. ....	123
<b>Tabla 6. 2</b> Número de iteraciones requeridas por las formulaciones DC y NWF en función del número de nodos .....	129
<b>Tabla 6. 3</b> Número de iteraciones requeridas con la formulación DC y NWF en función del esquema de cuadratura .....	135
<b>Tabla 6. 4</b> Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la absorción .....	145
<b>Tabla 6. 5</b> Número de iteraciones para las formulaciones DC y NWF en función de la emisividad. .....	151
<b>Tabla 6. 6</b> Numero de iteraciones requeridas con las formulaciones DC y NWF.....	155
<b>Tabla 6. 7</b> Numero de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de dispersión de albedo.....	160
<b>Tabla 6. 8</b> Valores de parametros fijos para el caso referencia para el horno.....	163

<b>Tabla 6. 9</b> Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del numero de nodos .....	166
<b>Tabla 6. 10</b> Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura .....	171
<b>Tabla 6. 11</b> Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del coeficiente de absorción .....	177
<b>Tabla 6. 12</b> Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la emisividad de las paredes .....	182
<b>Tabla 6. 13</b> Número de iteraciones obtenido con las formulaciones en función del coeficiente de bajo-relajación .....	187
<b>Tabla 6. 14</b> Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la generación de calor volumetrica .....	191
<b>Tabla A1. 1</b> Función de variable normalizada para varios esquemas. ....	207
<b>Tabla A1. 2</b> Continuación de la Tabla A.1.....	208
<b>Tabla A2. 1</b> Valores de los coeficientes para varios esquemas. ....	209
<b>Tabla A2. 2</b> Continuación de la Tabla A.3.....	210
<b>Tabla A3. 1</b> Ejemplos de cuadraturas $S_n$ y $T_n$ .....	210

## Nomenclatura

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>
<b>Latino</b>	
$a_E, a_W, a_N, a_S$ $a_T, a_B, a_P, b_P$	Coefficientes de la ecuación discretizada.
$c$	Velocidad de propagación ( $m \cdot s^{-1}$ ).
$C_P$	Calor específico ( $J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ).
$dA$	Diferencial de área ( $m^2$ ).
$E$	Potencia emisiva ( $W \cdot m^{-2}$ ).
$G$	Irradiancia ( $W \cdot m^{-2}$ )
$G_{volumetric a}$	Generación de calor volumétrica ( $W \cdot m^{-3}$ )
$H_x, H_y, H_z$	Longitud del sistema en dirección $x, y, z$ , respectivamente ( $m$ )
$I$	Intensidad radiativa ( $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$ ).
$I_{bn}$	Intensidad radiativa de cuerpo negro ( $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$ ).
$k$	Iteración adimensional
$k^*$	Iteración normalizada.
$n, s$	Vector normal a la superficie.
$q^*$	Flux de calor adimensional $\left( \frac{q}{\sigma_{stefan} (T_h^4 - T_i^4)} \right)$
$\vec{r}$	Vector unitario.
$s_*, s^*$	Distancia ( $m$ ).
$S_n$	Esquema de cuadratura.
$T$	Temperatura ( $K$ ).
$T_m$	Temperatura de medio participante ( $K$ ).
$T_2$	Temperatura del cuerpo dos ( $K$ ).

$T_1$	Temperatura del cuerpo uno ( $K$ ).
$t$	Tiempo ( $s$ ).
$t^*$	Tiempo normalizado.
$u_i$	Velocidad $u, v, w$ para $i = x, y, z$ ( $m \cdot s^{-1}$ ).
$W_f$	Factor de peso (adimensional).
$W_f^k$	Factor de peso incidente (adimensional).

### Griego

$\alpha_\eta^*$	Absortancia para gases (adimensional).
$\alpha^*$	Absortancia para superficies opaca (adimensional).
$\theta$	Ángulo azimutal (adimensional).
$\phi$	Ángulo cenital (adimensional).
$\Omega$	Ángulo sólido ( $sr$ ).
$\Omega^ $	Ángulo sólido incidente ( $sr$ ).
$\kappa_{abs}$	Coefficiente de absorción ( $m^{-1}$ ).
$\sigma_{scat}$	Coefficiente de dispersión ( $m^{-1}$ ).
$\beta_C$	Coefficiente de expansión de concentración ( $C^{-1}$ ).
$\beta_*$	Coefficiente de expansión térmica ( $T^{-1}$ ).
$\beta$	Coefficiente de extinción ( $m^{-1}$ ).
$\beta_\lambda$	Coefficiente de extinción en función de la longitud de onda ( $m^{-1}$ ).
$\lambda^*$	Conductividad térmica ( $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$ ).
$\sigma_{STEFAN}$	Constante de Stefan-Boltzmann ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ ).
$\mu, \xi, \eta$	Cosenos directores (adimensional).
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker.
$\rho$	Densidad ( $Kg \cdot m^{-3}$ ).
$\varepsilon$	Emisividad (adimensional).

$\tau_\lambda$	Espesor óptico en función de la longitud de onda (adimensional).
$\Phi^*$	Función de disipación viscosa.
$\Phi$	Función de fase.
$\rho^*$	Reflectancia (adimensional).
$\tau_\eta^*$	Transmitancia para gases (adimensional).
$\tau^*$	Transmitancia para superficies opacas (adimensional).
$\sigma_{STEFAN}$	Constante de Stefan-Boltzmann ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ ).
$\psi_f^k$	Cosenos directores incidentes para $i = x, y, z$ (adimensional).
$\varphi$	Variable general.
$\bar{\varphi}$	Variable general normalizada.
$mm, kk$	Coefficientes de la pendiente de los esquemas HO y HR (adimensionales).
$\alpha$	Coefficiente de relajación (adimensional).
$\varepsilon_{error}$	Error máximo de la solución ( $10^{-6}$ )

# Resumen

Se presenta el estudio paramétrico de la solución de la ecuación de transporte radiativo (*RTE por sus siglas en inglés*) con diferentes esquemas de interpolación de alto orden (*HO por sus siglas en inglés*) y alta resolución (*HR por sus siglas en inglés*) implementados con la formulación corrección diferida (*DC por sus siglas en inglés*) y factor de peso normalizado (*NWF por sus siglas en inglés*), los resultados se presentan en términos del esfuerzo computacional para obtener la solución de la RTE.

Para este estudio paramétrico se ha considerado dos casos de estudios, una cavidad cúbica con un medio absorbente-emisor-dispersante y un horno rectangular tridimensional con medio absorbente-emisor. Además, se considera variar 6 parámetros, de los cuales cinco son, la malla computacional, el esquema de cuadratura, el coeficiente de absorción, la emisividad de las paredes y coeficiente de relajación, estos cinco parámetros se estudian en ambos casos de estudios, el sexto parámetro es el coeficiente de dispersión de albedo para el caso de la cavidad y para el horno rectangular se tiene como parámetro la generación de calor volumétrica.

Por último, los esquemas implementados son: SOU, FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, OSHER, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA, adicionalmente el esquema STEP para la normalización del tiempo de cómputo.

Con base a los resultados, los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA han presentado disminución de tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC de aproximadamente 335% para el caso uno; mientras que para el caso dos, los esquemas DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED, y CUBISTA son los esquemas con menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC de aproximadamente 86%.

# Abstract

The parametric study of the radiative transport equation (RTE) solution with different schemes high order (HO) and high resolution (HR) interpolation implemented with the deferred correction (DC) and normalized weighting factor (NWF) formulation is presented, the results presented are in terms of computational performance to obtain the solution of the RTE.

Two cases of studies have been considered for this parametric study, a cubic cavity with an absorbent-emitting-scattering medium and a three-dimensional rectangular oven with absorbent-emitting medium. In addition, it is considered to vary 6 parameters, of which five are, the computational mesh, the quadrature scheme, the absorption coefficient, the emissivity of the walls and the relaxation coefficient, these five parameters are studied in both cases, the sixth parameter is the coefficient of dispersion of albedo for the case of the cavity and for the rectangular oven the volumetric heat generation is taken as a parameter.

Finally, the schemes implemented are: SOU, FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, OSHER, MUSCL, SMART, WACED and CUBIST, in addition the STEP scheme for the normalization of CPU time.

Based on the results, the DIAMOND, QUICK and CUBISTA schemes have presented computational time reduction with the NWF formulation with respect to the DC formulation of up to 335% scheme for case first, while for case second, the schemes DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED, and CUBISTA are the schemes with the lowest CPU time with the NWF formulation with respect to the DC formulation, while for case second of up to 86%.



# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de la historia del ser humano se ha visto un aumento en el consumo de recursos para satisfacer sus demandas de productos y/o servicios, tales como la alimentación, la vestimenta, el refugio, entre otros, estos al inicio de su era. Sin embargo, con el paso de los años el aumento en el consumo de estos productos y/o servicios ha aumentado considerablemente lo cual es preocupante, y no solo el aumento de consumo, sino también la demanda de nuevos productos y/o servicios, tales como el entretenimiento, transporte, energía eléctrica, vivienda (edificaciones), confort térmico, entre otros.

La satisfacción de la demanda de las edificaciones y el confort térmico se ha vuelto un punto muy importante en la calidad de vida de cada ser humano, y también ha tenido un gran impacto en el medio ambiente. Por un lado, la calidad de vida del ser humano dentro de las edificaciones ha mejorado, dado que se han realizado mejoras en las edificaciones para disminuir la incomodidad dentro de estas mismas debido a su aumento o disminución de energía. Por otro, lado el impacto negativo hacia el medio ambiente ha sido considerable debido al consumo de energía eléctrica para el funcionamiento de las edificaciones como lo es para la refrigeración de alimentos, visibilidad o para confort térmico a través de la implementación de sistemas activos como un ventilador o mini Split.

La agencia internacional de energía (IEA) presentó en el 2017 un balance de energía, donde se reporta que en el año 2015 el consumo de energía a nivel mundial por parte del sector residencial fue de 27.1% del total de energía eléctrica generada.

Debido a la contaminación por este consumo de energía eléctrica por edificaciones junto con otras fuentes de contaminación (industrias, automóviles, entre otros), cada vez se tiene un mayor impacto negativo en el medio ambiente ocasionando que dentro de las edificaciones se tenga mayor demanda de confort térmico ocasionando la implementación de los sistemas activos, lo cual tiene un impacto negativo sobre el medio ambiente teniendo un ciclo sin fin.

Por ello en las últimas décadas la comunidad científica ha desarrollado e innovado tecnología que reduzca el consumo de energía eléctrica por parte de los sistemas activos, tal tecnología se conoce como sistemas pasivos. Estos sistemas desplazan a los sistemas activos por su funcionamiento ecológico en cierta forma, debido a que consumen la energía solar que incide sobre el planeta. Sin embargo, estos sistemas requieren mayor número de estudios que un sistema activo, ya que el funcionamiento de los sistemas pasivos es a partir de la cantidad de energía solar que reciban y del mecanismo de transferencia calor por el cual reciba tal energía en comparación de los sistemas activos que solo requieren estar conectados a la red de energía eléctrica sin importar como se obtuvo la energía eléctrica. Algunos de los sistemas disponibles son: intercambiador de calor tierra-aire, ventana de vidrio doble, chimenea solar, muro trombe, techos ventilados, entre otros.

Uno de los estudios que se requiere para el desarrollo, innovación e implementación de los sistemas pasivos, es el estudio térmico. Como se mencionó anteriormente, estos sistemas utilizan la energía solar incidente sobre el planeta mediante los diferentes mecanismos de transferencia de calor, conducción, convección y radiación. Otro motivo por el cual se debe realizar el estudio térmico de estos sistemas, es que estos sistemas particularmente tienen comportamientos diferentes de acuerdo a la ubicación en el planeta, es decir, no es el mismo comportamiento de un sistema pasivo en una ciudad con un ambiente demasiado seco, en comparación a una ciudad con humedad.

La complejidad del estudio térmico se puede definir desde varios puntos de vista, uno de ellos es desde el punto de vista del fenómeno, es decir, el estudio térmico de los

sistemas pasivos puede ser complejo dependiendo de los mecanismos de transferencia de calor que se considere. En el caso de conducción, es el mecanismo menos complejo, mientras que convección y radiación, es todo lo contrario, además, considerar transferencia de calor conjugada, el estudio se convierte aún más complejo.

El estudio térmico de estos sistemas se puede llevar a cabo de tres maneras diferentes, a través de un estudio experimental, teórico-analítico o teórico-numérico. En el primer caso, el estudio requiere inversión monetaria y conocimientos técnicos sobre los dispositivos de medición. Sin embargo el tiempo de estudio puede ser de meses o años. En el caso del teórico-analítico, el costo de inversión es menor, ya que el estudio es a través de la solución matemática del modelo matemático particular para el problema de interés a través de herramienta matemática no compleja y el tiempo de estudio puede ser menor. Sin embargo, la aproximación de los resultados obtenidos puede ser menor que el estudio experimental dado que por consideraciones, los modelos matemáticos son sencillos, además requiere del estudio experimental para validar los resultados. En el último caso, se realiza de la misma manera que el segundo. Sin embargo, se emplea matemática más avanzada que requiere equipo de cómputo avanzado. A pesar de esto, tiene mayor alcance, por lo que la aproximación de los resultados puede ser mayor en comparación del estudio teórico-analítico.

Actualmente, los estudios que más se realizan son los experimentales o teórico-numéricos. En el caso del estudio teórico-analítico solo se realizan como parte de la verificación de la solución numérica. A pesar de que un estudio de manera numérica tiene la ventaja de modelar la transferencia de calor conjugada, hoy en día sigue siendo un problema, ya que estos estudios pueden tardar meses por el tiempo de modelación.

Por esta última razón, la comunidad científica, se sigue limitando en los estudios de la transferencia de calor conjugada y en estado permanente, dado que es más factible estudiar los mecanismos de calor por separados o estudiar los tres. Sin embargo, con modelos matemáticos muy sencillos y métodos de soluciones simples. Una de las consideraciones que generalmente toman en cuenta en los estudios de la transferencia

de calor, es despreciar la transferencia de calor por radiación con medio participante y solo se considera intercambio radiativo superficial.

Anteriormente en el campo de la investigación enfocada a sistemas térmicos, algunos investigadores consideraban que los sistemas no se veían afectados tanto como para considerar los efectos de la radiación. Sin embargo, con el paso de los años y el interés de averiguar que fenómenos afectaban térmicamente a estos sistemas, llevó a los investigadores a descubrir que la radiación juega un papel importante, como lo es, en hornos industriales, el soplado de vidrio, entre otros (Modest, 2016). Además de procesos industriales, también en la transferencia de calor por radiación en edificaciones se aceptó, por el simple hecho de que las edificaciones están expuestas a los rayos solares, lo que aumenta la energía dentro de estas mismas reflejándose en el confort térmico. Por ello, con el paso de los años se aceptó este fenómeno como importante en la transferencia de energía, por lo que la radiación comenzó a tener impacto en los estudios, como ejemplo, la investigación realizada por Schuster (1905), en la que el autor estudió la transferencia de calor por radiación en un gas a través de un análisis teórico-analítico deduciendo la Ecuación de transporte radiativo (*RTE*, por sus siglas en inglés) en su expresión menos compleja considerando que no tiene dependencia angular. El autor encontró que la solución no es tan representativa de la realidad debido a que consideró que no tiene dependencia angular. Años después, el estudio de la transferencia de calor por radiación ganaría más interés en la comunidad científica. A pesar de esto, el avance en esta área fue escaso ya que en las primeras décadas de los años 1900 no se contaba con herramienta computacional por lo que la comunidad solo se limitaba a resolver la RTE en su forma menos compleja o considerar solo intercambio radiativo superficial.

Uno de las investigaciones que marco un avance notorio fue el de Hamaker (1947), en la que el autor propuso una solución analítica para el estudio de la transferencia de calor por conducción y radiación en una dimensión. Sin embargo, aún sin una solución del problema. A pesar de que estas investigaciones mencionadas así como otras,

presentaban soluciones muy limitadas o algunos casos solo el desarrollo de la solución matemática, dieron paso a las investigaciones en las que surgirían métodos para solución a través de un ordenador tales como el Milne-Eddington, armónicos esféricos ( $P_n$ ), Monte Carlo (*MCM por sus siglas en inglés*), Metodo de volumen finito (*FVM por sus siglas en inglés*), XIY, método de ordenadas discretas (*DOM por sus siglas en inglés*), entre otros (Howell et al., 2010). Sin embargo la RTE, la cual por naturaleza del fenómeno, es una ecuación de tipo integro-diferencial que requiere dos aproximaciones, la primera para la parte integral, cuya representación es la variación angular de intensidad radiativa. Para ello, existen diferentes métodos de aproximación angular, como lo es el MCM, FVM, DOM, entre otros. Particularmente, el DOM actualmente es el método más empleado, esto se debe a su versatilidad, a su facilidad de emplear a su compatibilidad con el FVM.

Para la segunda aproximación para la parte diferencial que representa la variación de la variable en el espacio, se requiere una aproximación espacial la cual para algunos métodos de solución requieren esquemas de interpolación espacial, para ello existen diversos métodos de aproximación espacial, como lo es el método de elemento finito (*FEM por sus siglas en inglés*), método de diferencias finitas (*FDM por sus siglas en inglés*), FVM, entre otros. En general el FVM es el método más aplicado, este método consiste en dos aproximaciones. El primer nivel integra la RTE a partir de un volumen de control para su evaluación de esta misma integración. Para el segundo nivel de aproximación se emplea una interpolación espacial a través de esquemas de interpolación, los cuales puede ser de bajo orden (*LO por sus siglas en inglés*), de alto orden (*HO por sus siglas en inglés*) y de alta resolución (*HR por sus siglas en inglés*).

Algunos de los estudios disponibles en los que se implementan el DOM y el FVM se presentan a continuación así como el avance y desarrollo de estos mismos.

## 1.1 Estado del arte

### 1.1.1 Aproximación angular

Seguido del surgimiento de los primeros métodos para la solución de la RTE, surgen las primeras soluciones para sistemas muy simples, uno de esos sistemas es la RTE en una dimensión, un ejemplo de estos estudios es el de Heaslet y Warming (1965) que estudiaron la transferencia de calor radiativa entre dos placas con un medio participante dispersante con valores de espesor óptico de 0.1 a 4.0, la emisividad de la pared Oeste es de 0.8 y la pared Este de 0.1 a 1.0. Los autores implementaron el método de dos Fluxes, y compararon los resultados con la solución analítica. Los resultados mostraron que la solución tiene una aproximación cercana a la solución analítica. Los autores concluyeron que existe baja discrepancia entre su solución y la solución analítica.

Años después, Lockwood y Shah (1981) presentaron el método transferencia radiativa discreta (*DT por sus siglas en inglés*) para la solución de transferencia de calor radiativa en procesos de combustión general. Los autores consideraron 3 casos, el primero, en una dimensión, dos placas a diferentes temperaturas con un medio participante puramente absorbente con  $k_{abs} = 1 - 10$ . El segundo caso una cavidad cuadrada con paredes negras y frías con un medio participante absorbente. Por último, una cavidad cubica con paredes a  $400\text{ }^{\circ}\text{C}$  y con emisividad de 0.9, con un gas a  $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$  con coeficiente de absorción. Se compararon los resultados numericos contra los resultados analíticos para el Flux de calor adimensional. Los resultados mostraron que el método DT proporciona un margen de error menor a 1 % para los tres casos. Los autores concluyeron que el método es económico en rendimiento computacional y es adaptable con cualquier tipo de geometría con exactitud considerable.

Razzaque et al. (1983) presentaron una solución numérica implementando el método del elemento finito (FEM por sus siglas en inglés). Los autores consideraron una

cavidad cuadrada con un medio participante dispersante con valor de  $\sigma_{scat} = 1$ . Se compararon los resultados con una solución exacta disponible en la literatura. Los resultados mostraron tener una desviación menor de 0.5% en el Flux local, mientras que obtuvieron 0.12% en el Flux total de la cavidad con respecto a la solución disponible en la literatura. Los autores concluyeron que el método FEM proporciona una distribución de temperatura en el medio exacta y el medio puede ser implementado a un problema con un medio participante no-gris.

En el siguiente año, Fiveland (1984) resolvió un problema de referencia (*Benchmark por su nombre en inglés*) con las aproximaciones de cuadraturas  $S_2$ ,  $S_4$  y  $S_6$  mediante el DOM. El autor considero una cavidad rectangular en tres casos, el primero, un recinto con paredes negras dispersantes, el segundo, un recinto con paredes grises con dispersión y por último, transferencia radiativa en un recinto con medio absorbente, se compararon los resultados con los métodos, de zona, aproximaciones diferenciales  $P_3$ . Como resultados, el autor obtuvo para el primer caso que, con una cuadratura  $S_4$  se tiene una mejor aproximación que una  $S_2$  y la  $S_6$  no proporcionan mejoría en comparación con la primera mencionada. Para el segundo caso, las cuadraturas  $S_4$  y  $S_6$  sobreestiman la intensidad radiativa, teniendo el efecto rayo (definido en el Capítulo 3) debido al número de ordenas de cada aproximación. Para el último problema, el autor obtuvo que las cuadraturas  $S_4$  y  $S_6$  estiman con mayor exactitud. Sin embargo, la cuadratura  $S_6$  requiere el doble de tiempo que la  $S_4$ . El autor concluyó que para un recinto rectangular, las aproximaciones de cuadraturas  $S_4$  y  $S_6$  proporcionan una exactitud favorable y la  $S_2$  proporciona exactitud aceptable en algunos casos particulares.

Tres años después este último autor, Fiveland (1987) desarrolló un conjunto de cuadraturas ( $S_2$ ,  $S_4$  y  $S_6$ ) para el DOM para la modelación de la RTE. Se consideró dos casos de un medio dispersante isotrópico uní-dimensional. Para el primer caso, el

autor consideró paredes negras, en el segundo, paredes grises con emisividades de  $\varepsilon_1 = 0.8$ ,  $\varepsilon_2 = 0.8$ , 0.5 y 0.1, respectivamente. También el autor consideró un tercer caso, un medio dispersante anisotrópico en el que evaluó solo la  $s_4$  y  $s_6$ , comparándolas con las cuadraturas de Gauss ( $G_2$ ,  $G_4$  y  $G_6$ ). Como resultados, las cuadraturas propuestas por el autor lograron reducir el porcentaje de desviación hasta un 50 % con respecto a las  $G_2$  y  $G_4$  para los casos 1 y 2. Para el caso 3 el porcentaje de desviación fue de 1% con la cuadratura  $s_4$ . El autor concluyó que las cuadraturas desarrolladas, son más exactas reduciendo la inexactitud de las cuadraturas de Gauss hasta un 50%.

Otro estudio que destacó fue el de Truelove (1987), quién empleó un nuevo conjunto de esquemas de cuadraturas ( $s_2$  y  $s_4$ ) mediante el DOM para la solución de la RTE. El autor consideró, un recinto cuadrado con paredes negras y medio absorbente-emisor con temperatura uniforme, el segundo, el mismo recinto con una pared caliente y un medio absorbente-emisor. El autor evaluó la exactitud de los resultados obtenidos con las cuadraturas contra otras ( $s_2^l$  y  $s_4^l$ ) reportadas en la literatura. Los resultados mostraron para el primer caso que las cuadraturas reportadas en la literatura tienen mayor desviación sobre 15.0 y 13.0%, respectivamente de las  $s_2$  y  $s_4$ . Para el caso dos, se obtuvo que, la cuadratura  $s_4$  proporciona mejor aproximación sobre la  $s_2$  y las  $s_2^l$  y  $s_4^l$ . El autor concluyó que la solución más exacta se ha obtenido con la cuadratura  $s_4$  para ambos casos.

Adicional a estos dos estudios con relación al desarrollo de esquemas de cuadratura se tiene el de Jamaluddin y Smith (1988) en el que implementaron el DOM para la solución de la RTE usando diferentes cuadraturas  $s_2$ ,  $s_4$ ,  $s_6$ , y  $s_8$ . En este estudio se consideró un sistema bidimensional y tridimensional con un medio participante absorbente, emisor y dispersor en ambos sistemas. Para el sistema bidimensional, se realizó la comparación de los resultados con la solución analítica y el método zonal. Los resultados indicaron que para este último con un medio emisor y absorbente, la

exactitud no mejora con las aproximaciones superiores a la cuadratura  $S_4$ , y que esta misma es ligeramente más exacta que la  $S_6$ . Para el sistema con un medio emisor y absorbente, las aproximaciones de cuadraturas  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $S_8$  proporcionan una exactitud favorable mientras que la  $S_2$  tiene una desviación de 30 %. Sin embargo, las aproximaciones de cuadraturas  $S_6$  y  $S_8$  no son superiores sobre la  $S_4$ . Los autores concluyeron que todas las aproximaciones proporcionan resultados favorables. Sin embargo, recomiendan los esquemas de cuadraturas  $S_2$ ,  $S_4$  por la exactitud que se tiene y por el tiempo computacional.

Truelove (1988) evaluó la exactitud de la aproximación de la cuadratura  $S_4$  para la solución de la RTE usando el DOM en un caso tridimensional. Se consideró una cavidad con un medio participante absorbente-emisor, en las fronteras una emisividad de  $\varepsilon_1 = 0.85$ ,  $\varepsilon_2 = 0.70$  y parámetros de  $\beta = 0.5m^{-1}$ ,  $\omega = 0.0$ . Se compararon los resultados obtenidos contra la aproximación  $P_3$  y el método zonal. Las soluciones de la aproximación  $P_3$  y el método zonal mostraron ser muy aceptables. Sin embargo, en el centro del recinto tiene una desviación de 30%. La cuadratura  $S_4$  y el método zonal tuvieron una desviación por debajo del 10% para  $\beta$  de  $0.25 - 1.0m^{-1}$ . Los cálculos de los flux de calor para  $\beta = 0.25m^{-1}$ ,  $\beta = 0.5m^{-1}$ ,  $\beta = 1.0m^{-1}$  con el método  $P_3$  tiene una desviación de 35, 20 y 10%, respectivamente, mientras con el método zonal y la cuadratura  $S_4$  para todos estos mismos valores, tiene una desviación menor a 10%. El autor concluyó que la solución obtenida con la  $S_4$  es superior que la obtenida con la aproximación  $P_3$ .

Dos años después, surge el estudio de la RTE a través de un nuevo método implementado por Raithby y Chui (1990), el FVM. Los autores consideraron un recinto bidimensional con paredes isoterma, difusivamente reflectivas y grises, con un medio participante gris e isotrópicamente dispersante. Los autores compararon sus resultados con la solución exacta reportada en la literatura. Para el primer problema

(recinto negro con un medio emisor), los resultados mostraron que con una malla espacial de  $20 \times 20$  y con una malla angular de  $1 \times 4$  y  $2 \times 8$ , la desviación es de 0.8% y conforme se refina tanto la malla espacial como la angular, la solución se aproxima a la solución exacta. Para el segundo problema (transferencia de calor en un recinto con una pared caliente) con una malla espacial de  $31 \times 31$  y una malla angular de  $5 \times 24$ , los resultados mostraron tener una desviación de 0.1%. Por último, para la comparación con un sistema bidimensional, los autores obtuvieron una desviación de 0.2% con respecto a la solución exacta con una malla espacial de  $61 \times 25$  y una malla angular de  $7 \times 32$ . Los autores concluyeron que las aproximaciones de la integral angular evitan el efecto rayo y que la exactitud aumenta rápidamente refinando la malla.

Fiveland y Jamaluddin (1991) modelaron la RTE usando la metodología del DOM, el cual fue formulado para variaciones espectrales de las propiedades radiativas. Los autores tres casos de estudios en un recinto tridimensional con medio participante y la aproximación de cuadraturas. Para el primer caso, se estableció determinar la transferencia radiativa entre dos placas paralelas; para el segundo una cavidad con un medio participante; para el tercero una cavidad con paredes grises y un gas gris y para el último caso, un medio absorbente y dispersante dentro de la cavidad. Se compararon los resultados con los reportados en la literatura, como la solución exacta y el método zonal. Para el primer caso, los perfiles del Flux de calor no son uniformes debido a los efectos de la modelación de una dimensión en una geometría tridimensional, teniendo un desviación por debajo del 3%, para el segundo, el flujo promedio tiene una desviación del 0.7%, para el tercero, las propiedades del gas afectan considerablemente el flujo de calor de la pared, y reduce más de 30% el valor del flujo de calor con la variación espectral del gas. Para el último problema, conforme el albedo de dispersión aumenta, el Flux de calor neto aumenta debido a que el efecto de dispersión y emisión aumenta en las paredes. Los autores concluyeron que el método con enfoque espectral resulto ser exacto.

A pesar de surgir nuevos métodos, la comunidad científica siguió implementando el DOM, esto dado que con la experiencia se encontró que se podía implementar con algunas modificaciones o acopladas con otros métodos, un estudio involucrado en esto es el de Fiveland y Jessee (1994) en el que implementaron el DOM con discretización del FEM, consideraron tres casos de solución en una cavidad cuadrada, para el primer caso; con un medio dispersante en una cavidad negra, el segundo caso la cavidad gris con la misma propiedad del medio, y para el último caso la cavidad negra con medio absorbente. Se usaron las aproximaciones de cuadratura  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_6$  y  $S_8$ . Los autores compararon los resultados con la formulación estándar del DOM con el esquema DIAMOND, el método zonal y las aproximaciones  $P_3$ . Los resultados mostraron para el primer caso, el FEM con una aproximación de cuadratura  $S_6$  y  $S_8$  es mejor que el primero con  $S_2$ . Sin embargo, requieren más tiempo de cómputo y no son tan exactas como el DOM estándar. Para el segundo caso, el FEM con cuadraturas  $S_4$  y  $S_8$  estiman el Flux de calor en las paredes con una desviación aproximadamente de 5% en comparación con el DOM y conforme la emisividad disminuye el tiempo de cómputo aumenta. Para el último caso, con un coeficiente de absorción de 0.1 el FEM sobreestima el Flux de calor en la línea central, mientras con un coeficiente de 1.0 es más exacto por con una desviación de 1%. Los autores concluyeron que las ventajas del DOM es que puede ser aplicado con otros métodos existentes, la solución con la aproximación  $S_4$  proporciona soluciones con una exactitud aceptable sin tanto tiempo computacional como las aproximaciones  $S_6$  y  $S_8$ .

Nuevamente Fiveland y Jessee (1995) compararon el FVM con DOM y el FEM con DOM para la solución de la RTE. Se consideró una cavidad bidimensional con paredes grises con un medio absorbente, isotrópicamente dispersante y emisor. Los autores compararon los resultados del FVM con DOM y FEM con DOM con soluciones disponibles en la literatura. Los resultados mostraron que, para la cavidad con un medio absorbente y para la cavidad con un medio negro/gris puramente

dispersante el FEM con DOM no es tan exacto que el FVM con DOM. Para el último caso en una cavidad circular con medio absorbente, los resultados mostraron que implementando FVM con DOM y FEM con DOM, la energía incidente es casi simétrica, y se presenta el efecto rayo. Sin embargo, no es notable dado que se tiene una desviación por debajo del 2%. Los autores concluyeron que el FVM con DOM se aproxima a la solución exacta mejor que el FEM con DOM y la exactitud de este último, disminuye conforme se aumenta el espesor óptico y la emisividad de la pared.

Debido al avance, los estudios que se desarrollaron en estos últimos años, aumentó la complejidad de los sistemas a estudiar, entre estas complejidades se encuentra: considerar tres dimensiones, así como figuras ó geometrías irregulares, un ejemplo de este último es el estudio de Sakami et al. (1996) en el que presentaron una nueva formulación espacial del DOM para el estudio de la transferencia de calor por radiación en geometrías irregulares tridimensionales. Los autores consideraron cinco casos, el primero una cavidad cubica con un medio absorbente-emisor, el segundo un horno rectangular con un medio absorbente-emisor y absorbente-emisor-dispersante, el tercer caso un cilindro con un medio absorbente-emisor con temperatura constante diferente de cero, el cuarto caso una figura en forma de L con medio absorbente-emisor, por ultimo un cavidad con una esfera y medio absorbente-emisor. Los autores compararon la nueva formulación con la formulación tradicional y con las soluciones disponibles en la literatura. Los resultados mostraron que para todos los casos, la formulación espacial presenta exactitud aceptable. Los autores concluyeron que los resultados obtenidos presentan una exactitud cercana a la de la literatura.

Posteriormente Seo y Kim (1998) resolvieron la transferencia de calor en tres dimensiones para tres casos. Consideraron una cavidad cubica de 1m con un medio absorbente con coeficiente de 1.0, la temperatura de la pared de 100 K y el resto de 500 K . El segundo caso un horno rectangular tridimensional de  $2m \times 2m \times 4m$  con temperatura de 1200 K para la pared frontal, 400 K para la posterior, 950 K para el resto de las paredes, un medio absorbente con coeficiente de absorción de 1.0m y una

generación de calor de  $5 \text{ KW} \cdot \text{m}^{-3}$ . Por último una figura irregular tridimensional con las mismas características que el segundo caso, excepto que se considera la dispersión de albedo de 0.7. Los autores implementaron el DOM modificado conocido como, LMS y lo compararon contra el DOM tradicional y FVM. Los resultados mostraron de manera general que el LMS presenta menor porcentaje de desviación con respecto a los demás métodos. Los autores concluyeron que el método LMS reduce la sobre estimación del Flux de calor en las paredes en comparación del DOM tradicional y el FVM.

Diez años después se presentan valores como referencias en el estudio de Altaç y Tekkalmaz (2008) en el que resolvieron la RTE en tres dimensiones para una cavidad cúbica con medio absorbente-emisor dispersante con coeficientes de absorción de 1.0 y dispersión de albedo de 0, 0.5 1.0. Los autores implementaron el método de sustracción de singularidad, además para el único caso implementaron seis condiciones de frontera sobre las paredes y compararon los resultados con soluciones disponibles en la literatura con dos métodos del DOM modificado, el SDOM y el MDOM y presentaron los valores como referencia para verificación. Los autores obtuvieron como resultados seis problemas de referencia para el caso presentado con porcentajes de desviación de hasta 11%. Los autores concluyeron que tuvieron seis problemas de referencias con sus respectivos valores de la solución.

Finalmente, Coelho (2014) presentó el avance del DOM y FVM para la solución de la RTE en la literatura. El autor consideró el avance que se tiene sobre la malla estructurada, discretización espacial, discretización angular, exactitud de las soluciones, formulaciones alternativas, implementación de paralelismo, soluciones transitorias y consideración del medio no-gris. El autor presentó los avances disponibles en la literatura. De manera general el autor encontró que los métodos DOM y FVM no son tan flexibles como lo es el método de Monte Carlo, el cual se considera como método de referencia para la solución de la RTE. El autor concluyó

que existe una gran necesidad de acelerar, implementar o desarrollar nuevas herramientas numéricas para la solución de la RTE.

### 1.1.2 Implementación de esquemas de interpolación espacial

Uno de los primeros estudios en los que se implementaron esquemas de interpolación espacial es el Fiveland (1988), en el que implementó el DOM para la solución de la RTE en un recinto tridimensional, se consideró como un medio absorbente y uno isotrópicamente dispersante aplicando las cuadraturas  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_6$ , y  $S_8$ , un esquema de primer (STEP) y segundo orden (DIAMOND). Se comparó los resultados obtenidos con la solución exacta y la aproximación  $P_3$ . Como resultados el autor obtuvo para el sistema con ambos medios participantes, que la aproximación  $S_2$  con un esquema de bajo orden no tiene suficiente exactitud y para el esquema de segundo orden las aproximaciones de cuadraturas  $S_4$ ,  $S_6$  y  $S_8$  son más exactas. El autor concluyó que no es recomendable la aproximación  $S_2$  por su inexactitud, mientras que la aproximación  $S_4$  proporcionó resultados considerables por lo que la recomienda la cuadratura  $S_4$  mientras que la  $S_6$  y  $S_8$  no, debido a que requiere mayor tiempo computacional.

Conforme se realizaron estudios, la comunidad científica notó que a pesar de implementar esquemas de cuadraturas de tipo  $S_n$  o de mayor orden, las soluciones presentaban desviaciones considerables con respecto a las soluciones exactas disponibles, debido al efecto rayo y a la falsa dispersión. Por ello, Chai et al. (1993) presentaron el análisis del efecto rayo y la dispersión numérica en el DOM. Para demostrar estos efectos, los autores consideraron cuatro casos en una cavidad bidimensional con tres paredes frías y una caliente con un medio transparente, el primer caso, en la frontera Oeste surge una intensidad hasta la mitad de esta en diagonal. Para el segundo problema los autores consideraron esa misma intensidad con dirección a  $60^\circ$ . Para el tercer y cuarto problema consideraron una cavidad negra

con paredes frías, una sección de la pared superior es calentada. Los resultados mostraron que para el primer problema, con el esquema STEP se tiene la distribución de la intensidad de manera exacta, mientras que con el esquema DIAMOND se tiene oscilaciones incluyendo valores negativos. Para el segundo problema, ambos esquemas generan campo de intensidades en zonas donde realmente no debería existir. Por lo que los esquemas introducen la falsa dispersión. Sin embargo, el uso del esquema DIAMOND disminuye la falsa dispersión. Para el tercer caso se tiene el mismo comportamiento que en el segundo. Para el último caso, donde se tienen los efectos combinados, se presentan oscilaciones en la solución generadas por el efecto rayo y falsa dispersión, la dispersión numérica reduce las oscilaciones. Sin embargo la estimación de los niveles del flux de calor reduce. Los autores concluyeron que el efecto rayo es consecuencia de la discretización angular y que es independiente de la espacial y que este efecto puede llevar a soluciones irrealistas incluso cuando se tiene una distribución de flujo de calor uniforme. También, que la falsa dispersión es un fenómeno multidimensional.

Debido a falsa dispersión y el efecto rayo presentes en el DOM, Chai et al. (1994a) evaluaron la eficiencia del FVM en términos de exactitud para la solución de la RTE. Los autores consideraron seis casos en una cavidad bidimensional y un recinto tridimensional implementando el esquema STEP y EXPONENCIAL modificado. Los autores compararon los resultados con los correspondientes disponibles en la literatura. Para el primer caso (2D), con un medio emisor-absorbente, los resultados mostraron que para ambos esquemas, la solución tiene una buena aproximación con una desviación menor al 5%. Para el segundo caso (2D) ,medio dispersante, cuando la malla es gruesa, el esquema STEP sobre estima el flujo de calor, mientras con el exponencial modificado, se obtiene la solución más exacta. Para el tercer problema (3D) con un medio absorbente-emisor, los resultados coinciden satisfactoriamente con las soluciones del método zonal. Para el cuarto caso (2D), los resultados obtenidos muestran que se logra obtener una solución considerablemente aproximada. Para el

quinto caso (2D) con un medio anisotrópicamente dispersante, los resultados son muy exactos con una desviación de 3%. Para el último problema (2D), una cavidad con una placa dentro de ella, los resultados mostraron ser aproximados a los obtenidos con el modelo de irradiación-radiosidad (*RIM por sus siglas en inglés*). Los autores concluyeron que los resultados obtenidos por el FVM son exactos y el método es eficiente al compararlo con el DOM. Por último, el FVM también sufre de efecto rayo al igual que el DOM.

Posteriormente, Chai et al. (1994b) evaluaron tres esquemas de interpolación espacial aplicados con el DOM para la solución de la RTE, el esquema POSITIVE, STEP y DIAMOND. El caso de estudio fue una cavidad cuadrada con un medio emisor, absorbente y dispersante. Los autores compararon los resultados con los reportados en la literatura. Para el caso del esquema STEP con un medio absorbente, los resultados muestran que conforme se aumenta el espesor óptico, la intensidad en cualquier dirección disminuye, y que el esquema proporciona resultados físicamente realistas. Para el esquema DIAMOND, se tuvo que modificar la función del término fuente, de lo contrario se puede tener intensidades negativas. Por último, para el esquema POSITIVE se ajustó las intensidades negativas a cero o valores muy pequeños proporcionadas por el esquema DIAMOND. Sin embargo, el esquema POSITIVE no está libre de presentar problemas de acotamiento. Los autores concluyeron, que con el esquema DIAMOND en algunos casos se puede tener intensidades negativas sin considerar el número de nodos empleados. También, que las intensidades negativas pueden surgir con una malla refinada en ciertos medios absorbentes-emisores y en medios absorbentes-emisores-dispersantes, el esquema POSITIVE ajusta las intensidades proporcionadas por el DIAMOND.

Nuevamente Chai et al. (1994c) mejoraron el tratamiento del efecto de la dispersión usando el DOM para la solución de la RTE y modificaron el esquema exponencial para el mismo método. Para el esquema modificado, los autores consideraron un sistema unidimensional, para la evaluación del mejoramiento del tratamiento de la

dispersión, se consideraron aproximaciones de cuadraturas  $S_2$ ,  $S_6$  y  $S_{12}$ , en un sistema bidimensional con el esquema STEP. En ambos problemas, los autores consideraron tres valores de dispersión isotrópica, una por debajo de 1.0 y las restantes por arriba de este mismo valor. Los resultados mostraron que el esquema modificado converge de la misma manera que el original, solo que el primero logra hacerlo con menos nodos computacionales y para el mejoramiento del tratamiento de dispersión, los resultados mostraron que el número de iteraciones disminuye con este tratamiento, conforme la función de fase llega a su punto máximo, disminuye. Los autores concluyeron que el esquema modificado, reduce la demanda computacional debido a que requiere menos nodos computacionales y que el nuevo tratamiento proporciona el mismo valor con menor número de iteraciones.

Kim y Kim (2001) presentaron un esquema de interpolación espacial Híbrido (*HYBRID por sus siglas en inglés*) implementado en el DOM. Se consideró 4 casos bidimensionales para demostrar el desempeño numérico del esquema, para el primer caso los autores consideraron una cavidad con paredes negras y a una temperatura de  $300\text{ K}$  excepto la pared Oeste, a una temperatura de  $310\text{ K}$ . Para el segundo, consideraron las mismas características de la cavidad con un medio participante absorbente. El tercer caso se considera la misma cavidad con un medio dispersante. Por último, la misma cavidad con un medio absorbente, emisor y dispersante. Compararon el esquema HYBRID con los esquemas STEP, POSITIVE, y el EXPONENCIAL MODIFICADO, y con resultados disponibles en la literatura. Los resultados mostraron que para los 4 casos proporcionan mayor exactitud que los demás esquemas. Los autores concluyeron que el esquema HYBRID puede ser implementado en la solución de transferencia de calor radiativa conjugada con otro mecanismo de transferencia.

Por último, Coelho (2002) implementó esquemas de alta resolución segmentados (*SHR por sus siglas en inglés*) para la discretización espacial de la RTE en dos dimensiones. El autor consideró tres casos de estudios, el primer caso, una cavidad

con medio transparente radiativamente, para el segundo caso, misma cavidad con medio absorbente-emisor, y para el tercer caso, medio dispersante adicionalmente al caso dos. Para los tres casos, el autor consideró tres paredes frías de la cavidad y una pared con una potencia emisiva de 1.0. El autor implementó los esquemas CLAM, MUSCL y SMART y comparó cada uno con estos mismos implementados como HR. De manera general, el autor encontró que los esquemas SHR logran disminuir la desviación de los HR. Para el caso dos, encontró que conforme el coeficiente de absorción aumenta, el porcentaje de desviación de los SHR y HR es similar. Además, los esquemas SHR requieren mayor tiempo de cómputo. Sin embargo, su exactitud es mejor aún en mallas no-finas. El autor concluyó que los esquemas SHR mejoran el porcentaje de desviación de los HR. Sin embargo, los esquemas HR requieren mayor tiempo de cómputo, el cual se puede reducir con la implementación de mallas no-finas, ya que estos esquemas presentan menor porcentaje de desviación a pesar de mallas no-finas.

### **1.1.3 RTE acoplada a transferencia de calor por convección**

Con el surgimiento de métodos para la solución de la RTE, el mejoramiento de éstos y con el avance tecnológico de los ordenadores, la comunidad científica, dio un paso más, modelando la transferencia de calor por conducción o convección con radiación acoplada. Sin embargo, para la parte de radiación considerando el medio como radiativamente participante y no solo el intercambio radiativo. Ejemplos de éstos estudios se tiene el de Colomer et al (2004), en el que estudiaron la cavidad calentada diferencialmente en tres dimensiones con los mecanismo de transferencia de calor por convección y radiación. Los autores estudiaron los efectos de los mecanismos de transferencia de calor acoplados así como el tiempo de modelación. Los autores encontraron que la radiación puede tener un aporte en el Flux de calor hasta de 75% del total, además reportaron que el tiempo de cómputo fue de al menos de 3 días, los autores concluyeron que con un medio transparente, no se tiene efecto de la radiación,

mientras que el incremento del espesor óptico del medio genera un decremento del Flux de calor.

Siete años después, nuevamente se estudiaría el mismo fenómeno por Lari et al. (2011) en una cavidad cuadrada. Los autores consideraron la cavidad con un medio absorbente-emisor gris, para ello resolvieron la RTE con el DOM y las ecuaciones de momentum, continuidad y energía fueron resueltas con el FVM con el esquema QUICK. Los resultados mostraron que para convección con una malla de  $41 \times 41$  nodos, se tiene un tiempo de cómputo de 1 h. mientras que acoplado con radiación, se tiene un tiempo computacional de 39 h., y con una malla de  $201 \times 201$  nodos, ambos acoplados, se tiene un tiempo cómputo de de 187 h. Con espesor óptico desde 0 hasta 2 se obtienen temperaturas homogéneas en el centro. Sin embargo, conforme aumenta el espesor óptico hasta alcanzar un valor de 100 no se observa el efecto de la radiación, ya que el medio cerca de las paredes absorben toda esa energía, estos efectos también son observados para la velocidad. Los autores concluyeron que en un medio transparente, la transferencia de calor por radiación es dominante. Sin embargo, este dominio disminuye conforme al espesor óptico aumenta.

Finalmente, Sun et al. (2017) realizaron un estudio de la transferencia de calor por radiación y convección en una cavidad calentada diferencialmente. Consideraron el sistema en dos dimensiones, numero de Rayleigh de  $10^3 - 10^6$ , número de Planck de  $0.01 - 1.0$  y espesor óptico de 0.1, 1.0, 5.0 y 10.0. Los autores aplicaron seis métodos para la solución de la RTE, el de Monte Carlo, DOM, FVM,  $P_1$ ,  $SP_3$  y  $P_3$ , y para convección el método SIMPLE. Los autores obtuvieron la solución del problema para cada valor a variar (número de Rayleigh, Planck y espesor óptico) con el método de Monte Carlo y lo consideraron como solución referencia y compararon los demás métodos para la solución de la RTE contra este último en términos de exactitud y tiempo computacional. Los autores obtuvieron como resultados que el DOM tiene mayor exactitud que los demás métodos comparados, conforme se aumenta el espesor óptico, FVM es más inexacto. Además, el DOM requiere menor tiempo

computacional que el resto de los métodos. Los autores concluyeron que el DOM es más exacto y más rápido que el resto de los métodos con respecto al de Monte Carlo.

#### **1.1.4 Aceleración de la convergencia de la solución de la RTE**

Debido a que la solución de la RTE requiere un tiempo computacional para su solución y también debido al tiempo computacional requerido para la modelación de la transferencia de calor conjugada, y a pesar del avance tecnológico de los ordenadores, la comunidad científica se enfocó a la aceleración de la convergencia de la solución de la RTE. Uno de estos intentos por acelerar la convergencia de la solución, es el estudio de Chui y Raithby (1992) en el que presentaron un método implícito con el FVM para acelerar la convergencia de la solución de la RTE. Se consideraron 5 casos para la evaluación del método, se comparó con el método de solución explícito de FVM. Para el primer problema, los autores consideraron transferencia de calor radiativa entre dos placas con un medio participante dispersante con una pared fría. Para el resto una cavidad con paredes frías y negras excepto la pared sur considerada como caliente con medio absorbente, un medio participante dispersante, un medio emisor-absorbente-dispersante. Finalmente, un medio dispersante anisotrópico. Los resultados mostraron que para los 5 casos, el método de solución implícito proporciona reducción de tiempo considerablemente, y conforme se aumenta los coeficientes de absorción y dispersión no requiere aumentar el consumo de iteraciones a comparación del esquema explícito, que requiere mayor número de iteraciones. Los autores concluyeron que el método implícito logra acelerar la convergencia de la solución de la RTE.

Cuatro años después, Fiveland y Jessee (1996) presentaron la formulación equilibrio de malla gruesa (*CMR por sus siglas en inglés*) para la aceleración de la convergencia de la solución de la RTE a través del DOM. Los autores consideraron un problema bidimensional para la evaluación de la formulación. El problema fue considerado como una cavidad rectangular con un medio dispersante. La pared sur de la cavidad

es considerada con una potencia emisiva de 1, mientras el resto de las paredes son consideradas frías. Se Implementó el esquema DIAMOND, variando las cuadraturas de orden  $s_n$ , el número de nodos, el coeficiente de dispersión y la emisividad. Los resultados mostraron que, en comparación de la formulación original (requilibrio de malla base (*BMR por sus siglas en inglés*)), lograron reducir el número de iteraciones para espesores ópticos grandes y aumentando el valor de la emisividad. Los autores concluyeron que la formulación BMR requiere mayor número de iteraciones conforme se aumenta la malla y el coeficiente de dispersión. Sin embargo, al aumentar el grosor de la malla con CMR se mejora la aceleración de la formulación.

Mathur (1999) implementó el método de multi malla algebraico (*AMG por sus siglas en inglés*) acoplado con el DOM (*COMET por sus siglas en inglés*) para la aceleración de la convergencia de la solución de la RTE. Para ello, el autor consideró tres problemas, el primero consistió en una cavidad cuadrilateral, dentro de ella un medio participante puramente absorbente con variación de esta misma propiedad de 0 a 100. El segundo problema consistió en una cavidad cuadrada con un medio puramente dispersante isotrópico con valores de 10 a 100, las paredes son consideradas frías y negras, excepto la pared sur con una temperatura de  $1000\text{ K}$ . El tercer problema consistió fue transferencia de calor radiativa entre dos placas con un medio no participante con una formulación 2D. Para determinar el rendimiento computacional del método, el autor comparó este mismo con la formulación tradicional secuencial. Los resultados mostraron que, para los tres problemas, el tiempo de cómputo del COMET, reduce las iteraciones y el tiempo de cómputo al menos un 15% a comparación del método secuencial para cualquier valor de las propiedades. Para los problemas sin medio participante, el método COMET requiere ligeramente mayor cantidad de iteraciones que el secuencial. El autor concluyó que el método COMET puede ser empleado en problemas sin medio participante a pesar de requerir ligeramente mayor número de iteraciones ya que la diferencia de tiempo de cómputo no es notable.

Sadat (2006) implementó el método llamado sin malla sobre el DOM para la solución de la RTE. El autor consideró una cavidad cuadrada con medio absorbente-emisor con tres paredes a una temperatura de  $0K$  y la otra pared con una temperatura de  $300K$ , todas consideradas como negras y varió el coeficiente de absorción de 0.1, 1, 10 y 100, así como el esquema de cuadratura  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_6$  y una malla de  $20 \times 20$  nodos. El autor comparó el tiempo computacional del método presentado contra el DOM tradicional. Como resultados el autor encontró que para valores de absorción igual o mayor que 10, el DOM tradicional requiere menor número de iteraciones que el modificado. El autor concluyó que el DOM modificado, presenta mayor estabilidad durante el proceso iterativo que el DOM tradicional para coeficientes de absorción menores a 10.

Como se observa, la radiación tiene un gran aporte en estos sistemas, por lo que la comunidad científica ha tratado de acelerar la convergencia de la solución en la solución de la RTE.

### **1.1.5 Formulaciones matemáticas para la implementación de esquemas de interpolación espacial**

La implementación de los esquemas de interpolación espacial se realiza a través de la formulación matemática más usada y conocida, la DC, la cual nace a partir de la implementación de esquemas en la modelación de mecánica de fluidos. Sin embargo, debido a que es una formulación explícita puede requerir un exceso de tiempo computacional. Por ello existen estudios como el de Darwish y Moukalled (1996) en el que propusieron una nueva formulación (NWF) para la implementación de esquemas HO y HR con la finalidad de acelerar la convergencia para problemas convectivos-difusivos. Se Consideraron dos problemas convectivos-difusivos en 2D, el primero fue el flujo diagonal y el segundo, convección de un perfil elíptico en un campo de velocidad oblicuo. Ambos con malla uniforme y no-uniforme con tamaño de  $20 \times 20$  nodos. Se comparó el rendimiento computacional con la tradicional

formulación DC. Los resultados mostraron que para el primer problema, usando la formulación NWF se tiene menos tiempo computacional con una malla uniforme, los autores lograron reducir por encima del 75% para algunos esquemas, esto se debe a que con algunos esquemas la diagonal principal del sistema de ecuaciones es demasiado dominante. Para el segundo caso, la formulación NWF es más rápida que la formulación DC en una razón de cuatro a uno, es decir, cuatro veces más rápido con algunos esquemas. Los autores concluyeron que la formulación es totalmente implícita y es aplicable para la familia de esquemas de espacio y variable normalizada. La formulación NWF ocasiona tener una ecuación discretizada con cinco puntos nodales en cada dirección y que el método supera al método DC con una velocidad cuatro veces más.

13 años después nuevamente Moukalled et al. (2009) compararon las formulaciones, DC y NWF para la implementación de los esquemas HO y HR. Ambas formulaciones acopladas al algoritmo velocidad-presión para la solución de problemas de fluido incompresible en régimen laminar. Para la comparación de ambas formulaciones, se consideró el problema de expansión brusca de una cavidad usando mallas de  $10^4$ ,  $5 \times 10^4$  y  $3 \times 10^5$  nodos. Por lo que el objetivo de los autores fue demostrar el rendimiento de la formulación NWF en comparación con la DC. Los resultados obtenidos por los autores, mostraron que la formulación NWF acelera la velocidad de la convergencia hasta un 50% aproximadamente en términos de tiempo computacional, dado que es completamente implícito; el número de iteraciones que requiere la formulación NWF es menor que el que requiere la formulación DC, también que esta última varía con el tamaño de la malla, mientras que la formulación NWF es casi independiente. Los autores concluyeron que la formulación NWF es más eficiente computacionalmente que la DC, por lo que redujeron el costo computacional en el algoritmo de velocidad-presión.

Dos años después, por tercera vez Moukalled et al. (2011) evaluaron el rendimiento computacional de las formulaciones DC y NWF para la implementación de esquemas

HO y HR. Para ello consideraron de tres problemas de flujo laminar, el primero, la placa deslizante sobre una cavidad cuadrada, el segundo, expansión brusca en una cavidad cuadrada, y por último, flujo en planos en unión-T. Para los tres casos con mallas de tamaño  $10^4$ ,  $5 \times 10^4$  y  $3 \times 10^5$  nodos y con número de Reynolds ( $Re$ ) de 1000. Los autores demostraron la eficiencia de la formulación NWF en comparación con la DC en los distintos problemas. Los resultados mostraron para el primer problema, que la formulación NWF ligeramente requiere más iteraciones en comparación con la DC, por lo que incrementa el costo computacional entre 2.6 y 19.3%, con un 16.0% a favor para la formulación DC. Para el segundo problema, la diferencia entre ambos métodos es de -60% y +11%, aproximadamente 18% a favor de NWF del costo computacional. Para el último problema, la formulación NWF requiere ligeramente más iteraciones entre 2.4 y 26% en comparación con el DC el cual tiene un 10% a favor de este último. Los autores concluyeron que la formulación NWF no logró superar a la DC en el rendimiento computacional (tiempo de computo).

Después de ser demostrado en la literatura que la formulación NWF puede o no ser más rápida que la formulación DC, se realiza una modificación de la formulación NWF por Chourushi (2017) el cual tiene por nombre Factor de Peso Normalizado Modificado (*FNWF por sus siglas en inglés*) para la implementación de esquemas HO y HR. Para evaluar el rendimiento de la nueva formulación, el autor consideró tres problemas de fluidos, una cavidad cuadrada con una placa deslizante para un número de Reynolds ( $RE$ ) de 1000, cavidad ventilada con un valor de  $Re=400$  y flujo para expansión brusca con un valor de  $Re=800$ . El autor comparó los resultados con la formulación DC. Los resultados mostraron que para el primer problema, la formulación RNWF logra converger hasta en el orden de  $10^{-6}$ , mientras que la DC solo lo logra hasta  $10^{-5}$ , debido a las oscilaciones de la DC, lo que ocasiona mayor iteraciones. Para el segundo problema, la mayoría de los esquemas implementados en ambas formulaciones logran converger en un orden aceptable, y la formulación RNWF requiere menos iteraciones que la DC, para el residual de la presión se tiene

mejor convergencia con la DC. Para el último problema, ambas formulaciones muestran una convergencia aceptable. Sin embargo la formulación RNWF requiere menos iteraciones. El autor concluyó que para los tres problemas, los esquemas (WACEB y SMART) implementados con RNWF obtienen el resultado con buena exactitud y que es cuatro veces más rápido que la DC.

Debido a todo esto, recientemente se realizó otro estudio con la finalidad de acelerar la convergencia de la solución de la RTE, dado que la implementación de esquemas de interpolación HO y HR se realiza a través de DC para la solución de la RTE cuya formulación nace a partir de mecánica de fluidos y al observarse que nace otra formulación que puede o no ser más rápida que la DC la cual es la NWF, este estudio es el de Xamán et al. (2018b) en el que implementaron la formulación NWF y la formulación DC para introducir esquemas de HR y esquemas de HO con la finalidad reducir el tiempo computacional en la solución de la RTE. El problema considerado a resolverse fue de una cavidad con un medio emisor, absorbente y dispersante, y un problema adicional en 2D con paredes emisivas ( $\varepsilon = 1.0$ ) usando el DOM. Se evaluó el método NWF al compararlo con el DC considerando el tamaño de la malla, el orden de cuadratura, el coeficiente de absorción, la emisividad de la superficie de la frontera, el factor de bajo relajación y el coeficiente de albedo. Los resultados mostraron que en la mayoría de los parámetros, el método NWF requiere más iteraciones, reduce el tiempo computacional con los esquemas DIAMOND y QUICK, esto de 19 a 14% considerando la malla. En el caso del orden de cuadratura, los mismos esquemas lograron reducir un 9 y 13% del tiempo computacional, respectivamente. Para el coeficiente de absorción, los mismos esquemas mostraron mejoría tanto en el tiempo computacional como la reducción de las iteraciones hasta con un 23%. Para el factor de bajo-relajación, el esquema DIAMOND y QUICK mostraron mejores resultados de hasta 13 y 56% respectivamente. Por último, al variar el coeficiente de albedo, se tuvo una reducción del CPU time con los esquemas DIAMOND y QUICK de 4 y 13.5%, respectivamente. Para el problema adicional, los esquemas DIAMOND,

QUICK y SMART redujeron el tiempo computacional en un 0.4, 62 y 204%, respectivamente. Los autores concluyeron que el esquema con menor tiempo es el SOU con el método DC, de los 10 esquemas que evaluaron solo dos lograron reducir el tiempo implementando el NWF, el DIAMOND y el QUCIK y con base al problema adicional, el NWF puede ser más rápido o más lento que el DC, dependiendo del problema a considerar.

Posteriormente, dado que la formulación NWF presentó beneficios en el esfuerzo computacional para la solución de RTE con algunos esquemas de interpolación espacial, nuevamente Xamán et al. (2018b) implementaron un factor de relajación modificado conocido como X-factor en la formulación NWF para acelerar la convergencia de la solución de la RTE. Para ello, consideraron dos casos de estudio, una cavidad cuadrada con un medio absorbente-emisor-dispersante con paredes negras y un horno rectangular en dos dimensiones con medio absorbente-emisor. Los autores compararon la formulación propuesta contra la formulación DC, además consideraron variar cuatro parámetros, el coeficiente de absorción, la emisividad de las paredes, el coeficiente de bajo-relajación y la dispersión de albedo, adicionalmente el X-factor. Como resultados de manera general los autores encontraron que para la absorción los esquemas DIAMOND, QUICK, SMART y WACED con la formulación NWF reducen entre 59 y 119, 73 y 211, 25 y 52, 25 y 57%, respecto a la formulación DC, respectivamente. En el caso de la emisividad los autores encontraron que los esquemas con beneficio con la formulación NWF son los esquemas DIAMOND, QUICK SMART y WACED con reducción de 65–137, 22–162, 2–129 y 6–72 % de tiempo computo respecto a la formulación DC, respectivamente. Para el coeficiente de bajo-relajación los autores encontraron que los esquemas DIAMOND, QUICK, SMART y MUSCL con la formulación NWF reducen hasta 109, 181, 52, y 152% respecto a la formulación DC, respectivamente. Para el coeficiente dispersión de albedo, se encontró que los esquemas DIAMOND, QUICK, SMART Y WACED con la formulación NWF respecto a la formulación DC reducen hasta 219, 181, 52 y 57%,

respectivamente. Por último, en el segundo caso encontraron que los resultados del flux de calor son similares con ambas formulaciones. El porcentaje de desviación máximo es de  $2.43 \times 10^{-3}$  con el esquema SMART con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Los autores concluyeron el X-factor es muy efectivo en la reducción de tiempo computacional y puede ser aplicado en el FVM, por lo que puede ser potencialmente usado en software comerciales.

### **1.1.6 Conclusión de la revisión bibliográfica**

En conclusión, de los métodos más empleados para la solución de la RTE son el DOM y el FVM. Sin embargo, anteriormente se demostró que el efecto rayo es un error numérico ocasionado por la discretización angular en el caso del DOM, por lo que la comunidad científica solucionó esa problemática desarrollando esquemas de cuadraturas de alto orden.

Tanto el DOM como el FVM, sufren del efecto de falsa dispersión por la discretización espacial, esto por los esquemas de interpolación, por lo que nuevamente la comunidad científica desarrolló esquemas HO y HR más exactos.

La formulación matemática con la que se implementan los esquemas de alto orden y alta resolución es la corrección diferida, cuya formulación es completamente explícita, por lo que el tiempo de cómputo que demanda puede ser alto.

Actualmente la exactitud ya no es una limitante en la modelación de sistemas térmicos. Sin embargo, el tiempo de cómputo sí. A pesar de que en la actualidad se ha tenido un gran avance tecnológico en los ordenadores con lo que se puede realizar paralelización, esta tecnología aún no está al alcance de todo el mundo debido a su costo monetario. Por lo que una alternativa para obtener de manera rápida la solución de estos sistemas, es la implementación de formulaciones matemáticas que aceleren la convergencia de la solución. Por ello, en las últimas décadas la comunidad científica

ha tratado de acelerar la convergencia de la solución de la RTE a través de formulaciones matemáticas.

Por último, se concluye que en la actualidad se tiene en la literatura un estudio que le da otro paso a la comunidad científica, el cual es el de Xamán et al. (2018a), como se mencionó anteriormente, una nueva formulación para implementar los esquemas HO y HR con la finalidad de acelerar la convergencia de la solución de la RTE, cuyo nombre es NWF, el cual lo compararon con la DC resolviendo un caso de la transferencia de calor por radiación en dos dimensiones. Los resultados mostraron que el NWF puede ser más rápido que DC debido a la disminución del consumo de iteraciones.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo general

Resolver numéricamente la ecuación de radiación tridimensional con medio participante usando esquemas de alto orden mediante el método de corrección diferida (DC) y el método de factor de peso normalizado (NWF).

### 1.2.2 Objetivo específicos

1. Aprender la técnica de volúmenes finitos y el método de ordenadas discretas.
2. Resolver numéricamente la ecuación de radiación multidimensional con medio participante (RTE) en coordenadas cartesianas con esquemas de interpolación espacial de bajo orden.

3. Implementar la técnica de corrección diferida (DC) y la del factor de peso normalizado (NWF) en la solución de la RTE para incorporar esquemas de alto orden (HO) y de alta resolución (HR).
4. Realizar un estudio paramétrico usando esquemas HO y HR con el método de DC y con el NWF para explorar la reducción del tiempo de cómputo en la solución de la RTE y diferentes parámetros involucrados en el problema (tamaño de malla numérica, orden de cuadraturas, coeficiente de absorción, etc.).

### 1.3 Alcances

Se implementará un algoritmo computacional para la solución numérica de la ecuación de radiación con medio participante (RTE) en 3D y en estado permanente en el sistema coordenado cartesiano, en el que se aplicará el método del DC y NWF para analizar el tiempo de cómputo para la convergencia de la solución numérica. Se consideran para la solución y se comparan, desde el punto de vista de esfuerzo computacional, diferentes esquemas de interpolación HO y HR, así como los efectos del tamaño de malla numérica, del orden de cuadraturas numéricas, de la emisividad, del coeficiente de absorción y de albedo. Implementar el método de DC y NWF para conocer el desempeño computacional por uso diferentes esquemas de interpolación espacial. Para la solución numérica de la RTE se usa la técnica de volumen finito y el de ordenadas discretas.

## 1.4 Descripción de los capítulos

La tesis se compone de siete capítulos, el **Capítulo 1. Introducción**, descrito anteriormente, se habló de la problemática, así como la revisión bibliográfica, la conclusión de esta misma y por último los objetivos y los alcances de la tesis.

En el **Capítulo 2. Modelo físico y matemático**, se presenta los modelos físicos de los casos a estudiar, así como la simplificación de la RTE para cada caso con sus respectivas consideraciones y finalmente las condiciones de frontera de cada caso.

En el **Capítulo 3. Metodología: DC** se presenta la implementación del DOM para la discretización angular de manera general para la RTE en su expresión general, además, se presenta la implementación del FVM para la discretización espacial, estos métodos son implementados juntos con la formulación matemática, DC.

En el **Capítulo 4. Metodología: NWF** se presenta nuevamente el desarrollo del DOM para la discretización angular, así como el FVM para la discretización espacial, en esta ocasión junto con la formulación NWF.

En el **Capítulo 5. Verificación** se presenta la solución de varios casos de la transferencia de calor por radiación, en una, dos y tres dimensiones con la finalidad de verificar el código desarrollado para la solución de la RTE en tres dimensiones. Como parte de la verificación, se implementaron ambas formulaciones matemáticas con diferentes esquemas de interpolación HO y HR.

En el **Capítulo 6. Resultados**, se presenta los resultados obtenidos, se presenta el tiempo adimensional con respecto al obtenido con el esquema STEP, así como el consumo de iteraciones de cada esquema con ambas formulaciones.

Finalmente en el **Capítulo 7. Conclusiones** se presenta las conclusiones a partir del análisis de resultados presentados en el Capítulo 6, así como las recomendaciones para trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Modelo Físico y matemático

A continuación se presenta el modelo físico y matemático del caso a estudiar. Para ello se han considerado dos casos de estudios, los cuales son, una cavidad cúbica y un horno rectangular tridimensional, en ambos casos se considera transferencia de calor por radiación en estado permanente con medio participante. El medio participante se considera como absorbente-emisor-dispersante y medio absorbente-emisor, respectivamente. Sin embargo, es importante la definición de conceptos fundamentales para la deducción de la RTE en su expresión general, por ello, en anexos se presenta los conceptos fundamentales para los términos mencionados en este capítulo.

### 2.1 Ecuación de transporte radiativo (RTE)

El estudio de la transferencia de calor por radiación se lleva a cabo de dos maneras, a través de intercambio radiativo superficial o con medio participante. El primer caso, es el estudio más realizado por la comunidad científica. Sin embargo, realizar este tipo de estudios en ocasiones no es lo más adecuado, ya que solo se considera que la transferencia se presenta entre dos o más superficie y no se considera que en su trayecto tenga alguna interacción con alguno otro cuerpo lo cual, aumente o disminuya su nivel energético. En el caso del medio participante, como se demostró anteriormente en el Capítulo 1, esto puede generar demasiado consumo de tiempo para su estudio. En este estudio presentado, el interés de la transferencia de calor por

## 2.1 Ecuación de transporte radiativo (RTE)

---

radiación es con medio participante, por lo que se presenta la RTE en su expresión general. Para ello considérese lo siguiente:

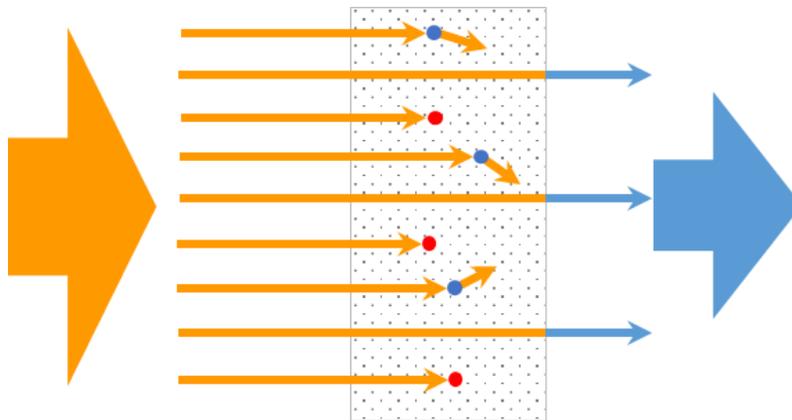
La energía radiativa que incide sobre un medio participante puede sufrir dos efectos, la atenuación y el aumento de su propia energía, la atenuación de energía se muestra en la Figura 2.1.

La atenuación de energía radiativa se debe a dos fenómenos, por dispersión y absorción, en el primer caso parte de la energía es desviada con respecto a su trayectoria original y no interactúa con el sistema de otra manera. Sin embargo, su intensidad disminuye, por lo que la disminución de energía es:

$$(dI)_{scat-out} = -\sigma_{scat} Ids^* \quad (2.1)$$

Donde:

$\sigma_{scat}$  es el coeficiente de dispersión del medio



**Figura 2. 1** Atenuación de energía radiativa por dispersión y absorción.

En el caso de la atenuación por absorción, parte de la energía interactúa con el medio, disminuyéndola. Sin embargo, la energía radiativa absorbida aumenta el nivel energético del medio:

$$(dI)_{abs} = -\kappa_{abs} Ids^* \quad (2.2)$$

Donde:

$\kappa_{abs}$  es el coeficiente de absorción.

Entonces, la energía atenuada se establece como:

$$(dI)_{aten} = -(dI)_{abs} - (dI)_{scat-out} \quad (2.3)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.1) y (2.2) en la (2.3) se tiene:

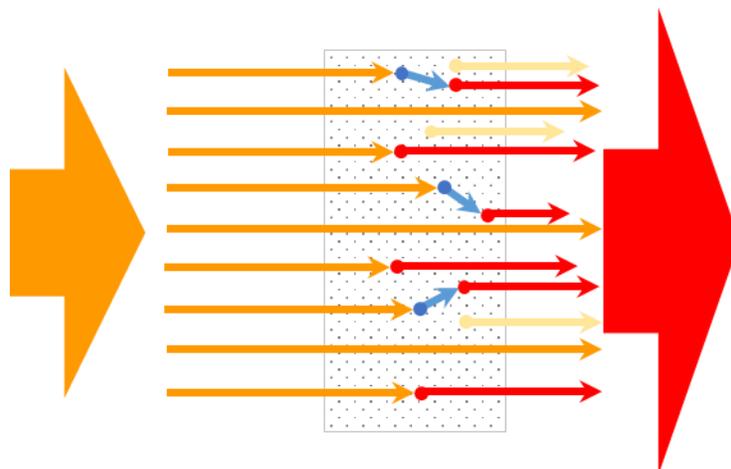
$$(dI)_{aug} = -\beta I ds^* \quad (2.4)$$

Donde:

$\beta = \kappa_{abs} + \sigma_{scat}$  es el coeficiente de extinción

Dado que la energía al incidir un cuerpo trata de atravesarlo y conforme lo recorre su intensidad disminuye por el efecto de dispersión y absorción, se puede definir estos dos efectos en función del espesor del medio como el espesor óptico:

$$\tau_{\lambda} = \int \beta_{\lambda} s^* ds^* \quad (2.5)$$



**Figura 2. 2** Aumento de energía radiativa por dispersión y emisión.

El aumento de energía se debe también por dos fenómenos, dispersión y emisión mostrados en la Figura 2.2.

## 2.1 Ecuación de transporte radiativo (RTE)

---

El aumento por dispersión es la energía dispersada por otros volúmenes que llega a un volumen específico, es decir, la energía que fue dispersada por otros volúmenes de control y que causó una disminución en la intensidad de la energía radiativa, ahora incide sobre otro volumen de control, aumentando la intensidad de energía. Este aumento se representa como:

$$(dI)_{scat-in} = \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' ds^* \quad (2.6)$$

Por emisión se debe a que el cuerpo emite su propia energía. Para este efecto, considérese que se trata de un cuerpo negro, por lo que toda la energía absorbida por este cuerpo es emitida, entonces su coeficiente de emisión será igual al coeficiente de absorción siendo así, el aumento por emisión se establece como:

$$(dI)_{emi} = \kappa_{abs} I_{bn} ds^* \quad (2.7)$$

Donde:

$I_{bn}$  es la intensidad del cuerpo negro

A partir de estos dos efectos, se tiene el aumento de la intensidad como:

$$(dI)_{aug} = (dI)_{emi} + (dI)_{scat-in} \quad (2.8)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.6) y (2.7) en la Ecuación (2.8) se llega:

$$(dI)_{aug} = \kappa_{abs} I_{bn} ds^* + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' ds^* \quad (2.9)$$

Por último, la variación de la intensidad por aumento o disminución está denotada como:

$$(dI) = (dI)_{aten} + (dI)_{aug} \quad (2.10a)$$

$$(dI) = -\beta I ds^* + \kappa_{abs} I_{bn} ds^* + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' ds^* \quad (2.10b)$$

La variación de la intensidad radiativa está en función de la intensidad variante con respecto al tiempo, así como la variación en el espacio, por lo que la variación se denota como:

$$dI = \frac{dI}{dt} dt + \frac{dI}{ds} ds \quad (2.11)$$

Despejando y sustituyendo se tiene la RTE en su expresión general como:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial z} = -\kappa_{abs} I - \sigma_{scat} + \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega' = 4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (2.12)$$

Donde:

$c$  es la velocidad de propagación de la radiación electromagnética a través de un medio diferente del vacío.

## 2.2 Cavidad cúbica con medio participante: absorbente-emisor-dispersante

En esta sección se presenta el modelo físico de la cavidad cúbica con medio absorbente-emisor-dispersante, además, se presenta el modelo matemático, así como las condiciones de frontera.

### 2.2.1 Modelo físico

Para el primer caso de estudio, se ha planteado una cavidad cúbica con un medio radiativamente participante, en este sistema solo se presenta la transferencia de calor por radiación en estado permanente. La cavidad se considera con longitud de 1m, con paredes frías excepto la pared norte (pared 3 de la Figura 2.3) en la que se considera una potencia emisiva de 1, en el caso de la emisividad, se consideran todas la paredes negras ( $\varepsilon_1 = 1$ ). Se considera un medio dentro de la cavidad como radiativamente

participante absorbente-emisor-dispersante. Para esta última consideración, se tiene un coeficiente de absorción ( $\kappa_{abs}$ ) de 1 y un coeficiente de dispersión de albedo ( $\omega$ ) de 0.5, lo cual equivale a coeficiente de dispersión ( $\sigma_{scat}$ ) de 1.

### **2.2.2 Consideraciones**

Para el estudio paramétrico de la RTE en tres dimensiones, se tiene las siguientes consideraciones:

- Transferencia de calor solo por radiación, por lo que no se considera velocidades del medio ya sea para transferencia de calor por convección natural, forzada o mixta.
- A pesar de considerar estático el medio, no se considera transferencia de calor por conducción.
- Se considera el estado permanente.
- Cavity cúbica con medio participante radiativamente como absorbente-emisor-dispersante con coeficientes de  $\kappa_{abs} = 1.0$  y  $\omega = 0.5$  lo cual, equivale a  $\sigma_{scat} = 1.0$ .
- Longitud de la cavity de 1m.
- Paredes frías excepto la pared norte con una potencia emisiva de 1.
- Paredes negras, por lo que la emisividad  $\varepsilon$  de estas mismas es de 1.
- El medio se considera como frío  $T_m = 0K$ .

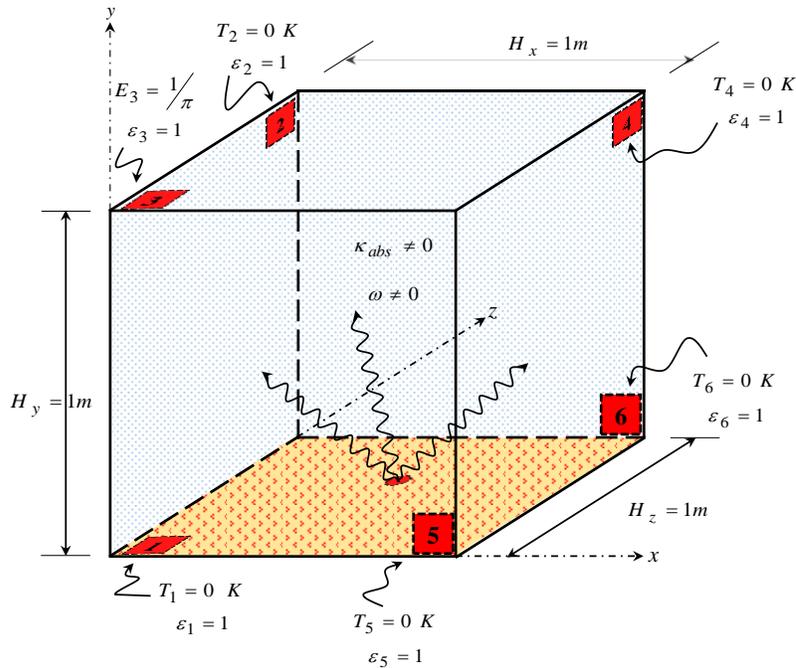


Figura 2. 3 Cavidad cúbica con medio absorbente-emisor-dispersante.

### 2.2.3 Modelo Matemático

Con base al modelo físico de la Sección 2.2.1 y a las consideraciones de la Sección 2.2.2, se presenta el modelo matemático que rige el caso en particular. A pesar de considerar solo transferencia de calor por radiación, se presentan los modelos matemáticos que rigen la transferencia de calor a través de los tres mecanismos, las cuales también son simplificadas. Por lo que como producto final, se reduce solamente a la ecuación de transporte radiativo simplificada.

De manera general se tiene las siguientes ecuaciones (Xamán y Gijón-Rivera, 2016) donde  $i = x, y, z$  para toda  $j = x, y, z$ :

Conservación de masa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.13}$$

Conservación de momentum:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i (\beta_* (T - T_\infty)) + \beta_C (C - C_\infty) \quad (2.14)$$

Conservación de energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda^* \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S_E \quad (2.15)$$

Conservación de especies químicas:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{\partial C}{\partial x_j} \left( D \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (2.16)$$

Ecuación de transporte radiativo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (2.17)$$

Con base a las consideraciones de la Sección 2.2.2 las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía para un fluido, son despreciables. Por lo que solo se tiene la RTE simplificada para el caso en particular presentada en la Ecuación (2.18)

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} + \eta \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (2.18)$$

Donde:

$$\beta = \kappa_{abs} + \sigma_{scat}$$

## 2.2.4 Condiciones de frontera

Debido a que el sistema es tridimensional, se tiene seis condiciones de frontera consideradas como condiciones de frontera de primera clase. En la pared tres se tiene una potencia emisiva de 1, mientras que en el resto, se considera temperaturas de  $0 K$ , bajo estas consideraciones, se presenta a continuación cada condición de frontera, así como el límite espacial de cada una.

$$I_1 = I_{bn} \left( \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r, & s \end{matrix} \right) = \frac{\sigma_{stefan} T_1^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y = 0 \quad (2.19a)$$

$$I_2 = I_{bn} \left( \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r, & s \end{matrix} \right) = \frac{\sigma_{stefan} T_2^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } x = 0 \quad (2.19b)$$

$$I_3 = I_{bn} \left( \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r, & s \end{matrix} \right) = E_3 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y = Hy \quad (2.19c)$$

$$I_4 = I_{bn} \left( \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r, & s \end{matrix} \right) = \frac{\sigma_{stefan} T_4^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } x = Hx \quad (2.19d)$$

$$I_5 = I_{bn} \left( \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r, & s \end{matrix} \right) = \frac{\sigma_{stefan} T_5^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z = 0 \quad (2.19e)$$

$$I_6 = I_{bn} \left( \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r, & s \end{matrix} \right) = \frac{\sigma_{stefan} T_6^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z = Hz \quad (2.19f)$$

Donde:

$E$  es la potencia emisiva.

En el caso de las emisividades se tiene:

$$\varepsilon_1 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y = 0 \quad (2.20a)$$

$$\varepsilon_2 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \quad (2.20b)$$

$$\varepsilon_3 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y = Hy \quad (2.20c)$$

$$\varepsilon_4 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } x = Hx \quad (2.20d)$$

$$\varepsilon_5 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z = 0 \quad (2.20e)$$

$$\varepsilon_6 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z = H_z \quad (2.20f)$$

## 2.3 Horno rectangular tridimensional con medio participante: absorbente-emisor

En esta sección se presenta el modelo físico y matemático del segundo caso el cual, es un horno tridimensional con medio participante emisor-absorbente. Además, se presenta las condiciones de frontera.

### 2.3.1 Modelo físico

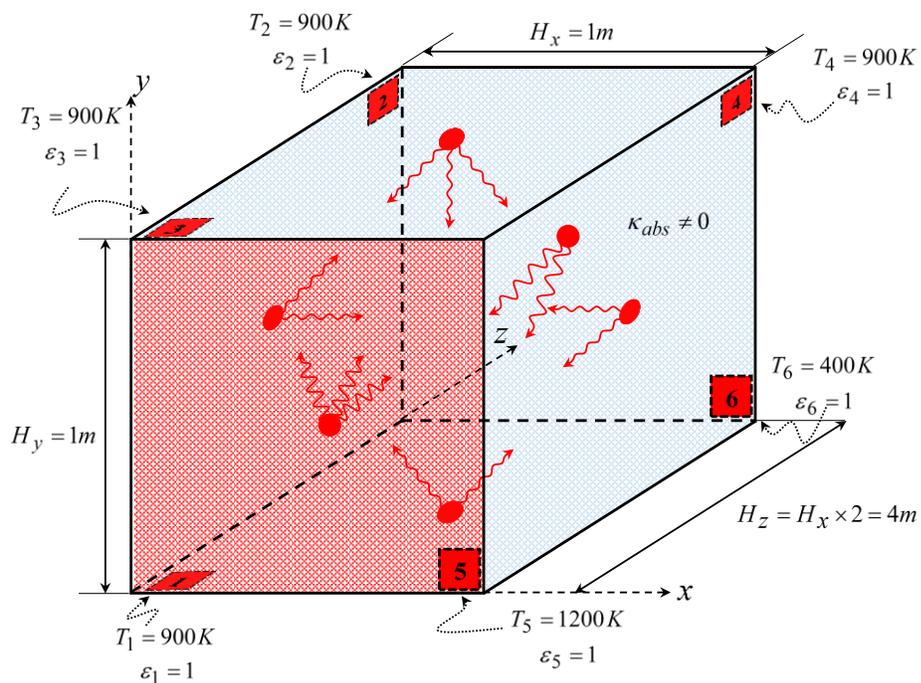
Para el segundo caso a estudiar se ha considerado un horno rectangular tridimensional con un medio participante absorbente-emisor con coeficiente de absorción  $\kappa_{abs} = 1.0$  y dispersión de albedo  $\omega = 0$ . La longitud del horno es de  $H_x = H_y = 2m$  para  $x, y$  respectivamente, mientras que para el eje  $z$  se considera  $H_z = 2H_x$ . En el caso de las paredes del horno se tiene diferentes temperaturas, por lo que para la pared 5 de la Figura 2.4, la temperatura es de  $1200 K$ , en el caso de la pared 6, se tiene una temperatura de  $400 K$ , para el resto de las paredes de tiene una temperatura de  $950 K$ . Todas las paredes tiene una emisividad de 1.0, además se tiene una generación volumétrica en el medio participante de  $5KW \cdot m^{-3}$ .

### 2.3.2 Consideraciones

Las consideraciones del horno para el segundo caso de estudio son las siguientes:

- Transferencia de calor por radiación, se desprecia la transferencia de calor por conducción y convección.
- Estado permanente.

- Horno tridimensional con dimensiones de  $H_x = H_y = 2m$  y  $H_z = 2H_x$
- Medio participante absorbente-emisor con coeficiente de absorción de  $\kappa_{abs} = 1.0$  y coeficiente de dispersión de albedo de  $\omega = 0$ .
- Temperatura de  $1200\text{ K}$  para la pared 5.
- Temperatura de  $400\text{ K}$  para la pared 6.
- Temperatura de  $950\text{ K}$  para el resto de las paredes.
- Paredes negras, es decir, potencia emisiva de 1.
- Generación de calor volumétrica de  $5\text{ KW} \cdot \text{m}^{-3}$ .



### 2.3.3 Modelo Matemático

De la misma manera que el caso uno, con el modelo físico de la Sección 2.3.1 y las consideraciones de la Sección 2.2.2, se ha deducido la ecuación de transporte radiativo en forma particular para el caso dos. Sin embargo, también se presenta los modelos

### 2.3. Horno rectangular tridimensional con medio participante: absorbente-emisor

matemáticos para transferencia de calor por conducción y convección con la finalidad de tener en cuenta que estos fenómenos también pueden estar presente. A pesar de esto, se han despreciados por la primera consideración.

A continuación se presentan las ecuaciones gobernantes en la transferencia de calor por conducción, convección donde  $i = x, y, z$  para toda  $j = x, y, z$ , y radiación.

Conservación de masa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2.21)$$

Conservación de momentum:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i (\beta_* (T - T_\infty)) + \beta_C (C - C_\infty) \quad (2.22)$$

Conservación de energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda^* \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S_E \quad (2.23)$$

Conservación de especies químicas:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{\partial C}{\partial x_j} \left( D \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (2.24)$$

Ecuación de transporte radiativo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (2.25)$$

De acuerdo a las consideraciones que se presentan en la Figura 2.4 y enlistadas en la Sección 2.3.2, se han despreciado las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía, y aplicando las consideraciones sobre la RTE, se tiene esta misma en su manera particular del caso presentada en la Ecuación (2.26).

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} + \eta \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} \quad (2.26)$$

Donde:

$$\beta = \kappa_{abs} + \sigma_{scat}$$

### 2.3.4 Condiciones de frontera

Por último se presenta las condiciones de frontera del horno, donde se consideran de primera clase.

$$I_1 = I_{bn}(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_1^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y=0 \quad (2.27a)$$

$$I_2 = I_{bn}(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_2^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } x=0 \quad (2.27b)$$

$$I_3 = I_{bn}(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_3^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y=H_y \quad (2.27c)$$

$$I_4 = I_{bn}(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_4^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } x=H_x \quad (2.27d)$$

$$I_5 = I_{bn}(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_5^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z=0 \quad (2.27e)$$

$$I_6 = I_{bn}(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_6^4}{\pi} \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z=H_z \quad (2.27f)$$

En el caso de las emisividades para el horno se tiene:

$$\varepsilon_1 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y=0 \quad (2.28a)$$

$$\varepsilon_2 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } x=0 \quad (2.28b)$$

$$\varepsilon_3 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H_x \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } y = H_y \quad (2.28c)$$

$$\varepsilon_4 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < y < H_y \\ 0 \leq z \leq H_z \end{array} \right. \quad \text{En } x = H_x \quad (2.28d)$$

$$\varepsilon_5 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z = 0 \quad (2.28e)$$

$$\varepsilon_6 = 1 \quad \text{Para } \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < H_x \\ 0 < y < H_y \end{array} \right. \quad \text{En } z = H_z \quad (2.28f)$$

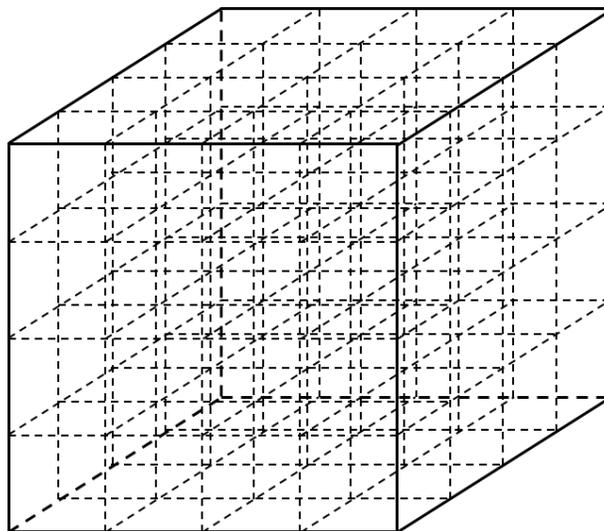
Finalmente, se ha planteado el modelo físico y matemático de cada caso a estudiar, además de las condiciones de fronteras. A continuación se presenta el capítulo 3 en el que se describe la metodología de solución de la RTE para cada caso a través del método DOM y FVM, además de la DC como segundo nivel de aproximación espacial.

## Capítulo 3

# Metodología: DC

En este capítulo, se presenta los métodos de aproximación angular y espacial, el DOM y FVM respectivamente. Adicional al FVM, se introduce la formulación DC para la implementación de los esquemas de interpolación espacial de alto orden.

La RTE es una ecuación de tipo integro-diferencial, la cual es compleja para su solución. Para su solución se requiere dos aproximaciones, la primera, una aproximación angular, y la segunda, una aproximación espacial. La primera aproximación o discretización se realiza con la implementación de métodos como el Monte Carlo, el FVM y el DOM, entre otros. Para la aproximación espacial, se implementan métodos como el de FEM y el FVM.



**Figura 3. 1** Dominio computacional.

## 3.1 Metodología DOM

Para implementar la aproximación angular y espacial se divide el sistema en volúmenes de control lo cual, se le conoce como malla o dominio computacional, mostrado en la Figura 3.1.

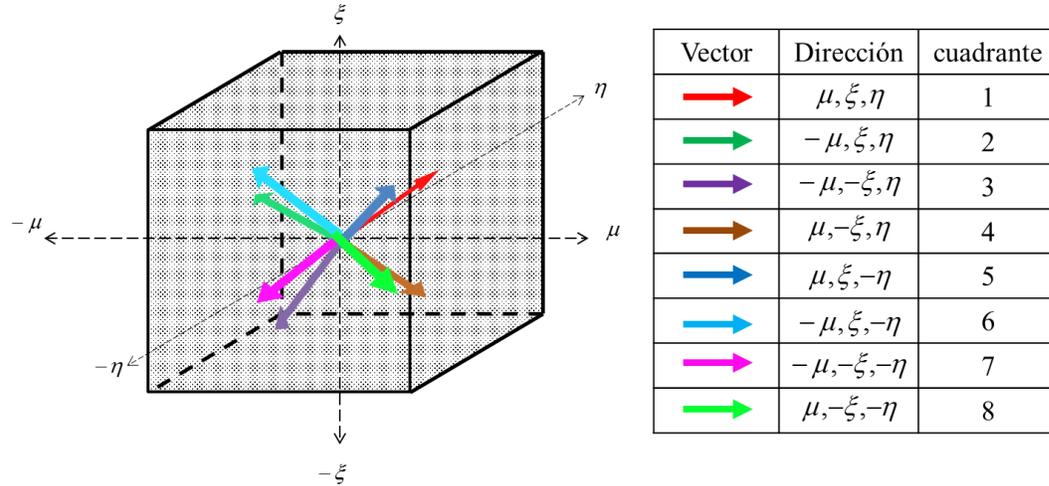


Figura 3. 2 División de volumen de control en octantes.

La implementación del DOM parte de la Figura 3.2, como se observa en esta figura, el volumen de control se divide en volúmenes angulares conocidos como octantes para tres dimensiones, cuadrantes para dos dimensiones y direcciones para una dimensión. El número de intensidades que surjan de cada octante, cuadrante o dirección dependerá del número de intensidades que se considere.

La discretización angular se implementa sobre la integral de la RTE que representa el área esférica del volumen de control atravesada por las intensidades incidentes de los volúmenes de control vecinos. Esta integral genera que la RTE (Ecuación (3.1)) sea compleja para su solución. Sin embargo, debido a que representa el área bajo la curva, es sustituida por una expresión menos compleja, la cual es una sumatoria de pequeñas áreas.

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} + \eta \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega^l=4\pi} I(\vec{r}, \Omega^l) \Phi(\Omega, \Omega^l) d\Omega^l \quad (3.1)$$

La Ecuación (3.1) queda discretizada angularmente como se muestra en la Ecuación (3.2). Donde,  $\mu$  es el coseno director en dirección  $x$ ,  $\xi$  es el coseno director en dirección  $y$ ,  $\eta$  es el coseno director en dirección  $z$ ,  $\psi_i = \mu, \xi, \eta$  para  $i = x, y, z$  respectivamente.  $w_f$  es el peso cuyo valor depende de la cuadratura a emplear, como se muestra en la Tabla A.3, dichas cuadraturas son de orden  $S_n$  presentadas por Balsara (2001) y de orden  $T_n$  por Li et al. (1998).

$$\left| \mu^m \right| \frac{\partial I}{\partial x} + \left| \xi^m \right| \frac{\partial I}{\partial y} + \left| \eta^m \right| \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I^m + \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \sum_{k=1}^M (\psi_i^k)^2 w_f^k I_{in}^k \quad (3.2)$$

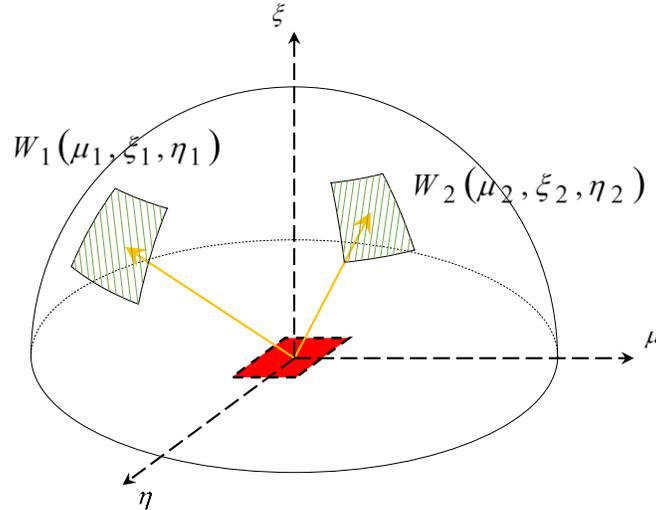


Figura 3. 3 Ejemplo de cuadratura.

En la Figura 3.3 se muestra un ejemplo de cuadratura, como se observa en la figura los cosenos directores son la dirección de la intensidad radiativa, mientras que el peso representa el área que la intensidad atraviesa. Por ello es muy importante que la sumatoria de los pesos sea igual a  $4\pi$ , de lo contrario, la solución del fenómeno es irreal. Un ejemplo de ello es el siguiente.

Uno de los problemas o limitantes que tiene el DOM, son los efectos negativos que se tiene al no considerar una cuadratura adecuada, el más conocido y tratado en la

literatura es el efecto rayo, este efecto se presenta cuando se ocupa una cuadratura de baja precisión, como las cuadraturas  $S_2$ ,  $S_4$ , entre otras.

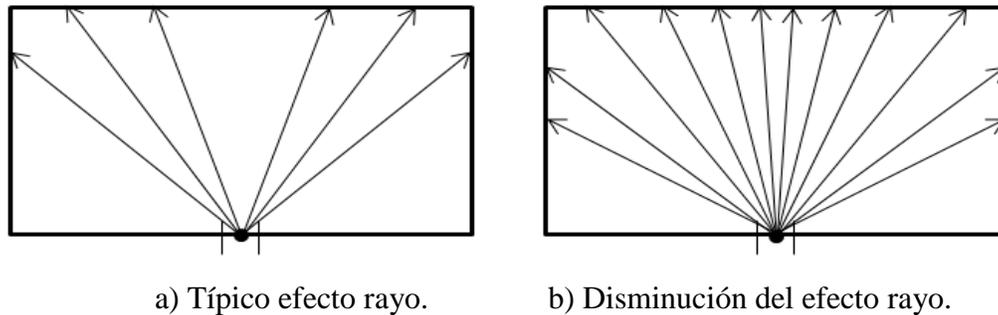


Figura 3. 4 Efecto rayo.

Considérese una cavidad bidimensional, como se muestra en la Figura 3.4a, seis direcciones discretas y supóngase que de la pared inferior en una posición surgen intensidades radiativas y llegan a las demás paredes con la misma intensidad. Como se podrá observa, cada una de las direcciones discretas llega a una posición, teniendo flujos de calor en esas posiciones, mientras que las demás posiciones infinitesimal se tienen flujos de calor igual a cero. Este fenómeno es irreal dado que en la realidad, en cada posición infinitesimal de las paredes llegan las intensidades que surgen de una sola posición de la pared inferior. Por lo tanto, se debe tener flujos de calor en todas las posiciones de las paredes (Chai et al., 1993). Sin embargo, esto se puede reducir aumentando el número de direcciones discretas como se muestra en la Figura 3.4b.

## 3.2 Metodología FVM

La segunda discretización se realiza de manera espacial, la cual se puede realizar con diversos métodos, tales como el FVM. A través de este método la aproximación se realiza en dos niveles de aproximación.

### 3.2.1 Primer nivel de aproximación

En el primer nivel se integra la ecuación sobre el volumen de control (Figura 3.5), evaluando esta integral desde la interfaz  $w$  a la interfaz  $e$  en dirección  $x$ , desde la

interfaz  $s$  a la interfaz  $n$  en dirección  $y$  y desde la interfaz  $b$  a la interfaz  $t$  en dirección  $z$ , la Ecuación (3.2) discretizada con el primer nivel de aproximación queda como se muestra en la Ecuación (3.3).

$$\begin{aligned} \left| \mu^m \left[ I_e^m - I_w^m \right] \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \left[ I_n^m - I_s^m \right] \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \left[ I_t^m - I_b^m \right] \Delta x \Delta y = \right. \right. \\ \left. \left. - \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \right. \right. \end{aligned} \quad (3.3a)$$

Dónde:

$$S_P^m = \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \sum_{k=1}^M \left( \psi_i^k \right)^2 W_f^k I_{in}^k \quad (3.3b)$$

En la Ecuación (3.3a) se observa que el valor de la variable ha quedado en la interfaz del volumen de control por la integración de la RTE en cada volumen de control, debido a esto, no se tiene directamente la solución de la RTE, ya que toda la información de las propiedades del sistema se encuentran en los nodos principales.

### 3.2.2 Segundo nivel de aproximación DC

Debido a lo ocasionado por el primer nivel de discretización es necesario una segunda aproximación, la cual se realiza a través de esquemas de interpolación espacial, éstos aproximan la variable en la interfaz a partir de la variable en los nodos principales (Figura 3.5).

#### 3.2.2.1 Discretización de nodos internos

Uno de los esquemas más sencillos, conocidos y que no es demasiado implementado por la comunidad científica, es el de diferencia centrada. Éste esquema aproxima la variable a partir de un promedio de los nodos principales vecinos adyacentes a la interfaz de interés. Por ejemplo, la variable en la interfaz  $w$  es:

$$\varphi_w = \frac{\varphi_w + \varphi_p}{2} \quad (3.4)$$



Otro esquema conocido y más usado que el de diferencia centrada, es el esquema STEP. A diferencia del esquema anterior, el esquema STEP solo considera un nodo principal, en este caso, considera el sentido del flujo de la variable, a partir de esto, considera que el nodo principal que tiene la influencia sobre la interfaz es el nodo anterior en sentido del flujo de la variable, por lo que en sentido positivo se tiene que:

$$\varphi_w = \varphi_w \quad (3.5)$$

En el caso de la variable con sentido de flujo negativo se tiene que:

$$\varphi_w = \varphi_p \quad (3.6)$$

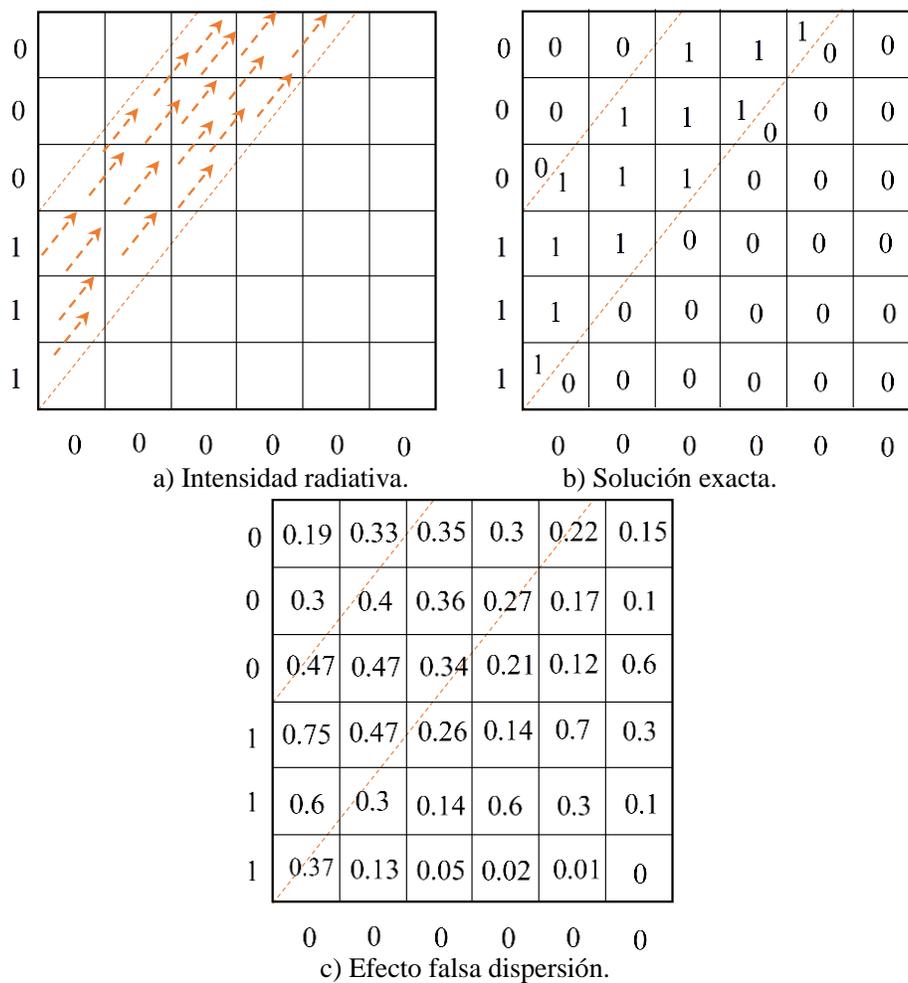


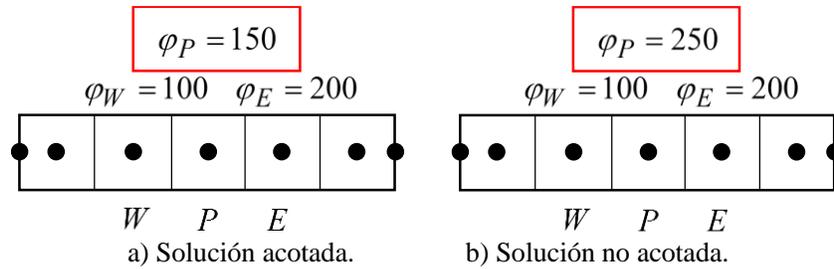
Figura 3. 6 Flujo diagonal de la intensidad radiativa.

La implementación del esquema STEP involucra un error numérico para sistemas complejos, lo que se conoce como falsa dispersión, esto se debe a su orden de exactitud. Para un mejor entendimiento de lo que involucra solucionar problemas complejos con este esquema, considérese el sistema de la Figura 3.6a, en el que se tiene la variable en una dirección definida, en este caso una dirección de  $50^\circ$ , con valor prescrito de uno y cero en las fronteras indicadas. Desde el punto de vista del fenómeno, el campo de la intensidad delimitada por ambas líneas discontinuas debe ser uno como se muestra en la Figura 3.6b. Sin embargo, al implementar el esquema STEP, el campo de la intensidad es diferente, ya que sobre estima o bajo estima el valor del campo, teniendo un campo diferente como se muestra en la Figura 3.6c. Debido a esto, la comunidad científica decidió implementar nuevos esquemas de mayor orden de exactitud conocidos como HO y HR.

En dinámica de fluidos, uno de los primeros esquemas HO que surgen es el QUICK desarrollado por Leonard (1979). La importancia de mencionar que los esquemas inicialmente surgen a partir de problemas de dinámica de fluidos, radica en que la mayoría de los esquemas HO y HR implementados en la solución de la RTE son adoptados de dinámica de fluidos.

El desarrollo de esquemas HO deriva del análisis matemático de los esquemas LO, lo cual da pauta a la definición de tres propiedades de los esquemas y que los esquemas LO no cumplen por completo, conservación, acotación y transportividad.

Xamán y Gijón-Rivera (2016) mencionan que los esquemas deben ser conservativos, es decir, el valor de la variable en la interfaz de entrada debe ser igual al valor de la variable en la interfaz de salida o en otras palabras, lo que entra al volumen de control debe ser igual a lo que sale. Esto tiene sentido, dado que la cantidad de fluido que sale en el volumen de control no debe ser mayor a la cantidad que entra.



**Figura 3. 7** Acotabilidad.

En el caso de acotación, un esquema acotado es aquel que proporciona el valor de la variable de un volumen de control dentro del intervalo que se genera entre los nodos vecinos adyacentes, como se muestra en la Figura 3.7.

En el caso de la transportividad, se hace referencia al considerar la dirección del flujo de la variable, lo cual, los esquemas LO no consideran excepto el STEP.

En dinámica de fluidos, estas tres propiedades mencionadas son fundamentales para obtener un proceso iterativo más estable con tendencia a la convergencia sin necesidad de demasiado consumo de número de iteraciones. Por ello, surgen los esquemas HO, con el objetivo de cumplir las tres propiedades mencionadas anteriormente. Como se mencionó anteriormente, uno de los primeros esquemas en surgir es el QUICK. Sin embargo, en el análisis matemático que se hace sobre este esquema por Moukalled et al., 2015 se demuestra que el esquema no asegura una solución acotada.

Por lo anterior, surgen una diversidad de esquemas HO, algunos de ellos se presentan en la Tabla A.1. La aproximación de la mayoría de los esquemas HO es similar al esquema STEP. Sin embargo, la mayoría de los esquemas HO requieren de 3 nodos, por lo que la variable en la interfaz  $w$  es igual a la suma del valor de dos nodos vecinos anteriores y un nodo adelante en sentido del flujo de la variable. De acuerdo a esto y con la Figura 3.5, la variable interpolada en la interfaz mencionada anteriormente con los esquemas HO se determina de la siguiente manera:

$$\varphi_w = a\varphi_{ww} + b\varphi_w + c\varphi_p \tag{3.7}$$

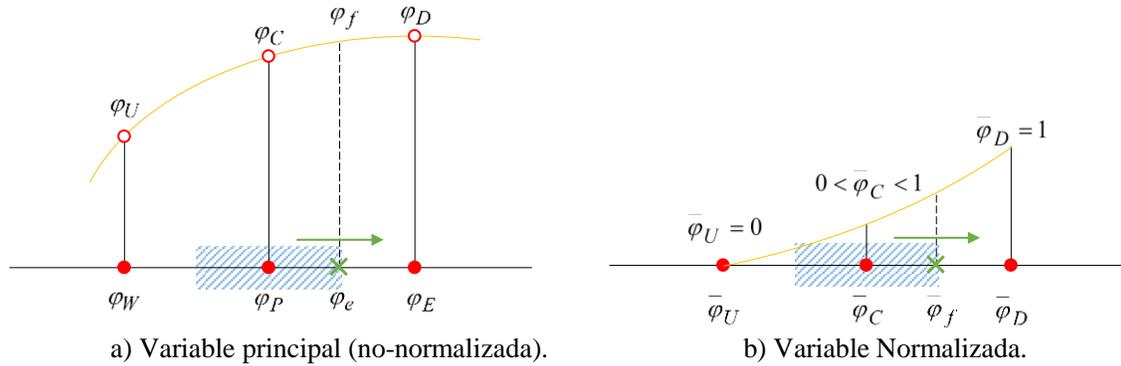
Dónde:

### 3.2. Metodología FVM

$a, b, c$  son coeficientes con valores dependientes de cada esquema.

A diferencia del esquema STEP, los esquemas HO consideran que los nodos vecinos tiene una influencia sobre el nodo de la interfaz. Sin embargo, para cada esquema HO la influencia de cada nodo varia, por lo que el valor de la variable en la interfaz de interés aproximada con la mayoría de los esquemas HO y considerando la Ecuación (3.7) se denota como se muestra en la Ecuación (3.8).

$$\varphi_f = a\varphi_U + b\varphi_C + c\varphi_D \quad (3.8)$$



**Figura 3. 8** Variable en nodos principales

Con el surgimiento de los esquemas HO nace el concepto de formulación de variable normalizada (*NVF por sus siglas en inglés*) presentada por Leonard (1988) para el desarrollo y análisis estos mismos esquemas, para ello se normaliza la variable a partir de la Figura 3.8 como:

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} \quad (3.9)$$

Aplicando la normalización a la variable en los nodos principales, se tiene que:

$$\bar{\varphi}_U = \frac{\varphi_U - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} = 0 \quad (3.10a)$$

$$\bar{\varphi}_C = \frac{\varphi_C - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} \quad (3.10b)$$

$$\bar{\varphi}_D = \frac{\varphi_D - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} = 1 \quad (3.10c)$$

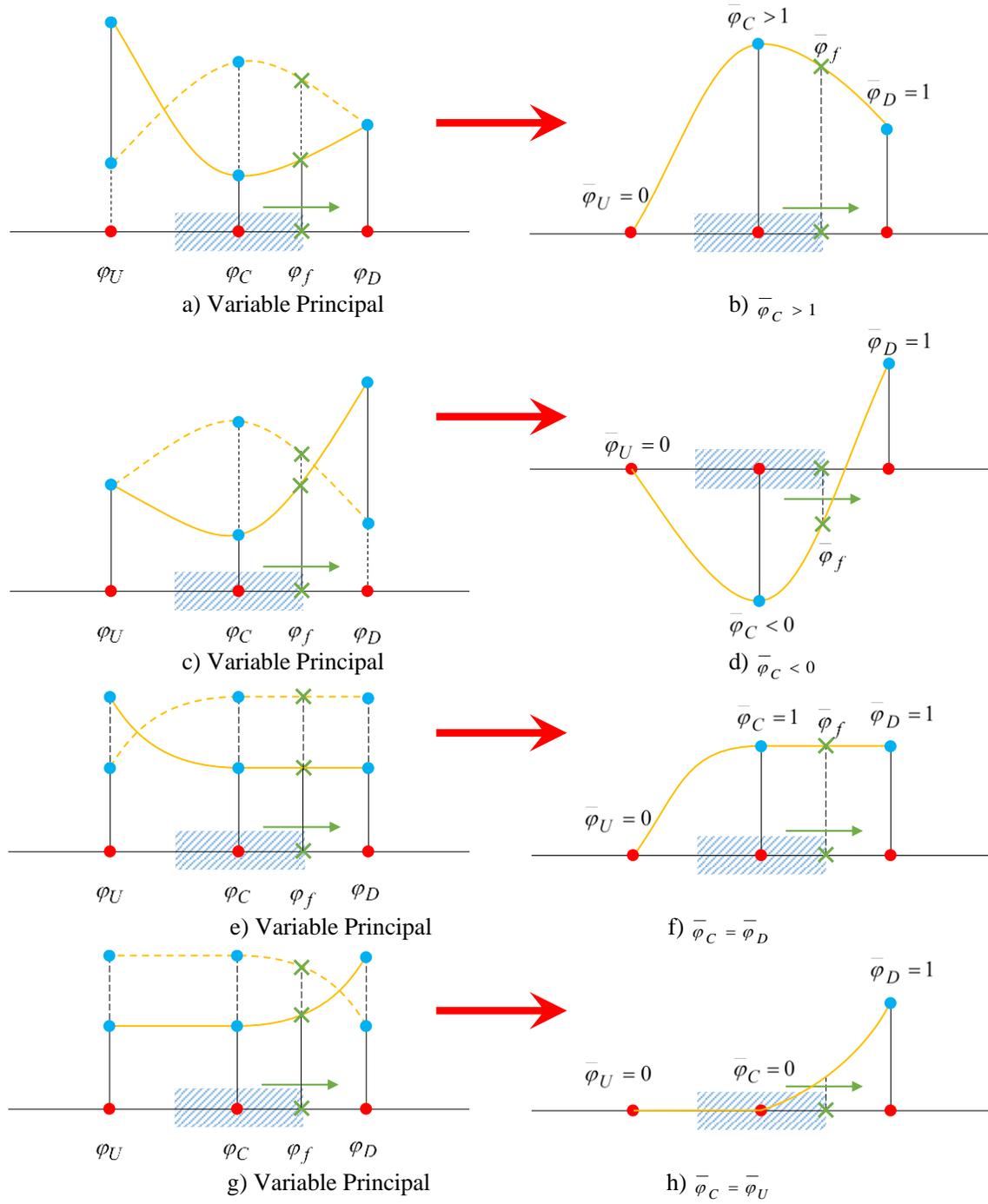


Figura 3.9 casos de la variable normalizada  $\bar{\varphi}_C$ .

Para  $0 \leq \varphi_C \leq 1$ , el perfil es uniforme. En el caso de  $\varphi_C < 0$  o  $1 < \bar{\varphi}_C$ , la variable  $\bar{\varphi}_C$  es mayor o menor que las variables  $\varphi_U, \varphi_D$ . En el caso de  $\bar{\varphi}_C = 0$  o  $\bar{\varphi}_C = 1$  se tiene saltos de gradientes. En la Figura 3.9 se muestra de manera esquemática estos casos para la

variable normalizada  $\bar{\varphi}_C$ , donde se presenta dos comportamientos de la variable principal y como resultado su comportamiento normalizado para cada caso.

Todos los esquemas que aproximan la variable con tres nodos se expresan en función de la variable  $\bar{\varphi}_C$  como se muestra en la Tabla A.1 y A2. Por ejemplo, el esquema QUICK esta denotado como:

$$\varphi_f = \frac{3}{8}\varphi_D + \frac{3}{4}\varphi_C - \frac{1}{8}\varphi_U \quad (3.11)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.10) para la normalización de la Ecuación (3.11) se tiene:

$$\varphi_f = \frac{3}{8}(1) + \frac{3}{4}\bar{\varphi}_C - \frac{1}{8}(0) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\bar{\varphi}_C \quad (3.12)$$

Por lo tanto, la variable  $\bar{\varphi}_f$  en función de  $\bar{\varphi}_C$  con los diferentes esquemas HO se grafican como se muestra en la Figura 3.9, lo cual se conoce como diagrama de variable normalizada (*NVD por sus siglas en inglés*).

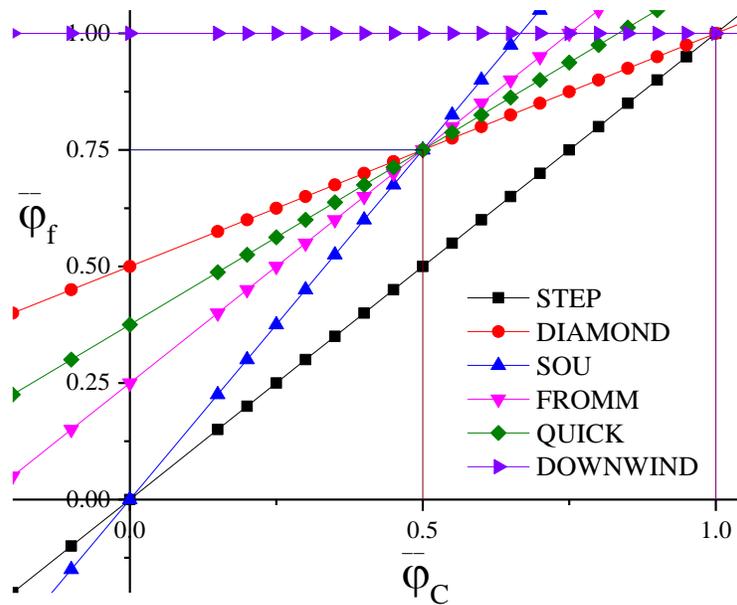


Figura 3. 10 NVD para diferentes esquemas.

De acuerdo a la Figura 3.10, todos los esquemas HO pasan a través del punto  $(\bar{\varphi}_C = 0.5, \bar{\varphi}_f = 0.75)$ , lo cual se considera como característica principal de los esquemas de segundo de orden de exactitud.

De acuerdo a lo anterior, las variables  $\varphi_U, \varphi_C, \varphi_D$  en términos de la variable  $\varphi_f$  y aplicando una serie de Taylor, se obtiene como:

$$\varphi_U = \varphi_f - \frac{3}{2}\Delta x \varphi_f' + 0(\Delta x^2) \quad (3.13a)$$

$$\varphi_C = \varphi_f - \frac{1}{2}\Delta x \varphi_f' + 0(\Delta x^2) \quad (3.13b)$$

$$\varphi_D = \varphi_f + \frac{1}{2}\Delta x \varphi_f' + 0(\Delta x^2) \quad (3.13c)$$

De acuerdo a la Ecuación (3.13) los términos de lado derecho de la igualdad de la Ecuación (3.8) se obtienen como:

$$a\varphi_U + b\varphi_C + c\varphi_D = (a+b+c)\varphi_f + \left(-\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right)\Delta x \varphi_f' + 0(\Delta x^2) \quad (3.14)$$

El valor de  $\varphi_f$  será de segundo orden de exactitud sí se cumple:

$$\left(-\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right) = 0 \quad (3.15a)$$

$$a = \frac{c-b}{3} \quad (3.15b)$$

En términos de variable normalizada y considerando la Ecuación (3.15), la Ecuación (3.14) se tiene como:

$$\left(\frac{2b+4c}{3}\right)\bar{\varphi}_f = b\bar{\varphi}_C + c \quad (3.16)$$

Como se mencionó anteriormente, todos los esquemas de segundo orden de exactitud pasan en los puntos  $(0.5, 0.75)$ . Por lo que considerando la Ecuación (3.16) y sustituyendo los valores de  $\bar{\varphi}_C, \bar{\varphi}_f$  se tiene:

$$\left(\frac{2b+4c}{3}\right)\frac{3}{4} = b\frac{1}{2} + c \quad (3.17a)$$

$$b\frac{1}{2} + c = b\frac{1}{2} + c \quad (3.17b)$$

### 3.2. Metodología FVM

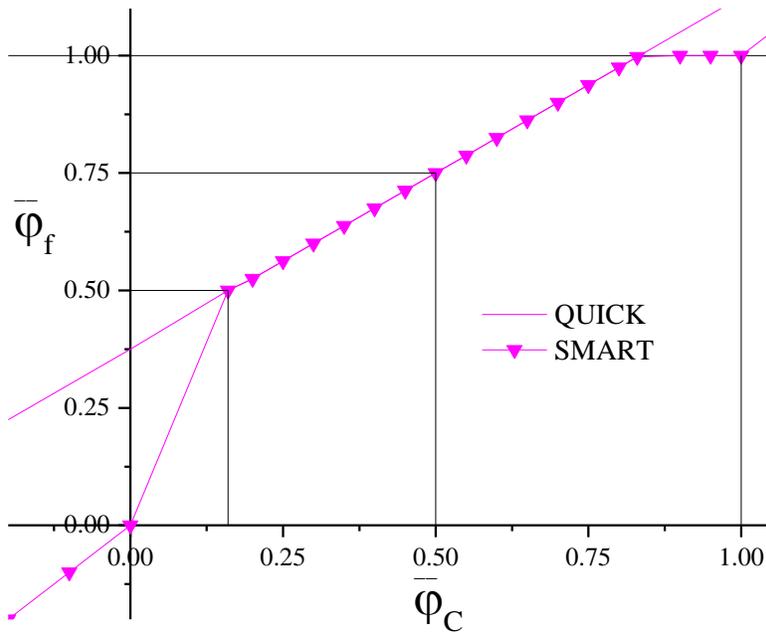
Por lo tanto, todos los esquemas de segundo orden de exactitud pasan por el punto  $(\bar{\varphi}_C = 0.5, \bar{\varphi}_f = 0.75)$  (Moukalled et al., 2015).

Otra manera de generalizar el valor de la interfaz  $f$  obtenido con los esquemas HO es (Amano y Sundén, 2010):

$$\bar{\varphi}_f = \bar{\varphi}_C + \frac{1}{4}[(1+k)(1-\bar{\varphi}_C) + (1-k)\bar{\varphi}_C] \quad (3.18)$$

Donde:

$$k = \frac{4\bar{\varphi}_f - 4\bar{\varphi}_C - 1}{1 - 2\bar{\varphi}_C} \quad (3.19)$$



**Figura 3. 11** Comparación de los esquemas SMART y QUICK en NVD.

A pesar de reducir el truncamiento del error del esquema STEP, los esquemas HO presentan sobre o bajo estimación de la variable. Debido a esto, nuevamente la comunidad científica desarrolló una nueva familia de esquemas conocidos como HR a partir del NVD. Para desarrollar los esquemas HR a partir de NVD es necesario que estos esquemas estén dentro del triángulo formado por la pendiente del esquema STEP, el eje  $\bar{\varphi}_f$  y la recta vertical generada en  $\bar{\varphi}_f = 1$  de la Figura 3.9. Los esquemas HR surgen a partir de un conjunto de curvas en el NVD dentro del intervalo

mencionado. Por ejemplo, el esquema SMART surge a partir de la modificación del esquema QUICK, mostrado en la Figura 3.11.

Para la implementación de los esquemas HO y HR existen formulaciones matemáticas, una de ellas es la DC. Esta formulación es la más conocida y aplicada por la comunidad científica. Principalmente esta formulación nace a partir de la solución de problema de dinámica de fluidos.

La formulación DC nace para la implementación de los esquemas HO y HR, ya que implementar de manera directa estos esquemas puede generar violaciones en una de las tres reglas para la convergencia de la solución y como resultado se tiene inestabilidad en el proceso iterativo. Para ello, la finalidad de DC en dinámica de fluidos es aproximar la variable con el esquema UPWIND (STEP) y adicionar la diferencia entre el esquema STEP y HO o HR con la variable de la iteración anterior en el término fuente. La finalidad de DC en el proceso iterativo es sobrellevar las oscilaciones (Moukalled et al., 2015).

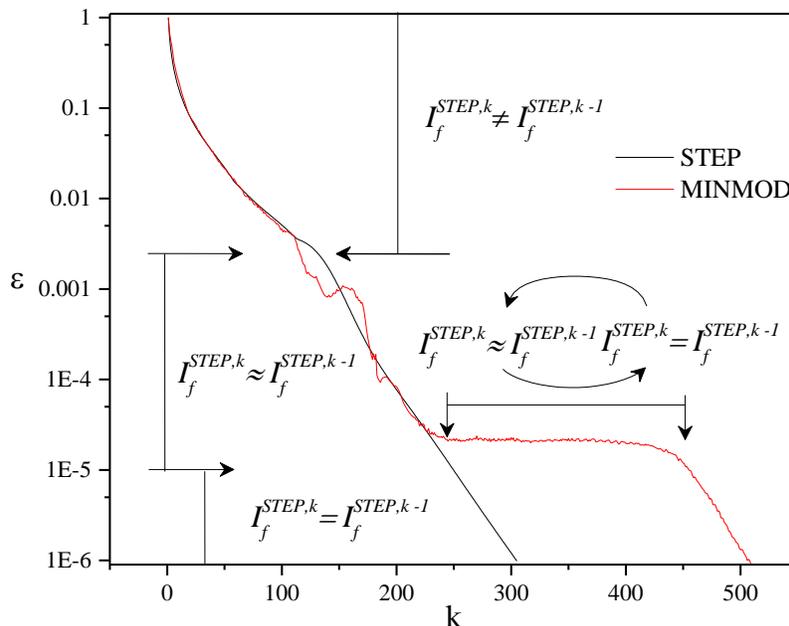


Figura 3. 12 Proceso iterativo de la solución de la variable.

En el proceso iterativo, la variable se soluciona con el esquema STEP y la diferencia entre este mismo esquema y los esquemas HO o HR, ésta diferencia se calcula con el

valor de la variable de la iteración anterior. Sin embargo, conforme la variable converge con el paso de las iteraciones, el valor de la variable de la iteración anterior con el valor de la iteración actual tienden a ser iguales, así, la aproximación con el esquema STEP se anula conforme la variable converge. A pesar de esto, dado que la formulación DC es de manera explícita, la aproximación HO o HR es completamente resuelta con la variable anterior, generando mayor consumo de iteraciones (Figura 3.12 y Ecuaciones (3.20) - (3.22)). No obstante, dado que el valor de la variable de la iteración anterior ha sido obtenido de manera más estable por la aportación del esquema STEP, para el esquema HO o HR es más estable determinar el valor de la variable y de manera más exacta. Por ello en la solución de la RTE, la comunidad científica ha adoptado esta formulación para la implementación de esquemas HO y HR.

Sí:

$$I_f^{STEP,k} \neq I_f^{STEP,k-1} \quad (3.20a)$$

Entonces:

$$\left| \mu^m \left[ \underbrace{I_e^m - I_w^m}_{STEP,k} \right] \right| = -\beta I_P^m \Delta x + S_P^m \Delta x + \underbrace{\left( \left| \mu^m \right| I_e^{STEP} - \left| \mu^m \right| I_e^{HO} \right) + \left( \left| \mu^m \right| I_w^{HO} - \left| \mu^m \right| I_w^{STEP} \right)}_{(STEP-HO=DC),k-1} \quad (3.20b)$$

Sí:

$$I_f^{STEP,k} \approx I_f^{STEP,k-1} \quad (3.21a)$$

Entonces:

$$\left| \mu^m \left[ \underbrace{I_e^m - I_w^m}_{(STEP,k) \rightarrow 0} \right] \right| = -\beta I_P^m \Delta x + S_P^m \Delta x + \underbrace{\left( \left| \mu^m \right| I_e^{STEP \rightarrow 0} - \left| \mu^m \right| I_e^{HO} \right) + \left( \left| \mu^m \right| I_w^{HO} - \left| \mu^m \right| I_w^{STEP \rightarrow 0} \right)}_{(STEP \rightarrow 0-HO=DC),k-1} \quad (3.21b)$$

Sí:

$$I_f^{STEP,k} = I_f^{STEP,k-1} \quad (3.23b)$$

Entonces:

$$\underbrace{\left( \left| \mu^m \right| I_e^{HO} \right) - \left( \left| \mu^m \right| I_w^{HO} \right)}_{(HO=DC),k-1} = -\beta I_p^m \Delta x + S_p^m \Delta x + \quad (3.23b)$$

Implementando la DC a la Ecuación (3.3), se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \mu^m \right| \underbrace{\left[ I_e^m - I_w^m \right]}_{STEP,k} \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \right| \underbrace{\left[ I_n^m - I_s^m \right]}_{STEP,k} \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \right| \underbrace{\left[ I_t^m - I_b^m \right]}_{STEP,k} \Delta x \Delta y = \\ -\beta I_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + S_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + \underbrace{DC}_{(STEP-HO),k-1} \end{aligned} \quad (3.23a)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} DC = \left( a_E I_e^{STEP} - a_E I_e^{HO} \right) + \left( a_W I_w^{HO} - a_W I_w^{STEP} \right) + \left( a_N I_n^{STEP} - a_N I_n^{HO} \right) + \\ \left( a_S I_s^{HO} - a_S I_s^{STEP} \right) + \left( a_T I_t^{STEP} - a_T I_t^{HO} \right) + \left( a_B I_b^{HO} - a_B I_b^{STEP} \right) \end{aligned} \quad (3.23b)$$

Despejando y agrupando términos de la Ecuación (3.23) en términos de coeficientes agrupados, se tiene de manera general lo siguiente:

$$a_p I_p^m = a_{nb,x} I_{in,x}^m + a_{nb,y} I_{in,y}^m + a_{nb,z} I_{in,z}^m + b_p^m \quad (3.24a)$$

Dónde:

$$a_p = \left| \mu^m \right| \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \right| \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \right| \Delta x \Delta y \quad (3.24b)$$

$$a_{nb,x} = \left| \mu^m \right| \Delta y \Delta z \quad (3.24c)$$

$$a_{nb,y} = \left| \xi^m \right| \Delta x \Delta z \quad (3.24d)$$

$$a_{nb,z} = \left| \eta^m \right| \Delta x \Delta y \quad (3.24e)$$

$$b_p^m = S_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + DC \quad (3.24f)$$

### 3.2.2.2 Discretización de nodos adyacentes a las fronteras

En el caso de los nodos adyacentes a la frontera, existen dos maneras de realizar la interpolación, a través de nodos espejos o la implementación del esquema STEP. La interpolación en los nodos adyacentes a las fronteras con los nodos espejos es debido a que no existe el nodo  $U$  en el sentido positivo como se observa en la Figura 3.13 para la frontera 2. Por lo que bajo el concepto de nodo espejo se considera un nodo

virtual fuera del sistema. Sin embargo, este concepto no es frecuentemente aplicado, en la Figura 3.14 se observa el concepto de nodo espejo.

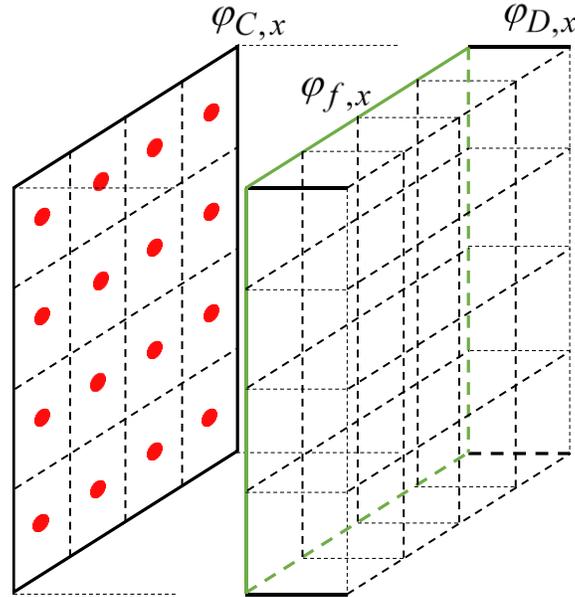


Figura 3. 13 Nodos adyacentes a la frontera.

En el caso del esquema STEP, es el esquema frecuentemente aplicado, dado que no se adiciona información que, de no ser implementada correctamente genera problemas numéricos como lo es el nodo espejo. Nuevamente considerando la Figura 3.13, además considerando las fronteras 1 y 5, la interpolación de las interfaces del nodo adyacente a la frontera dos se obtiene como:

$$\begin{aligned} & \left| \mu^m \underbrace{[I_e^m - I_w^m]}_{STEP,k} \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \underbrace{[I_n^m - I_s^m]}_{STEP,k} \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \underbrace{[I_t^m - I_b^m]}_{STEP,k} \Delta x \Delta y = \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta I_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + S_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + \underbrace{DC}_{(STEP-HO),k-1} \right. \right. \end{aligned} \quad (3.25a)$$

Donde:

$$DC = (a_E I_e^{STEP} - a_E I_e^{HO}) + (a_N I_n^{STEP} - a_N I_n^{HO}) + (a_T I_t^{STEP} - a_T I_t^{HO}) \quad (3.25b)$$

Se debe considerar que para cada intensidad existen solo una condición de frontera por dirección, es decir, solo existen tres condiciones de frontera para cada intensidad, por ejemplo, para la intensidad uno que surge de las fronteras 1,2 y 5 no aplica la

condición de frontera 3,4 y 6, dado que no surgen de estas sino que, solo inciden teniendo efecto de la intensidad sobre las fronteras 3,4 y 6, y no viceversamente.

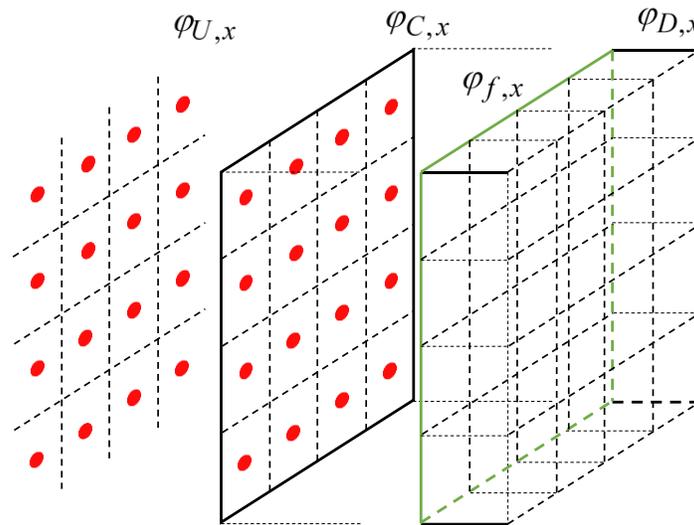


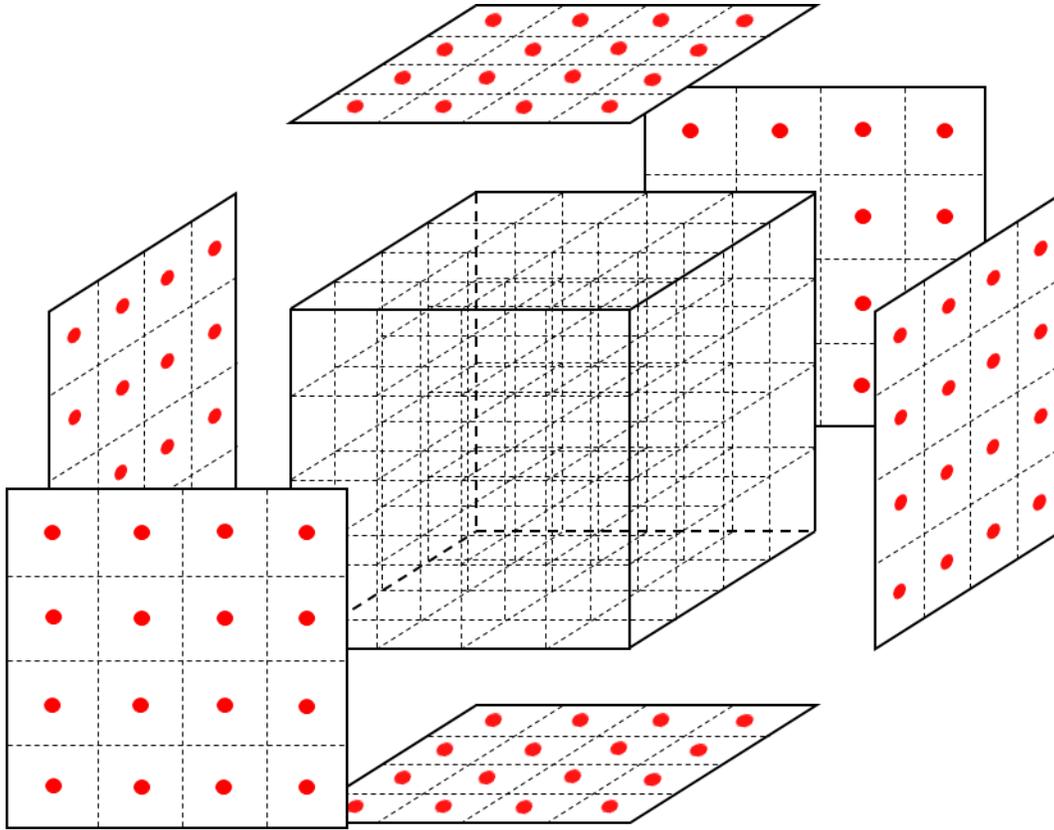
Figura 3. 14 Nodo espejo  $\varphi_{Ux}$  .

Como se puede observar, la Ecuación (3.25) es similar a la Ecuación (3.23). Sin embargo, dependiendo de la frontera y de la intensidad a considerar en el término DC se anula de manera natural la diferencia entre el esquema STEP y HO para la interfaz que corresponde. Por lo que la Ecuación (3.23) también aplica para los nodos frontera.

### 3.2.2.3 Discretización de nodos fronteras

Para la discretización de la condiciones de frontera se debe considerar los volúmenes de control de la frontera. En la Figura 3.15, se muestra los volúmenes de control del sistema, como se puede observar, la frontera es el área que rodea el sistema, por lo que su espesor solo será en dos direcciones.

Para la discretización se tiene que deducir la ecuación que representa el fenómeno de la transferencia de calor por radiación en las fronteras, para ello considérese la pared uno como pared opaca presentada en la Figura 3.15. En la pared incide la intensidad radiativa que surge de los nodos internos del sistema adyacentes. Debido a que la pared es opaca, la energía incidente es reflejada y emitida.



**Figura 3. 15** Volúmenes de control de las fronteras.

A partir de la Figura 3.16, se puede deducir la intensidad radiativa de la pared en términos de la intensidad radiativa del cuerpo negro y de la intensidad reflejada como:

$$I\left(\begin{matrix} \vec{r} \\ \hat{s} \end{matrix}\right) = \varepsilon I_{bn}\left(\begin{matrix} \vec{r} \\ \hat{s} \end{matrix}\right) + \frac{\rho}{\pi} \int_{\substack{\hat{s} \\ n \cdot \hat{s} < 0}} I\left(\begin{matrix} \hat{s} \\ \hat{s} \end{matrix}\right) |n \cdot \hat{s}| d\Omega \quad (3.26)$$

El valor de la reflectividad puede ser reescrita en términos de la emisividad como:

$$\rho = 1 - \varepsilon \quad (3.27)$$

En el caso de una pared negra, solo se tiene absorción y emisión, es decir, la pared emite toda la energía absorbida, por lo que el valor de la emisividad es igual al de absorción, al considerar lo mencionado, se tiene para una pared negra la Ecuación (3.28).

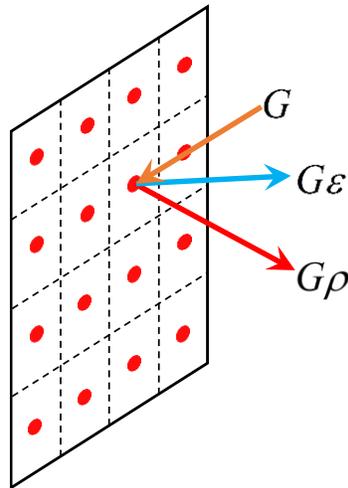


Figura 3. 16 Pared opaca para la discretización de las fronteras.

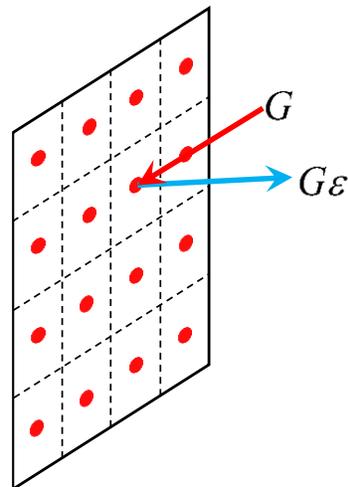


Figura 3. 17 Pared negra para la discretización de las fronteras.

$$I \begin{pmatrix} \rightarrow \\ r, s \end{pmatrix} = \varepsilon I_{bn} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ r \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Para la discretización de la Ecuación (3.26) nuevamente al igual que la RTE se tiene una integral. De la misma manera que la RTE para los nos internos, la ecuación para las fronteras se discretizan de la misma manera, es decir, la integral que se tiene en la ecuación de las fronteras, se simplifica a una sumatoria, ya que esta integral representa el área que es atravesada por la energía reflejada en cada dirección, en el caso de una pared opaca. Bajo esta consideración y considerando la Figura 3.18, la Ecuación (3.26) para cada pared considerada como opaca se tiene la Ecuación (3.29):

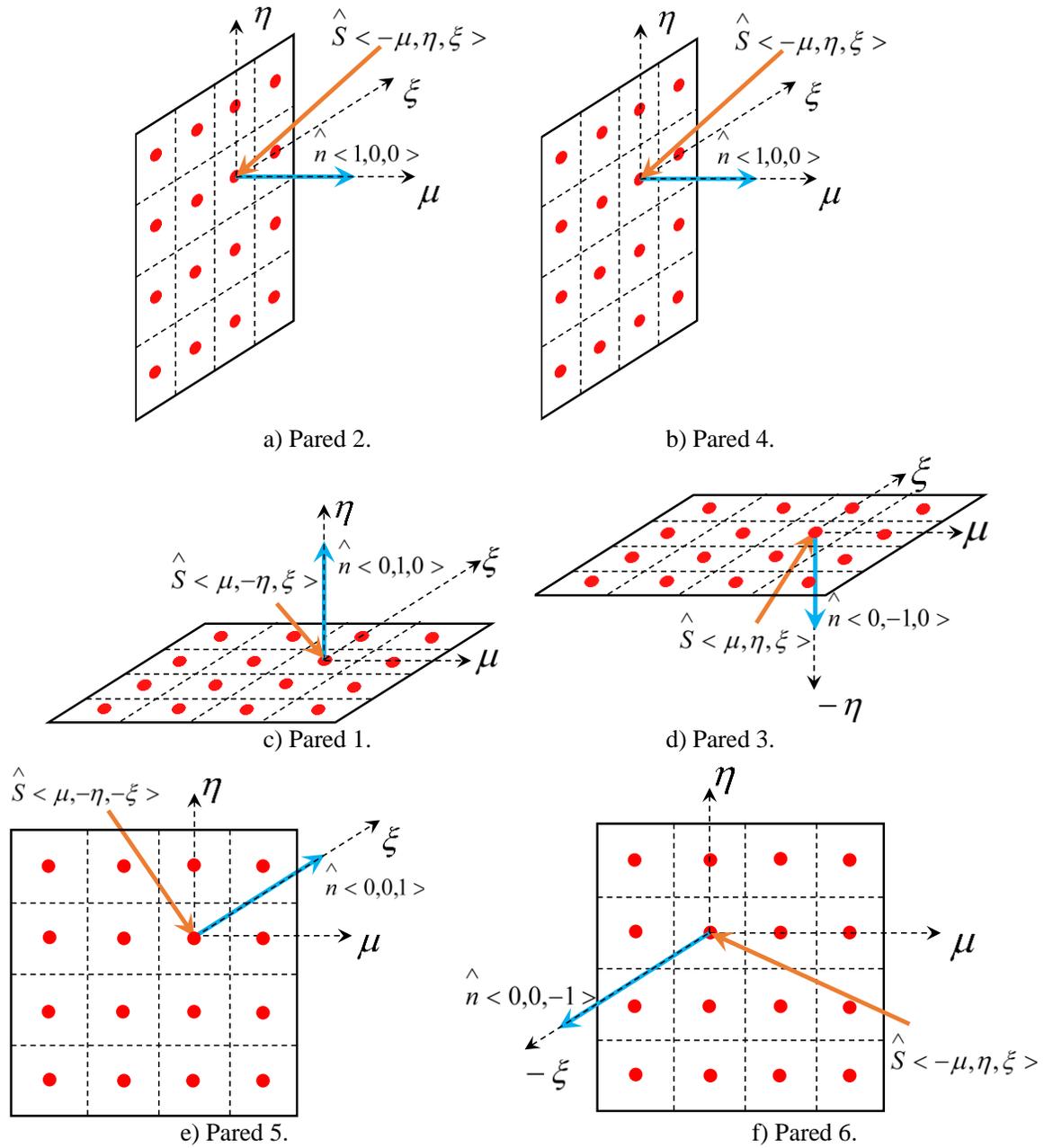


Figura 3. 18 Energía incidente en las fronteras para paredes negras.

$$I_1 = \varepsilon_1 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_1}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (3.29a)$$

$$I_2 = \varepsilon_2 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (3.29b)$$

$$I_3 = \varepsilon_3 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_3}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (3.29c)$$

$$I_4 = \varepsilon_4 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_4}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (3.29d)$$

$$I_5 = \varepsilon_5 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_5}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (3.29e)$$

$$I_6 = \varepsilon_6 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_6}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (3.29f)$$

Para paredes negras, el segundo término de la derecha de la igualdad es cero.

La metodología que se ha presentado, es la tradicionalmente implementada por la comunidad científica en la solución de la RTE a través de DOM y FVM. En el siguiente capítulo se presenta la nueva metodología a través de de DOM y FVM para la solución de la RTE.



# Capítulo 4

## Metodología: NWF

En este capítulo se describe una segunda metodología para la solución de la RTE en tres dimensiones con la implementación de dos métodos para la aproximación angular y espacial, los cuales son el DOM y FVM, respectivamente. A diferencia del capítulo anterior, en el segundo nivel de aproximación del FVM la implementación de los esquemas HO y HR son implementados con una nueva formulación matemática llamada NWF.

Para ambas discretizaciones es necesario definir el dominio computacional, para ello considere la Figura 3.1, cuya figura representa el sistema tridimensional general para los dos casos de estudios dividido en volúmenes de control. Posteriormente, cada volumen de control es dividido en volúmenes angulares mostrados en la Figura 3.2. En el caso de tres dimensiones se tiene octantes, para dos dimensiones cuadrantes y direcciones para una dimensión.

En la Figura 4.1 se muestra ejemplos de la variable en diferentes octantes, se observa de manera general que la variable (intensidad radiativa) tiene ocho direcciones diferentes, en este caso, solo se muestra dos octantes, el caso donde la variable tiene un flujo positivo en sus tres ejes coordenados indicados como  $I_1$  y el caso donde la variable tiene un flujo negativo en sus tres ejes indicado como  $I_7$  de acuerdo a la Figura 3.2.

Es importante tener en cuenta que a pesar de que la variable  $I_7$  tiene flujo negativo, se considera positivo, ya que considerar el signo negativo es representación de su

dirección y no de su magnitud, esto no solo aplica para las variables mencionadas, si no también para el resto que tiene al menos en un eje coordenada negativo.

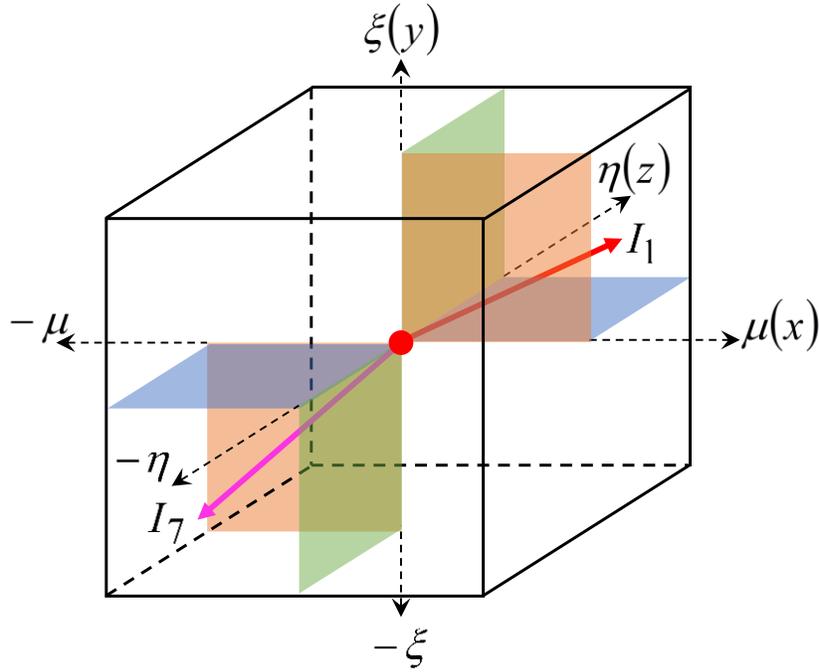


Figura 4. 1 Volumen de control dividido en octantes.

## 4.1 Metodología DOM

Para la solución de la RTE con la implementación de la segunda metodología, primero, nuevamente se considera la discretización angular. Para ello se considera de nuevo el DOM como metodología de aproximación angular. Dado que esta aproximación se ha abordado en el capítulo anterior, se retoma la Ecuación (3.2) señalada como Ecuación (4.1).

$$\left| \mu^m \right| \frac{\partial I}{\partial x} + \left| \xi^m \right| \frac{\partial I}{\partial y} + \left| \eta^m \right| \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I^m + \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \sum_{k=1}^M \left( \psi_i^k \right)^2 W_f^k I_{in}^k \quad (4.1)$$

El DOM se implementa solo para la discretización angular, como se mencionó en el capítulo anterior, la necesidad de implementar el DOM nace a partir del tercer término de lado derecho de la igualdad de la Ecuación (3.1), esto genera que la Ecuación sea de tipo integro-diferencial, por lo que se requiere simplificar esta ecuación. Para ello

se analiza el término integral, esta integral mencionada representa el área bajo la curva esférica que atraviesa la energía radiativa que surgen de los volúmenes adyacentes a un volumen principal y finalmente llega este mismo volumen principal, por ello la integral es evaluada con el valor de  $4\pi$ , esto genera una característica particular del DOM, que la suma de los pesos debe ser igual a  $4\pi$ , dado que los pesos representan el área mencionada y no cumplir esta propiedad significa que parte de esa área no interactúa (sí la sumatoria es menor que  $4\pi$ ) o el área es mayor de lo real (sí la sumatoria es mayor). También, se mencionó en el capítulo anterior que no considerar una cuadratura correcta, tendrá como resultado el efecto rayo y se comentó que hacer para disminuir este error numérico.

Por último, se debe tener en cuenta que los resultados obtenidos con el DOM o con otro método de aproximación presentan una desviación o error numérico a pesar de mejorar sus aproximaciones, esto se debe por dos razones, la primera por el truncamiento de términos o simplificación del modelo matemático y la segunda, debido al propio método que se emplee. Esto es importante considerar en el caso del DOM para la selección de un esquema de cuadratura, ya que existen diversos tipos de cuadraturas, las más conocidas son las  $S_n$  y las  $T_n$ . Las cuadraturas  $T_n$  surgen a partir de mejorar la exactitud de las  $S_n$ , dado que surgieron cuadraturas  $S_n$  con mayor número de direcciones. Sin embargo, las  $S_n$  con mayor número de direcciones no mejoraron demasiado la exactitud. Posteriormente surge el mismo problema con las  $T_n$ , por lo que nace las  $SRP_n$ , pioneros en este tipo de cuadratura es Li et al. (1998). Sin embargo, la exactitud no mejoró mucho. Nótese que esto demuestra que existe un límite, debido a que solamente se tiene una solución aproximada y no exacta.

## 4.2 Metodología FVM

De la misma manera que en el capítulo anterior, la discretización espacial de la RTE se realiza con la integración de la RTE a partir del volumen de control.

### 4.2.1 Primer nivel de aproximación

Con la integración de la Ecuación (4.1) a partir del volumen de control de la Figura 3.6 se tiene la Ecuación (4.2), como se observa, la implementación del FVM ocasiona que la variable quede en términos de la misma variable. Sin embargo ubicada en las interfaces del volumen principal de la Figura (3.6), como sigue:

$$\begin{aligned} \left| \mu^m \left[ I_e^m - I_w^m \right] \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \left[ I_n^m - I_s^m \right] \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \left[ I_t^m - I_b^m \right] \Delta x \Delta y = \right. \right. \\ \left. \left. - \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \right. \right. \end{aligned} \quad (4.2a)$$

Dónde:

$$S_P^m = \kappa_{abs} I_{bn} + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \sum_{k=1}^M \left( \psi_i^k \right)^2 W_f^k I_{in}^k \quad (4.2b)$$

### 4.2.2 Segundo nivel de aproximación NWF

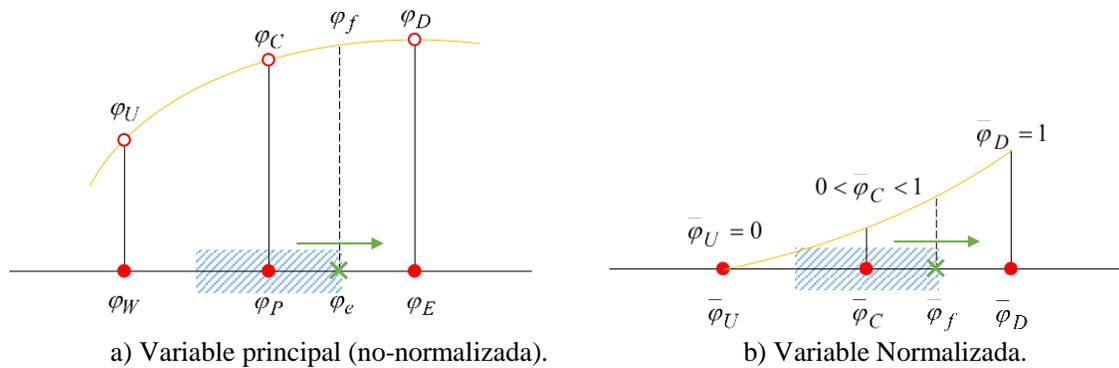
Debido a lo obtenido en el primer nivel de aproximación, se requiere una segunda aproximación. En el capítulo anterior se explica la forma de resolver este problema matemáticamente, lo cual es a partir de esquemas de interpolación espacial.

Como se mencionó en el Capítulo 1, de los primeros intentos por desplazar la formulación matemática DC para la implementación de esquemas de interpolación de alto orden por una formulación más rápida fue la propuesta por Moukalled et al. (1996), en el cual se presentó la formulación matemática NWF para problemas de convección-difusión y como resultados encontraron que era más rápida que DC al menos 50%. Sin embargo, nuevamente en 2001 los mismos autores evaluaron la formulación NWF en un problema de hidrodinámica y como resultados encontraron que no es tan rápida como DC para algunos casos de estudios, al contrario requiere mayor tiempo computacional. Debido a esto, la comunidad científica decidió seguir con la implementación de la formulación matemática DC.

A pesar de que la formulación NWF no fue considerada por la comunidad desde su inicio hasta la actualidad, Xamán et al. (2018) adoptaron la formulación NWF para la solución de la RTE. Por lo que evaluaron la formulación NWF para la solución de la RTE en dos dimensiones y de manera general se observó que variando algunos parámetros como la malla, el esquema de cuadratura, las propiedades radiativas del medio participante, entre otros, se tiene beneficio con la formulación NWF para algunos esquemas.

La formulación NWF nace a partir del análisis de NVF y NVD. En el capítulo anterior se mencionó el concepto de NVF y NVD. Sin embargo, debido a que es la base para el desarrollo de la formulación NWF se presenta de nuevo, para ello considérese que con la interpolación de la variable de la interfaz a partir de los nodos principales vecinos con esquemas HO se tiene de manera general como:

$$\varphi_f = a\varphi_U + b\varphi_C + c\varphi_D \quad (4.3)$$



**Figura 4. 2** Variable en nodos principales.

En la Figura 4.2 se presenta nuevamente el concepto de variable normalizada, a partir de esta figura, se tiene que:

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} \quad (4.4)$$

Aplicando la normalización a la variable en los nodos principales, se tiene:

$$\bar{\varphi}_U = \frac{\varphi_U - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} = 0 \quad (4.5a)$$

$$\bar{\varphi}_C = \frac{\varphi_C - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} \quad (4.5b)$$

$$\bar{\varphi}_D = \frac{\varphi_D - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} = 1 \quad (4.5c)$$

Para la variable en la interfaz se tiene:

$$\bar{\varphi}_f = \frac{\varphi_f - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} \quad (4.5d)$$

Todos los esquemas que aproximan la variable con tres nodos se expresan en función de la variable  $\bar{\varphi}_C$ . Por ejemplo, partiendo de la interpolación a través del esquema QUICK, se tiene que el valor de la variable en las interfaces del volumen de control principal en función de la variable principal en los nodos vecinos es:

$$\varphi_f = \frac{3}{8}\varphi_D + \frac{3}{4}\varphi_C - \frac{1}{8}\varphi_U \quad (4.6)$$

Normalizando las variables de la Ecuación (4.6) se tiene:

$$\bar{\varphi}_f = \frac{3}{8}(1) + \frac{3}{4}\bar{\varphi}_C - \frac{1}{8}(0) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\bar{\varphi}_C \quad (4.7)$$

Por lo tanto, la variable en las interfaces del volumen principal normalizada ( $\bar{\varphi}_f$ ) están en función de la variable normalizada  $\bar{\varphi}_C$ , graficando  $\bar{\varphi}_f$  en función de  $\bar{\varphi}_C$  para cada esquema HO de la Tabla A.1 se tiene el NVD de la Figura 4.3.

De acuerdo con la Figura 4.3 todos los esquemas HO pasan por el punto (0.5, 0.75). Posteriormente a través de este NVD surgen los esquemas HR para mejorar la exactitud de los esquemas HO.

De acuerdo a la Figura 4.3 y a la Ecuación (4.7) el valor de la variable normalizada ubicada en la interfaz del volumen de control principal es una pendiente de la forma:

$$\bar{\varphi}_f = k + mn \bar{\varphi}_C \quad (4.8)$$

Al considerarse la desnormalización de la variable en la interfaz del volumen de control principal de la Ecuación (4.8) con la sustitución de la Ecuación (4.5) se tiene:

$$\frac{\varphi_f - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} = k + mn \left( \frac{\varphi_C - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} \right) \quad (4.9a)$$

$$\varphi_f = k(\varphi_D - \varphi_U) + mn(\varphi_C - \varphi_U) + \varphi_U \quad (4.9b)$$

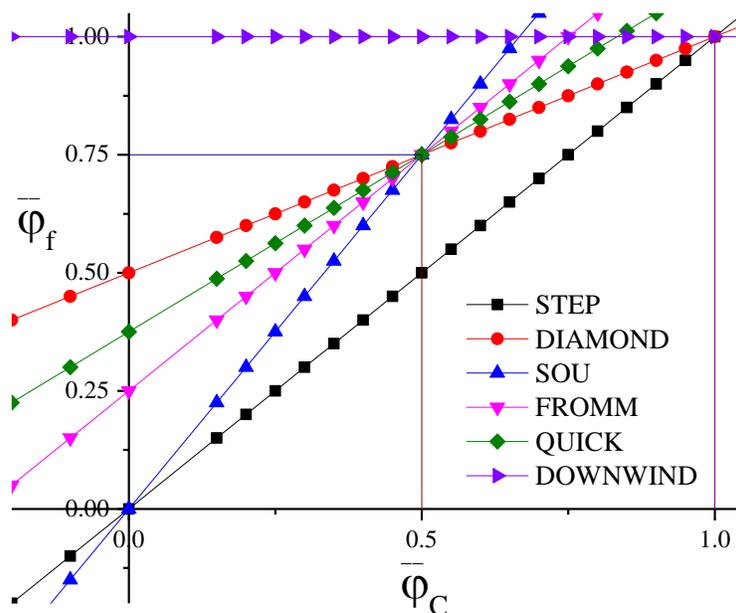


Figura 4. 3 NVD para diferentes esquemas.

De acuerdo a la desnormalización de la variable de la interfaz del volumen de control y a partir de la ecuación de la pendiente de los esquemas HO y HR (Ecuación (4.8)), el valor de la variable en la interfaz del volumen de control principal queda en función de los nodos vecinos principales y en función de los coeficientes de la pendiente  $mn$  y  $kk$ .

Considérese el caso del esquema QUICK en su forma normalizado de la Ecuación (4.7), en este esquema se tiene dos coeficientes,  $\frac{3}{8}$  y  $\frac{3}{4}$ , de acuerdo a la Ecuación (4.8) corresponde a los coeficientes  $kk$  y  $mm$ , respectivamente. Sustituyendo los valores mencionados en la Ecuación (4.9b) se tiene:

$$\varphi_f = \frac{3}{8}(\varphi_D - \varphi_U) + \frac{3}{4}(\varphi_C - \varphi_U) + \varphi_U \quad (4.10a)$$

$$\varphi_f = \frac{3}{8}\varphi_D + \frac{3}{4}\varphi_C - \frac{1}{8}\varphi_U \quad (4.10b)$$

Por lo tanto, el valor de la variable ubicada en la interfaz del volumen de control obtenido a través de la formulación NWF está dado por la ecuación (4.9), por lo que los esquemas de la Tabla A.1 se expresan con NWF como se muestra en la Tabla A.2.

#### 4.2.2.1 Discretización de nodos internos

Por reescribir la Ecuación (4.2) la cual, esta discretizada espacialmente, considerando que  $\varphi = I$  y considerando la Ecuación (4.9) se tiene lo siguiente de manera general:

$$\begin{aligned} & \left| \mu^m \left\{ [mm_e(I_C - I_U) + k_e(I_D - I_U) + I_U] - [mm_w(I_C - I_U) + k_w(I_D - I_U) + I_U] \right\} \Delta y \Delta z + \right. \\ & \left| \xi^m \left\{ [mm_n(I_C - I_U) + k_n(I_D - I_U) + I_U] - [mm_s(I_C - I_U) + k_s(I_D - I_U) + I_U] \right\} \Delta x \Delta z + \right. \\ & \left| \eta^m \left\{ [mm_t(I_C - I_U) + k_t(I_D - I_U) + I_U] - [mm_b(I_C - I_U) + k_b(I_D - I_U) + I_U] \right\} \Delta x \Delta y = \right. \\ & \qquad \qquad \qquad - \beta I_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + S_p^m \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.11) \end{aligned}$$

Para simplificación del desarrollo de la formulación NWF, solo considérese el cuadrante uno y siete, esto dado que el cuadrante uno tiene las tres direcciones en sentido positivo, mientras que el cuadrante siete es el caso contrario y ambos son representativos de los cuadrantes restantes.

Considerando el primer caso en el que el cuadrante es el uno y considerando la Figura 3.6 para la sustitución en la Ecuación (4.11), se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left| \mu^m \right| \left\{ \left[ mm_e (I_P - I_W) + k_e (I_E - I_W) + I_W \right] - \left[ mm_w (I_W - I_{WW}) + k_w (I_P - I_{WW}) + I_{WW} \right] \right\} \Delta y \Delta z \\
 & + \left| \xi^m \right| \left\{ \left[ mm_n (I_P - I_S) + k_n (I_N - I_S) + I_S \right] - \left[ mm_s (I_S - I_{SS}) + k_s (I_P - I_{SS}) + I_{SS} \right] \right\} \Delta x \Delta z \\
 & + \left| \eta^m \right| \left\{ \left[ mm_t (I_P - I_B) + k_t (I_T - I_B) + I_B \right] - \left[ mm_b (I_B - I_{BB}) + k_b (I_P - I_{BB}) + I_{BB} \right] \right\} \Delta x \Delta y = \\
 & \quad - \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mu^m \right] mm_e \Delta y \Delta z + \left[ \xi^m \right] mm_n \Delta x \Delta z + \left[ \eta^m \right] mm_t \Delta x \Delta y + \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \Big] I_P^m = \\
 & \quad \left[ \mu^m \right] mm_e \Delta y \Delta z \Big] I_W^m + \left[ \xi^m \right] mm_n \Delta x \Delta z \Big] I_S^m + \left[ \eta^m \right] mm_t \Delta x \Delta y \Big] I_B^m \\
 & - \left[ \mu^m \right] k_e \Delta y \Delta z \Big] I_E^m - \left[ \xi^m \right] k_n \Delta x \Delta z \Big] I_N^m - \left[ \eta^m \right] k_t \Delta x \Delta y \Big] I_T^m \\
 & - \left[ \mu^m \right] (1 - k_e - mm_w) \Delta y \Delta z \Big] I_W^m - \left[ \xi^m \right] (1 - k_n - mm_s) \Delta x \Delta z \Big] I_S^m - \left[ \eta^m \right] (1 - k_t - mm_b) \Delta x \Delta y \Big] I_B^m \\
 & - \left[ \mu^m \right] (-1 + k_w + mm_w) \Delta y \Delta z \Big] I_{WW}^m - \left[ \xi^m \right] (-1 + k_s + mm_s) \Delta x \Delta z \Big] I_{SS}^m \\
 & - \left[ \eta^m \right] (-1 + k_b + mm_b) \Delta x \Delta y \Big] I_{BB}^m \\
 & + \left[ \mu^m \right] k_w \Delta y \Delta z + \left[ \xi^m \right] k_s \Delta x \Delta z + \left[ \eta^m \right] k_b \Delta x \Delta y \Big] I_P^m + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Reagrupando términos se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mu^m \right] mm_e \Delta y \Delta z + \left[ \xi^m \right] mm_n \Delta x \Delta z + \left[ \eta^m \right] mm_t \Delta x \Delta y + \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \Big] I_P^m = \\
 & \quad \left[ \mu^m \right] mm_e \Delta y \Delta z \Big] I_W^m + \left[ \xi^m \right] mm_n \Delta x \Delta z \Big] I_S^m + \left[ \eta^m \right] mm_t \Delta x \Delta y \Big] I_B^m + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z + NWF
 \end{aligned} \tag{4.14a}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 NWF & = - \left[ \mu^m \right] k_e \Delta y \Delta z \Big] I_E^m - \left[ \xi^m \right] k_n \Delta x \Delta z \Big] I_N^m - \left[ \eta^m \right] k_t \Delta x \Delta y \Big] I_T^m \\
 & - \left[ \mu^m \right] (1 - k_e - mm_w) \Delta y \Delta z \Big] I_W^m - \left[ \xi^m \right] (1 - k_n - mm_s) \Delta x \Delta z \Big] I_S^m - \left[ \eta^m \right] (1 - k_t - mm_b) \Delta x \Delta y \Big] I_B^m \\
 & - \left[ \mu^m \right] (-1 + k_w + mm_w) \Delta y \Delta z \Big] I_{WW}^m - \left[ \xi^m \right] (-1 + k_s + mm_s) \Delta x \Delta z \Big] I_{SS}^m \\
 & - \left[ \eta^m \right] (-1 + k_b + mm_b) \Delta x \Delta y \Big] I_{BB}^m \\
 & + \left[ \mu^m \right] k_w \Delta y \Delta z + \left[ \xi^m \right] k_s \Delta x \Delta z + \left[ \eta^m \right] k_b \Delta x \Delta y \Big] I_P^m + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{4.14b}$$

Reagrupando el término NWF similarmente a DC se tiene:

$$\begin{aligned}
NWF = & \left| \mu^m \left\{ [mm_w (I_W^m - I_{WW}^m) + k_w (I_P^m - I_{WW}^m) + I_{WW}^m] - I_W^m \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
& + \left| \mu^m \left\{ I_P^m - [k_e (I_E^m - I_W^m) + I_P^m] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
& + \left| \xi^m \left\{ [mm_s (I_S^m - I_{SS}^m) + k_s (I_P^m - I_{SS}^m) + I_{SS}^m] - I_S^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
& + \left| \xi^m \left\{ I_P^m - [k_n (I_N^m - I_S^m) + I_P^m] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
& + \left| \eta^m \left\{ [mm_b (I_B^m - I_{BB}^m) + k_b (I_P^m - I_{BB}^m) + I_{BB}^m] - I_B^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \\
& \left. + \left| \eta^m \left\{ I_P^m - [k_t (I_T^m - I_B^m) + I_P^m] \right\} \Delta x \Delta y \right. \right. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Similarmente para el cuadrante siete se tienen lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left| \mu^m \left\{ [mm_e (I_E - I_{EE}) + k_e (I_P - I_{EE}) + I_{EE}] - [mm_w (I_P - I_E) + k_w (I_W - I_E) + I_E] \right\} \Delta y \Delta z + \right. \\
& \left| \xi^m \left\{ [mm_n (I_N - I_{NN}) + k_n (I_P - I_{NN}) + I_{NN}] - [mm_s (I_P - I_N) + k_s (I_S - I_N) + I_N] \right\} \Delta x \Delta z + \right. \\
& \left| \eta^m \left\{ [mm_t (I_T - I_{TT}) + k_t (I_P - I_{TT}) + I_{TT}] - [mm_b (I_P - I_T) + k_b (I_B - I_T) + I_T] \right\} \Delta x \Delta y = \right. \\
& \quad \left. - \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \right. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left| \mu^m \right| mm_w \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \right| mm_s \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \right| mm_b \Delta x \Delta y + \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \right] I_P^m = \\
& \left[ \left| \mu^m \right| mm_w \Delta y \Delta z \right] I_E^m + \left[ \left| \xi^m \right| mm_s \Delta x \Delta z \right] I_N^m + \left[ \left| \eta^m \right| mm_b \Delta x \Delta y \right] I_T^m \\
& - \left[ \left| \mu^m \right| k_w \Delta y \Delta z \right] I_W^m - \left[ \left| \xi^m \right| k_s \Delta x \Delta z \right] I_S^m - \left[ \left| \eta^m \right| k_b \Delta x \Delta y \right] I_B^m \\
& - \left[ \left| \mu^m \right| (1 - k_w - mm_e) \Delta y \Delta z \right] I_E^m - \left[ \left| \xi^m \right| (1 - k_s - mm_n) \Delta x \Delta z \right] I_N^m - \left[ \left| \eta^m \right| (1 - k_b - mm_t) \Delta x \Delta y \right] I_T^m \\
& - \left[ \left| \mu^m \right| (-1 + k_e + mm_e) \Delta y \Delta z \right] I_{EE}^m - \left[ \left| \xi^m \right| (-1 + k_n + mm_n) \Delta x \Delta z \right] I_{NN}^m \\
& - \left[ \left| \eta^m \right| (-1 + k_t + mm_t) \Delta x \Delta y \right] I_{TT}^m \\
& + \left[ \left| \mu^m \right| k_e \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \right| k_n \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \right| k_t \Delta x \Delta y \right] I_P^m + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left| \mu^m \right| mm_w \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \right| mm_s \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \right| mm_b \Delta x \Delta y + \beta I_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \right] I_P^m = \\
& \left[ \left| \mu^m \right| mm_w \Delta y \Delta z \right] I_E^m + \left[ \left| \xi^m \right| mm_s \Delta x \Delta z \right] I_N^m + \left[ \left| \eta^m \right| mm_b \Delta x \Delta y \right] I_T^m + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z + NWF \quad (4.18a)
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 NWF = & - \left[ \mu^m \left| k_w \Delta y \Delta z \right. \right] I_W^m - \left[ \xi^m \left| k_s \Delta x \Delta z \right. \right] I_S^m - \left[ \eta^m \left| k_b \Delta x \Delta y \right. \right] I_B^m \\
 & - \left[ \mu^m \left| (1 - k_w - mm_e) \Delta y \Delta z \right. \right] I_E^m - \left[ \xi^m \left| (1 - k_s - mm_n) \Delta x \Delta z \right. \right] I_N^m - \left[ \eta^m \left| (1 - k_b - mm_t) \Delta x \Delta y \right. \right] I_T^m \\
 & - \left[ \mu^m \left| (-1 + k_e + mm_e) \Delta y \Delta z \right. \right] I_{EE}^m - \left[ \xi^m \left| (-1 + k_n + mm_n) \Delta x \Delta z \right. \right] I_{NN}^m \\
 & - \left[ \eta^m \left| (-1 + k_t + mm_t) \Delta x \Delta y \right. \right] I_{TT}^m \\
 & + \left[ \mu^m \left| k_e \Delta y \Delta z + \xi^m \left| k_n \Delta x \Delta z + \eta^m \left| k_t \Delta x \Delta y \right. \right] I_P^m + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z \right.
 \end{aligned} \tag{4.18b}$$

Reagrupando términos del termino NWF similar a DC:

$$\begin{aligned}
 NWF = & \left| \mu^m \left\{ [mm_e (I_E^m - I_{EE}^m) + k_e (I_P^m - I_{EE}^m) + I_{EE}^m] - I_E^m \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \mu^m \left\{ I_P^m - [k_w (I_W^m - I_E^m) + I_P^m] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ [mm_n (I_N^m - I_{NN}^m) + k_n (I_P^m - I_{NN}^m) + I_{NN}^m] - I_N^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ I_P^m - [k_s (I_S^m - I_N^m) + I_P^m] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \eta^m \left\{ [mm_t (I_T^m - I_{TT}^m) + k_t (I_P^m - I_{TT}^m) + I_{TT}^m] - I_T^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \\
 & + \left| \eta^m \left\{ I_P^m - [k_b (I_B^m - I_T^m) + I_P^m] \right\} \Delta x \Delta y \right.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

De acuerdo con la Ecuación (4.14a), (4.15), (4.18a) y (4.19) la Ecuación de la RTE discretizada e interpolada en cada interfaz, se tiene la siguiente Ecuación de manera general para cualquier cuadrante:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left| \mu^m \left| mm_{out,x} \Delta y \Delta z + \xi^m \left| mm_{out,y} \Delta x \Delta z + \eta^m \left| mm_{out,z} \Delta x \Delta y + \beta \Delta x \Delta y \Delta z \right. \right] I_P^m = \right. \right. \\
 & \left. \left. \underbrace{\left[ \left| \mu^m \left| mm_{out,x} \Delta y \Delta z \right. \right] I_{iin,x}^m + \left[ \xi^m \left| mm_{out,y} \Delta x \Delta z \right. \right] I_{iin,y}^m + \left[ \eta^m \left| mm_{out,z} \Delta x \Delta y \right. \right] I_{iin,z}^m}_{kk} \right. \right. \\
 & \left. \left. + S_P^m \Delta x \Delta y \Delta z + \underbrace{NWF^m}_{kk-1} \right. \right.
 \end{aligned} \tag{4.20a}$$

Donde:

## 4.2. Metodología FVM

$$\begin{aligned}
 NWF^m = & \left| \mu^m \left\{ \left[ mm_{in,x} \left( I_{iin,x}^m - I_{iiniin,x}^m \right) + k_{in,x} \left( I_P^m - I_{iiniin,x}^m \right) + I_{iiniin,x}^m \right] - I_{iin,x}^m \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \mu^m \left\{ I_P^m - \left[ k_{out,x} \left( I_{oout,x}^m - I_{iin,x}^m \right) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ \left[ mm_{in,y} \left( I_{iin,y}^m - I_{iiniin,y}^m \right) + k_{in,y} \left( I_P^m - I_{iiniin,y}^m \right) + I_{iiniin,y}^m \right] - I_{iin,y}^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ I_P^m - \left[ k_{out,y} \left( I_{oout,y}^m - I_{iin,y}^m \right) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \eta^m \left\{ \left[ mm_{in,z} \left( I_{iin,z}^m - I_{iiniin,z}^m \right) + k_{in,z} \left( I_P^m - I_{iiniin,z}^m \right) + I_{iiniin,z}^m \right] - I_{iin,z}^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \\
 & + \left| \eta^m \left\{ I_P^m - \left[ k_{out,z} \left( I_{oout,z}^m - I_{iin,z}^m \right) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta y \right.
 \end{aligned} \tag{4.20b}$$

Siendo así, se tiene en la Tabla 4.1 las equivalencias de los subíndices para cada cuadrante.

**Tabla 4. 1** Equivalencias de subíndices para la Ecuación (4.20).

Subíndice	Cuadrante							
	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>in , x</i>	<i>w</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>w</i>
<i>in , y</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>n</i>	<i>n</i>
<i>in , z</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>t</i>
<i>out , x</i>	<i>e</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>e</i>
<i>out , y</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>s</i>	<i>s</i>
<i>out , z</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>iin , x</i>	<i>W</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>W</i>
<i>iin , y</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>N</i>	<i>N</i>
<i>iin , z</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>oout , x</i>	<i>E</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	<i>E</i>
<i>oout , y</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
<i>oout , z</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
<i>iiniin , x</i>	<i>WW</i>	<i>EE</i>	<i>EE</i>	<i>WW</i>	<i>WW</i>	<i>EE</i>	<i>EE</i>	<i>WW</i>
<i>iiniin , y</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>NN</i>	<i>NN</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>NN</i>	<i>NN</i>
<i>iiniin , z</i>	<i>BB</i>	<i>BB</i>	<i>BB</i>	<i>BB</i>	<i>TT</i>	<i>TT</i>	<i>TT</i>	<i>TT</i>

Reagrupando la Ecuación (4.20) en términos de coeficientes agrupados se tiene lo siguiente:

$$a_p I_p^m = a_{in,x} I_{iin,x}^m + a_{in,y} I_{iin,y}^m + a_{in,z} I_{iin,z}^m + b_p^m \quad (4.21a)$$

Donde:

$$a_p = \left| \mu^m \right| mm_{out,x} \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \right| mm_{out,y} \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \right| mm_{out,z} \Delta x \Delta y + \beta I_p^m \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.21b)$$

$$a_{in,x} = \left| \mu^m \right| mm_{out,x} \Delta y \Delta z \quad (4.21c)$$

$$a_{in,y} = \left| \xi^m \right| mm_{out,y} \Delta x \Delta z \quad (4.21d)$$

$$a_{in,z} = \left| \eta^m \right| mm_{out,z} \Delta x \Delta y \quad (4.21e)$$

$$b_p^m = S_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + NWF^m \quad (4.21f)$$

Nótese que como resultado de la interpolación de la variable de la interfaz del volumen de control principal con los esquemas HO a través de la formulación NWF es similar que lo obtenido con la DC. Sin embargo, obsérvese que con la formulación NWF, el coeficiente  $a_p$  es relajado con los coeficientes  $kk$  y  $mm$ . Por lo que el coeficiente  $a_p$  está en función de los coeficientes  $kk$  y  $mm$ , dependiendo del esquema de interpolación. Es importante esta observación dado que para la formulación DC carece de este relajación, dicha relajación en la formulación NWF, ayuda o perjudica a sobrellevar de manera más estable las oscilaciones, es decir entre iteraciones se disminuye los cambios brusco de la variable, los cuales ocasionan mayor número de iteraciones consumidas en la formulación DC.

#### 4.2.2.2 Discretización de nodos adyacentes a las fronteras

En el caso de la discretización de los nodos fronteras, se tiene el mismo caso descrito en el capítulo anterior, de manera general, se tiene dos aproximaciones para los nodos adyacentes a la frontera, a partir de nodos espejos mostrado en la Figura 3.14 y a partir

de la aproximación con el esquema STEP. La necesidad de implementar alguna de estas aproximaciones mencionadas es debido que, para la interfaz del volumen de control adyacente a la frontera que traspala con el nodo frontera no se tiene dos nodos atrás de la interfaz, sino solo el nodo frontera, como se muestra en la Figura 3.13. La aproximación mayormente implementada es el STEP para la discretización del nodo mencionado.

Al igual que la formulación DC para la discretización del nodo adyacente a la frontera, con la implementación del esquema STEP, la formulación NWF de la Ecuación (4.20) se simplifica para  $I_1$  para el nodo adyacente a la frontera uno como:

$$\begin{aligned} & \left[ \mu^m \left| mm_e \Delta y \Delta z + \xi^m \left| mm_n \Delta x \Delta z + \eta^m \left| mm_t \Delta x \Delta y + \beta I_p^m \Delta x \Delta y \Delta z \right. \right. \right] I_p^m = \\ & \left[ \mu^m \left| mm_e \Delta y \Delta z \right. \right] I_w^m + \left[ \xi^m \left| mm_n \Delta x \Delta z \right. \right] I_s^m + \left[ \eta^m \left| mm_t \Delta x \Delta y \right. \right] I_b^m + S_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + NWF \end{aligned} \quad (4.22a)$$

Donde:

$$\begin{aligned} NWF = & \left| \mu^m \left[ \left\{ mm_w \left( I_W^m - I_{WW}^m \right) + k_w \left( I_P^m - I_{WW}^m \right) + I_{WW}^m \right\} - I_W^m \right] \Delta y \Delta z \right. \\ & + \left| \mu^m \left[ \left\{ I_P^m - \left[ k_e \left( I_E^m - I_W^m \right) + I_P^m \right] \right\} \right] \Delta y \Delta z \right. \\ & + \left| \xi^m \left[ \left\{ I_P^m - \left[ k_n \left( I_N^m - I_S^m \right) + I_P^m \right] \right\} \right] \Delta x \Delta z \right. \\ & + \left| \eta^m \left[ \left\{ mm_b \left( I_B^m - I_{BB}^m \right) + k_b \left( I_P^m - I_{BB}^m \right) + I_{BB}^m \right\} - I_B^m \right] \Delta x \Delta y \right. \\ & + \left| \eta^m \left[ \left\{ I_P^m - \left[ k_t \left( I_T^m - I_B^m \right) + I_P^m \right] \right\} \right] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (4.22b)$$

Para el nodo frontera adyacente a la frontera dos para  $I_1$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
 NWF &= \left| \mu^m \left\{ I_P^m - \left[ k_e (I_E^m - I_W^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 &+ \left| \xi^m \left\{ \left[ mm_s (I_S^m - I_{SS}^m) + k_s (I_P^m - I_{SS}^m) + I_{SS}^m \right] - I_S^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 &+ \left| \xi^m \left\{ I_P^m - \left[ k_n (I_N^m - I_S^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 &+ \left| \eta^m \left\{ \left[ mm_b (I_B^m - I_{BB}^m) + k_b (I_P^m - I_{BB}^m) + I_{BB}^m \right] - I_B^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \\
 &+ \left. \left| \eta^m \left\{ I_P^m - \left[ k_t (I_T^m - I_B^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta y \right. \right.
 \end{aligned} \tag{4.22c}$$

Para el nodo adyacente a la frontera tres se tiene:

$$\begin{aligned}
 NWF &= \left| \mu^m \left\{ \left[ mm_w (I_W^m - I_{WW}^m) + k_w (I_P^m - I_{WW}^m) + I_{WW}^m \right] - I_W^m \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 &+ \left| \mu^m \left\{ I_P^m - \left[ k_e (I_E^m - I_W^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 &+ \left| \xi^m \left\{ \left[ mm_s (I_S^m - I_{SS}^m) + k_s (I_P^m - I_{SS}^m) + I_{SS}^m \right] - I_S^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 &+ \left| \eta^m \left\{ \left[ mm_b (I_B^m - I_{BB}^m) + k_b (I_P^m - I_{BB}^m) + I_{BB}^m \right] - I_B^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \\
 &+ \left. \left| \eta^m \left\{ I_P^m - \left[ k_t (I_T^m - I_B^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta y \right. \right.
 \end{aligned} \tag{4.22d}$$

Para el nodo adyacente a la frontera cuatro se tiene:

$$\begin{aligned}
 NWF &= \left| \mu^m \left\{ \left[ mm_w (I_W^m - I_{WW}^m) + k_w (I_P^m - I_{WW}^m) + I_{WW}^m \right] - I_W^m \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 &+ \left| \xi^m \left\{ \left[ mm_s (I_S^m - I_{SS}^m) + k_s (I_P^m - I_{SS}^m) + I_{SS}^m \right] - I_S^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 &+ \left| \xi^m \left\{ I_P^m - \left[ k_n (I_N^m - I_S^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 &+ \left| \eta^m \left\{ \left[ mm_b (I_B^m - I_{BB}^m) + k_b (I_P^m - I_{BB}^m) + I_{BB}^m \right] - I_B^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \\
 &+ \left. \left| \eta^m \left\{ I_P^m - \left[ k_t (I_T^m - I_B^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta y \right. \right.
 \end{aligned} \tag{4.22e}$$

Para el nodo adyacente a la frontera cinco se tiene:

$$\begin{aligned}
 NWF = & \left| \mu^m \right| \left\{ \left[ mm_w (I_W^m - I_{WW}^m) + k_w (I_P^m - I_{WW}^m) + I_{WW}^m \right] - I_W^m \right\} \Delta y \Delta z \\
 & + \left| \mu^m \right| \left\{ I_P^m - \left[ k_e (I_E^m - I_W^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \\
 & + \left| \xi^m \right| \left\{ \left[ mm_s (I_S^m - I_{SS}^m) + k_s (I_P^m - I_{SS}^m) + I_{SS}^m \right] - I_S^m \right\} \Delta x \Delta z \\
 & + \left| \xi^m \right| \left\{ I_P^m - \left[ k_n (I_N^m - I_S^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \\
 & + \left| \eta^m \right| \left\{ I_P^m - \left[ k_t (I_T^m - I_B^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta y
 \end{aligned} \tag{4.22f}$$

Para el nodo adyacente a la frontera seis se tiene:

$$\begin{aligned}
 NWF = & \left| \mu^m \right| \left\{ \left[ mm_w (I_W^m - I_{WW}^m) + k_w (I_P^m - I_{WW}^m) + I_{WW}^m \right] - I_W^m \right\} \Delta y \Delta z \\
 & + \left| \mu^m \right| \left\{ I_P^m - \left[ k_e (I_E^m - I_W^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \\
 & + \left| \xi^m \right| \left\{ \left[ mm_s (I_S^m - I_{SS}^m) + k_s (I_P^m - I_{SS}^m) + I_{SS}^m \right] - I_S^m \right\} \Delta x \Delta z \\
 & + \left| \xi^m \right| \left\{ I_P^m - \left[ k_n (I_N^m - I_S^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \\
 & + \left| \eta^m \right| \left\{ \left[ mm_b (I_B^m - I_{BB}^m) + k_b (I_P^m - I_{BB}^m) + I_{BB}^m \right] - I_B^m \right\} \Delta x \Delta y
 \end{aligned} \tag{4.22g}$$

La discretización de los nodos adyacentes a las fronteras para  $I_7$  se realiza de la misma manera con la implementación del esquema STEP para las interfaces que traslapan con los nodos fronteras, por lo que para la frontera uno se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left| \mu^m \right| mm_w \Delta y \Delta z + \left| \xi^m \right| mm_s \Delta x \Delta z + \left| \eta^m \right| mm_b \Delta x \Delta y + \beta I_p^m \Delta x \Delta y \Delta z \right] I_p^m = \\
 & \left[ \left| \mu^m \right| mm_w \Delta y \Delta z \right] I_E^m + \left[ \left| \xi^m \right| mm_s \Delta x \Delta z \right] I_N^m + \left[ \left| \eta^m \right| mm_b \Delta x \Delta y \right] I_T^m + S_p^m \Delta x \Delta y \Delta z + NWF
 \end{aligned} \tag{4.23a}$$

Donde:



$$\begin{aligned}
 NWF = & \left| \mu^m \left\{ I_P^m - \left[ k_w (I_W^m - I_E^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ \left[ mm_n (I_N^m - I_{NN}^m) + k_n (I_P^m - I_{NN}^m) + I_{NN}^m \right] - I_N^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ I_P^m - \left[ k_s (I_S^m - I_N^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \eta^m \left\{ \left[ mm_t (I_T^m - I_{TT}^m) + k_T (I_P^m - I_{TT}^m) + I_{TT}^m \right] - I_T^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \\
 & \left. + \left| \eta^m \left\{ I_P^m - \left[ k_b (I_B^m - I_T^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta y \right. \right.
 \end{aligned} \tag{4.23e}$$

Para el nodo adyacente a la frontera cinco se tiene:

$$\begin{aligned}
 NWF = & \left| \mu^m \left\{ \left[ mm_e (I_E^m - I_{EE}^m) + k_e (I_P^m - I_{EE}^m) + I_{EE}^m \right] - I_E^m \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \mu^m \left\{ I_P^m - \left[ k_w (I_W^m - I_E^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ \left[ mm_n (I_N^m - I_{NN}^m) + k_n (I_P^m - I_{NN}^m) + I_{NN}^m \right] - I_N^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ I_P^m - \left[ k_s (I_S^m - I_N^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & \left. + \left| \eta^m \left\{ \left[ mm_t (I_T^m - I_{TT}^m) + k_T (I_P^m - I_{TT}^m) + I_{TT}^m \right] - I_T^m \right\} \Delta x \Delta y \right. \right.
 \end{aligned} \tag{4.23f}$$

Para el nodo adyacente a la frontera seis se tiene:

$$\begin{aligned}
 NWF = & \left| \mu^m \left\{ \left[ mm_e (I_E^m - I_{EE}^m) + k_e (I_P^m - I_{EE}^m) + I_{EE}^m \right] - I_E^m \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \mu^m \left\{ I_P^m - \left[ k_w (I_W^m - I_E^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta y \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ \left[ mm_n (I_N^m - I_{NN}^m) + k_n (I_P^m - I_{NN}^m) + I_{NN}^m \right] - I_N^m \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & + \left| \xi^m \left\{ I_P^m - \left[ k_s (I_S^m - I_N^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta z \right. \\
 & \left. + \left| \eta^m \left\{ I_P^m - \left[ k_b (I_B^m - I_T^m) + I_P^m \right] \right\} \Delta x \Delta y \right. \right.
 \end{aligned} \tag{4.23g}$$

Para el resto de las intensidades, análogamente aplica la discretización de las intensidades  $I_1$  y  $I_7$  como combinación de sus tres ejes de dirección.

### 4.2.2.3 Discretización de nodos fronteras

Por último, la discretización de los nodos fronteras a través de la metodología presentada en este capítulo es similar que la explicada en el capítulo anterior, ya que la discretización de los nodos frontera es la discretización de las condiciones de fronteras, por lo que las condiciones de fronteras discretizadas tanto para la metodología del capítulo anterior como la metodología de este capítulo son:

$$I_1 = \varepsilon_1 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_1}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (4.24a)$$

$$I_2 = \varepsilon_2 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (4.24b)$$

$$I_3 = \varepsilon_3 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_3}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (4.24c)$$

$$I_4 = \varepsilon_4 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_4}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (4.24d)$$

$$I_5 = \varepsilon_5 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_5}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (4.24e)$$

$$I_6 = \varepsilon_6 I_{bn} + \frac{1 - \varepsilon_6}{\pi} \sum_{k=1}^M W^k \mu^k I_{in}^k \quad (4.24f)$$

Estas condiciones de fronteras discretizadas son para una pared opaca, mientras que para una pared negra se tiene:

$$I_1 = \varepsilon_1 I_{bn} \quad (4.25a)$$

$$I_2 = \varepsilon_2 I_{bn} \quad (4.25b)$$

$$I_3 = \varepsilon_3 I_{bn} \quad (4.25c)$$

$$I_4 = \varepsilon_4 I_{bn} \quad (4.25d)$$

$$I_5 = \varepsilon_5 I_{bn} \quad (4.25e)$$

$$I_6 = \varepsilon_6 I_{bn} \quad (4.25f)$$

En ambos tipos de condiciones de frontera la intensidad de cuerpo negro se define como:

$$I_{bn} = \frac{\sigma_{stefan} T^4}{\pi} \quad (4.26)$$

## 4.3 Método de solución de ecuaciones algebraicas

Anteriormente se presentó las metodologías de solución del modelo matemático de transporte radiativo con medio participante. Sin embargo, estas metodologías ya sea para la discretización angular o espacial, solo aproximan la Ecuación de interés (RTE) a una expresión menos compleja, por lo que la RTE pasa de ser una ecuación de tipo integro-diferencial a ecuación de tipo algebraica. Además, dado que la RTE ha sido aproximada a partir de un volumen espacial, entonces como resultado de la discretización de la RTE se tiene una cantidad de ecuaciones algebraicas del sistema, para definir esta cantidad de ecuaciones considérese la Ecuación (4.27).

$$N_{ea} = N_x \cdot N_y \cdot N_z \quad (4.27)$$

Donde:

$N_{ea}$  es el número total de ecuaciones algebraicas.

Para la solución de las ecuaciones algebraicas resultantes de la discretización se debe tener en cuenta una cuarta dirección la cual, representa la dirección angular, por lo que considerando la dirección angular representada por el número de direcciones considerada por cada esquema cuadratura, la Ecuación (4.27) es reescrita como:

$$N_{ea} = N_x \cdot N_y \cdot N_z \cdot N_m \quad (4.28)$$

Donde:

$N_m$  es el número de direcciones dependiente del esquema de cuadratura.

La Ecuación (4.28) representa la cantidad total de ecuaciones algebraicas considerando las tres direcciones coordenadas y la dirección angular de cada nodo. Este conjunto de ecuaciones algebraicas generan un matriz de ecuaciones algebraicas, la cual puede ser una matriz de tipo tridiagonal, pentadiagonal, hectadiagonal, entre otras. El tipo de matriz dependerá de lo que resulte a partir del segundo nivel de aproximación. Normalmente cuando se considera solamente dos nodos vecinos con los que se aproximan la variable en el nodo principal, se tiene como producto, una matriz tridiagonal, en el caso de una matriz pentadiagonal cuando se considera cuatro nodos vecinos y hectadiagonal considerando seis nodos.

De acuerdo a la Ecuación (4.21) para la RTE en términos de coeficiente agrupados se tiene una matriz de cuatro bandas de coeficientes. Se debe tener en consideración que la matriz debe ser diagonalmente dominante, es decir, la suma de los coeficientes vecinos, debe ser igual al coeficiente principal considerándose que el coeficiente  $b_p = 0$ , como se muestra en la Ecuación (4.29).

$$a_p = \sum a_{vecinos} \quad (4.29)$$

Lo anterior es de suma importancia para la selección del método de solución de ecuaciones algebraicas a emplear en la solución de la RTE. Existen diferentes métodos

### 4.3. Método de solución de ecuaciones algebraicas

---

de solución de ecuaciones algebraicas, entre ellos, el método de Jacobi, Gauss-Seidel, TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm por sus siglas en inglés*), derivados del TDMA, entre otros.

En el caso del método Jacobi, el valor de la variable se resuelve con la variable de la iteración anterior, como se muestra en la Ecuación (4.30).

$$a_P I_{P,k}^m = a_{in,x} I_{in,x,k-1}^m + a_{in,y} I_{in,y,k-1}^m + a_{in,y} I_{in,y,k-1}^m + b_P^m \quad (4.30)$$

Con el método Gauss-Seidel, la variable es resuelta con esta misma, tanto del valor de iteración del nodo siguiente como el valor obtenido nuevo, es decir, ocupa el valor obtenido del nodo anterior en la misma iteración, como se muestra en la Ecuación (4.31) y de ser así, el valor del nodo siguiente la iteración anterior.

$$a_P I_{P,k}^m = a_{in,x} I_{in,x,k}^m + a_{in,y} I_{in,y,k}^m + a_{in,y} I_{in,y,k}^m + b_P^m \quad (4.31)$$

Con la implementación del método Gauss-Seidel, la solución se acelera con respecto a la obtenida con el método de Jacobi. Para matrices tridiagonal, pentadiagonal y hectadiagonal el número de iteraciones requeridas por el método Jacobi se reduce hasta un 50% con el método Gauss-Seidel. En este trabajo se ha empleado el método de Gauss-Seidel debido a su aceleración respecto al método Jacobi.

## 4.4 Relajación de la solución de la RTE

Durante el proceso iterativo para la solución de la RTE, la solución de la variable sufre cambios con tendencia a la convergencia o a la divergencia. Esto dependerá de la complejidad del sistema, es decir, a su no-linealidad, además, de la capacidad del esquema de interpolación espacial y de la capacidad del método de solución algebraico. Sin embargo, en el caso de los esquemas de interpolación es propio de su capacidad y de ser modificado se tiene como resultado un nuevo esquema de

interpolación. En el caso del método de solución de ecuaciones algebraicas, algunos tienen la capacidad de sobrellevar en el proceso iterativo los problemas que generan la no-convergencia por su naturaleza matemática, es decir, puede o no requerir la implementación de relajación.

El paso de cambio de la solución de la variable de iteración a iteración es de uno, es decir, el valor de la variable de la iteración actual es dependiente de sí misma obtenida en la iteración actual como se observa en la Ecuación (4.32) en términos de coeficientes agrupados (Xamán y Gijón-Rivera, 2016). Sin embargo, en problemas altamente no-líneas, este paso de la variable puede ser reflejado en el proceso iterativo como inestabilidad de la solución, esto se debe al cambio brusco de la variable durante el proceso iterativo.

$$I_P^m = \frac{\sum a_{vecinos} + b_P^m}{a_P} \quad (4.32)$$

Durante el proceso iterativo el cambio de la variable se acelera o se desacelera a través del concepto, relajación. En el caso de aceleración, se le conoce como sobre-relajación y como bajo-relajación para el caso de desaceleración.

Introduciendo el concepto de relajación a la Ecuación (4.32), considérese primeramente que ahora el cambio de la variable está en función de la misma variable obtenida en la iteración actual y de la iteración anterior, entonces la Ecuación (4.32) se tiene reescrita como:

$$I_P^m = I_{P\ k-1}^m + \left( \frac{\sum a_{vecinos} + b_P^m}{a_P} + I_{P\ k-1}^m \right) \quad (4.33a)$$

Considérese de la Ecuación (4.33) que el cambio de la variable solo es por la misma variable de la iteración actual, el valor de la variable de la iteración anterior se anula, entonces el término que genera un cambio en la variable entre iteraciones es el término entre paréntesis de la Ecuación (4.33). Sin embargo, este cambio puede ser contralado

a partir de un factor, llamado factor de relajación ( $\alpha$ ). Posteriormente de haber identificado el término que genera un cambio en el paso de la variable de una iteración a otra, este término se controla con el factor de relación de la siguiente manera:

$$I_P^m = I_{P\ k-1}^m + \alpha \left( \frac{\sum a_{vecinos} + b_P^m}{a_P} + I_{P\ k-1}^m \right) \quad (4.34)$$

Entonces la variable relaja es:

$$I_{P\alpha}^m = I_{P\ k-1}^m + \alpha (I_P^m + I_{P\ k-1}^m) \quad (4.35)$$

Para  $\alpha > 1$  el valor de la variable es sobre-relajado, para  $0 < \alpha < 1$  el valor de la variable es bajo-relajado, mientras que para  $\alpha = 1$  el valor de la variable no es relajado.

La relajación de la variable se implementa de dos maneras distintas, la primera, se obtiene el valor de la variable de todo el sistema y posteriormente se relaja, y la segunda, conocida como punto por punto, en este caso, el valor de la variable es relajado en cuanto ha sido obtenido en un nodo del sistema, posteriormente se realiza el mismo procedimiento para el resto de los nodos del sistema.

La ventaja de la relajación punto por punto, es que la información de la frontera es llevada hacia los nodos interiores de manera estable, ya que conforme se recorre los nodos, los gradientes de la variable entre nodos no son bruscos, por lo que para problemas altamente no lineales se estabiliza la variable con el recorrido de los nodos del sistema. Por ello, en este trabajo se ha establecido implementar la relajación punto por punto.

## 4.5 Criterio de convergencia

Cuando se hace uso de un método iterativo para la solución de la RTE o alguna otra variable de interés, se obtiene un error numérico, dado que la variable es aproximada.

La variable tiende a la convergencia si su aproximación se acerca al valor real de la variable. Sin embargo, existe una diferencia entre la solución aproximada y la solución real del sistema, ya sea una diferencia significativa o no, esta diferencia dependerá del truncamiento de términos en el modelo matemático del fenómeno, de los métodos de solución para la discretización del modelo matemático y del método solución de ecuaciones algebraicas. Cuando la solución tiende a alejarse del valor real, la variable tiende a diverger. Mientras que existen casos, donde la solución se aproxima al valor real de la variable y tiende a ya no cambiar o ya no alcanzar el valor real, entonces se dice que la solución ya no cambia y que el método ha proporcionada la solución de la variable con la más mínima incertidumbre. Por ello es importante establecer un criterio de convergencia. De acuerdo con Coelho (2002), el criterio de convergencia para un medio participante es obtenido a través del error de la irradiancia de cada nodo como:

$$residual = \left| \frac{G_k - G_{k-1}}{G_{k-1}} \right| < \varepsilon_{error} \quad (4.36)$$

Donde:

$$\varepsilon_{error} = 1 \times 10^{-6}$$

La metodología de solución de ecuaciones algebraicas, la relajación de la solución de la variable y el criterio de convergencia han sido implementados para ambas metodologías de solución, DOM-FVM-DC y DOM-FVM-NWF.

Por último, de manera general en el Figura 4.4 se presenta el diagrama de flujo para la solución de la RTE con la implementación diversos esquemas HO y HR a través de la formulación NWF y DC. De acuerdo con la figura mencionada, inicialmente se introduce los datos del sistema, como lo es, las propiedades radiativas del medio, las dimensiones del sistema, las propiedades radiativas del recinto. Posteriormente, se realiza la selección del parámetro a variar, ya sea el esquema de interpolación o las

propiedades del medio o de la cavidad. Seguido de esto, se declaran las variables principales, como lo es, la intensidad radiativa, la temperatura, entre otras. Además, se declaran las variables secundarias, por ejemplo los coeficientes. Posterior a todo esto, inicia la solución de la RTE en tres dimensiones con el arranque de la intensidad radiativa con un valor adivinado, seguido del llamado de la función de la malla y de las cuadraturas. En seguida de esto se calcula las fronteras para la solución de la RTE en los nodos internos. En el caso de la cavidad cúbica solo se obtiene el valor de la intensidad radiativa seguido de esto se calcula la energía radiativa incidente en cada volumen y de no cumplir con el criterio de convergencia, se itera nuevamente, hasta cumplirse el criterio de convergencia. En el caso del horno rectangular tridimensional, se calcula además, el campo de temperatura del medio y de no cumplirse el criterio de convergencia se itera hasta cumplirse. Finalmente, al cumplirse el criterio de convergencia para ambos casos, se calcula el flux de calor y el rendimiento computacional.

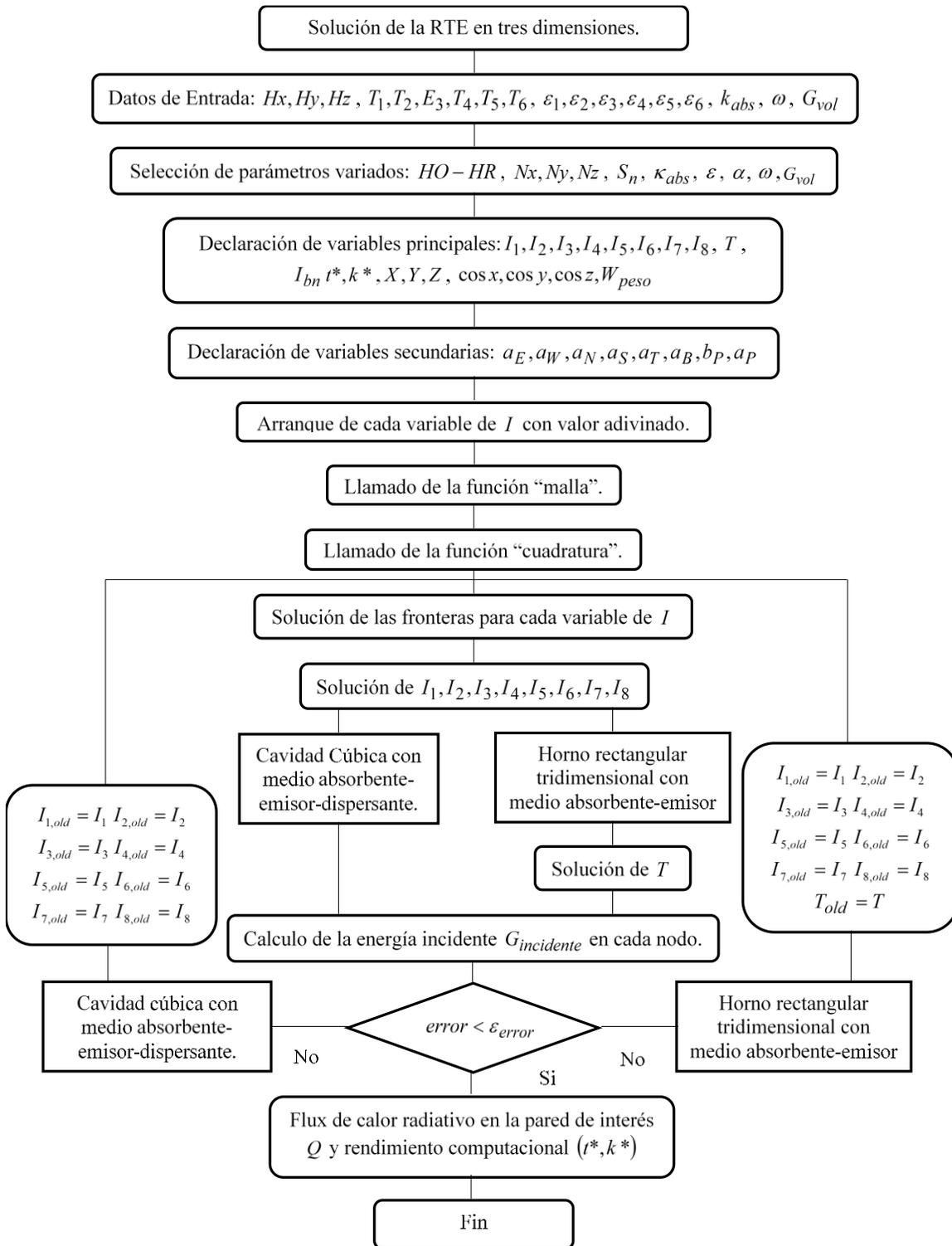


Figura 4. 4 Diagrama de flujo para la solución de la RTE en tres dimensiones con la formulación matemática NWF y DC.

La metodología explicada en este capítulo y en el capítulo anterior son implementadas y sus verificación se presentan el siguiente capítulo



# Capítulo 5

## Verificación numérica

En este capítulo se presenta la verificación numérica del código desarrollado para la solución de la RTE en tres dimensiones. Para ello se han planteado la verificación en tres secciones, la primera sección indicada como verificación de la solución de la RTE en una dimensión, posteriormente la segunda sección como verificación de la solución de la RTE en dos dimensiones. Finalmente la sección tres como verificación de la solución de la RTE en tres dimensiones. En la siguiente lista se presenta de manera general los casos de verificación:

Sección uno (verificación de la solución de la RTE en una dimensión):

1. Transferencia de calor por radiación con medio participante entre placas paralelas en una dimensión con la implementación de diferentes esquemas HO a través de la formulación DC.

Sección dos (verificación de la solución de la RTE en dos dimensiones):

2. Transferencia de calor por radiación con medio participante en una cavidad cuadrada con diferentes esquemas HO y HR a través de las formulaciones DC y NWF.

Sección tres (verificación de la solución de la RTE en tres dimensiones):

3. Transferencia de calor por radiación en una cavidad cúbica y en un horno rectangular tridimensional con diferentes esquemas HO y HR a través de las formulaciones matemáticas DC y NWF.

Sección cuatro (independencia de malla):

4. Independencia de malla espacial y angular para ambos casos de estudios.

## 5.1 Verificación de la solución de la RTE en una dimensión

Para la verificación de la solución de la RTE en una dimensión se ha planteado un caso de estudio en una dimensión disponible en la literatura. Se estudia la transferencia de calor radiativa en una dimensión de un sistema conformado por dos placas, entre ellas se tiene un medio radiativamente participante considerado como absorbente ( $\kappa_{abs} > 0, \sigma_{scat} = 0$ ); y un segundo caso como medio dispersante ( $\sigma_{scat} > 0, \kappa_{abs} = 0$ ). Para el primer caso las paredes tiene una emisividad de  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  y temperaturas en las fronteras de  $T_1 = 200^\circ C$  y  $T_2 = 100^\circ C$ , la longitud de la distancia entre las paredes es de  $L = 1m$ . Para el segundo caso las emisividades de las paredes son  $\varepsilon_1 = 0.8$  y  $\varepsilon_2 = 0.1$ . Las propiedades radiativas del medio son variadas en función del espesor óptico ( $\tau > 0$ ).

Para este caso de verificación se tiene dos modelos matemáticos, para el caso de un medio absorbente (Ecuación (5.1)) y para un medio dispersante (Ecuación (5.2)), mientras que en la Figura 5.1 se presenta el modelo físico para ambos casos.

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} \quad (5.1)$$

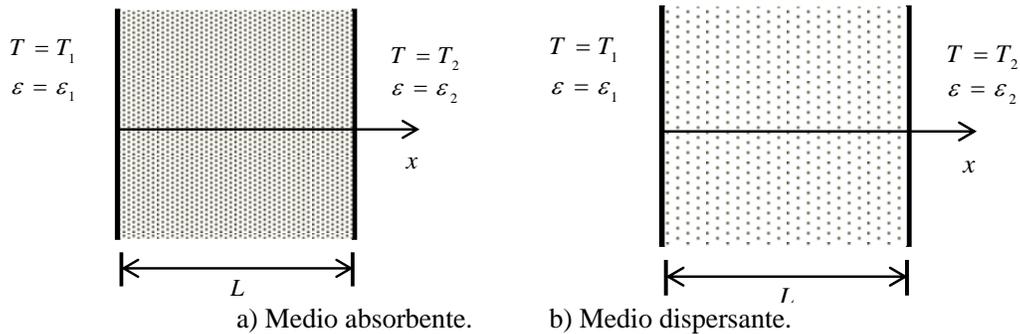
Donde:

$$\beta = \kappa_{abs}$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} = -\beta I + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (5.2)$$

Donde:

$$\beta = \sigma_{scat}$$



**Figura 5. 1** Transferencia de calor por radiación entre dos paredes en una dimensión.

Las condiciones de frontera para ambos casos son:

$$I_1 = I_{bn}(\bar{r}, \bar{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_1^4}{\pi} \quad (5.3a)$$

$$I_2 = I_{bn}(\bar{r}, \bar{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_2^4}{\pi} \quad (5.3b)$$

### 5.1.1 Medio absorbente entre dos placas en una dimensión

Para la solución de ambos casos, se ha implementado la metodología del Capítulo 3, además, se han implementado cinco esquemas HO. En la Tabla 5.1 y 5.2 se presenta los resultados de manera cuantitativa para el sistema con un medio absorbente. Se ha determinado el porcentaje de desviación con respecto a los valores disponibles en la literatura, estos valores se presentan por Heaslet y Warming (1965). El porcentaje de desviación se obtiene con base a la Ecuación (5.4).

$$\% Error = \frac{|Valor_{obtenido} - Valor_{referencia}|}{Valor_{referencia}} * 100 \quad (5.4)$$

### 5.1. Verificación de la solución de la RTE en una dimensión

**Tabla 5. 1** Comparación de resultados con Heaslet y Warming (1965).

Espesor ( $\tau$ )	Heaslet y Warmin (1965)	STEP		CENTRADO		SOU	
	$q_1$	$q_1$	Error (%)	$q_1$	Error (%)	$q_1$	Error (%)
0	1	1	0	1	0	1**	0
0.1	0.915	0.913	0.28	0.913	0.28	0.913**	0.28
0.2	0.849	0.845	0.46	0.845	0.46	***	***
0.3	0.793	0.789	0.49	0.789	0.49	***	***
0.4	0.745	0.742	0.47	0.742	0.47	***	***
0.5	0.704	0.701	0.37	0.701	0.37	***	***
0.6	0.667	0.665	0.27	0.665	0.27	***	***
0.8	0.604	0.604	0.03	0.604	0.04	***	***
1	0.553	0.554	0.21	0.554	0.19	***	***
1.5	0.457	0.460	0.71	0.460	0.68	***	***
2	0.390	0.394	1.16	0.394	1.11	***	***
2.5	0.340	0.345	1.62	0.345	1.55	***	***
3	0.301	0.307	2.07	0.307	1.98	***	***
4	0.246	0.253	2.96	0.253*	2.83	***	***

**Tabla 5. 2** Continuación de la Tabla 5.1.

Espesor ( $\tau$ )	Heaslet y Warmin (1965)	TOA		QUICK	
	$q_1$	$q_1$	Error (%)	$q_1$	Error (%)
0	1	1	0	1	0
0.1	0.915	0.913	0.28	0.913	0.28
0.2	0.849	0.845	0.46	0.845	0.46
0.3	0.793	0.789	0.49	0.789	0.49
0.4	0.745	0.742	0.47	0.742	0.47
0.5	0.704	0.701	0.37	0.701	0.37
0.6	0.667	0.665	0.27	0.665	0.27

0.8	0.604	0.604	0.03	0.604	0.04
1	0.553	0.554	0.20	0.554	0.19
1.5	0.457	0.460	0.69	0.460	0.68
2	0.390	0.394	1.12	0.394	1.12
2.5	0.340	0.345	1.57	0.345	1.56
3	0.301	0.307	1.99	0.307	1.99
4	0.246	0.253	2.85	0.253	2.84

\* Único valor de espesor óptico que convergió sin relajamiento para el esquema correspondiente.

\*\* Requiere bajo-relajamiento menor a 0.1 ( $\alpha = 0.09$ ).

\*\*\* Requiere bajo-relajación extremadamente grande (menor a  $\alpha = 0.001$ ).

Como se observa en la Tabla 5.1 y 5.2, los 5 esquemas implementados para un medio absorbente ( $\kappa_{abs} > 0$ ) proporcionan el valor aproximado con respecto al valor obtenido por Heaslet y Warming (1965). Sin embargo, conforme se aumenta el espesor óptico, el valor obtenido se desvía al valor obtenido por Heaslet y Warming (1965).

### 5.1.2 Medio dispersante entre dos placas en una dimensión

Para el caso del sistema con un medio dispersante se presenta el porcentaje de desviación con respecto a los valores presentados en la literatura por Fiveland (1987). En la Tabla 5.3 se presenta los valores del Flux de calor radiativo adimensional, comparados con los obtenidos por Fiveland (1987). Como se observa, en este mismo caso variando la emisividad de las paredes ( $\varepsilon_1 = 0.8$  y  $\varepsilon_2 = 0.1$ ), el resultado es muy similar a los obtenidos en el caso uno. Al obtener los resultados con la implementación de esquemas HO no varían con respecto a los obtenidos con el esquema STEP, el error obtenido con este último es menor al 0.1% por lo que los valores obtenidos con los esquemas HO son muy similares al del STEP. Sin embargo, el esquema SOU proporciona valores fuera de la realidad.

La verificación para la RTE en una dimensión ha sido realizada para la familiarización de los métodos de aproximación para la RTE presentados en el Capítulo 3.

**Tabla 5.3** Valores obtenidos y comparados con los presentados por Fiveland (1987).

Espesor óptico ( $\tau$ )		0.1	1	3
Fiveland (1987)	$q_1$	0.096	0.090	0.079
STEP	$q_1$	0.096	0.090	0.080
	Error (%)	0.021	0.042	0.569
CD	$q_1$	*	0.090	0.079
	Error (%)	*	0.013	0.403
SOU	$q_1$	*	*	*
	Error (%)	*	*	*
TOA	$q_1$	0.096	0.090	0.079
	Error (%)	0.021	0.021	0.452
QUICK	$q_1$	0.096	0.090	0.079
	Error (%)	0.021	0.017	0.428

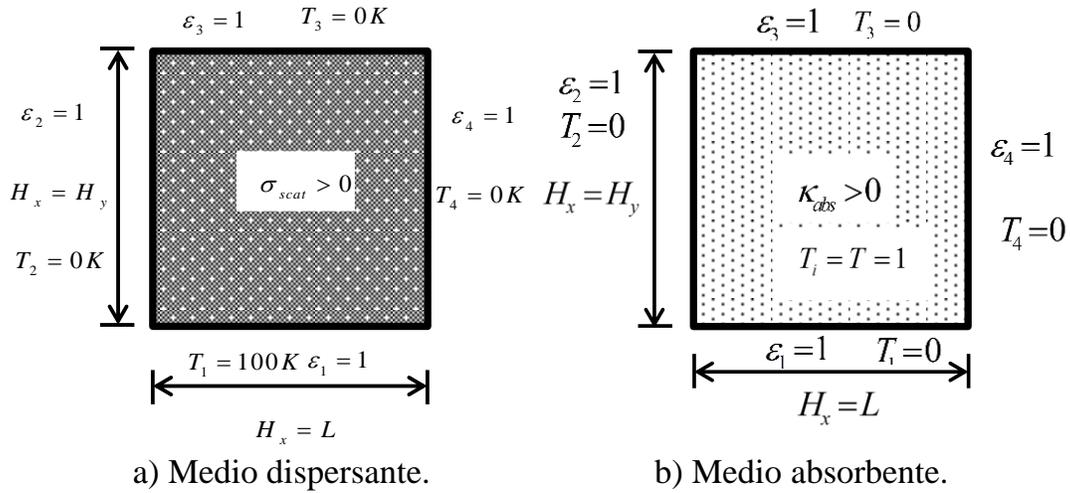
\*No converge.

## 5.2 Verificación de la solución de la RTE en dos dimensiones

Posterior a la verificación de la solución de la RTE en una dimensión en dos casos diferentes, se ha resuelto la RTE para dos casos en dos dimensiones. Para ello se estudia un sistema compuesto por una cavidad cuadrada ( $H_x = H_y = L$ ), se tiene dentro de esta misma un medio radiativamente participante. El medio participante se considera como dispersante ( $\sigma_{scat} > 0$ ) variando el espesor óptico en el intervalo de  $0.25 \leq \tau \leq 10$ , las paredes de la cavidad se consideran como negras, la pared Sur se

encuentra a una temperatura de  $100K$  , mientras que las demás paredes son frías a una temperatura de  $0K$  .

En el segundo caso planteado se tiene un medio participante absorbente ( $\kappa_{abs} > 0$ ) a una temperatura uniforme  $T_i = T = 1K$  , las paredes son negras a una temperatura  $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0K$  .



**Figura 5. 2** Modelo físico para la transferencia de calor por radiación con medio participante en una cavidad cuadrada.

El modelo matemático simplificado para el caso uno se presenta en la Ecuación (5.5), para el segundo caso, su modelo matemático simplificado se presenta en la Ecuación (5.6)

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} = -\beta I + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (5.5)$$

Donde:

$$\beta = \sigma_{scat}$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} \quad (5.6)$$

Donde:

$$\beta = \kappa_{abs}$$

Las condiciones de frontera son para ambos casos:

$$I_1 = I_B(\bar{r}, \bar{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_1^4}{\pi} \quad (5.7a)$$

$$I_2 = I_B(\bar{r}, \bar{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_2^4}{\pi} \quad (5.7a)$$

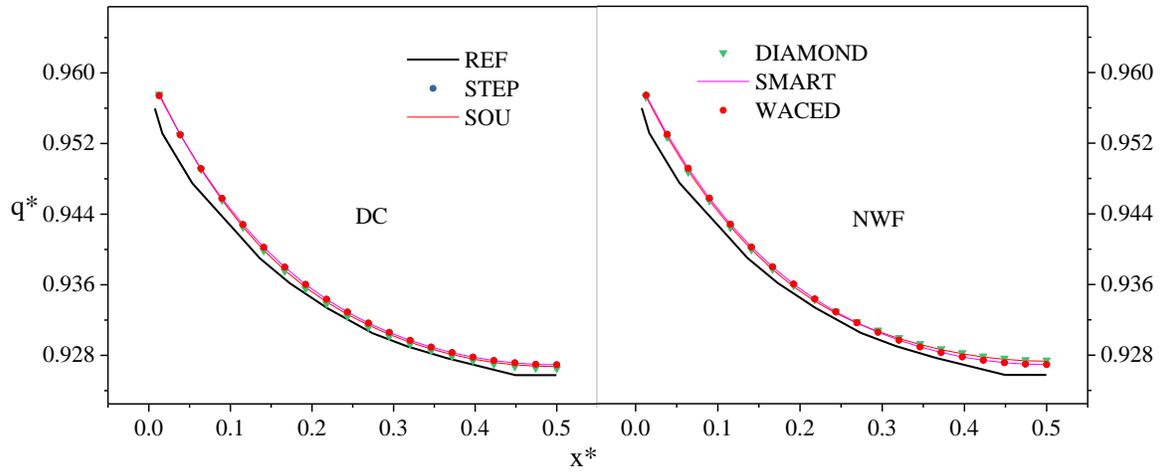
$$I_3 = I_B(\bar{r}, \bar{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_3^4}{\pi} \quad (5.7a)$$

$$I_4 = I_B(\bar{r}, \bar{s}) = \frac{\sigma_{stefan} T_4^4}{\pi} \quad (5.7a)$$

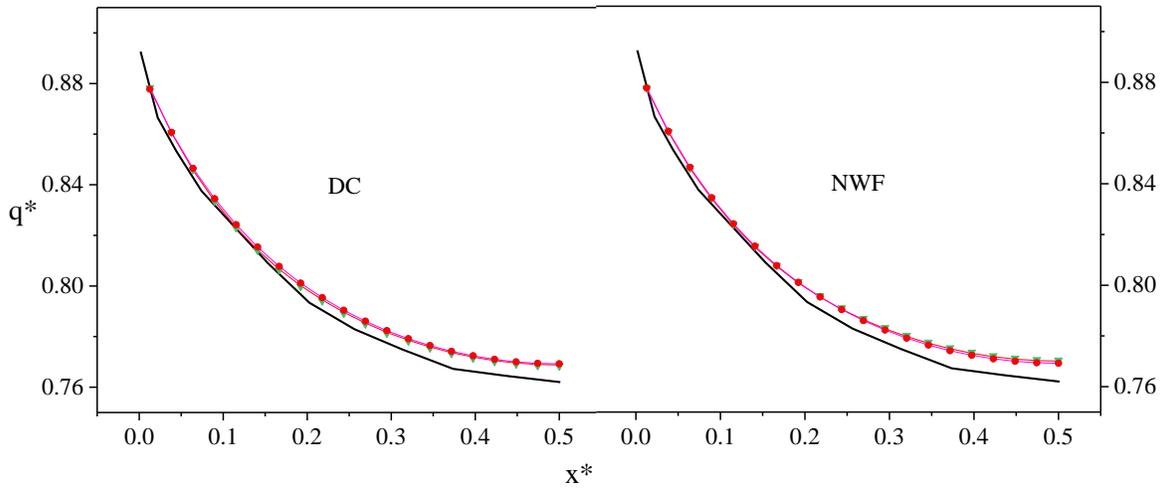
En la Figura 5.2 se presenta el modelo físico para ambos casos de estudio para la verificación de la solución de la RTE en dos dimensiones. Para ambos casos se han implementados diversos esquemas, tanto esquemas HO como esquemas HR indicados en las figuras presentadas, ambas familias de esquemas han sido implementadas a través de las formulaciones matemáticas DC y NWF.

### 5.2.1 Medio dispersante en una cavidad cuadrada

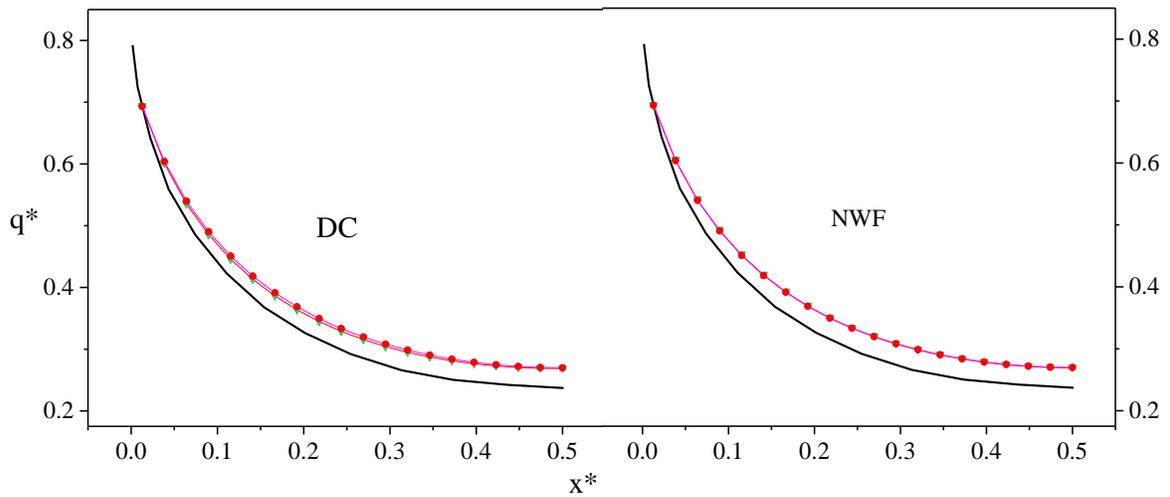
En la Figura 5.3 se muestra la solución obtenida del Flux de calor adimensional con los diferentes esquemas implementados con las formulaciones DC y NWF para un medio dispersante con un espesor óptico de 0.25, 1.0 y 10.0. Para el primer valor de espesor óptico, todos los esquemas proporcionan la solución aproximada a la solución numérica presentada por Hassanzadeh y Raithby (2008) denotada como REF. Para el mismo medio con un espesor óptico de 1.0 y 10.0, se presenta el mismo comportamiento de los esquemas.



a)  $\tau = 0.25$ .



b)  $\tau = 1.0$



a)  $\tau = 10.0$

**Figura 5.3** Flux de calor adimensional para un medio dispersante.

En la Tabla 5.4 se presenta el error porcentual con respecto a la solución presentada por Hassanzadeh y Raithby (2008) para un espesor óptico de 0.1. En el caso de los esquemas HO presentaron el mayor error porcentual con respecto a los esquemas HR y el esquema STEP. el error se obtuvo a partir de la Ecuación (5.4).

**Tabla 5. 4** Error porcentual máximo de cada esquema para un medio con  $\tau = 0.25$  mediante DC.

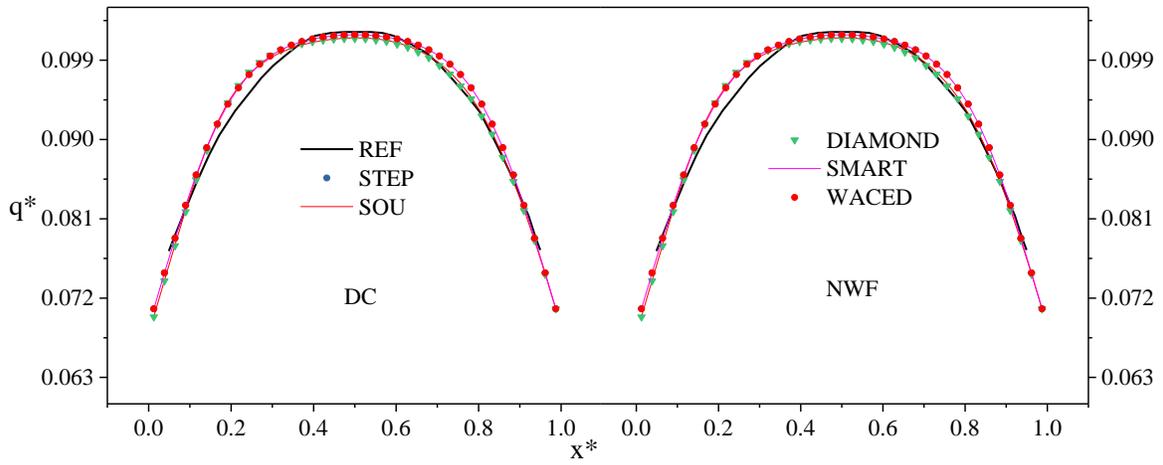
Esquema	Error máximo (%)	Esquema	Error máximo (%)
STEP	0.32	SMART	0.32
SOU	0.34	WACED	0.32
DIAMOND	0.34	---	---

### 5.2.2 Medio absorbente en una cavidad cuadrada

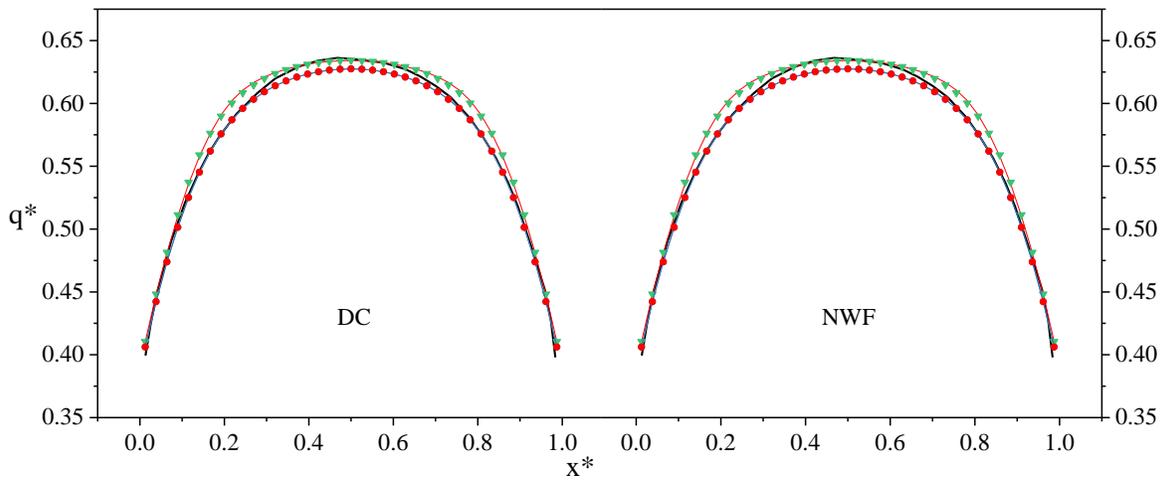
El segundo caso de verificación y comparación de las formulaciones DC y NWF, consta de la misma cavidad con un medio participante considerado como absorbente, para este caso se ha implementado los mismos esquemas presentados en la verificación anterior.

En la Figura 5.4 se presenta el Flux de calor adimensional para la cavidad con un medio absorbente con valor de absorción de 0.1 comparado con la solución presentada por Lockwood y Shah (1981). Se observa que con todos los esquemas se ha obtenido la solución aproximada al presentado por Lockwood y Shah (1981). En el caso de la cavidad con un medio absorbente con absorción de 1.0, se tiene el mismo comportamiento que del valor de absorción de 0.1. Para el último valor de absorción (10.0), nuevamente todos los esquemas proporcionaron la solución como se muestra en la Figura 5.10.

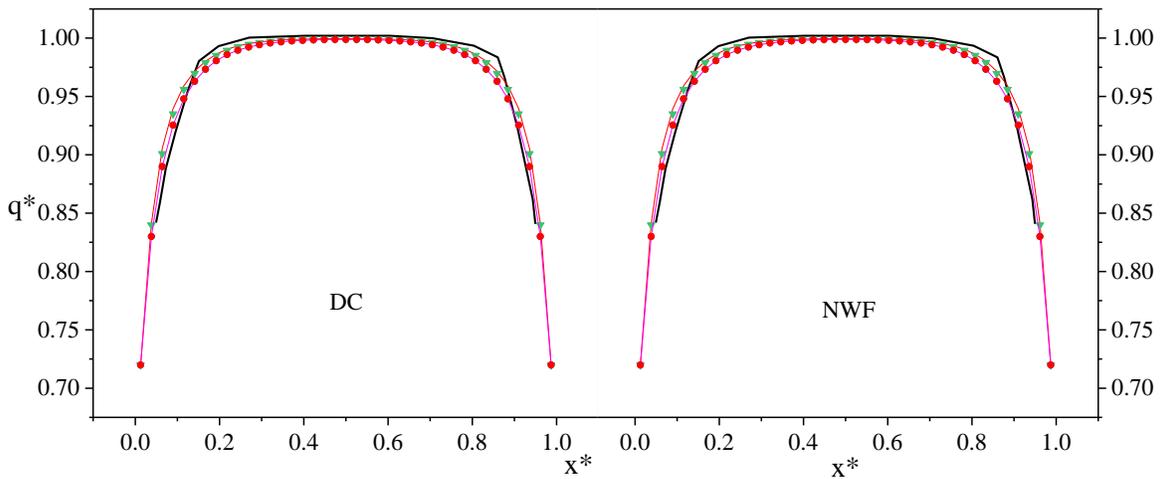
En la Tabla 5.5 se presenta el error porcentual de la solución obtenida con la formulación DC dado que los valores obtenidos con la formulación NWF son iguales a los obtenidos con la formulación DC. Los esquemas HR proporcionaron la solución con el menor error porcentual, así como el esquema STEP. Esto se debe a que la solución presentado por los autores mencionados no es una solución exacta.



a)  $\kappa_{abs} = 0.1$ .



a)  $\kappa_{abs} = 1.0$



a)  $\kappa_{abs} = 10.0$

**Figura 5. 4** Flux de calor adimensional para un medio absorbente.

## 5.2. Verificación de la solución de la RTE en dos dimensiones

**Tabla 5. 5** Error porcentual máximo del Flux de calor para  $\kappa = 10.0$  mediante DC.

Esquema	Error máximo (%)	Esquema	Error máximo (%)
STEP	1.06	SMART	1.06
SOU	1.68	WACED	1.06
DIAMOND	1.97	----	----

Finalmente, En la Tabla 5.5 se presenta el Flux de calor para algunos esquemas con ambas formulaciones, se puede observar que la diferencia entre ambas formulaciones es mínima, menor a 0.5%, la diferencia entra ambas formulaciones se obtuvo a partir de la Ecuación (5.7).

$$\frac{|Valor_{NWF} - Valor_{DC}|}{Valor_{DC}} * 100 \quad (5.7)$$

**Tabla 5. 6** Diferencia maxima del Flux de calor adimensional entre DC y NWF para diferentes esquemas.

$x'$	STEP			DIAMOND			SMART		
	DC	NWF	Dif. (%)	DC	NWF	Dif. (%)	DC	NWF	Dif. (%)
0.0128	0.8778	0.8778	0.00	0.8783	0.8777	0.07	0.8778	0.8778	0.00
0.0641	0.8465	0.8465	0.00	0.8459	0.8461	0.03	0.8465	0.8465	0.00
0.1923	0.8011	0.8011	0.00	0.7998	0.8014	0.21	0.8011	0.8011	0.00
0.3718	0.7742	0.7742	0.00	0.7733	0.7753	0.27	0.7742	0.7742	0.00
0.5000	0.7692	0.7692	0.00	0.7683	0.7705	0.28	0.7692	0.7692	0.00
0.6026	0.7724	0.7724	0.00	0.7715	0.7736	0.26	0.7724	0.7724	0.00
0.8077	0.8011	0.8011	0.00	0.8007	0.8014	0.09	0.8011	0.8011	0.00
0.9103	0.8345	0.8345	0.00	0.8339	0.8343	0.05	0.8345	0.8345	0.00
0.9872	0.8778	0.8778	0.00	0.8764	0.8777	0.15	0.8778	0.8778	0.00

### 5.3 Verificación de la solución de la RTE en tres dimensiones

Finalmente, se presenta la verificación del código final para la solución de la RTE en tres dimensiones. Para ello se ha considerado dos casos de estudio para la verificación. Se considera como primer caso de verificación una cavidad cubica con un medio radiativamente participante, en este sistema solo se presenta la transferencia de calor por radiación en estado permanente. Se considera la cavidad cubica con longitud de  $H_x = H_y = H_z = 1.0m$  con un medio participante dispersante frío, temperatura de cero en todas las paredes excepto en la pared sur en la que se tiene una potencia emisiva con valor de  $\pi$ . Por último, la potencia emisiva de las paredes es de 1.0, en la Figura 5.5 se presenta el modelo físico del caso y en la Ecuación (5.8) se muestra el modelo matemático del caso particular.

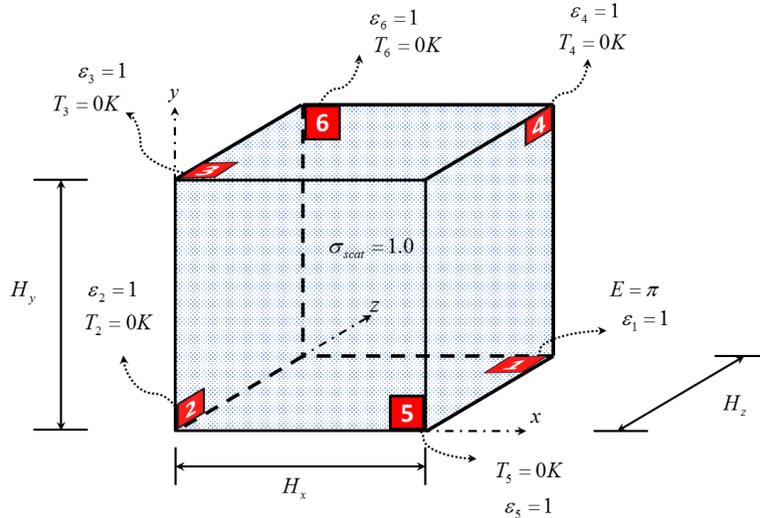


Figura 5. 5 Modelo físico de la cavidad cúbica con medio participante.

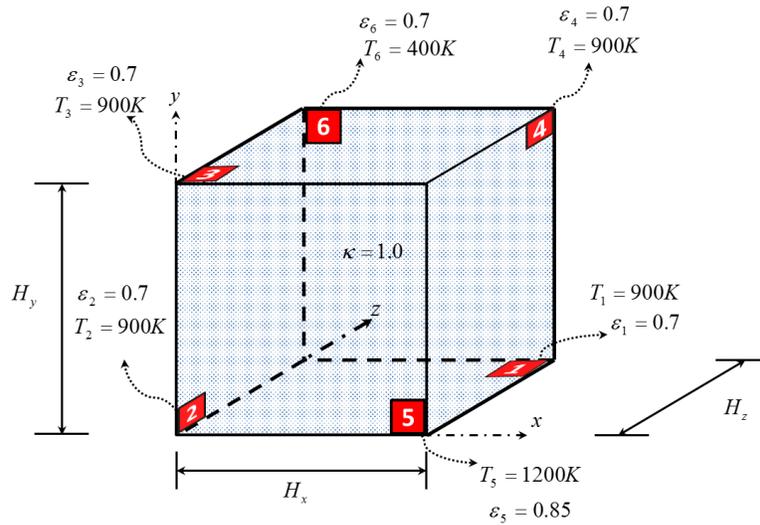
$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} + \eta \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + \frac{\sigma_{scat}}{4\pi} \int_{|\Omega|=4\pi} I(\vec{r}, \Omega') \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \quad (5.8)$$

Donde:

$$\beta = \sigma_{scat}$$

### 5.3. Verificación de la solución de la RTE en tres dimensiones

Como segundo caso de verificación se considera un horno en tres dimensiones, con dimensiones de  $H_x = H_y = 2.0m$  y  $H_z = 4.0m$ . Se tiene un medio radiativamente participante absorbente, paredes con potencia emisiva de 0.85 con temperatura de  $1200 K$  en  $z = 0m$ , para la pared en  $z = H_z$  se tiene una potencia emisiva de 0.70 con una temperatura de  $400 K$  y para las paredes restantes se tiene una potencia emisiva de 0.70 con temperatura de  $900 K$ . Por último, se tiene una generación de calor volumétrica de  $5.0kW/m^3$ . Las consideraciones mencionadas del segundo caso de verificación se presentan en la Figura 5.6, además, se muestra el modelo matemático del caso en la Ecuación (5.9).



**Figura 5. 6** Modelo físico del horno tridimensional con medio participante.

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} + \eta \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + \kappa_{abs} I_{bn} \quad (5.9)$$

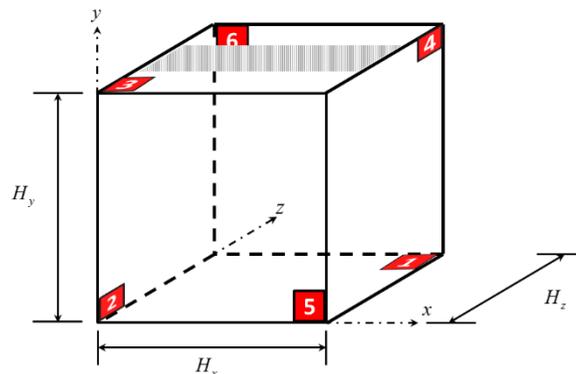
Donde:

$$\beta = \kappa_{abs}$$

### 5.3.1 Cavity cúbica con medio dispersante

Los valores presentados por Capdevila et al. (2010) indicados como REF se obtienen con una cuadratura  $S_6$  y con una malla de  $10 \times 10 \times 10$  nodos. Los autores mencionados presentan valores obtenidos con el esquema STEP y cuatro esquemas HO. Sin embargo, para la verificación solo se consideró comparar con dos esquemas de los cuatro presentados por los citados para mayor simplicidad, los cuales son el STEP y el esquema HO presentado como SCH2, con el motivo de verificar que el esquema STEP se ha implementado de manera correcta así como los esquemas HO y HR. Por simplicidad, en este trabajo se ha presentado un esquema HO (SOU) y HR (MINMOD).

En la Figura 5.7 se presenta la zona de la cavidad que se ha verificado con respecto al Flux de calor adimensional reportado por los autores mencionados.



**Figura 5. 7** Zona seleccionada para la comparación del Flux de calor.

De manera cualitativa se observa en la Figura 5.8 que los valores obtenidos con el esquema STEP presenta una desviación despreciable con ambas formulaciones. En el caso de los esquemas HO y HR se tiene mayor desviación con respecto al esquema SCH2, esto dado que es un esquema diferente al esquema SOU y MINMOD. Sin embargo, se realizó la comparación para verificar el comportamiento de ambos esquemas. El esquema SOU tiene mayor proximidad con el esquema SCH2 debido a que son de la misma familia de esquemas HO, en el caso del esquema MINMOD se tiene mayor desviación dado que este mismo es la familia de esquemas HR.

Los valores de cada esquema HO y HR tienen una desviación de 0.0% comparando ambas formulaciones, ya que solo se aumenta o disminuye el tiempo de cómputo.

De manera cuantitativa, el porcentaje de desviación del esquema STEP con respecto al presentado por Capdevila et al. (2010) es de 1.11%, mientras que el esquema SOU presenta un porcentaje de desviación de 4.17% y el esquema MINMOD de 9.73%. Es importante tener en consideración que los porcentajes de desviación de los esquemas SOU y MINMOD se debe a que el esquema SCH2 no corresponde a ningún de los mencionados. Sin embargo, los valores presentados con el esquema SCH2 sirven como referencia para asegurar que el comportamiento de los esquemas HO y HR son similares al citado.

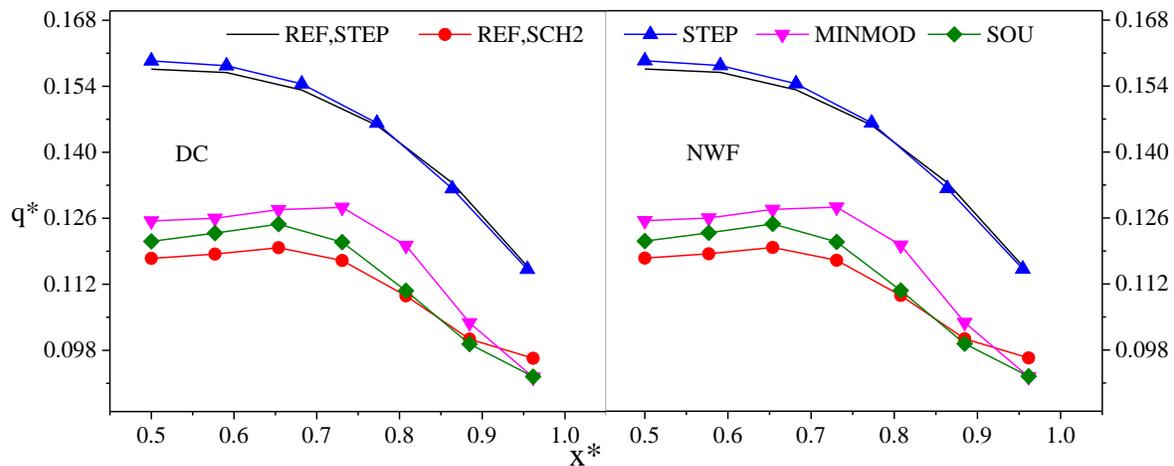
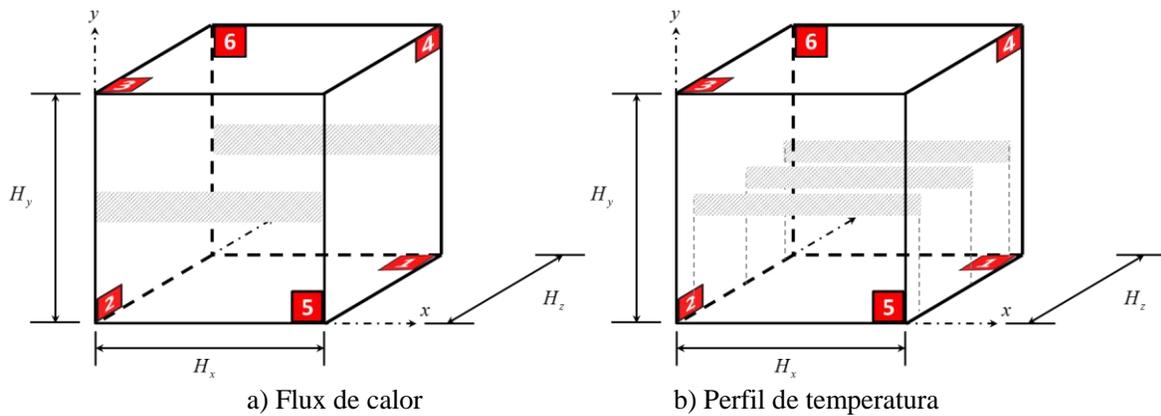


Figura 5. 8 Valores del Flux de calor obtenido con ambas formulaciones.

### 5.3.2 Horno rectangular tridimensional con medio absorbente

Para el segundo caso se comparan los valores obtenidos contra los valores reportados en la literatura por Chai et al. (1994a) indicados como REF. Para este caso se han presentado dos esquemas HO y HR, así como el esquema STEP de los 11 esquemas de la Tabla A.1 y A.2 por simplicidad. Los esquemas HO presentados son, el SOU y QUICK y de los esquemas HR son el MINMOD y SMART.



**Figura 5. 9** Zona seleccionada para la comparación.

En la Figura 5.9 se presenta la zona seleccionada de acuerdo con la literatura para la verificación del código, con la comparación del Flux de calor y del campo de temperatura.

En la Figura 5.10 se presenta la variación de los valores del Flux de calor obtenido con cada esquema con respecto a los valores presentados por los autores mencionados. Es importante tener en consideración que los valores presentados por los autores se obtienen con el esquema STEP y con una cuadratura  $s_8$ . De acuerdo a la Figura mencionada, se observa que el esquema STEP presenta mayor aproximación que los esquemas HO y HR. Esto se debe a que se tiene las mismas consideraciones (esquema STEP) que el autor. Sin embargo, no se tiene una aproximación con esquemas HO o HR por parte de los autores. A pesar de esto, los esquemas HO y HR presentan una aproximación aceptable con respecto a la solución obtenida con el esquema STEP por los autores.

El porcentaje máximo de desviación del esquema STEP con respecto a la solución presentada en la literatura es de 8.88% mientras que la desviación máxima con los esquemas HO y HR es de 10.65% con el esquema DIAMOND. Para ambas formulaciones matemáticas se tiene los mismos valores de desviación de cada esquema.

### 5.3. Verificación de la solución de la RTE en tres dimensiones

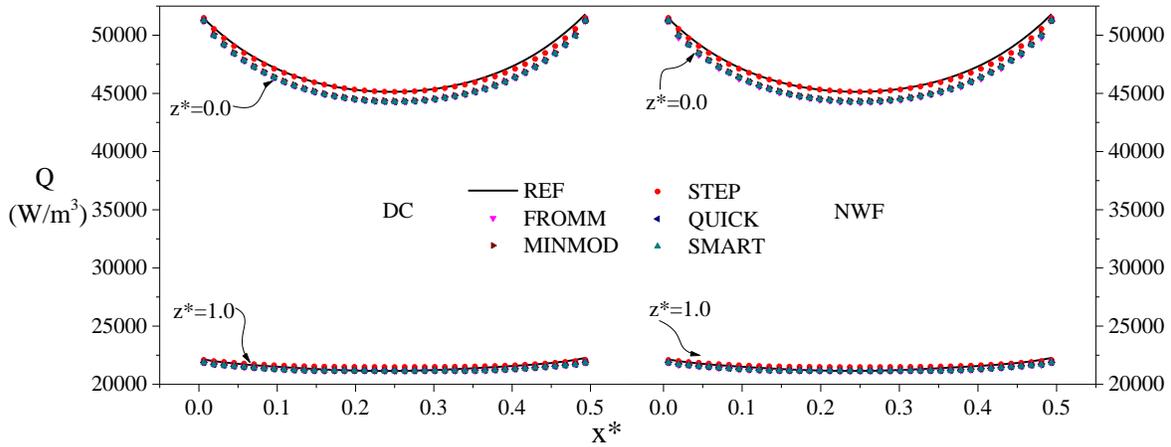


Figura 5. 10 Flux de calor obtenido con cada formulación.

En la Figura 5.11 se presenta la desviación de manera cualitativa del campo de temperatura con los diferentes esquemas, en este caso los esquemas presentados son los indicados anteriormente para el Flux de calor. Al igual que en el caso del Flux de calor, el esquema STEP presenta menor desviación con un 0.34%, mientras que el esquema DIAMOND presenta mayor desviación de 0.38%.

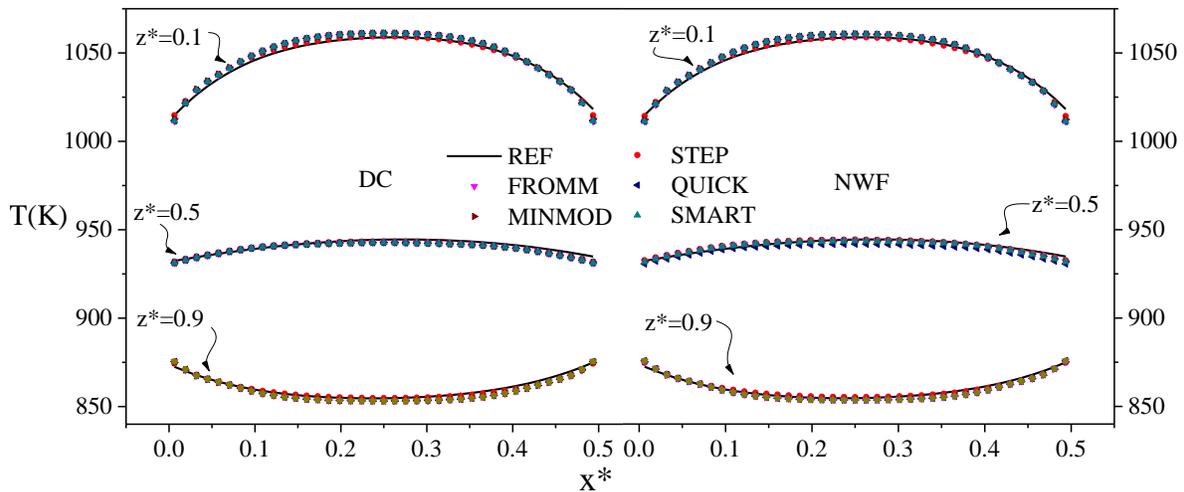


Figura 5. 11 Perfil de temperatura obtenido con cada formulación.

De acuerdo con los resultados, la implementación de los esquemas con ambas formulaciones se ha realizado de manera correcta, cabe señalar que a pesar de tener mayor desviación con los esquemas HR y HO con respecto a la literatura, se consideran aceptables, ya que estos esquemas, de acuerdo a la literatura, son más

exactos. Sin embargo, solo se dispone de la solución obtenida con el esquema de bajo orden (STEP).

## 5.4 Estudio de la independencia de malla

Como parte del estudio de los problemas seleccionados de esta tesis, la verificación se ha realizado el estudio de independencia de malla para los casos de estudios, los cuales son una cavidad cúbica con medio participante emisor-absorbente-dispersante. Para cada caso se tiene dos estudios de independencia de malla, espacial y angular.

### 5.4.1 Cavidad cúbica con medio absorbente-emisor-dispersante

Para la independencia de malla espacial y angular para la cavidad cúbica se ha establecido variar la malla espacial con el esquema de cuadratura  $S_{12}$ . La importancia de implementar una cuadratura de mayor exactitud es minimizar el error numérico que ocasiona la malla angular y determinar con mayor exactitud la malla adecuada para el caso de estudio. Posteriormente, se varía el esquema de cuadratura con la malla espacial determinada.

La importancia de la independencia de malla se debe a que la variable tiene variación en función del número de nodos de la malla hasta no presentar variación significativa. Este problema surge en la consideración del volumen de control para la deducción de la Ecuación gobernante del fenómeno a resolver. Por lo que al determinar la malla, se tiene aproximadamente el volumen de control que representa el volumen de control considerado en la deducción de la ecuación gobernante.

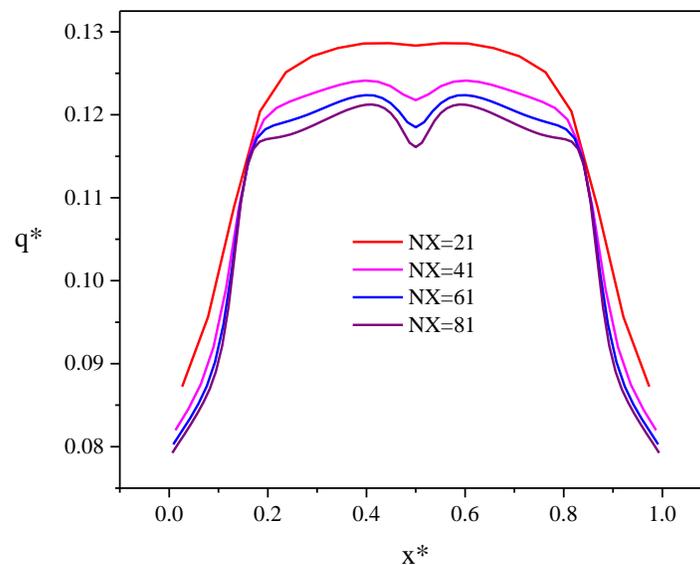
#### 5.4.1.1 Independencia de malla espacial

Para la independencia de malla espacial, se ha considerado el esquema MINMOD y un esquema de cuadratura  $S_{12}$  con una malla cúbica  $(N_x = N_y = N_z)$  desde 21 hasta 81 nodos. En la Figura 5.12, se presenta la variación del Flux de calor adimensional

#### 5.4. Estudio de la independencia de malla

para la zona indicada en la Figura 5.7, el cual tiene variación significativa hasta con una malla de 61 nodos. En la Tabla 5.1 se muestra la variación del Flux de calor adimensional promedio, de acuerdo con esta tabla la variación menor de 1% se tiene con la malla de 61 nodos. Los porcentajes de desviación se obtienen a través de la Ecuación (5.10).

$$\% \text{ Error} = \frac{|q_{k-1} - q_k|}{q_{k-1}} * 100 \quad (5.10)$$



**Figura 5. 12** Variación del Flux de calor adimensional local con base a la malla espacial.

**Tabla 5. 7** Variación del Flux promedio con la malla espacial.

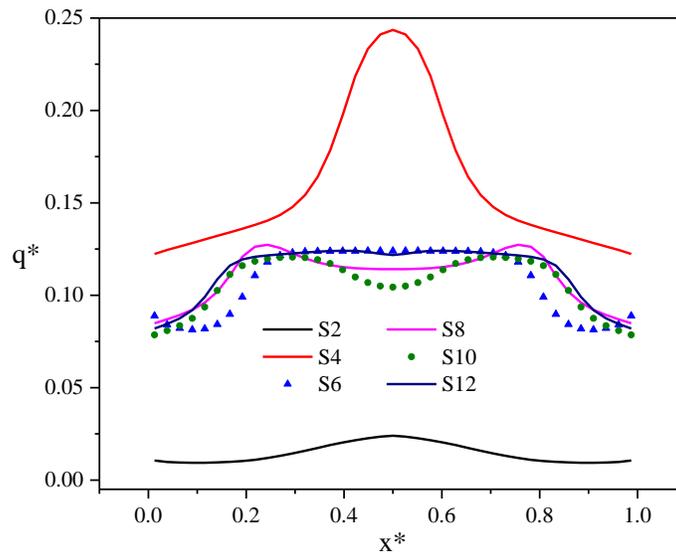
$N_x = N_y = N_z$	$q^*$	Error (%)
21	0.108564124	----
41	0.10681648	1.85
61	0.106404455	0.38
81	0.106231203	0.16

Con base a la Figura 5.12 y la Tabla 5.7, se ha determinado implementar una malla espacial de 61 nodos, ya que de acuerdo a los valores del flux de calor adimensional se tiene una variación no significativa.

### 5.4.1.1 Independencia de malla angular

Para la independencia de malla angular se varió diferentes esquemas de cuadratura de bajo orden conocidas como  $S_n$ , implementando el esquema de interpolación espacial MINMOD, así como la malla espacial determinada en el punto anterior.

En la Figura 5.13 se presenta la variación del Flux de calor adimensional de la zona indicada en la Figura 5.7. En este caso el Flux de calor varía con todas los esquemas de cuadratura. Sin embargo, conforme se aumenta el esquema de cuadratura la variación disminuye. En la Tabla 5.8 se presenta el flux de calor adimensional promedio de la pared de la zona indicada en la Figura 5.7, el porcentaje de desviación mínimo es de 1.01%, el cual es aceptable.



**Figura 5. 13** Variación del Flux de calor adimensional con la malla angular.

**Tabla 5. 8** Variación del Flux de calor adimensional promedio con la malla angular.

$S_n$	$q^*$	Error (%)
$S_2$	0.0145	----
$S_4$	0.1053	624.57
$S_6$	0.0918	12.82
$S_8$	0.1039	13.18

#### 5.4. Estudio de la independencia de malla

---

$S_{10}$	0.1079	3.79
$S_{12}$	0.1068	1.01

De acuerdo con la Figura 5.13 y la Tabla 5.8 el esquema de cuadratura más adecuado a emplear es el  $S_{12}$ . Por lo que para obtener la solución del caso de estudio se ha implementado una malla espacial de 61 nodos en las tres direcciones y un esquema de cuadratura  $S_{12}$ .

#### 5.4.2 Horno rectangular tridimensional con medio absorbente

De la misma manera que la independencia de malla anterior, se ha variado la malla espacial y con el esquema de cuadratura  $S_{12}$ . Posteriormente, se varía el esquema de cuadratura con la malla espacial determinada.

##### 5.4.1.1 Independencia de malla espacial

Primeramente, se ha implementado el esquema MINMOD con un esquema de cuadratura  $S_{12}$  variando el número de nodos. En este caso el número de nodos en las tres direcciones no es el mismo, ya que en la dirección  $z$  se tiene dos veces la longitud de  $x$  o  $y$ , por lo que para la dirección  $z$  se tiene  $N_z = (N_x * 2) - 1$  nodos.

En la Tabla 5.9 se presenta el Flux de calor promedio de la pared 5 y 6 en la zona indica de la Figura 5.9a. En este caso, a partir de una malla de  $31 \times 31 \times 61$  nodos la variación es insignificante, ya que el porcentaje de desviación es menor a 1%.

**Tabla 5.9** Variación del Flux de calor con respecto a la malla espacial.

$N_x=N_y; N_z$	Pared caliente	Error (%)	Pared fría	Error (%)
11;21	49929.993	--	21914.9858	--
21;41	48733.5323	2.39627655	21634.2391	1.28107171
31;61	48388.8084	0.70736486	21565.7249	0.31669345
41;81	48234.7847	0.3183043	21538.758	0.12504515

En la Figura 5.14 se muestra la variación del Flux de calor para ambas zonas indicadas en la Figura 5.9a, en ambas zonas el Flux de calor tiene variación insignificante a partir de una malla con  $41 \times 41 \times 80$  nodos. Por lo que a partir de la Tabla 5.3 y Figura 5.6 se ha determinado implementar la malla espacial de  $41 \times 41 \times 81$ .

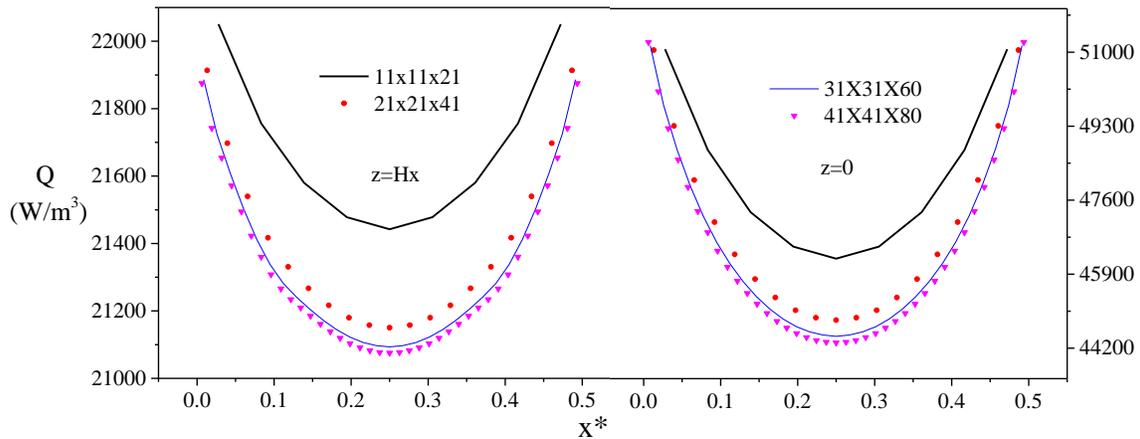


Figura 5.14 Variación del Flux de calor con respecto a la malla espacial.

#### 5.4.1.1 Independencia de malla angular

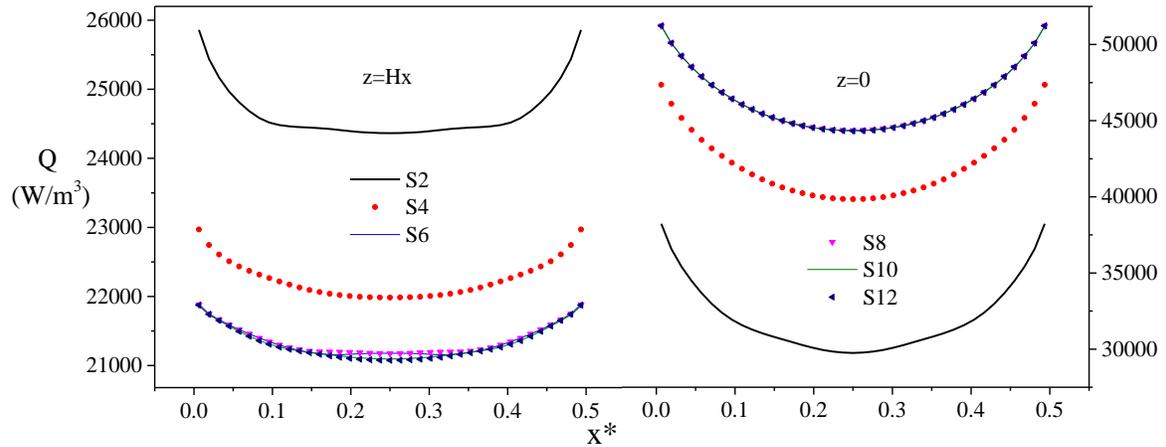
Para la malla angular se ha implementado la malla espacial determinada anteriormente y el esquema MINMOD. Se ha implementado cinco esquemas de cuadraturas indicadas en la Tabla 5.10 y en la Figura 5.15. En la Tabla 5.10 se observa que la variación del Flux de calor en ambas paredes es menor a 1% con el esquema de cuadratura  $S_8$ .

Tabla 5.10 Variación del Flux de calor promedio con respecto al esquema de cuadratura.

$S_n$	$Q$	Error (%)	$Q$	Error (%)
	(Pared 5)		(Pared 6)	
$S_2$	34287.07	--	25026.174	--
$S_4$	44177.87	28.84	22551.62	9.88
$S_6$	48201.10	9.10	21524.90	4.55
$S_8$	48219.71	0.03	21546.67	0.10
$S_{10}$	48231.43	0.02	21537.32	0.04
$S_{12}$	48234.78	0.007	21538.75	0.007

#### 5.4. Estudio de la independencia de malla

En la Figura 5.7 se muestra el Flux de calor para la zona indicada, para ambos Flux se tiene una desviación insignificante a partir del esquema de cuadratura  $S_8$ . Por lo que con base a la Tabla 5.10 y la Figura 5.15 se ha implementado el esquema de cuadratura  $S_8$ .



**Figura 5.15** Variación del Flux de calor con respecto al esquema de cuadratura.

Finalmente, en el siguiente capítulo se presenta los resultados obtenidos para los dos casos de estudios.

# Capítulo 6

## Resultados

En este capítulo se presenta los resultados en términos de tiempo computacional obtenidos con diferentes esquemas para los dos casos de estudio, el primero, la cavidad cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante y el segundo, un horno tridimensional rectangular con medio participante absorbente-emisor. Los resultados presentados son en términos del esfuerzo computacional, como lo es el tiempo de cómputo y el número de iteraciones requeridos para obtener la solución de los casos de estudio.

En ambos, el rendimiento en términos de tiempo computacional se presenta normalizado a partir de la Ecuación (6.1), así como las iteraciones normalizada con la Ecuación (6.2). El porcentaje de reducción de tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC se obtiene a partir de la Ecuación (6.3)

$$t^* = \frac{t_{HO-HR}}{t_{STEP}} \quad (6.1)$$

$$k^* = \frac{k_{HO-HR}}{k_{STEP}} \quad (6.2)$$

$$\%_{DC-NWF} = \left( \frac{t_{NWF} - t_{DC}}{t_{NWF}} \right) * 100 \quad (6.3)$$

## 6.1 Cavidad cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante

El primer caso de estudio es una cavidad cúbica con un medio participante absorbente-emisor-dispersante (Figura 2.10). La solución de este caso de estudio se ha obtenido a través de diferentes esquemas de interpolación espacial implementados con dos formulaciones matemáticas, DC y NWF. Para su evaluación de ambas formulaciones, se ha variado diferentes parámetros con la finalidad de observar su rendimiento computacional en función de estos parámetros variados. Los parámetros variados son:

1. Malla computacional espacial con valores de 21, 41, 61, 81 y 101 para las tres direcciones.
2. Esquema de cuadratura tipo  $S_n$  las cuales son,  $S_6$ ,  $S_8$ ,  $S_{10}$  y  $S_{12}$ .
3. Coeficiente de absorción del medio participante con valores de 0.1, 0.5, 1.0, 5 y 10.
4. Emisividad de las paredes de la cavidad con valores de 0.1, 0.5 y 1.
5. Coeficiente de bajo-relajación de 0.2, 0.4, 0.5, 0.6 y 0.8.
6. Por último, el coeficiente de dispersión en función del coeficiente de dispersión de albedo con valor de 0.05, 0.25, 0.5, 0.75 y 0.95 y del coeficiente de absorción con valor de 1.

Dado que la dispersión se considera como función del coeficiente de dispersión de albedo y absorción, considérese la Ecuación (6.4).

$$\sigma_{scat} = (\omega \cdot \kappa_{abs}) / (1.0 - \omega) \quad (6.4)$$

Todos estos parámetros mencionados se han variado para cada esquema HO y HR, los cuales son (Tabla A.1):

7. SOU, FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, OSHER, MUSCL, SMART, WACED Y CUBISTA.

Para la evaluación de DC y NWF en términos de tiempo computacional, se ha determinado el caso de estudio con parámetros fijos, llamado caso base o referencia. Los valores de los parámetros fijos se presentan en la Tabla 6.1, para este caso de referencia se determinó la malla espacial y angular (cuadratura) a través de la independencia de malla espacial y angular presentados en el Capítulo 5, respectivamente, el resto de los parámetros se determinaron de acuerdo a los valores más usados en la literatura para casos de verificación, considérese que en las comparaciones donde se mencione esquema STEP se trata del caso referencia.

**Tabla 6. 1** Valores de parametros fijos para el caso referencia.

Parámetro	STEP					
	Malla computacional ( $N_x = N_y = N_z$ )	Cuadratura ( $S_n$ )	Absorción ( $k_{abs}$ )	Emisividad ( $\varepsilon$ )	Dispersión de albedo ( $\omega$ )	Relajación ( $\alpha$ )
Valor	61	( $S_{12}$ )	1.0	1.0	0.5	0.5

A continuación se presenta los resultados obtenidos para cada parámetro de los mencionados anteriormente.

### 6.1.1 Malla computacional espacial

Como se mencionó anteriormente, los valores de la malla computacional son de 21, 41, 61, 81 y 101. En la Figura 6.1 se presenta en términos de tiempo computacional el rendimiento de los esquemas HO y HR implementados a través de las formulaciones matemáticas, DC y NWF.

En la Figura 6.1a se observa que todos los esquemas HO y HR logran converger con diferentes tiempos para una malla de 21 nodos en las tres direcciones coordenadas. Al analizar la figura mencionada se observa inicialmente que el esquema SOU requiere mayor tiempo computacional al implementarse con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Se observa que el tiempo computacional que requiere el esquema mencionado implementado con la formulación NWF es de al menos 28% más del tiempo que requiere el mismo esquema implementado con la formulación DC. Sin embargo, con respecto al esquema STEP (caso referencia) se observa que el tiempo es menor, alrededor de 98.5%.

En el caso de los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK y MINMOD, el tiempo computacional obtenido al implementarse con la formulación NWF es alrededor de 1.25, 22.88, 33.03 y 11.38 % menor del obtenido al implementarse estos mismo cuatro esquemas mencionados con la formulación DC. Con respecto al caso referencia el tiempo obtenido con la formulación NWF es de 1.1, 1, 0.8 y 1.1 % del tiempo obtenido con el caso referencia para el esquema FROMM, DIAMOND QUICK y MINMOD, respectivamente, mientras que con la formulación DC se obtuvo de 1.15, 1.3, 1.14 y 1.2%, respectivamente, con respecto al esquema STEP. Obsérvese que en estos esquemas la formulación NWF ha presentado disminución de tiempo de cómputo con respecto a la formulación DC de al menos 1.25 % para el esquema FROMM, mientras que máximo de hasta 33.03% con la misma formulación con respecto a la DC.

El esquema OSHER ha presentado el mayor tiempo computacional con ambas formulaciones matemáticas. Sin embargo, el tiempo mayor obtenido con este esquema mencionado es con la formulación NWF, ya que requiere al menos el doble del tiempo computacional obtenido con la formulación DC. A pesar de esto, el tiempo obtenido con la formulación NWF 93.7% es menor que el obtenido con el esquema STEP.

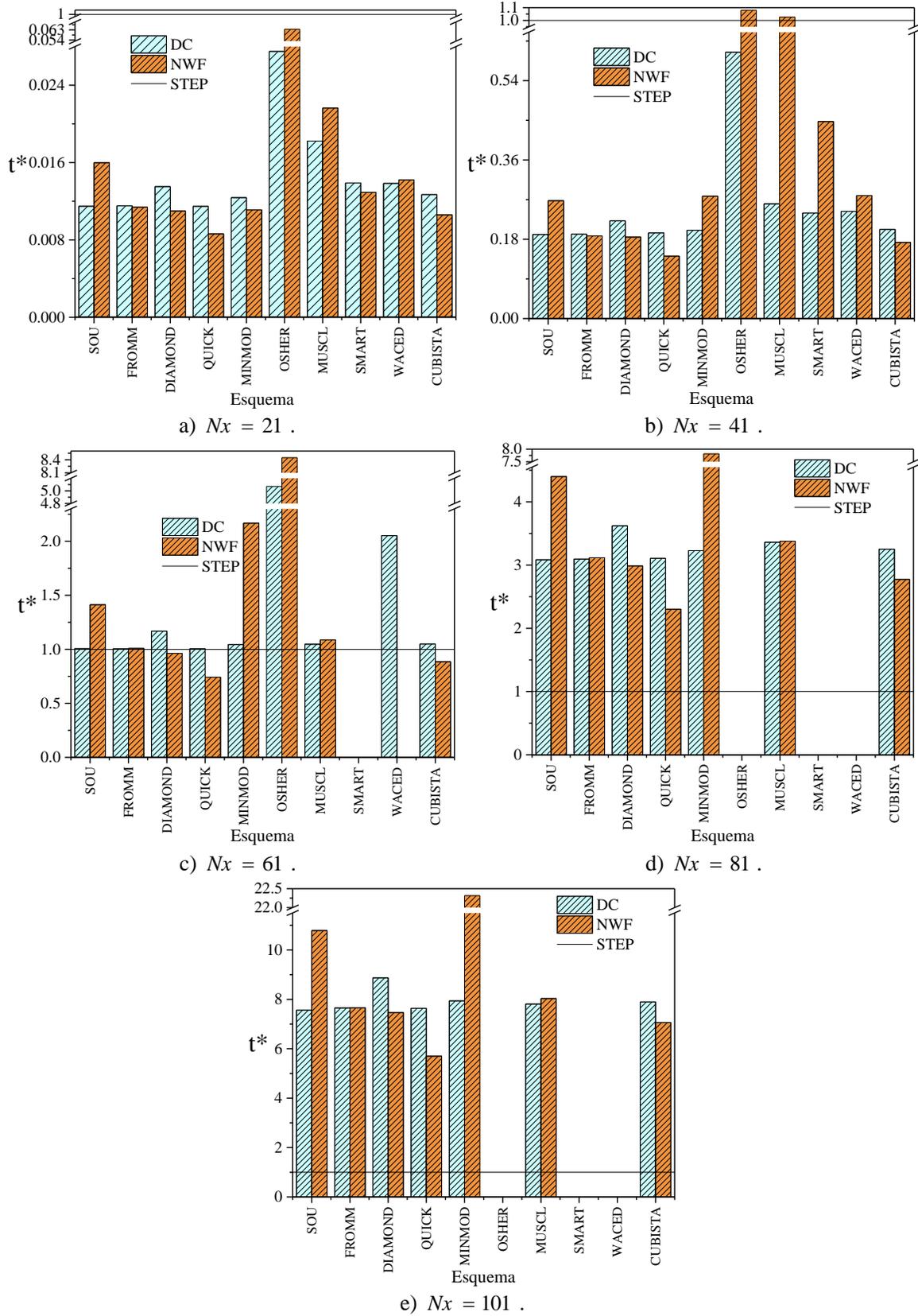


Figura 6. 1 Tiempo computacional obtenido con DC y NWF en función de la malla computacional.

En la Figura 6.1a se observa que los esquemas MUSCL y WACED han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. En el caso del esquema MUSCL ha requerido notablemente mayor tiempo de cómputo con la formulación NWF, alrededor de 15.78% más que la formulación DC, mientras que en el caso del esquema WACED ha requerido ligeramente mayor tiempo con la formulación matemática NWF, alrededor de 2.55% más que la formulación DC. Los esquemas MUSCL y WACED han requerido solo el 2.1 y 1.4% del tiempo computacional del esquema STEP, respectivamente.

Por último, para una malla de 21 nodos, se observa que los esquemas SMART y CUBISTA han requerido ligeramente menor tiempo computacional con la formulación NWF con respecto a la formulación DC, alrededor de 7.56 y 19.75% respectivamente. Con estos esquemas se ha obtenido solo 1.3 y 1%, respectivamente, del tiempo computacional del caso referencia.

Para una malla computacional de 41 nodos se ha observado en la Figura 6.1b que los esquemas SOU, FROMM, DIAMOND y QUICK presentan el mismo comportamiento que en el caso de una malla de 21 nodos. Nuevamente el esquema SOU ha requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF con respecto a la DC alrededor de 28%, mientras que los esquemas FROMM, DIAMOND y QUICK han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la DC alrededor de 2.15, 19.86 y 37.20%, respectivamente. El tiempo computacional obtenido con estos esquemas implementados con la formulación NWF en la malla de 41 nodos es menor con respecto al esquema STEP (caso referencia) en un 81.24, 81.49 y 85% para los esquemas FROMM, DIAMOND y QUICK, respectivamente. Mientras que el esquema SOU con la formulación NWF solo requiere el 26% del tiempo requerido con el esquema STEP.

En el caso del esquema MINMOD, el esquema ha requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de

27.87%. El tiempo computacional del esquema MINMOD con la formulación NWF es de 27.7% del tiempo computacional requerido por el caso referencia.

En el caso de los esquemas OSHER y MUSCL, nuevamente han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF alrededor de 44.04 y 74.61% respecto a la formulación DC, respectivamente.

El esquema SMART ha aumentado el tiempo considerablemente con la formulación NWF con respecto a la formulación DC en contraste con la malla de 21 nodos donde ha requerido menor tiempo computacional con respecto a la formulación DC. El tiempo aumentado por este esquema con la formulación NWF respecto a la formulación DC es de 46.43%.

Los esquemas WACED y CUBISTA han presentado el mismo comportamiento que en la malla de 21 nodos, es decir, para el esquema WACED ha requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 12.87 y menor tiempo computacional para el esquema CUBISTA con la formulación NWF respecto a la formulación DC 17.14%. Sin embargo, el tiempo computacional ha aumentado para ambos esquemas con ambas formulaciones. Además, han requerido mayor tiempo computacional aproximadamente 2% más del requerido con el esquema STEP.

Para una malla de 61 nodos (Figura 6.1c) se ha observado que los esquemas SOU, DIAMOND y QUICK nuevamente han presentado el mismo comportamiento que las mallas de 21 y 41 nodos. La formulación NWF ha requerido el mismo porcentaje para el esquema SOU que en las mallas anterior con respecto a la formulación DC, mientras que para el esquema DIAMOND y QUICK ha requerido 21.37 y 31.51% menor que la formulación DC. El tiempo computacional con el esquema DIAMOND y QUICK es menor ligeramente que el tiempo obtenido con el esquema STEP alrededor de 3.75 y 25.77, mientras que con el esquema SOU es mayor que del STEP, alrededor de 41%, estos con la formulación NWF.

En el caso del esquema FROMM se ha observado que el tiempo computacional obtenido con la formulación matemática NWF es 0.4% mayor que la formulación DC. Por lo que en estos esquemas para una malla de 61 nodos no se ha observado un beneficio con alguna de las dos formulaciones. Sin embargo, con ambas formulaciones el tiempo es ligeramente mayor con respecto al de referencia aproximadamente de 0.85%.

El esquema MINMOD ha requerido nuevamente mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC al igual que en la malla de 41 nodos, alrededor de 51%, por lo que se tiene el mismo comportamiento. Sin embargo, con mayor tiempo computacional. El tiempo requerido con las formulaciones DC y NWF es de 4.3 y 116% respectivamente mayor que el esquema STEP.

El esquema OSHER ha requerido mayor tiempo computacional nuevamente con la formulación NWF respecto a la formulación DC, alrededor de 39.96%, además, con ambas formulaciones DC y NWF, el esquema ha requerido por lo menos 404 y 744% más de tiempo computacional del esquema STEP, respectivamente.

En el caso del esquema MUSCL y CUBISTA han tenido el mismo comportamiento para una malla de 61 nodos en comparación de una malla de 41 nodos. Sin embargo, el esquema ha requerido mayor tiempo computacionalmente ligeramente con la formulación NWF respecto a la formulación DC, alrededor de 3.68%, mientras que el esquema CUBISTA ha requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, aproximadamente 18.45%. Con respecto al caso referencia, la formulación DC ha requerido 4% del tiempo computacional para ambos esquemas, mientras que con la formulación NWF solo 8%.

Por último, el esquema SMART no ha logrado converger con la malla de 61 nodos con ambas formulaciones matemáticas, mientras que el esquema WACED solo ha logrado converger con la formulación DC.

Para la malla de 81 y 101 (Figura 6.1d y 6.1e) nodos se ha tenido el mismo comportamiento de todos los esquemas, excepto el esquema OSHER y WACED, a partir de la malla de 81 nodos el esquema OSHER no logra converger con ambas formulaciones, además el esquema SMART, no ha logrado converger para las últimas dos mallas. Por último el esquema WACED también tiene un comportamiento diferente, ya que este esquema para las mallas de 81 y 101 no ha logrado convergen con ambas formulaciones matemáticas.

Para la malla de 81 nodos, la formulación NWF ha requerido menor tiempo de cómputo con respecto a la formulación DC alrededor de 21.22, 34.97 y 17.26 para los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA, mientras que para la malla de 101 nodos, el porcentaje ha ido de 18.34, 34.04 y 11.77% menor a favor de la formulación NWF.

**Tabla 6. 2** Número de iteraciones requeridas por las formulaciones DC y NWF en función del número de nodos.

Malla ( $N_x = N_y = N_z$ )										
Esquema	21		41		61		81		101	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	112	160	211	303	305	440	397	573	487	703
FROMM	112	114	211	215	305	316	397	413	488	510
DIAMOND	132	112	246	211	357	305	465	397	571	488
QUICK	112	87	211	163	306	236	398	307	488	376
MINMOD	114	102	211	291	306	637	398	973	488	1379
OSHER	255	601	647	1195	1456	2583	--	--	--	--
MUSCL	165	204	276	1103	309	322	417	420	486	498
SMART	128	122	252	487	--	--	--	--	--	--
WACED	126	132	255	298	601	--	--	--	--	--
CUBISTA	115	97	211	179	306	258	398	336	488	428

En términos de número de iteraciones se presentan los resultados en la Tabla 6.2. Se observa que los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA han requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la DC para todas las mallas.

En el caso del esquema DIAMOND la máxima reducción de iteraciones con la formulación NWF es para una malla de 101 nodos. Se observa para este mismo esquema que conforme se aumenta el número de nodos la diferencia de iteraciones entre ambas formulaciones matemáticas es más notable, ya que la diferencia entre formulaciones aumenta de 20 iteraciones de diferencia para la malla de 21 nodos hasta 83 iteraciones de diferencia para la malla de 101 nodos a favor de la formulación NWF, además, que el esquema implementado con la formulación DC aumenta alrededor de 100 iteraciones entre mallas al aumentar el número de nodos, mientras que con la formulación NWF solo aumenta alrededor de 90 iteraciones en función de la malla.

En el caso de esquema QUICK se observa nuevamente en la Tabla 6.2 que la diferencia de iteraciones entre formulaciones matemáticas es de 25 iteraciones para una malla de 21 nodos hasta 112 iteraciones para una malla de 101 nodos a favor de la formulación NWF, es decir, la formulación NWF logra reducir el número de iteraciones que requiere el esquema QUICK con la formulación DC de 25 a 112 iteraciones a próximamente. De manera general para la formulación NWF, se observa que conforme se aumenta el número de nodos de la malla, el aumento de las iteraciones reduce, ya que entre la malla de 21 nodos y 41 nodos se tiene una diferencia de 76 iteraciones, mientras que la diferencia entre la malla 81 y 101 es de 69 iteraciones. En el caso la formulación DC se observa que el aumento de las iteraciones entre la malla 21 y 41 es de 99 iteraciones, mientras que entre la malla de 81 y 101 nodos se tienen una diferencia de 90 iteraciones. Esto es importante, ya que se observa que la formulación DC tiende a disminuir el número de iteraciones considerablemente conforme a su aumenta el número de nodos, mientras que la formulación NWF disminuye menor cantidad de iteraciones en función de la malla.

Por último, otro esquema que presentó beneficio en la reducción de iteraciones es el esquema CUBISTA. En la misma tabla mencionada, se observa que para una malla de 21 nodos el esquema CUBISTA implementado con la formulación NWF solo logra reducir 18 iteraciones del total obtenido con la formulación DC. Mientras que para una malla de 101 nodos logra reducir hasta 60 iteraciones. Al igual que el esquema anterior, se observa que conforme se aumenta el número de nodos, la diferencia entre mallas para la formulación NWF aumenta, ya que aumenta de 18 a 60 iteraciones de diferencia entre mallas. Para el mismo esquema con la formulación DC se observa que la diferencia entre mallas disminuye ligeramente, ya que entre las mallas de 21 nodos y 41 nodos la diferencia es de 96 iteraciones, mientras que para las mallas 81 y 101 la diferencia es de 90 iteraciones.

El resto de los esquemas han presentado problemas de convergencia en al menos en una malla. Sin embargo en el caso del esquema SMART con la formulación NWF ha reducido el número de iteraciones consumidas por la formulación DC. La reducción de iteraciones de solo seis iteraciones para la malla de 21 nodos, lo cual se ve reflejado en el tiempo computacional mostrado en la Figura 6.1a. Para la malla de 61, 81 y 101 nodos, el esquema no logra converger con ambas formulaciones. Este último problema se presenta también en el esquema WACED. Por último, conforme se aumenta el número de nodos de la malla es más complejo para el esquema OSHER obtener la solución con ambas formulaciones.

### 6.1.2 Esquema de cuadratura

En la Figura 6.2 se presenta el esfuerzo computacional de los esquemas implementados con ambas formulaciones matemáticas en función del esquema de cuadratura de tipo  $S_n$ , las cuales son la  $S_6$ ,  $S_8$ ,  $S_{10}$  y  $S_{12}$ , como se mencionó al inicio del capítulo.

En la Figura 6.2a se observa de manera general que la formulación NWF logra reducir el tiempo computacional para los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, Y

CUBISTA con respecto a la formulación DC para la cuadratura  $S_6$ . En el caso del esquema FROMM implementado con la formulación NWF es el esquema con menor reducción de tiempo computacional respecto a la formulación DC, mientras que el esquema implementado con la formulación NWF que presenta mayor reducción de tiempo computacional del obtenido con la DC es el esquema DIAMOND.

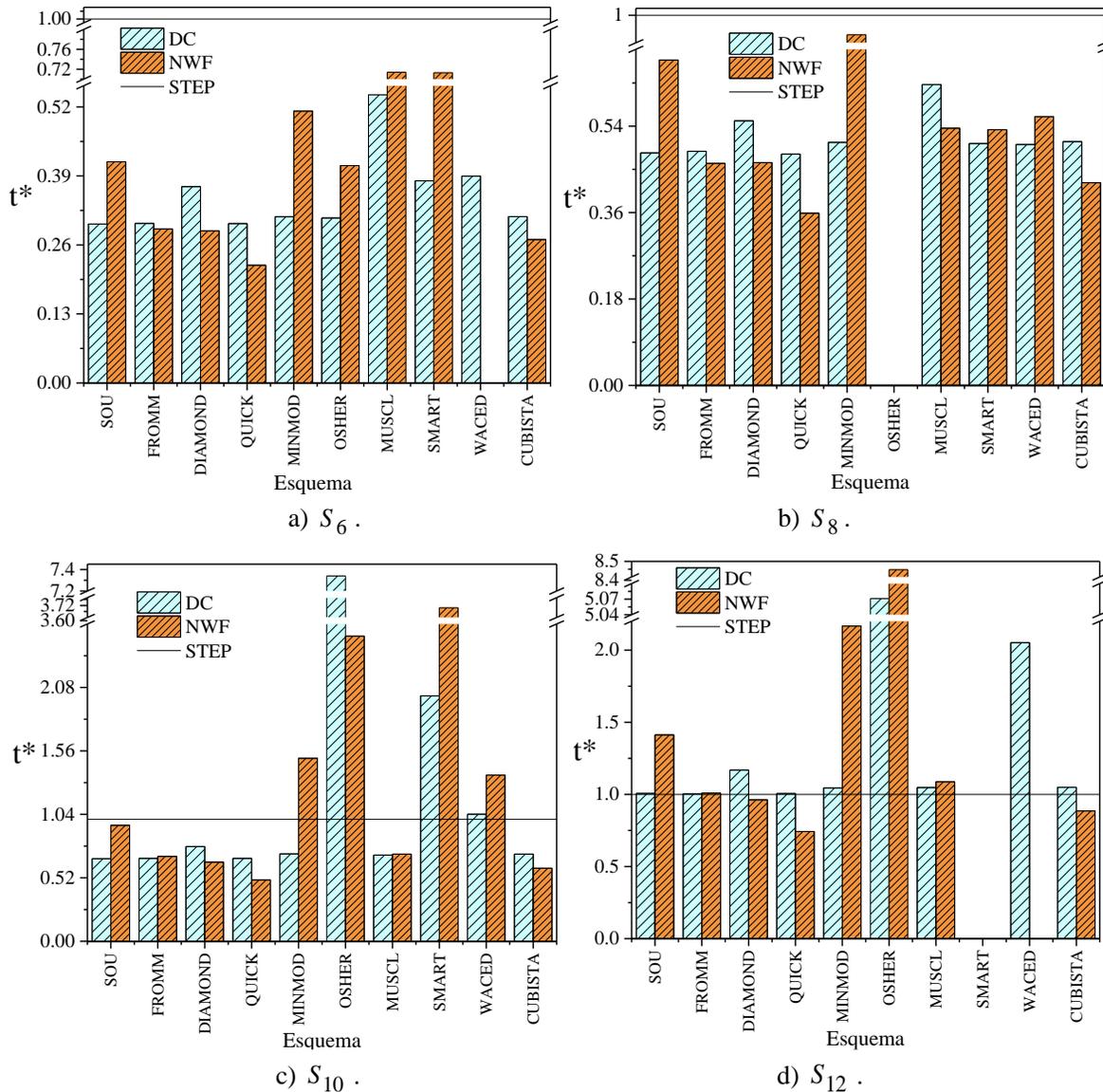


Figura 6. 2 Tiempo computacional con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura.

En la misma Figura 6.2a mencionada, se observa que en el caso del esquema SOU con la formulación NWF aumenta el tiempo computacional respecto a la formulación

con la DC un 3.58%, mientras que en el caso del esquema MINMOD con la formulación NWF aumenta el tiempo computacional de la DC un 38.84%. Además, el esquema OSHER con la formulación NWF aumenta el tiempo computacional de la DC hasta un 24.10%, en el caso de los esquemas SMART la formulación NWF aumenta el tiempo computacional de la DC un 46.59%. El esquema WACED no ha logrado converger con la formulación NWF. Por último, de manera general, se observa que todos los esquemas implementados con ambas formulaciones requieren menor tiempo computacional con respecto al esquema STEP (caso referencia), ya que el máximo tiempo computacional que se ha obtenido es el con el esquema MUSCL Y SMART, ambos con la formulación NWF y ha sido alrededor del 70% del tiempo requerido con el esquema STEP.

Para la cuadratura  $s_8$  se presenta en términos de tiempo computacional el comportamiento de los esquemas con ambas formulaciones en la Figura 6.2b. En esta figura mencionada, se observa que los esquemas SOU, FROMM, DIAMOND, QUICK y MINMOD presentan el mismo comportamiento con ambas formulaciones respecto al esquema de cuadratura  $s_6$ . Sin embargo, han requerido mayor tiempo computacional. Mismo comportamiento se presenta con los esquemas SMART Y CUBISTA. En el esquema SMART se observa que nuevamente se tiene mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Sin embargo no es tan excedido como en el caso de la cuadratura  $s_6$ , donde el tiempo computacional del NWF es casi el doble de la formulación DC.

En el caso del esquema OSHER, es el único esquema que no ha logrado converger con ambas formulaciones. Por otro lado, el esquema MUSCL ha presentado un comportamiento diferente en comparación al esquema de cuadratura  $s_6$ , ya que con la cuadratura  $s_8$  el esquema MUSCL implementado con la formulación NWF ha requerido mayor tiempo de cómputo que la formulación DC.

Por último, el esquema WACED ha logrado converger con la formulación NWF. Sin embargo, el tiempo requerido ha sido mayor respecto a la formulación DC.

En la Figura 6.2c se presenta el rendimiento computacional de los esquemas implementados con ambas formulaciones para la cuadratura  $s_{10}$ . En el caso del esquema SOU, DIAMOND, QUICK y MINMOD se tiene el mismo comportamiento en comparación de la cuadratura  $s_8$ . Sin embargo, con mayor tiempo computacional. En el caso del esquema FROMM se observa que el tiempo computacional ha sido mayor con la formulación NWF en comparación de la formulación DC, este comportamiento es contrario al obtenido con la cuadratura  $s_6$  y  $s_8$ , donde el esquema mencionado con la formulación NWF ha obtenido reducción de tiempo computacional con respecto a la formulación DC.

En el caso del esquema OSHER, ha logrado converger con ambas formulaciones. Sin embargo, el tiempo computacional es mayor con la formulación DC con respecto a la formulación NWF. Por otro lado, el esquema MUSCL ha requerido menor tiempo computacional con la formulación DC a diferencia de las dos cuadraturas anteriores, donde el tiempo computacional es menor con la formulación NWF.

El tiempo computacional del esquema SMART con la formulación NWF ha aumentado 45.60% con respecto a la formulación DC.

Nuevamente el esquema WACED implementado con la formulación NWF ha requerido mayor tiempo computacional con respecto a la formulación DC. Por último, el tiempo computacional del esquema CUBISTA con la formulación NWF ha reducido con respecto a la formulación DC alrededor de 19%.

Finalmente, para la cuadratura  $s_{12}$  se tiene en la Figura 6.2d que los esquemas SOU, FROMM, DIAMOND, QUICK y MINMOD ha tenido el mismo comportamiento respecto al esquema de cuadratura  $s_{10}$ . Sin embargo, con ambas formulaciones el

tiempo de cómputo ha aumentado. En el caso del esquema OSHER con la formulación NWF nuevamente aumenta el tiempo de cómputo con respecto a la formulación DC.

Los esquemas MUSCL y CUBISTA han presentado el mismo comportamiento con ambas formulaciones en comparación de la cuadratura  $S_{10}$ . Sin embargo, el tiempo de cómputo ha aumentado con ambas formulaciones para los dos esquemas mencionados.

**Tabla 6. 3** Número de iteraciones requeridas con la formulación DC y NWF en función del esquema de cuadratura.

Esquema	Cuadratura ( $S_n$ )							
	S6		S8		S10		S12	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	308	443	308	443	304	438	305	440
FROMM	308	313	308	306	304	317	305	316
DIAMOND	381	308	352	308	348	304	357	305
QUICK	309	239	308	238	304	235	306	236
MINMOD	308	509	307	563	304	650	306	637
OSHER	311	420	--	--	3211	1131	1456	2583
MUSCL	540	709	383	333	305	310	309	322
SMART	377	724	308	333	864	1656	--	--
WACED	383	--	307	347	446	598	601	--
CUBISTA	307	267	308	257	304	255	306	258

Por último, el esquema SMART ha presentados problemas de convergencia con ambas formulaciones, mientras que el esquema WACED nuevamente no ha convergido con la formulación NWF como ocurrió con la cuadratura  $S_6$ .

En la Tabla 6.3 se presenta el número de iteraciones requeridas por cada esquema con ambas formulaciones. El número iteraciones de cada esquema se presenta en función

del esquema de cuadratura. De acuerdo a la tabla mencionada, el esquema SOU requiere al menos 135 iteraciones adicionales con la formulación NWF respecto al número de iteraciones obtenidas con la formulación DC para las cuatro cuadraturas presentadas. Nótese que a pesar de requerir el mismo número de iteraciones en todas las cuadraturas excepto para la cuadratura  $s_{12}$  en cada formulación, el tiempo computacional aumenta como se muestra en la Figura 6.2.

En el caso del esquema FROMM con la formulación NWF se tiene mayor consumo de iteraciones para todas las cuadraturas con respecto a la formulación DC. Sin embargo, nótese que en la Figura 6.2a y 6.2b el tiempo computacional es menor con la formulación NWF respecto a la formulación DC como se mencionó anteriormente, ya que la formulación NWF requiere menor tiempo computacional para realizar matemáticamente una iteración con respecto a la formulación DC y como se observa en la tabla mencionada, para las cuadraturas  $s_6$  y  $s_8$  la diferencia entre ambas formulaciones a favor de la formulación DC es por debajo de cinco iteraciones, mientras que con las cuadraturas  $s_{10}$  y  $s_{12}$  Se tiene mayor diferencia entre ambas formulaciones nuevamente a favor de la formulación DC por arriba de 10 iteraciones. Por lo que para tener beneficio con la formulación NWF sobre la formulación DC la formulación NWF debe consumir máximo cinco iteraciones más que la DC o ser menor, de lo contrario, si excede ese número de iteraciones, consumirá mayor tiempo computacional que la formulación DC.

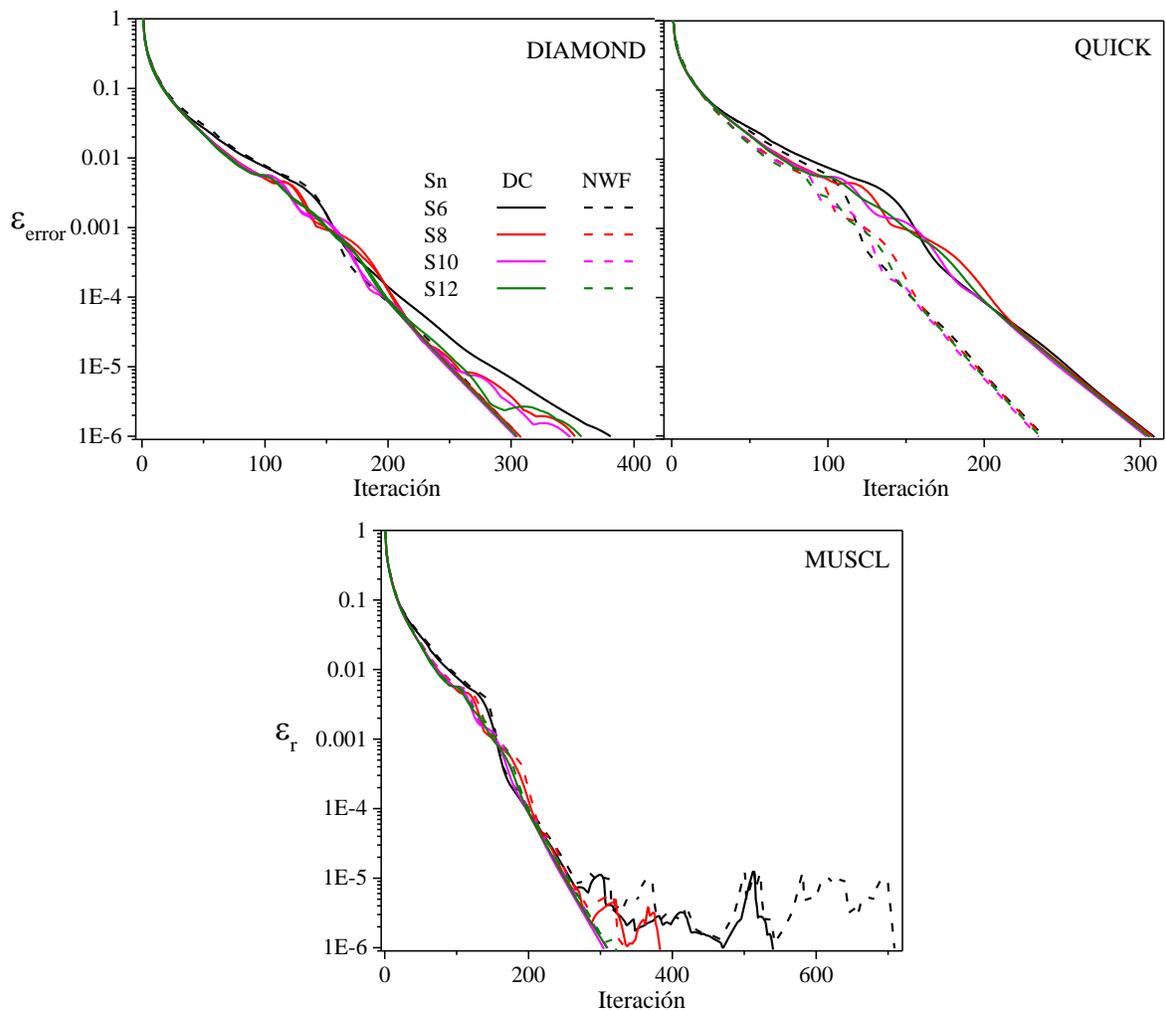
El esquema DIAMOND implementado con la formulación NWF ha requerido menor número de iteraciones con respecto a la formulación DC para todas las cuadraturas. La formulación DC ha presentado variación en el consumo de iteraciones a diferencia de la formulación NWF, la cual para las cuadraturas  $s_6$  y  $s_8$  el consumo de iteraciones ha sido el mismo, mientras que con la formulación DC se tiene variación de 29 iteraciones. En el caso de la cuadratura  $s_{10}$ , la formulación NWF disminuyó al menos cuatro iteraciones con respecto a las demás cuadraturas, mientras que la

formulación DC tuvo una variación entre cuatro y nueve iteraciones entre cuadraturas. Como se observa, el esquema DIAMOND presenta mayor estabilidad con la formulación NWF y a pesar de variar la cuadratura, el consumo de iteraciones es casi constante. Por otro lado, el esquema tiene mayor inestabilidad con la formulación DC, ya que presenta mayor variación de iteraciones entre cuadraturas. Este mismo comportamiento por parte de la formulación NWF se ha presentado con el esquema QUICK. En el caso de la formulación DC con el esquema QUICK, se tiene poca variación de iteraciones entre cuadraturas. Sin embargo, requiere mayor número de iteraciones con respecto a la formulación NWF.

En el caso del esquema MINMOD implementado con la formulación NWF ha requerido mayor número de iteraciones con respecto a la formulación DC. Para la cuadratura  $s_6$  y  $s_8$  la formulación NWF ha requerido al menos 60% más iteraciones de las requeridas con la formulación DC, mientras que para las cuadraturas  $s_{10}$  y  $s_{12}$  la formulación NWF aumenta al menos 110% de las iteraciones requeridas con la formulación DC. Sin embargo, en términos de tiempo computacional se observa que el aumento es menor del 50% para las primeras dos cuadraturas mencionadas mientras que en el resto de las cuadraturas apenas requiere el doble del tiempo del cómputo, estas dos comparaciones con respecto a la formulación DC. Por lo que se observa que la formulación NWF es más rápida en cada iteración con el esquema MINMOD con respecto a la formulación DC, similar al esquema FROMM.

El esquema MUSCL con la formulación NWF ha requerido mayor número de iteraciones en la mayoría de las cuadraturas con respecto a la formulación DC. En la cuadratura que se ha tenido un beneficio en términos de iteraciones con la formulación NWF ha sido en la  $s_8$  con 50 iteraciones menos que la formulación DC. Sin embargo, no es suficiente para tener una disminución del tiempo computacional considerable como se muestra en la Figura 6.2d. Nótese que para la cuadratura  $s_{12}$  la diferencia de iteraciones entre ambas formulaciones solo es de cinco iteraciones.

El esquema CUBISTA con la formulación NWF ha reducido el número de iteraciones requeridas por el mismo esquema con la formulación DC en al menos un 14% para la cuadratura  $S_6$ , para las cuadraturas  $S_8$ ,  $S_{10}$  y  $S_{12}$  la formulación NWF ha reducido alrededor de 16% de las iteraciones requeridas por la formulación DC, esta reducción de iteraciones se ve reflejado en el tiempo computacional (Figura 6.2), ya que se observa una reducción del tiempo computacional de 16 – 20.24%.



**Figura 6. 3** Relación de iteración-residual obtenido con las formulaciones DC y NWF.

En la Figura 6.3 se presenta el comportamiento del residual con respecto al paso de las iteraciones para el esquema DIAMOND. Obsérvese que ambas formulaciones tienen un comportamiento similar. En el caso de la cuadratura  $S_6$ , se observa que para obtener un residual de 0.01 el esquema con la formulación NWF requiere mayor

número de iteraciones con respecto al resto de las mallas. Esto sucede hasta un residual aproximadamente de 0.001, donde tiende a disminuir más rápido que el resto de las mallas. En el caso del resto de las mallas, aproximadamente entre la iteración 90 y 120 el residual permanece constante, posteriormente acelera su convergencia hasta la iteración 140 aproximadamente y nuevamente se tiene una ligera desaceleración, posterior a esto, la formulación NWF se estabiliza. Mientras que la formulación DC presenta problemas oscilaciones. A pesar de que la formulación DC presenta comportamiento similar a la formulación NWF, requiere mayor número de iteraciones.

En la Figura 6.3 se presenta el residual con respecto a las iteraciones para el esquema QUICK con ambas formulaciones. Un comportamiento similar al esquema DIAMOND se ha obtenido con el esquema QUICK. A diferencia del esquema DIAMOND, en el esquema QUICK se observa que para la formulación DC, en las últimas iteraciones no presenta oscilaciones. Sin embargo aproximadamente entre la iteración 110 y 215 se presenta una ligera desaceleración de la convergencia del residual lo que ocasiona que el residual requiera mayor número de iteraciones, esto para todas las cuadraturas. En el caso de la formulación NWF, se observa que entre la iteración 75 y 85 existe una ligera oscilación para cuadratura  $S_{10}$ , posteriormente acelera la convergencia del residual hasta la iteración 95 aproximadamente, después se presenta una desaceleración hasta la iteración 145 aproximadamente, y finalmente se presenta una estabilidad del residual hasta la última iteración. Un comportamiento similar se presenta en el resto de las cuadraturas. Sin embargo para la cuadratura  $S_6$ , el esquema QUICK con la formulación NWF tiene mayor desaceleración de la convergencia con respecto al respecto a las demás cuadraturas. Esto sucede hasta un residual aproximadamente de 0.06 (110 iteraciones aproximadamente), posteriormente el esquema presenta una repentina aceleración hasta la iteración 130 aproximadamente, seguido de esto, nuevamente presenta una pequeña desaceleración

hasta la iteración 150 aproximadamente. Finalmente se estabiliza hasta conseguir la convergencia de la variable.

En la Figura 6.3 se presenta la relación residual-iteración obtenido con el esquema MUSCL implementado con ambas formulaciones. En la figura se observa que para la cuadratura  $S_6$  el esquema MUSCL con ambas formulaciones presenta problemas de convergencia cuando alcanza un residual aproximadamente  $9 \times 10^{-6}$ , ya que por debajo de este valor ambas formulaciones presentan problemas de oscilaciones, nótese que de no presentar este problema y que ambas formulaciones mantuviera una velocidad constante de convergencia, el consumo de iteraciones sería por lo menos de 350 iteraciones. Similar comportamiento se presenta en el caso de la cuadratura  $S_8$ . Sin embargo, esto se presenta a partir de un residual aproximadamente de  $5 \times 10^{-6}$ , de no presentarse también en este caso, el consumo de iteraciones sería por lo menos de 350. Para el resto de cuadraturas, ambas formulaciones presentan mayor estabilidad en el proceso iterativo, excepto la formulación NWF para la cuadratura  $S_{12}$ , en la que el residual llega aproximadamente a  $1 \times 10^{-6}$  y se presenta problemas de oscilaciones, por lo que requiere alrededor de 20 iteraciones adicionales.

### 6.1.3 Coeficiente de absorción

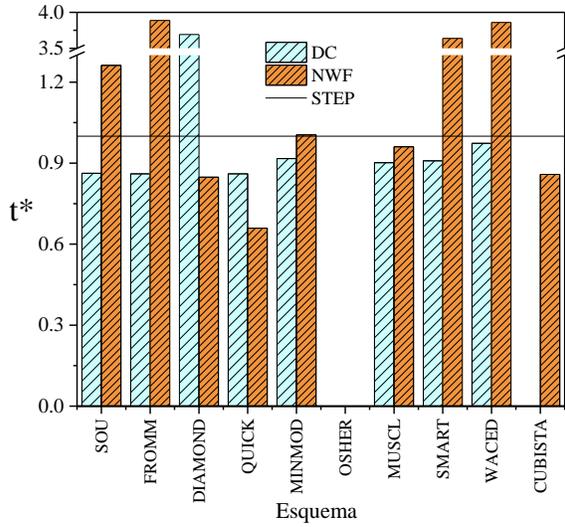
Para el parámetro del coeficiente de absorción se han implementado 5 valores, 0.1, 0.5, 1.0, 5.0 y 10.0. En la Figura 6.4 se presenta el comportamiento de cada esquema con ambas formulaciones en términos de tiempo computacional para todos los valores del coeficiente de absorción.

En la Figura 6.4a, se observa que en el caso del esquema SOU la formulación NWF ha requerido 31.67% más del tiempo computacional requerido con la formulación DC. En el caso de los esquemas FROMM, MINMOD, MUSCL, SMART y WACED la formulación NWF ha aumentado el tiempo requerido por la formulación DC, 77.86, 8.75, 6.15, 75.01 y 74.77%, respectivamente. La formulación NWF ha reducido el

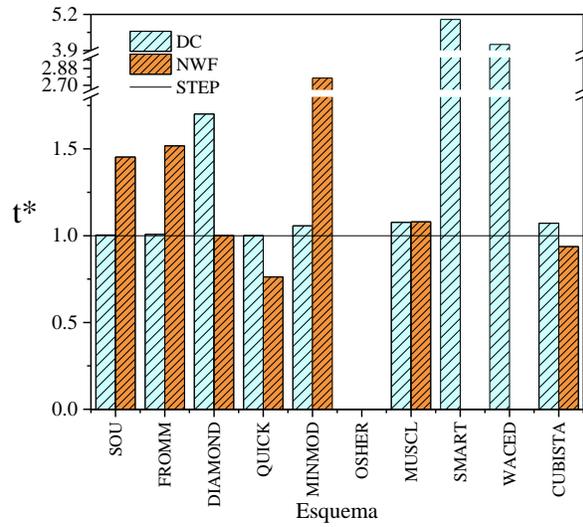
tiempo computacional solo para dos esquemas, los esquemas DIAMOND y QUICK. En el caso del esquema DIAMOND implementado con la formulación NWF se ha reducido 335.28% del tiempo computacional requerido por este mismo esquema con la formulación DC. Mientras que en el caso del esquema QUICK la formulación NWF ha reducido 30.55% del tiempo computacional de la DC. En el resto de los esquemas el tiempo requerido con la formulación NWF ha sido superior al de la formulación DC. Por último, el esquema OSHER no logró converger con ambas formulaciones, mientras que el esquema CUBISTA solo converge con la formulación NWF. Con respecto al caso referencia se observa que el esquema DIAMOND con la formulación DC, los esquemas SOU FROMM MINDMO y WACED con la formulación NWF, han requerido mayor tiempo computacional de 269, 26, 288, 0.4 y 285% adicional al caso de referencia.

En la Figura 6.4b se observa que para el coeficiente de absorción de 0.5 nuevamente, el esquema SOU requirió mayor tiempo de cómputo con la formulación NWF respecto a la formulación DC, aproximadamente 30.90%. En el caso del esquema FROMM la formulación NWF ha requerido 33.59% más del tiempo computacional requerido por la formulación DC. El esquema MINMOD y MUSCL han requerido 61.94 y 0.29% más del tiempo requerido por la formulación DC. El esquema OSHER nuevamente no ha convergido con ambas formulaciones, mientras que el esquema SMART y el esquema WACED no han convergido con la formulación NWF. Los esquemas que han presentado un beneficio con la formulación NWF son los esquemas DIAMOND y QUICK. Adicional a estos dos últimos esquemas, el esquema CUBISTA ha presentado beneficio con la formulación NWF, ya que para el coeficiente de absorción de 0.5 el esquema CUBISTA ha convergido con la formulación DC. Sin embargo, con mayor tiempo computacional con respecto a la formulación NWF. Para este mismo valor de absorción, solo los esquemas QUICK y CUBISTA con la formulación NWF han requerido menor tiempo computacional con respecto al caso referencia, alrededor de 24 y 7 %.

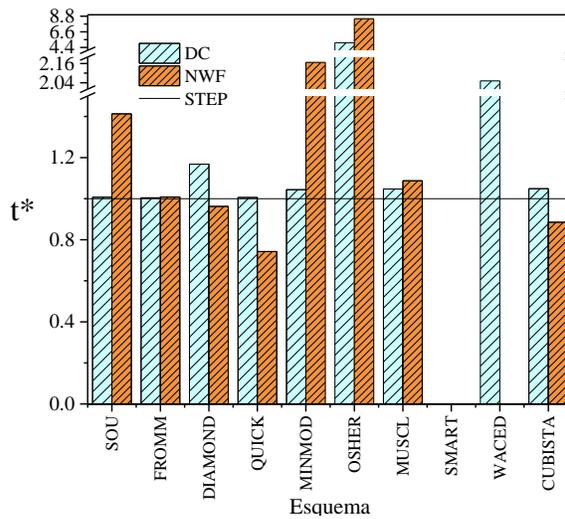
## 6.1 Cavidad cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante



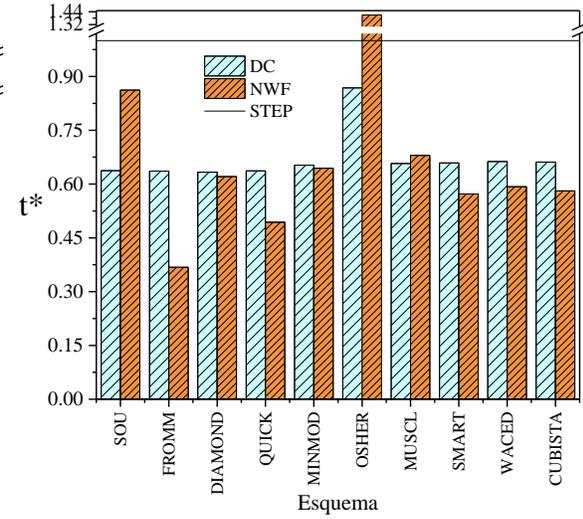
a)  $\kappa_{abs} = 0.1$ .



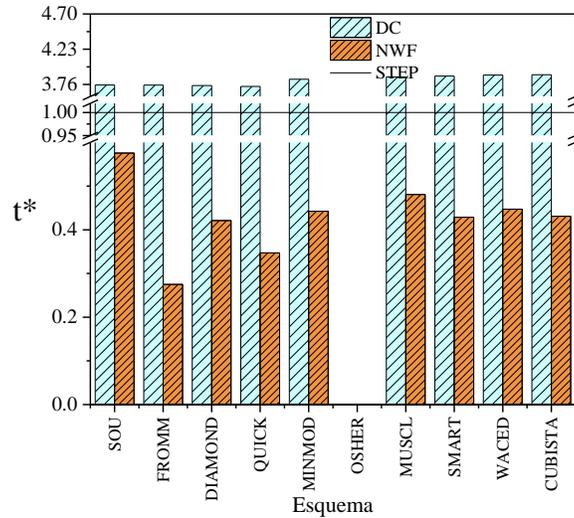
b)  $\kappa_{abs} = 0.5$ .



c)  $\kappa_{abs} = 1.0$ .



d)  $\kappa_{abs} = 5.0$ .



e)  $\kappa_{abs} = 10.0$ .

**Figura 6. 4** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del coeficiente de absorción.

En la Figura 6.4c se presenta el comportamiento de los esquemas con ambas formulaciones para 1.0 de absorción. En el caso de esquema SOU la formulación NWF nuevamente requirió mayor tiempo computacional. Sin embargo, es menor a comparación del caso de absorción de 0.5, ya que solo requirió 28.74%. Los esquemas FROMM, MINMOD, OSHER y MUSCL, requirieron nuevamente mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, alrededor de 0.42, 51.82, 39.96, y 3.68%. Nuevamente los esquemas DIAMOND, QUICK y MINMOD con la formulación NWF han requerido menor tiempo computacional con respecto a la formulación DC, alrededor de 21.37, 35.51 y 18.45%, respectivamente. El esquema SMART ha presentado nuevamente problemas de convergencia. Sin embargo, con ambas formulaciones. Por último, el esquema WACED ha convergido nuevamente con la formulación DC.

En la Figura 6.4d se presenta el rendimiento en términos de tiempo computacional para todos los esquemas con ambas formulaciones. A diferencia de los valores anteriores del coeficiente de absorción, para 5.0 de absorción todos los esquemas han convergido con ambas formulaciones. Sin embargo, no todos han presentado beneficio con la formulación NWF con respecto a la formulación DC. Los esquemas

que no han presentado beneficio con la formulación NWF son los esquemas SOU, SOHER y MUSCL. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA con la formulación NWF han reducido el tiempo computacional requerido por la formulación DC aproximadamente 72.86, 1.97, 28.92, 1.31, 15.08 11.84 y 13.81, respectivamente. Con respecto al caso referencia todos los esquemas con ambas formulaciones han requerido menor tiempo computacional, excepto el esquema OSHER con la formulación NWF, el cual requirió 40% más del tiempo computacional del caso referencia.

El tiempo computacional que han requerido los esquemas con ambas formulaciones para 10.0 de absorción se presenta en la Figura 6.4e. En esta misma figura se observa que todos los esquemas requieren similarmente el mismo tiempo de cómputo. Sin embargo, en el caso del SOU, y MUSCL han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, además, el esquema OSHER no logra converger con ambas formulaciones. Para este coeficiente de absorción todos los esquemas requieren menor tiempo de cómputo con la formulación NWF en comparación con la formulación DC. El esquema que ha presentado mayor beneficio con la formulación NWF es el esquema FROMM, el cual ha disminuido 59.82% del requerido con la formulación DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA, han reducido el 4.23, 26.03, 1.44, 5.86, 1.80 y 5.75% del tiempo computacional requerido con la formulación DC.

En términos de iteraciones, en la Tabla 6.4 se presenta el rendimiento de los esquemas con ambas formulaciones en función del coeficiente de absorción. Se observa de manera general que los esquemas SOU y MUSCL no reducen el número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC para todos los valores de absorción. Los esquemas FROMM, MINMOD, SMART y WACED ha presentado reducción de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC en al menos en un valor de absorción, mientras que el esquema OSHER es el esquema con mayor problemas de convergencia con ambas formulaciones.

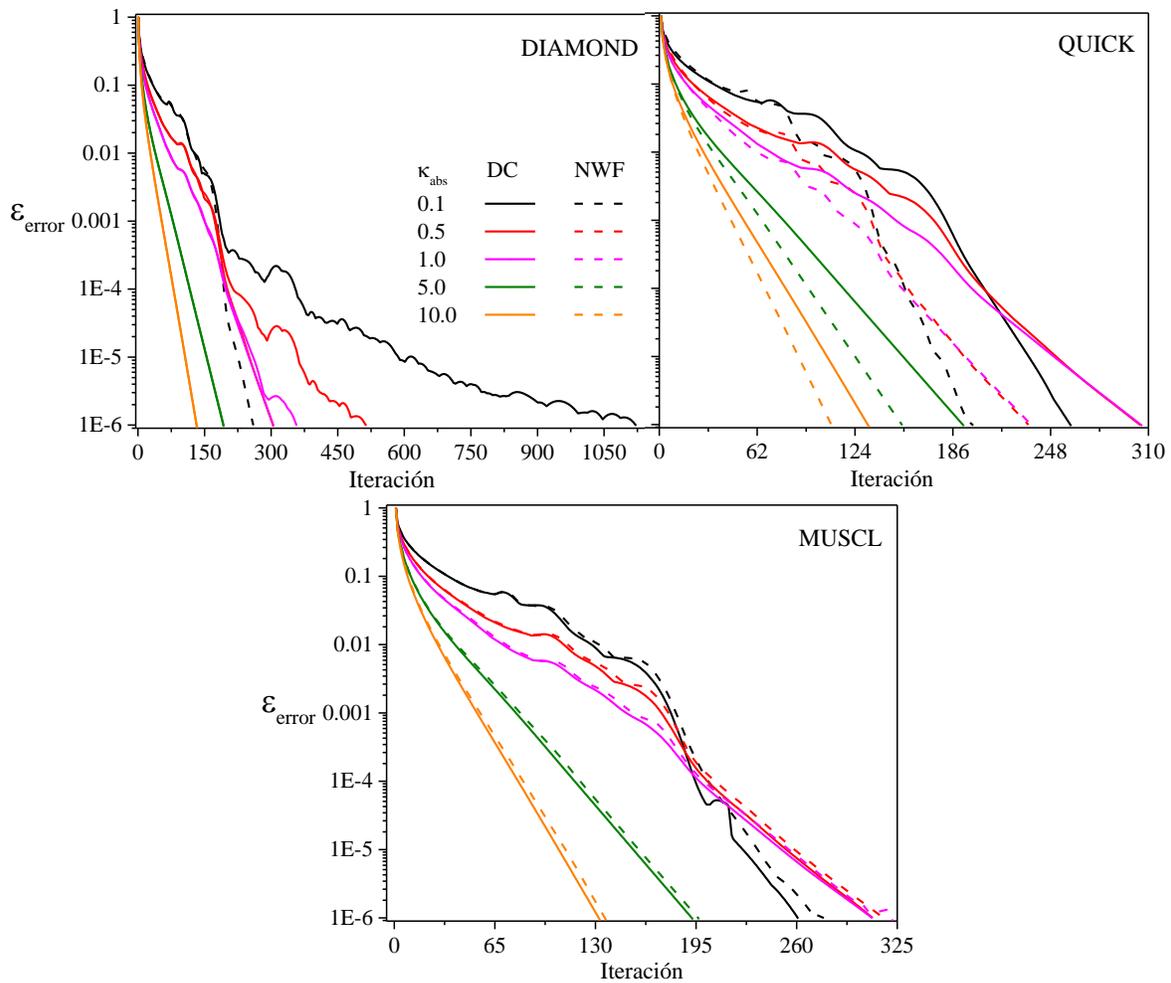
**Tabla 6. 4** Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la absorción.

Esquema	Absorción ( $\kappa_{abs}$ )									
	0.1		0.5		1		5		10	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	261	383	305	441	305	440	193	268	133	178
FROMM	260	1218	305	481	305	316	193	115	133	86
DIAMOND	1122	260	514	305	357	305	193	193	133	133
QUICK	261	199	305	234	306	236	193	154	133	109
MINMOD	263	282	305	788	306	637	193	186	133	125
OSHER	--	--	--	--	1456	2583	258	426	--	--
MUSCL	261	278	309	317	309	322	193	197	133	137
SMART	263	1045	1465	--	--	--	193	167	133	122
WACED	275	1120	1196	--	601	0	193	170	133	125
CUBISTA	--	244	311	264	306	258	193	166	133	121

Por último, los esquemas DIAMOND y QUICK han presentado reducción de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. En el caso del esquema DIAMOND se observa que con la formulación NWF presenta reducción de hasta 860 iteraciones aproximadamente para 0.1 de absorción respecto a la formulación DC mientras que con absorción de 10 el esquema con ambas formulaciones presentan la misma cantidad de iteraciones. Sin embargo se ha tenido beneficio a favor de la formulación NWF en términos de tiempo computacional. En el caso del esquema QUICK se observa que existe más diferencia de iteraciones entre formulaciones para absorción de 0.1 respecto a 10 de absorción. Sin embargo, la formulación NWF ha requerido menor número de iteraciones en todos los valores de absorción.

A continuación se presenta el comportamiento del residual de la variable de acuerdo con cada esquema en función del coeficiente de absorción y el número de iteraciones.

Se presenta solamente los esquemas que han convergido con todos los valores del coeficiente de absorción.



**Figura 6. 5** Relación de iteración-residual con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura.

La relación iteración-residual para el esquema DIAMOND se presenta en la Figura 6.5. Se observa que el esquema implementado con la formulación DC presenta un residual demasiado inestable para absorción de 0.1, al igual que los demás valores de absorción. Sin embargo, conforme se aumenta el valor de absorción, el residual presenta mayor estabilidad. A pesar de esto, la formulación DC no tiene la capacidad de ser más rápida que la formulación NWF para coeficientes de absorción altos. Por otro lado, el esquema ha presentado mayor estabilidad con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Sin embargo, para los coeficientes de absorción de 0.1,

0.5 y 1.0 presentan una ligera oscilación. A pesar de esto, no ha generado que sea más lenta la formulación NWF con respecto a la formulación DC.

La relación iteración-residual se presenta en la Figura 6.5 para el esquema QUICK. En la figura se observa que el esquema con ambas formulaciones requiere mayor número de iteraciones para absorción de 0.5 con respecto a la absorción de 0.1. En los esquemas anteriores se observó que conforme se aumenta la absorción se disminuye las iteraciones. Sin embargo en el caso del esquema QUICK no se cumple para la absorción de 0.5. A pesar de esto, para el resto de coeficientes las iteraciones disminuyen conforme se aumenta el coeficiente de absorción. Nótese que para los coeficientes de 0.1, 0.5 y 1.0 el esquema con ambas formulaciones presenta oscilaciones. A pesar de esto el esquema con la formulación NWF es más rápido respecto al mismo esquema implementado con la formulación DC.

Por último, En la Figura 6.5 se presenta la relación de iteración-residual para el esquema MUSCL. En este caso se observa que el esquema con ambas formulaciones presenta el mismo comportamiento para cada coeficiente de absorción. Sin embargo, el esquema QUICK implementado con la formulación NWF acelera su velocidad ligeramente a partir de un residual con valor de 0.005 aproximadamente para absorción de 5.0 y 10.0 respecto a la formulación DC. Obsérvese que en este caso la formulación NWF ha sido más rápida que la formulación DC para el valor de 10.0 de absorción.

#### **6.1.4 Emisividad de las paredes**

A continuación se presenta el comportamiento en términos del tiempo computacional y número de iteraciones requeridas por los esquemas implementados con ambas formulaciones para la variación de la emisividad.

En la Figura 6.6a se presenta el tiempo computacional requerido por cada esquema implementado con ambas formulaciones para una emisividad de 0.1. Se observa que la mayoría de los esquemas han requerido menor tiempo computacional con la

### 6.1 Cavidad cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante

formulación NWF, los cuales son los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, SMART, WACED y CUBISTA, con un 83.32, 4.0, 32.35, 18.94, 11.88 y 11.57% respectivamente menor al obtenido con la formulación DC. Por otro lado, la formulación NWF han aumentado considerablemente el tiempo computacional de la formulación DC con los esquemas SOU y OSHER un 27.83 y 25.76% respectivamente. Mientras que los esquemas MINMOD y MUSCL con la formulación NWF ha sido 5.28 y 1.79 % mayor el tiempo del obtenido con la formulación DC, respectivamente.

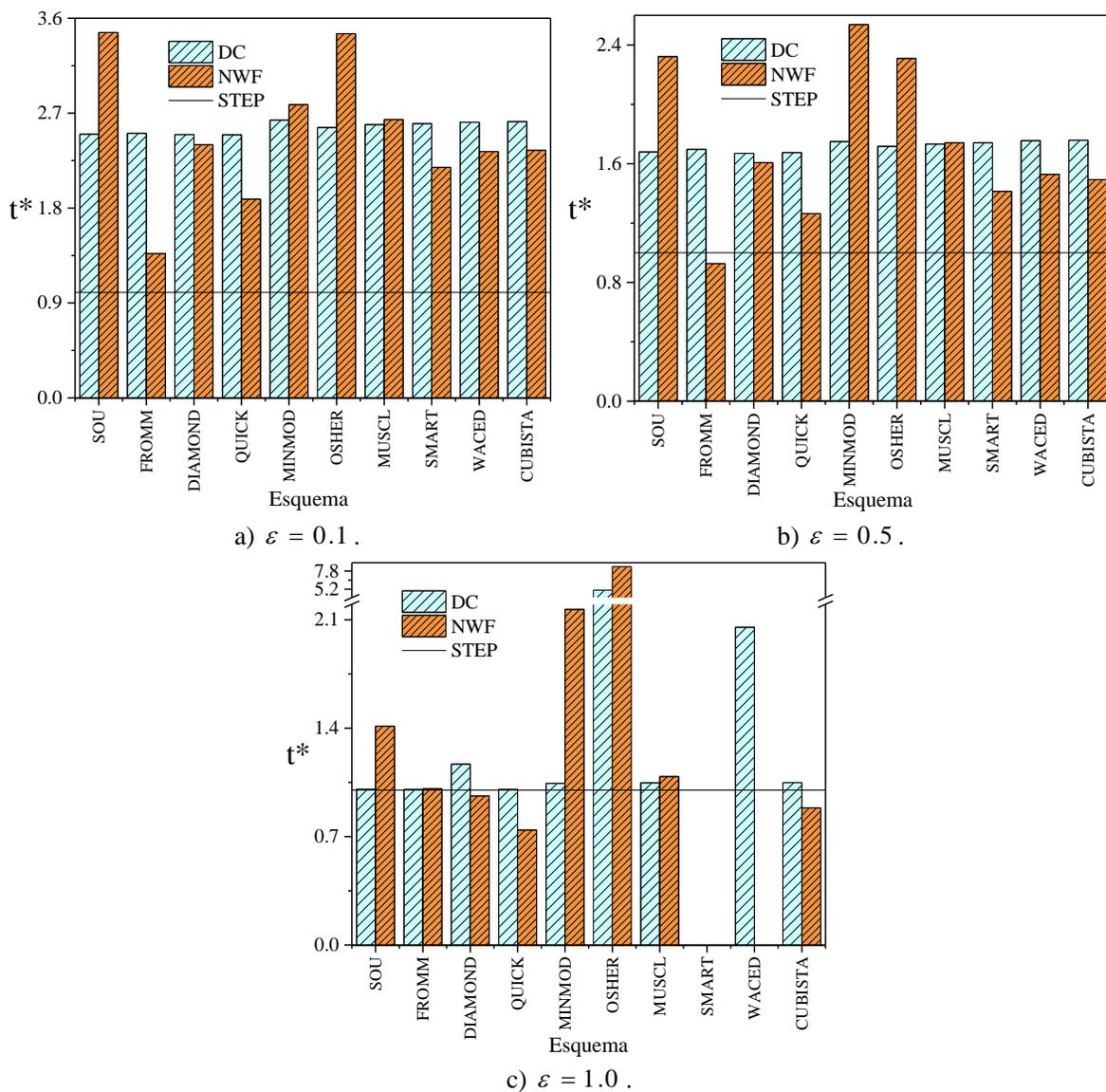


Figura 6. 6 Tiempo computacional obtenido con la DC y NWF en funcion de la emisividad.

Con respecto al esquema STEP se observa que los esquemas MUSCL y SMART con la formulación DC requieren 159% más del tiempo computacional del esquema STEP, mientras que los esquemas SOU y OSHER con la formulación DC requieren 150 y 156% más del tiempo computacional del esquema STEP, respectivamente. Por otro lado, los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, SMART, WACED y CUBISTA con la formulación DC han requerido 150, 149, 149, 156, 161 y 161%, respectivamente. Mientras que con la formulación NWF el tiempo ha sido de 36, 410, 88, 118, 135 y 134% menor que el esquema STEP, respectivamente.

En la Figura 6.6b se presenta el comportamiento de los esquemas implementados con ambas formulaciones para el valor de emisividad de 0.5. nótese que de nuevo, los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, SMART, WACED y CUBISTA han presentado beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC, ya que estos esquemas con la formulación NWF han reducido el tiempo computacional de la formulación DC 83.09, 3.88, 32.48, 23.15, 14.82 y 17.79%, respectivamente. En el caso de los esquemas SOU, MINMOD y OSHER han presentado mayor tiempo computacional con la formulación NWF con respecto a la formulación DC, aproximadamente 27.67 y 31.06%, respectivamente. En el caso del esquema MUSCL el tiempo computacional con la formulación NWF ha sido mayor que el obtenido con la formulación DC. Sin embargo, ha sido menor el aumento con respecto al valor anterior de emisividad, ya que en el anterior valor se tuvo un 1.79% de tiempo adicional con la formulación NWF, mientras que con la emisividad de 0.5 el tiempo de la formulación NWF fue de solo 0.48% mayor que la formulación DC.

El tiempo computacional con respecto al esquema STEP ha sido mayor en la mayoría de los esquemas con ambas formulaciones. En el caso del esquema SOU con la formulación DC y NWF el tiempo computacional ha sido de 67.96 y 132.21% mayor que el esquema STEP, respectivamente. En el caso del esquema FROMM con la formulación DC y NWF ha sido 69.71 y 17.3% mayor y menor respectivamente del esquema STEP. Los esquemas DIAMOND, QUICK, MINMOD, OSHER, MUSCL

SMART, WACED y CUBISTA ha requerido con la formulación DC el 66.96, 67.48 y 74.90, 71.70, 73.26, 74.09, 75.53 Y 75.82% más del tiempo computacional del esquema STEP. Mientras que estos mismos esquemas con la formulación NWF han requerido 60.71, 26.41, 153.71, 130.99, 74.10, 41.36, 52.86 y 49.56% más del tiempo obtenido con el esquema STEP.

Por último, en el caso de emisividad de 1.0 se tiene el comportamiento de la Figura 6.6c. Obsérvese que los esquemas SOU, FROMM, MINMOD OSHER y SMART con la formulación NWF han requerido mayor tiempo computacional respecto a la formulación DC. Mientras que los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA con la formulación NWF han requerido 21.37, 35.51 y 18.45% del tiempo computacional requerido con la formulación DC. El esquema QUICK ha sido el esquema con menor tiempo computacional respecto al esquema STEP y al resto de los esquemas, mientras que el esquema OSHER ha sido el esquema con mayor tiempo computacional con la formulación NWF.

En la Tabla 6.5 se presenta el número de iteraciones requeridas por cada esquema con ambas formulaciones. Se observa que los esquemas SOU, DIAMOND y MUSCL han requerido mayor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Por otra parte, los esquemas FROMM, DIAMOND, SMART y WACED han presentado menor número de iteraciones en al menos un valor de emisividad, en el caso del esquema FROMM presentó menor de iteraciones para 0.1 y 0.5 de emisividad con la formulación NWF. En el caso del esquemas DIAMOND con la emisividad de 1.0. En el caso del esquema SMART ha tenido beneficio en los dos valores que ha convergido con la formulación NWF (0.1 y 0.5) respecto a la formulación DC. En el caso del esquema WACED con la formulación NWF solo ha tenido beneficio en términos de iteraciones para emisividad de 0.5. Por último, los esquemas con la formulación NWF que han presentado beneficio en términos de iteraciones para los tres valores de emisividad ha sido los esquemas QUICK Y MIMOND.

**Tabla 6. 5** Número de iteraciones para las formulaciones DC y NWF en función de la emisividad.

Esquema	Emisividad ( $\varepsilon$ ).					
	0.1		0.5		0.1	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	761	1074	510	723	305	440
FROMM	761	431	510	294	305	316
DIAMOND	--	761	509	510	357	305
QUICK	761	599	510	399	306	236
MINMOD	761	783	510	730	306	637
OSHER	761	1041	510	705	1456	2583
MUSCL	--	778	509	518	309	322
SMART	761	644	509	422	--	--
WACED	761	776	510	451	601	--
CUBISTA	761	668	510	434	306	258

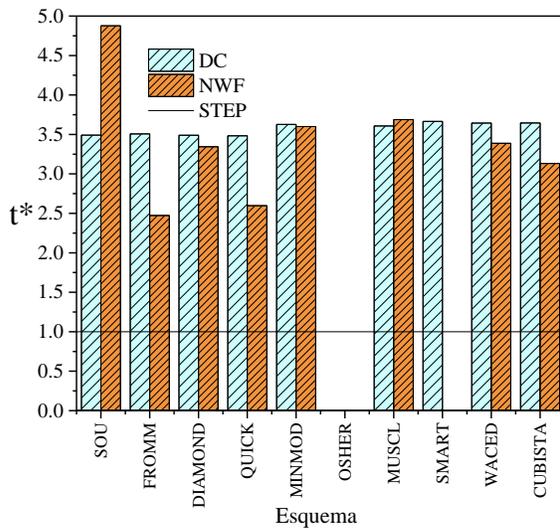
### 6.1.5 Bajo-relajación de la intensidad radiativa

El siguiente parámetro a presentar es el coeficiente de bajo-relajación. A continuación se presenta el comportamiento de los esquemas con ambas formulaciones en función del coeficiente de bajo-relajación.

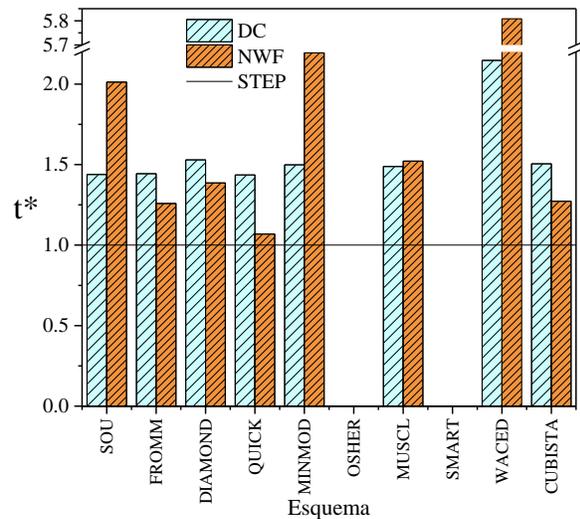
En la Figura 6.7a se presenta el tiempo computacional de todos los esquemas con ambas formulaciones para el coeficiente de bajo-relajación de 0.2. Se observa que los únicos esquemas que requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC son los esquemas SOU y MUSCL. En el caso del esquema SOU con la formulación NWF ha requerido 28.40% del tiempo adicional del tiempo obtenido con el mismo esquema a través de la formulación DC, mientras que el esquema MUSCL con la formulación NWF solo ha requerido 2.17% más tiempo computacional que ha requerido la formulación DC. En el caso de los esquemas OSHER y SMART han presentado problemas de convergencia con la formulación NWF. Solo el esquema OSHER con la formulación DC ha convergido. El esquema FROMM ha presentado mayor beneficio con la formulación NWF ya que

## 6.1 Cavidad cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante

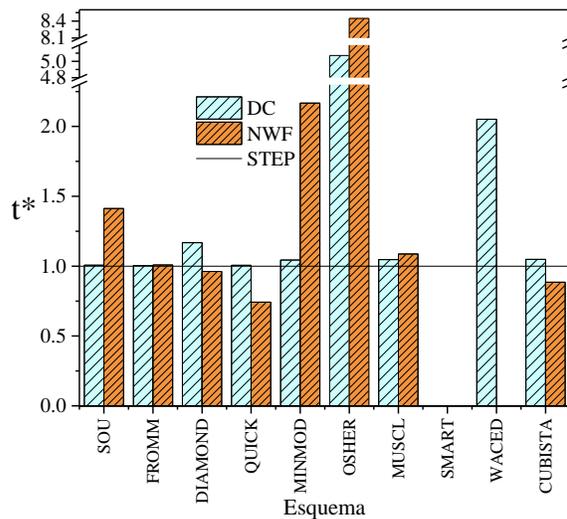
redujo hasta 41.79% del tiempo computacional del requerido con la formulación DC. Los esquemas DIAMOND, QUICK, MINMOD, WACED y CUBISTA con la formulación NWF han reducido el tiempo computacional de la formulación DC en un 4.36, 34.02, 0.74, 7.54 y 16.38%, respectivamente. Con respecto al tiempo computacional del esquema STEP los esquemas han requerido al menos 147.90% más del tiempo obtenido con el esquema STEP.



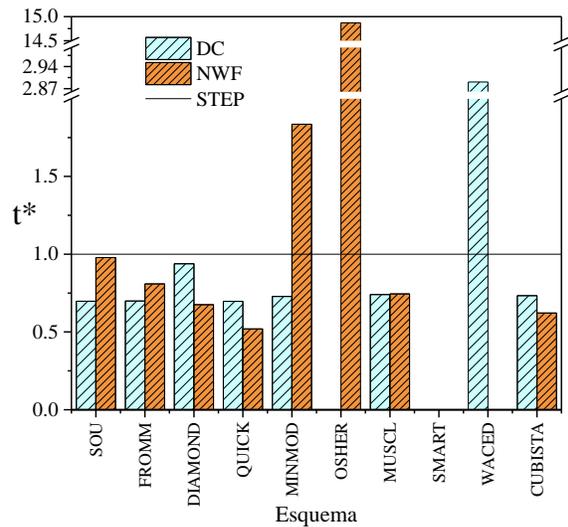
a)  $\alpha = 0.2$ .



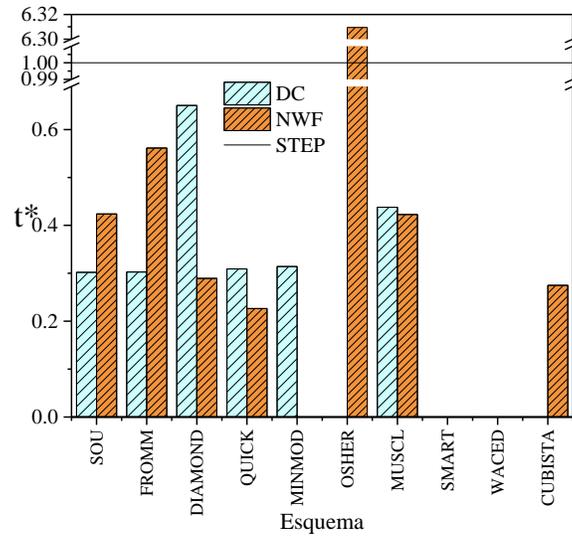
b)  $\alpha = 0.4$ .



c)  $\alpha = 0.5$ .



d)  $\alpha = 0.6$ .



e)  $\alpha = 0.8$ .

**Figura 6. 7** Tiempo computacional de las formulaciones DC y NWF en función de la bajo relajación.

En la Figura 6.7b se presenta el rendimiento computacional de los esquemas con ambas formulaciones para un coeficiente de relajación de 0.4. Se observa que los esquemas SOU y MUSCL nuevamente requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF, adicional a estos esquemas, los esquemas MINMOD y WACED han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF, comportamiento contrario al valor de bajo-relajación anterior, ya que en el anterior se tuvo reducción de tiempo computacional con la formulación NWF. Solo los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK y CUBISTA con NWF nuevamente han reducido el tiempo computacional de la formulación DC un 14.74, 10.31, 34.34 y 18.26%, respectivamente. Con respecto al esquema STEP todos los esquemas han requerido mayor tiempo computacional al menos de 6.90% con el esquema QUICK a través de la formulación NWF.

Para dispersión de albedo de 0.5 se ha observado en la Figura 6.7c que los esquemas SOU, FROMM, MINMOD, OSHER y MUSCL han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación NWF, mientras que los esquemas DIAMOND, QUICK, y CUBISTA con la formulación NWF han reducido 21.37, 35.51 y 18.45% del tiempo requerido con la formulación DC. En el caso del resto de los esquemas no han convergido con la formulación NWF.

En la Figura 6.7d se presenta el rendimiento en términos de tiempo computacional para cada esquema con ambas formulaciones para 0.6 de bajo-relajación. En la figura mencionada se observa que los esquemas SOU, MUSCL y MINMOD nuevamente han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF, mientras que el esquema WACED no ha logrado converger con la formulación NWF. Además, otro esquema que ha requerido mayor tiempo con la formulación NWF es el esquema FROMM. Por otra parte, los esquemas que han logrado converger con la formulación NWF son los esquemas DIAMOND, QUICK, y CUBISTA, estos han requerido 38.88, 34.05 y 18.01% menos del tiempo computacional obtenido con la formulación DC. Los esquemas SOU, FROMM, DIAMOND, QUICK, MUSCL y CUBISTA con ambas formulaciones han requerido menor tiempo computacional con respecto al esquema STEP. Mientras que el esquema MINMOD con la formulación NWF ha requerido mayor tiempo computacional con respecto al esquema STEP.

En la Figura 6.7e se presenta el rendimiento computacional de los esquemas con ambas formulaciones para 0.8 de bajo-relajación. El esquema SOU y FROMM con la formulación NWF han requerido mayor tiempo computacional con respecto a la formulación DC alrededor de 28 y 46%, respectivamente. Los esquemas MINMOD, OSHER y WACED y CUBISTA han convergido solo con una formulación, el MINMOD y WACED con la formulación DC y los esquemas OSHER y CUBISTA con la formulación NWF. En el caso de los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA con la formulación NWF han requerido menor tiempo de cómputo con respecto a la formulación DC alrededor de 124, 36 y 3.5%, respectivamente.

En la Tabla 6.6 se presenta el número de iteraciones consumidas por cada esquema con ambas formulaciones. Se observa que los esquemas FROMM, MINMOD y WACED con la formulación NWF reducen el número de iteraciones con respecto a la formulación DC. Sin embargo, los esquemas WACED y MINMOD solo reducen las iteraciones para bajo-relajación de 0.2, mientras que el esquema FROMM reduce las iteraciones para bajo-relajación de 0.2 y 0.4. En el caso de los esquemas

DIAMOND, QUICK y CUBISTA con la formulación NWF reducen el número de iteraciones respecto a la formulación DC. En el caso del esquema DIAMOND con la formulación NWF para bajo-relajaciones altas (0.2 y 0.4) la reducción de iteraciones es ligera con respecto a la formulación DC. Sin embargo, conforme se disminuye la bajo-relajación la reducción de iteraciones es mayor. En el caso del esquema QUICK se observa un comportamiento contrario al del esquema DIAMOND, ya que conforme se disminuye la bajo-relajación la reducción de iteraciones es menor con el esquema QUICK con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Por último, en el esquema CUBISTA con la formulación NWF se presenta un comportamiento similar del esquema QUICK en el cual, se observa que para bajo-relajación de 0.2 y 0.4 se tiene mayor reducción de iteraciones con respecto a la formulación DC.

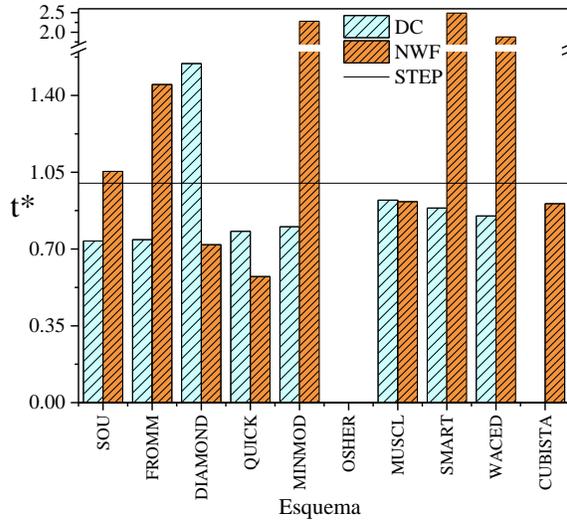
**Tabla 6. 6** Numero de iteraciones requeridas con las formulaciones DC y NWF.

Esquema	Coeficiente de bajo-relación ( $\alpha$ ).									
	0.2		0.4		0.5		0.6		0.8	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	1064	1525	439	631	305	440	213	307	92	133
FROMM	1064	779	439	398	305	316	213	252	92	175
DIAMOND	1068	1064	467	439	357	305	287	213	199	92
QUICK	1064	826	439	340	306	236	213	165	94	72
MINMOD	1064	1030	439	636	306	637	213	545	92	--
OSHER	--	--	--	--	1456	2583	--	4590	--	1949
MUSCL	1064	1080	439	449	309	322	218	220	129	127
SMART	1069	--	--	--	--	--	--	--	--	--
WACED	1064	987	628	1752	601	--	844	--	--	--
CUBISTA	1064	911	439	371	306	258	214	180	111	81

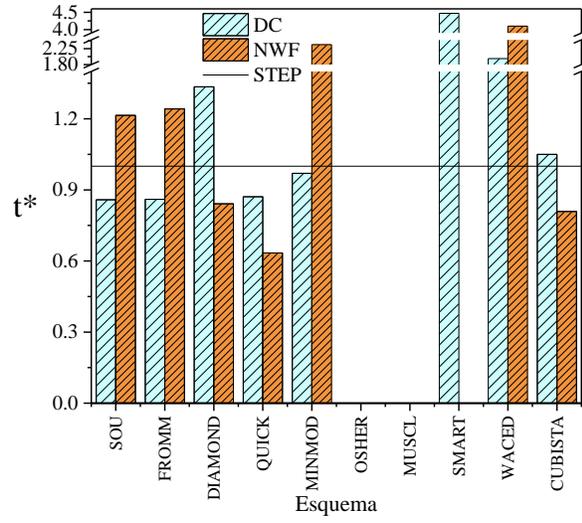
### 6.1.6 Coeficiente de dispersión de albedo

A continuación se presenta el último parámetro del primer caso estudiado (cavidad cúbica), el cual es el coeficiente de dispersión de albedo.

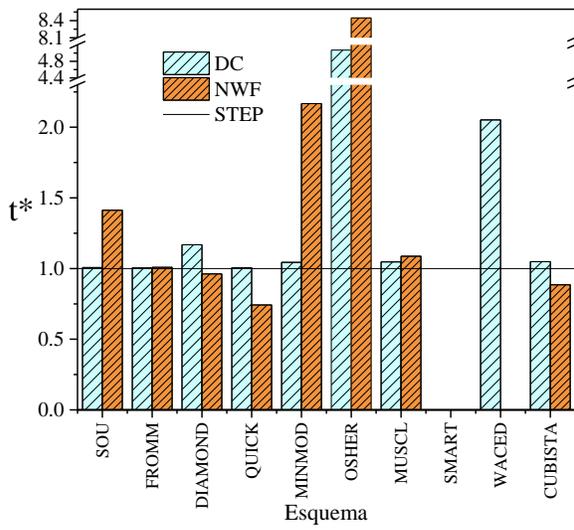
### 6.1 Cavidad cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante



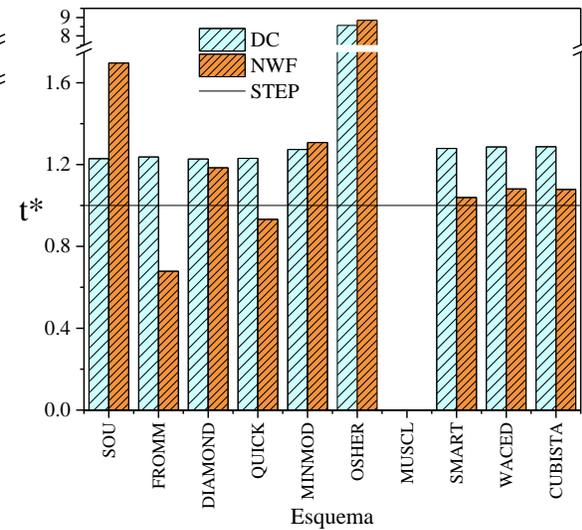
a)  $\omega = 0.05$ .



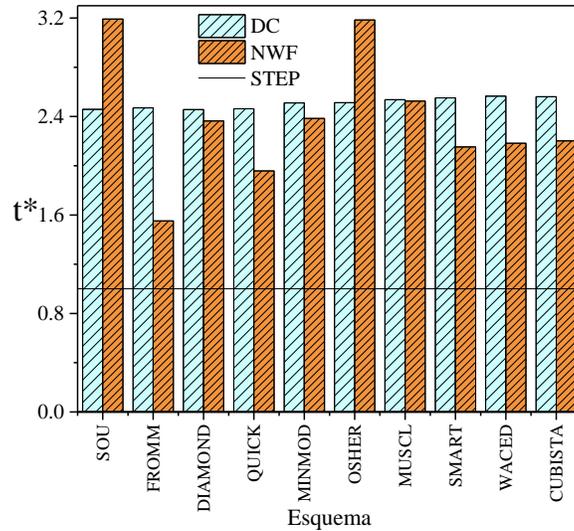
b)  $\omega = 0.25$ .



c)  $\omega = 0.5$ .



d)  $\omega = 0.75$ .



e)  $\omega = 0.95$ .

**Figura 6. 8** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de dispersión de albedo.

En la Figura 6.8a se presenta el esfuerzo computacional obtenido para cada uno de los esquemas con ambas formulaciones para un coeficiente de dispersión de 0.05. Se observa que el esquema OSHER logró converger con ambas formulaciones. Los esquemas SOU, FROMM, MINMOD, SMART y WACED han requerido 30.11, 48.77, 64.83, 64.37, 54.68% adicional del tiempo requerido por la formulación DC. por otra parte, los esquemas DIAMOND, QUICK y MUSCL ha requerido menor tiempo computacional con la formulación DC, alrededor de 114, 35.92 y 0.8% con respecto a la formulación DC. Nótese que solo los esquemas QUIICK y MUSCL con ambas formulaciones han requerido menor tiempo computacional con respecto al esquema STEP. En el resto de los esquemas excepto el CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con respecto al esquema STEP. Los esquemas que han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP son los esquemas SOU, FROMM, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART y WACED con la formulación DC Aproximadamente, 26.34, 25.71, 21.90, 19.85, 7.6, 11.32, 14.9% respectivamente. Los esquemas DIAMOND, QUICK, MUSCL y CUBISTA con la formulación NWF han requerido 28.02, 42.54, 8.4 y 9.3% menos del tiempo computacional requerido con el esquema STEP.

En la Figura 6.8b se presenta el rendimiento computacional de los esquemas con ambas formulaciones para 0.25 de dispersión de albedo. Se observa que los esquemas OSHER y MUSCL no convergen con ambas formulaciones. Por otro lado, los esquemas SOU, FROMM, MINMOD Y WACED, han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Contrario a estos esquemas, los esquemas MINMOD, QUICK y CUBISTA requirieren menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, 58.64, 37.45 y 29.75% menor, respectivamente. Los esquemas SOU, FROMM, QUICK y MINMOD con la formulación DC han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP aproximadamente 14.13, 13.96, 12.88 y 2.9%. Mientras que los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA con la formulación NWF han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP alrededor de 15.85, 36.62 y 19.09%, respectivamente.

En la Figura 6.8c se presenta el tiempo computacional de los esquemas con ambas formulaciones para dispersión de albedo de 0.5. Se observa que el esquema OSHER ha sido el único que no converge con ambas formulaciones, además el esquema CUBISTA solo converge con la formulación DC. Por otra parte, nuevamente los esquemas SOU, FROMM, MINMOD han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF, adicional a estos esquemas, los esquemas OSHER y MUSCL han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF. Los esquemas DIAMOND y QUICK ha requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC aproximadamente, 21.37 y 35.51%.

Por último, el esquema SMART no logra converger con ambas formulaciones, mientras que el esquema WACED solo converge con la formulación DC. Los esquemas DIAMOND, QUICK, y CUBISTA con la formulación NWF han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP alrededor de 3.75, 25.77 y 11.49%, respectivamente. Mientras que el resto de los esquemas han requerido mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP.

Para dispersión de albedo de 0.75 se presenta la Figura 6.8d el rendimiento computacional en términos de tiempo de cómputo para todos los esquemas con ambas formulaciones. Se observa que los esquemas SOU, MINMOD y OSHER nuevamente requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. En el caso del esquema FROMM con la formulación NWF se observa que ha logrado disminuir el tiempo computacional que requiere este mismo esquema con la formulación DC, aproximadamente 82.29%. en el caso del esquema DIAMOND, QUICK y WACED con la formulación NWF nuevamente disminuyen el tiempo computacional que requieren estos mismo esquemas con la formulación DC aproximadamente 82.29, 3.62, 18.97 y 19.35%, respectivamente. En el caso del esquema MUSCL no logra converger con ambas formulaciones. Los esquemas FROMM y QUICK con la formulación NWF han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP alrededor de 32.13 y 6.75% respectivamente. El resto de los esquemas requirieron mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP.

Por último, para dispersión de albedo de 0.95 se presenta el rendimiento en tiempo computacional de todos los esquemas con ambas formulaciones en la Figura 6.8e. Para este valor de dispersión de albedo se observa que todos los esquemas logran converger con ambas formulaciones. Sin embargo, los esquemas SOU, y OSHER requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Por otra parte, los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC aproximadamente, 59.13, 3.88, 5.26, 0.43, 18.49, 17.49 y 16.29%, respectivamente. Con respecto al esquema STEP se observa que todos los esquemas requieren mayor tiempo computacional, al menos de 55% para el esquema FROMM con la formulación NWF y máximo de 219% para el esquema OSHER con la formulación NWF, el resto

### 6.1 Cavidad cúbica con medio participante absorbente-emisor-dispersante

de los esquemas con ambas formulaciones requieren en este intervalo de tiempo computacional con respecto al esquema STEP.

**Tabla 6. 7** Numero de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de dispersión de albedo.

Esquema	Dispersión de albedo ( $\omega$ )									
	0.05		0.25		0.5		0.75		0.95	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	225	329	262	380	305	440	376	533	750	1001
FROMM	226	461	262	393	305	316	376	215	751	489
DIAMOND	474	226	409	262	357	305	376	376	752	751
QUICK	239	182	263	201	306	236	376	294	751	621
MINMOD	232	657	264	695	306	637	376	383	749	716
OSHER	--	--	--	--	1456	2583	2560	2719	750	982
MUSCL	270	266	--	--	309	322	--	--	751	762
SMART	259	747	1310	4680	--	--	376	311	751	649
WACED	247	540	574	1219	601	--	376	320	751	656
CUBISTA	0	260	305	233	306	258	376	317	751	657

En la Tabla 6.7 se presenta el número de iteraciones que ha requerido cada esquema con ambas formulaciones en función del coeficiente de dispersión de albedo. Los esquemas FROMM, SMART y WACED con la formulación NWF han presentado reducción de iteraciones para dos valores de dispersión de albedo, 0.75 y 0.95 respecto a la formulación DC. En el caso del esquema FROMM con la formulación NWF se observa que para 0.95 de dispersión de albedo, el esquema tiene mayor reducción que para 0.75 de dispersión con respecto a la formulación DC. Por lo que al aumentar el coeficiente de dispersión, la formulación NWF tiende a ser más rápida que la formulación DC. En el caso del esquema SMART y WACED se observa el mismo comportamiento del esquema FROMM.

Los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA han presentado beneficio con la formulación NWF para todos los valores de coeficiente de dispersión. Sin embargo, en el caso del esquema CUBISTA se observa que para 0.05 de dispersión albedo el

esquema no converge con la formulación DC, por lo que no se puede decir que tiene una reducción de iteraciones con la formulación NWF con respecto a la formulación DC. A pesar de esto, el beneficio que proporciona la formulación NWF es la convergencia del esquema, además, la convergencia la proporción en el intervalo de los valores restantes de dispersión de albedo.

Por otra parte, el esquema DIAMOND con la formulación NWF presenta reducción de iteraciones para todos los valores de dispersión de albedo con respecto a la formulación DC, excepto para 0.75, donde han requerido el mismo número de iteraciones. Sin embargo, de acuerdo a la Figura 6.8d requiere menor tiempo computacional, por lo que se considera como beneficio en término de tiempo computacional.

En el caso del esquema QUICK se observa que para todos los valores de dispersión de albedo el esquema reduce el número de iteraciones con la formulación NWF de las requeridas con la formulación DC. Para todos los valores se tiene una reducción considerable.

## **6.2 Horno rectangular tridimensional con medio participante absorbente-emisor**

A continuación se presenta los resultados obtenidos para el segundo caso de estudio. Nuevamente se ha implementado diversos esquemas de interpolación espacial con ambas formulaciones matemáticas, DC y NWF. Los resultados presentados son en términos de tiempo computacional y número de iteraciones requeridos para obtener la solución de la transferencia de calor por radiación en el horno tridimensional. Para ello considérese nuevamente las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.3). Además, considérese los parámetros a variar, los cuales son los siguientes:

1. Malla computacional espacial con valores de 21, 41, 61, 81 para la dirección  $x$  y  $y$ , valores de 41, 81, 121 y 161 para la dirección  $z$ .
2. Esquema de cuadratura,  $S_6$ ,  $S_8$ ,  $S_{10}$  y  $S_{12}$ .
3. Coeficiente de absorción del medio participante con valores de 0.1, 0.5, 1.0, 5 y 10.
4. Emisividad de las paredes del horno con valores de 0.1, 0.5 y 1.
5. Coeficiente de bajo-relajación de 0.2, 0.4, 0.5, 0.6 y 0.8.
6. Por, ultimo, a diferencia del caso anterior, en el horno tridimensional el medio participante no es dispersante, por lo que se desprecia la dispersión de albedo. Sin embargo, se tiene una generación de calor volumétrica, por lo que se tiene como último parámetro la generación volumétrica con valores de 1, 5 y 10  $KW \cdot m^{-3}$ .

Al igual que el caso anterior, se ha determinado el tiempo computacional con respecto a un caso base o referencia, para ello se tiene los valores de los parámetros para el caso referencia en la Tabla 6.8, además se ha implementado el esquema STEP para este mismo caso. Estos parámetros se han definido a partir de la independencia de malla presentada en el capítulo anterior.

Por último, los esquemas implementados son (Tabla A.2):

7. SOU, FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, OSHER, MUSCL, SMART, WACED Y CUBISTA.

**Tabla 6. 8** Valores de parametros fijos para el caso referencia para el horno.

STEP						
Parámetro	Malla computacional ( $N_x = N_y; N_z$ )	Cuadratura ( $S_n$ )	Absorción ( $k_{abs}$ )	Emisividad ( $\epsilon$ )	Dispersión de albedo ( $\omega$ )	Generación volumétrica ( $G_{vol}$ ) ( $KW \cdot m^3$ )
Valor	41 ; 81	( $S_{10}$ )	1.0	1.0	0.5	5

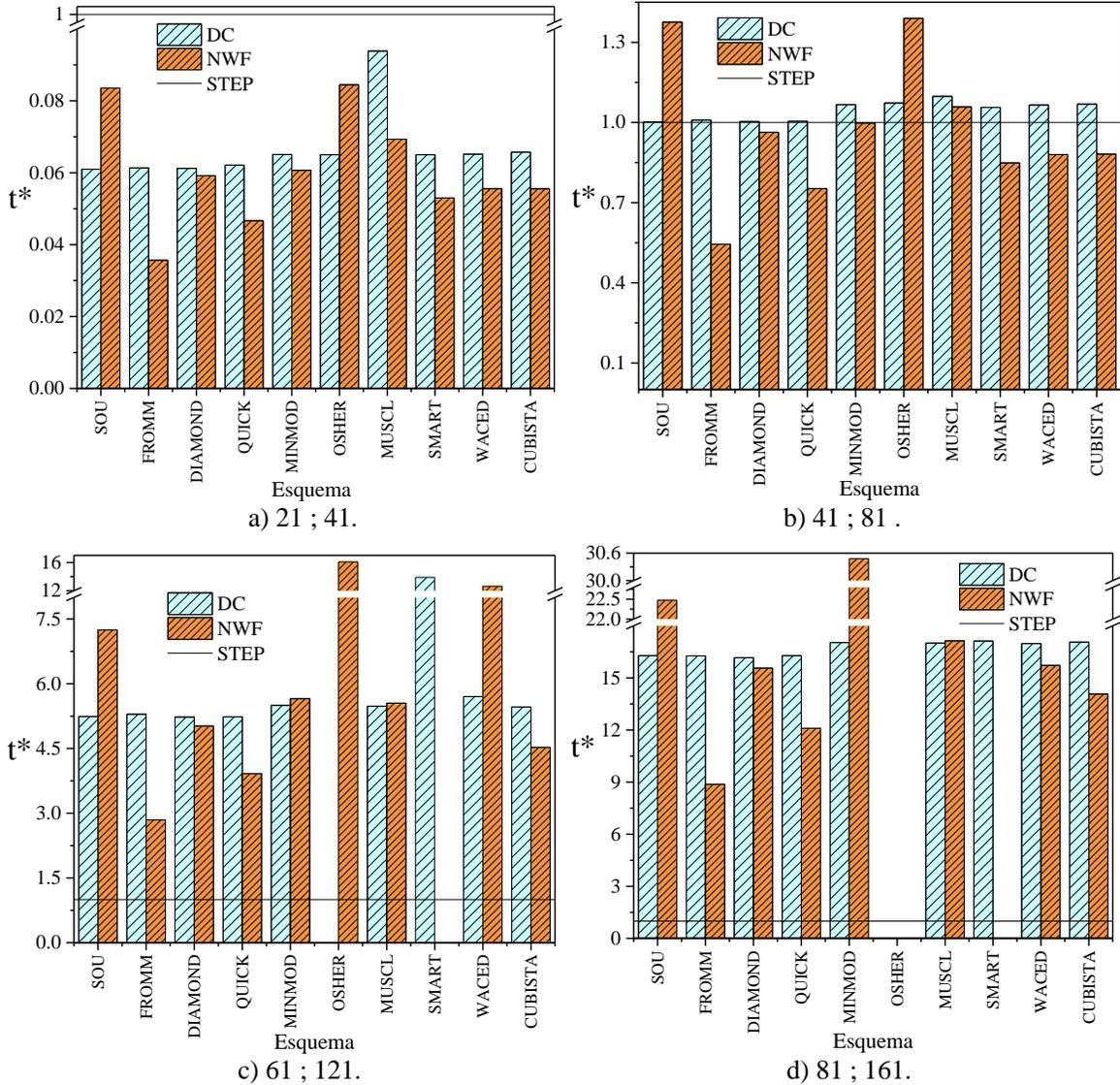
### 6.2.1 Malla computacional espacial

Como primer parámetro a presentar para el segundo caso de estudio, es el de la malla espacial. En la Figura 6.9 se presenta para los cuatro valores de la malla computacional, los cuales son, 21;41, 41;81; 61;121 y 81;161 ( $N_x = N_y ; N_z$ ).

En la Figura 6.9a se observa que para la malla de 21;41 nodos el esquema SOU y OSHER han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. En el caso de los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. La reducción de tiempo computacional con la formulación NWF es de 71.98, 3.44, 33.12, 7.23, 35.33, 22.63, 17.23 y 18.30%. Nótese, que el esquema que ha presentado mayor porcentaje de reducción es el esquema FROMM, mientras que la menor reducción ha sido con el esquema DIAMOND.

Se observa en la misma figura que el rendimiento de los esquemas HO y HR con respecto al esquema STEP es mejor, ya que la mayoría de los esquemas solo requiere el 6.5% del tiempo computacional del esquema STEP. Por otro lado se observa que el esquema MUSCL con la formulación DC es el esquema con mayor tiempo computacional. Sin embargo, ha sido menor que el del esquema STEP.

6.2 Horno rectangular tridimensional con medio participante absorbente-emisor



**Figura 6. 9** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la malla  $N_x = N_y ; N_z$ .

En la Figura 6.9b se observa que para la malla de 41 ; 81 nodos, los esquemas SOU y OSHER nuevamente han requerido mayor tiempo computacional con respecto a la formulación DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, la reducción del tiempo computacional es de 85.20, 4.16, 33.37, 6.93, 3.71, 24.48, 21.07 y 21.17%, respectivamente. El esquema que ha presentado el mayor porcentaje de reducción es el esquema FROMM nuevamente, mientras que la reducción mínima fue con el esquema MUSCL.

Respecto al esquema STEP se observa que todos los esquemas con la formulación DC requieren mayor tiempo computacional entre 2 y 9%, mientras que con la formulación NWF los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA requieren menor tiempo computacional respecto al esquema STEP.

Para la malla de 61; 121 se observa en la Figura 6.9c que nuevamente Los esquemas SOU y OSHER requieren mayor tiempo computacional, adicionalmente a estos dos esquemas, los esquemas MINMOD, MUSCL y WACED requirieron mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Por otro lado, se observa que nuevamente los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, la reducción del tiempo computacional ha sido de 86.01, 4.15, 33.62 y 20.73%, respectivamente.

Todos los esquemas con ambas formulaciones han requerido mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. El tiempo mínimo que se ha tenido es el con el esquema FROMM con la formulación NWF, alrededor de 184% más del tiempo computacional obtenido con el esquema STEP, mientras que el máximo, se obtuvo con el esquema OSHER con la formulación NWF, alrededor de 1507% más del tiempo computacional requerido por el esquema STEP.

En el caso de la malla de 81; 161 se presenta el tiempo computacional de todos los esquemas implementados con ambas formulaciones en la Figura 6.9d. En esta misma figura se observa que el esquema SOU ha requerido mayor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC, adicionalmente se observa los esquemas MINMOD y MUSCL con la formulación NWF requieren mayor tiempo computacional respecto a la formulación DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, WACED y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF.

## 6.2 Horno rectangular tridimensional con medio participante absorbente-emisor

Por último, todos los esquemas han requerido mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP, el tiempo computacional mínimo ha sido con el esquema FROMM con la formulación NWF, alrededor de 687% más del requerido con el esquema STEP. Mientras que el tiempo computacional máximo es con el esquema MINMOD de 2947% más del requerido con el esquema STEP.

En la Tabla 6.9 se presenta el comportamiento con ambas formulaciones por cada esquema numérico en términos de iteraciones.

**Tabla 6. 9** Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del número de nodos.

Esquema	Malla ( $N_x = N_y ; N_z$ )							
	21 ; 41		41 ; 81		61 ; 121		81 ; 161	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	220	309	412	586	594	847	768	1098
FROMM	221	130	413	233	594	335	769	436
DIAMOND	222	221	413	413	594	594	769	769
QUICK	221	175	413	323	594	463	769	598
MINMOD	221	206	413	387	594	609	768	1387
OSHER	225	300	427	569		1838		
MUSCL	321	241	430	425	599	619	773	796
SMART	222	186	413	341	1519		776	
WACED	221	192	413	349	623	1408	769	723
CUBISTA	221	190	413	346	594	494	769	637

En el caso del esquema SOU se observa que para todas las mallas, el número de iteraciones es mayor con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Además, se observa que conforme se aumenta el número de nodos, el número de iteraciones aumenta con ambas formulaciones.

El esquema MINMOD ha requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC para las mallas de 21; 41 41; 81 nodos, mientras que con el resto de las mallas ha requerido mayor número de iteraciones con la formulación NWF. Obsérvese que el esquema con la formulación NWF aumenta su

demanda de iteraciones conforme se aumenta el número de nodos de la malla, mientras que con la formulación DC también se tiene un aumento de iteraciones. Sin embargo, no es alto como la formulación NWF.

En el caso del esquema MUSCL también requiere menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC para las mallas de 21; 41 y 41; 81. Para el resto de las mallas se tiene un aumento de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Sin embargo, el aumento es poco, contrario al esquema MINMOD.

En el caso del esquema WACED se observa para la malla de 61 ;121 nodos que el esquema ha requerido mayor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Para esta misma malla se tiene un aumento brusco de iteraciones con la formulación NWF. Por otro lado, con el resto de las mallas el esquema ha tenido una reducción de iteraciones hasta de 46 iteraciones.

El esquema DIAMOND ha requerido una iteración menos con la formulación NWF respecto a la formulación DC para la malla de 61; 121 nodos, mientras que para el resto de las mallas el esquema ha requerido la misma cantidad de iteraciones respecto a la formulación DC. Sin embargo en términos de tiempo computacional se tuvo beneficio con la formulación NWF, esto demuestra que para este esquema, la formulación NWF requiere menor tiempo computacional en cada iteración respecto a la formulación DC.

Los esquemas que han presentado beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC en términos de iteraciones son los esquemas FROMM, QUICK y CUBISTA. En el caso del esquema FROMM se observa que conforme se aumenta el número de nodos, la diferencia de iteraciones entre formulaciones es mayor, ya que la formulación DC aumenta su demanda de iteraciones conforme se aumenta el número de nodos al igual que el esquema con la formulación NWF. Sin embargo, la

formulación NWF aumenta en menor cantidad el número de iteraciones conforme se aumenta el número de nodos de la malla.

El esquema QUICK con la formulación NWF aumenta en menor cantidad el número de iteraciones conforme se aumenta el número de nodos a comparación de la formulación DC, ya que la formulación DC aumenta de 221 nodos que demanda para la malla de 21; 41 nodos hasta 769 iteraciones para la malla de 81; 161 nodos. Mientras que la formulación NWF solo aumenta de 175 iteraciones para la malla de 21; 41 hasta 598 iteraciones para la malla de 81; 161.

Por último, la diferencia de iteraciones entre formulaciones aumenta gradualmente conforme se aumenta el número de nodos de la malla para el esquema CUBISTA. Este esquema aumenta 221 nodos para la malla de 21; 41 con la formulación DC hasta 769 iteraciones para la malla de 81; 161 nodos, mientras que la formulación NWF aumenta de 190 a 637 iteraciones.

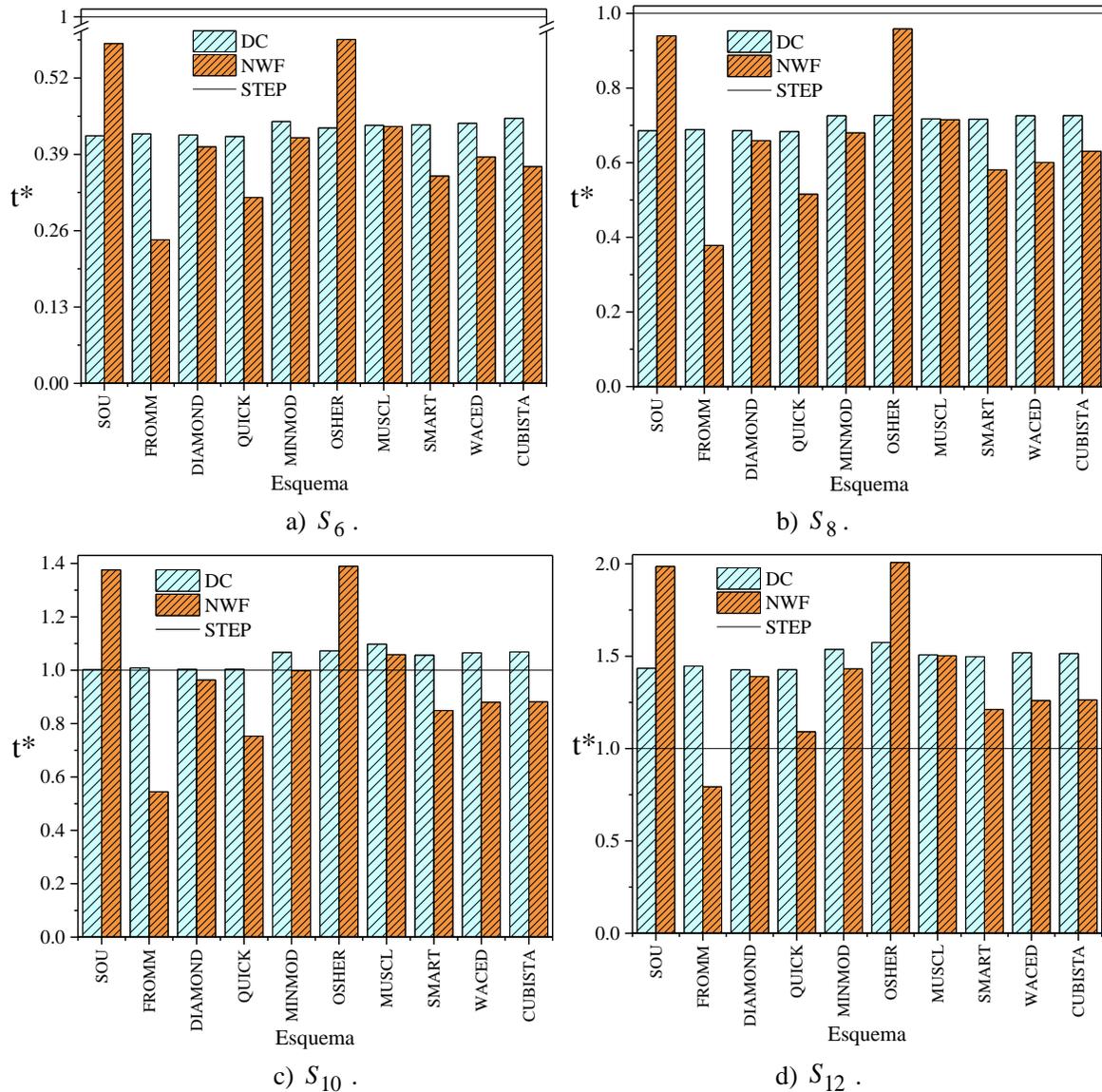
### **6.2.2 Esquema de cuadratura**

El siguiente parámetro que se presenta es el esquema de cuadratura. Para la variación del esquema de cuadratura se consideraron las cuadraturas  $S_n$  mencionadas al inicio de la segunda sección.

En términos de tiempo computacional se presenta la Figura 6.10 para cada malla el rendimiento de todos los esquemas con ambas formulaciones.

En la Figura 6.10a se observa que solo los esquemas SOU y OSHER requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, en el caso de los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA requirieron menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 73.76, 5, 32.80, 6.59, 0.43, 24.68, 14.84 y 22.25%, respectivamente. Respecto al esquema STEP todos los esquemas han requerido menor tiempo computacional. El esquema que ha requerido menor tiempo

computacional respecto al esquema STEP y respecto al resto de los esquemas, es el esquema FROMM con la formulación NWF. Mientras que el esquema que mayor tiempo ha requerido respecto a los demás esquemas, es el esquema OSHER con la formulación NWF.



**Figura 6. 10** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura.

Para el esquema de cuadratura  $S_8$  se observa en la Figura 6.10a que los esquemas SOU y OSHER nuevamente requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. En el caso de los esquemas

FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA requirieron menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 82, 4.11, 32.60, 6.74, 0.31, 23.42, 20.82 y 15.16 % respecto a la formulación DC, respectivamente. Respecto al esquema STEP, todos los esquemas nuevamente han requerido menor tiempo computacional. El esquema FROMM con la formulación NWF nuevamente ha requerido el mínimo tiempo computacional respecto al esquema STEP y al resto de los esquemas. Mientras que el esquema que más se aproxima al tiempo computacional del esquema STEP es de nuevo el esquema OSHER con la formulación NWF.

En la Figura 6.10c se presenta el tiempo computacional de los esquemas con ambas formulaciones para el esquema de cuadratura  $S_{10}$ . Se observa que una vez más los esquemas SOU y OSHER requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF. Mientras que los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA requirieron menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 85.20, 4.16, 33.37, 6.93, 3.71, 24.48, 21.07, 21.17% respecto a la formulación DC, respectivamente. El esquema FROMM con la formulación NWF nuevamente ha sido el esquema con menor tiempo computacional respecto al resto de los esquemas y el esquema STEP, mientras que el esquema OSHER con la formulación NWF es el esquema con mayor tiempo computacional respecto al resto de los esquemas y respecto al esquema STEP.

Por último, en la Figura 6.10d se presenta el esfuerzo computacional de los esquemas con ambas formulaciones para el esquema de cuadratura  $S_{12}$ . Los esquemas SOU y OSHER han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA requirieron menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 82.42, 2.65, 30.83, 7.31, 0.3, 23.57, 20.54 y 19.89%, respectivamente. Nuevamente

el esquema FROMM con la formulación NWF ha sido el esquema con el menor tiempo computacional respecto al resto de los esquemas y al esquema STEP, mientras que los esquemas SOU y OSHER con la formulación NWF han sido los esquemas con el tiempo mayor respecto al esquema STEP y al resto de los esquemas.

**Tabla 6. 10** Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del esquema de cuadratura.

Esquema	Cuadratura ( $S_n$ )							
	$S_6$		$S_8$		$S_{10}$		$S_{12}$	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	410	582	411	584	412	586	413	586
FROMM	410	247	411	235	413	233	413	235
DIAMOND	411	410	412	411	413	413	413	413
QUICK	410	321	412	322	413	323	413	323
MINMOD	410	385	412	385	413	387	413	387
OSHER	410	565	423	569	427	569	436	571
MUSCL	410	417	412	418	430	425	413	420
SMART	411	338	412	339	413	341	413	340
WACED	410	364	412	348	413	349	413	348
CUBISTA	410	344	412	363	413	346	413	346

En la Tabla 6.10 se presenta el rendimiento de cada esquema con ambas formulaciones en términos de iteraciones.

De manera general se observa que la mayoría de los esquemas han requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Los esquemas SOU y OSHER han requerido mayor número de iteraciones con la formulación NWF, lo cual se refleja en el tiempo computacional. Mientras que el esquema MUSCL solo ha requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF para el esquema de cuadratura  $S_{10}$ .

En el caso del esquema FROMM la reducción de tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC ha sido notable y se ha reflejado en

el tiempo computacional mostrado en la Figura 6.10. Sin embargo, se observa que el número de iteraciones con la formulación ha sido constante con la formulación DC (410-413 iteraciones por cuadratura), mientras que con la formulación NWF, el número de iteraciones en función del esquema de cuadratura ha variado ligeramente requiriendo número de iteraciones en el intervalo 233-247 iteraciones.

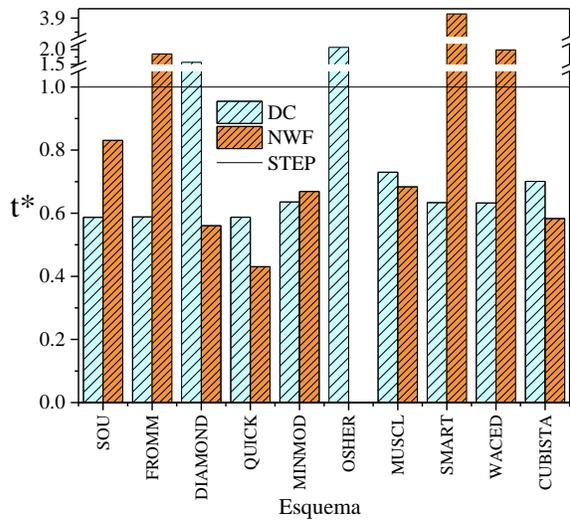
El esquema DIAMOND con la formulación NWF ha requerido ligeramente (una iteración) menor número de iteraciones para los esquemas de cuadraturas  $S_6$  y  $S_8$  respecto a la formulación DC, mientras que en el resto de esquemas de cuadraturas ha requerido el mismo número de iteraciones con ambas formulaciones. Sin embargo, se observa en términos de tiempo computacional que el esquema ha presentado beneficio con la formulación NWF.

El esquema QUICK ha requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. nótese que con este esquema ambas formulaciones no varían mucho el consumo de iteraciones en función del esquema de cuadratura, ya que la formulación DC ha requerido de 410 a 413 iteraciones, mientras que la formulación NWF solo 321-323, por lo que la variación de iteraciones de cada formulación con este esquema es depreciable. Mismo comportamiento se ha presentado en el esquema MINMMO. Sin embargo, con diferentes iteraciones para la formulación NWF.

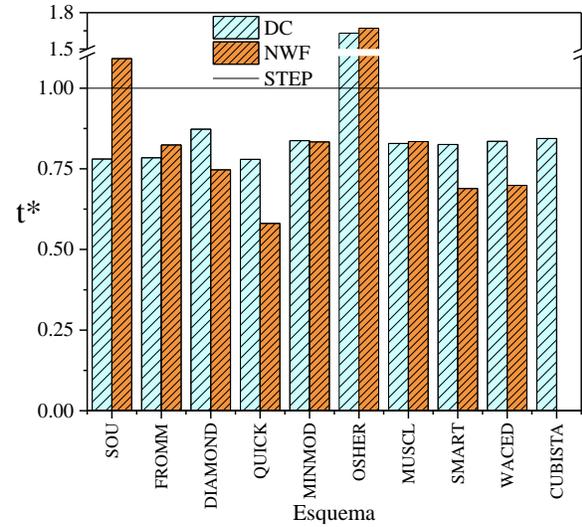
Los esquemas SMART, WACED y CUBISTA han requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC para todos los esquemas de cuadratura. Nótese que se presenta el mismo comportamiento de los esquemas QUICK y MINDMOD.

### **6.2.3 Coeficiente de absorción**

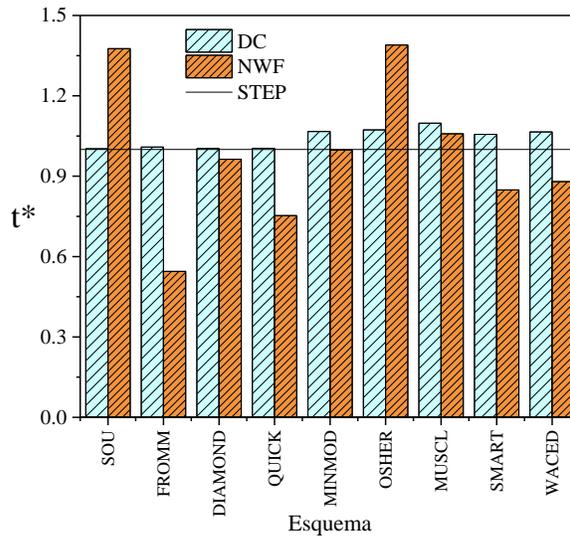
A continuación se presenta el rendimiento de los esquemas en función del coeficiente de absorción. Se presenta ambas formulaciones.



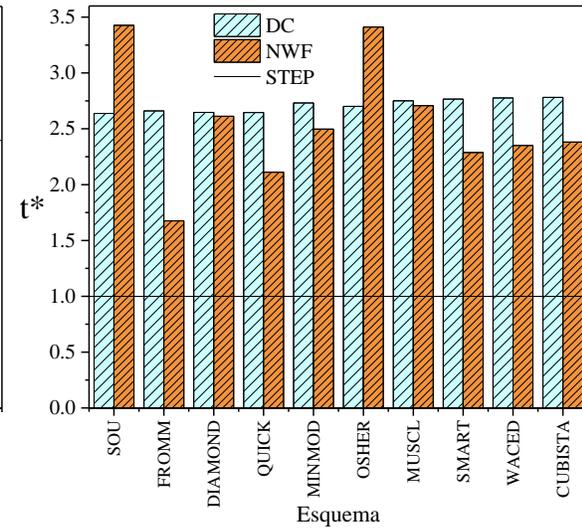
a)  $\kappa_{abs} = 0.1$ .



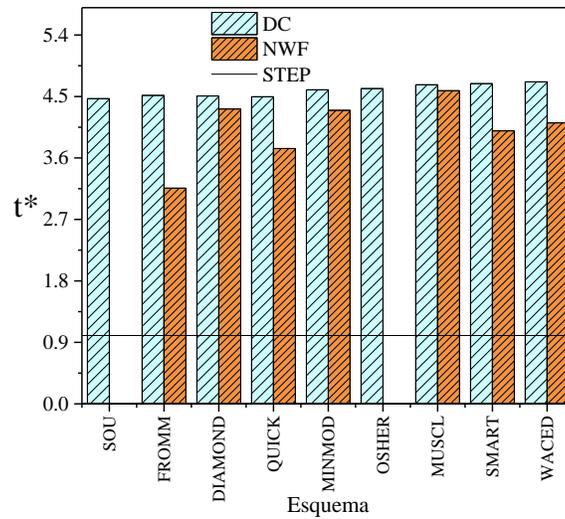
b)  $\kappa_{abs} = 0.5$ .



c)  $\kappa_{abs} = 1.0$ .



d)  $\kappa_{abs} = 5.0$ .



e)  $\kappa_{abs} = 10.0$ .

**Figura 6. 11** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del coeficiente de absorción.

En la Figura 6.11a se presenta el rendimiento en términos de tiempo computacional de los esquemas con ambas formulaciones para absorción de 0.1. Se observa que los esquemas SOU, FROMM, MINMOD, SMART, y WACED requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Además el esquema OSHER no converge con la formulación NWF. Por otra parte los esquemas DIAMOND, QUICK, MUSCL, y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 180.39, 36.38, 6.75 y 20.22%, respectivamente. Nótese que el esquema con mayor reducción con la formulación NWF es el esquema DIAMOND. La mayoría de los esquemas han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP. El esquema con mayor reducción de tiempo computacional respecto al STEP es el esquema QUICK con la formulación NWF, mientras que el esquema SMART con la formulación NWF es el esquema que mayor tiempo computacional ha requerido respecto al esquema STEP.

Para absorción de 0.5 se observa en la Figura 6.11b que el esquema SOU y FROMM con la formulación NWF nuevamente han requerido mayor tiempo computacional respecto a la formulación DC. Mientras que los esquemas MINMOD, MUSCL y

SMART han presentado comportamiento diferente al anterior, ya que redujeron el tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, alrededor de 0.47, 19.8 y 19.5% respectivamente. Además, el esquema OSHER logra converger con la formulación NWF. Sin embargo requiere mayor tiempo computacional respecto a la formulación DC. Los esquemas DIAMOND, QUICK, WACED y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 16.83, 34.17, 19.50 y 20.17%, respectivamente. Los esquemas SOU y OSHER han requerido mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. En el caso del esquema SOU han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF, mientras que el esquema OSHER ha requerido mayor tiempo computacional con ambas formulaciones. Por otro lado, el esquema con menor tiempo computacional respecto al esquema STEP es el esquema QUICK con la formulación NWF.

En la Figura 6.11c se observa que todos los esquemas han convergido con ambas formulaciones para absorción de 1.0. Los esquemas SOU y OSHER han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA han requerido 85.20, 4.16, 33.37, 6.93, 3.71, 24.48, 21.07, 21.17%, respectivamente con la formulación NWF respecto a la formulación DC. La mayoría de los esquemas han requerido ligeramente mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. El esquema con menor tiempo computacional respecto al esquema STEP es el esquema FROMM, mientras que el esquema con mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP es el esquema OSHER con la formulación NWF.

En la Figura 6.11d se observa que para absorción de 5.0 nuevamente el esquema SOU y OSHER requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la

formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 58.78, 1.32, 25.29, 9.35, 1.59, 20.88, 18.12 y 16.80%, respectivamente. Todos los esquemas han requerido mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. En el caso del esquema FROMM es el esquema con el tiempo computacional mínimo respecto al resto de los esquemas, mientras que el esquema SOU es el esquema con el mayor tiempo computacional respecto al resto de los esquemas.

Por último, en la Figura 6.11e se observa que todos los esquemas convergen con ambas formulaciones, excepto los esquemas SOU y OSHER con la formulación NWF. El resto de los esquemas han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 43.02, 4.42, 20.26, 6.98, 1.89, 17.26, 14.60, 14.44 % para los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART y WACED, respectivamente. Todos los esquemas han requerido mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. El esquema con menor tiempo computacional ha sido el esquema FROMM con la formulación NWF, mientras que el esquema con mayor tiempo computacional es el esquema CUBISTA con la formulación DC.

En la Tabla 6.11 se presenta las iteraciones realizadas por cada esquema con ambas formulaciones. El esquema SOU con la formulación NWF ha requerido más iteraciones respecto a la formulación DC, alrededor de 100 iteraciones. Conforme se aumenta el coeficiente de absorción, el esquema con ambas formulaciones requiere mayor número de iteraciones con ambas formulaciones, esto se refleja en el tiempo computacional.

En el caso del esquema FROMM se observa que para 0.1 de absorción el esquema con la formulación NWF requiere aproximadamente el triple de lo que requiere con la formulación DC. Sin embargo, conforme se aumenta el valor de la absorción, el esquema tiende a requerir menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC.

**Tabla 6. 11** Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función del coeficiente de absorción.

Esquema	Absorción ( $\kappa_{abs}$ )									
	0.1		0.5		1		5		10	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	240	350	320	460	412	586	1082	1140	1835	--
FROMM	240	789	320	352	413	233	1086	713	1843	1348
DIAMOND	644	240	359	320	413	413	1090	1086	1853	1843
QUICK	240	184	320	248	413	323	1088	902	1847	1599
MINMOD	241	251	320	318	413	387	1080	1008	1827	1760
OSHER	809	.	644	680	427	569	1082	1416	1836	---
MUSCL	280	262	320	330	430	425	1086	1103	1843	1871
SMART	241	1579	320	273	413	341	1088	933	1847	1640
WACED	241	781	320	273	413	349	1088	952	1847	1667
CUBISTA	265	220	320	270	413	346	1087	954	1846	1675

El esquema DIAMOND ha requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF. Sin embargo, se observa que conforme se aumenta el valor de la absorción, la diferencia entre formulaciones disminuye, ya que para 0.1 de absorción el esquema con la formulación NWF requiere una tercera parte de lo que requiere el mismo esquema con la formulación DC, mientras que para 10.0 de absorción el esquema con la formulación NWF ha requerido solo 10 iteraciones menos que la formulación DC. El esquema QUICK ha requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC, Nótese que se presenta el mismo comportamiento del esquema DIAMOND.

El esquema MINMOD ha requerido 10 iteraciones más con la formulación NWF respecto a la formulación DC para 0.1 de absorción, en el resto de los valores de absorción el esquema ha requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF hasta 60 iteraciones respecto a la formulación DC. Por lo que conforme se aumenta el coeficiente de absorción se tiene mayor diferencia de iteraciones entre formulaciones.

En el caso del esquema OHSER se observa que no converge para dos valores de absorción, para 0.1 y 10.0 de absorción, en el resto de los valores de absorción el consumo de iteraciones con la formulación NWF es mayor respecto a la formulación DC.

El esquema MUSCL ha disminuido el número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC solo para 0.1 y 1.0 de absorción, 22 y 15 iteraciones respectivamente.

Los esquemas SMART y WACED ha requerido mayor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC para 0.1 de absorción, en el caso del esquema SMART alrededor de 1330 iteraciones aproximadamente mientras que el esquema WACED ha aumenta 540 iteraciones aproximadamente. En el resto de los valores de absorción se ha observado que ambos esquemas presenta similarmente el mismo valor de iteraciones para ambas formulaciones. Sin embargo, para ambos esquemas, conforme se aumenta el valor de la absorción, requieren mayor número de iteraciones.

Por último, el esquema CUBISTA ha requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC para todos los valores de absorción. Sin embargo, nótese que para los valores 0.5, 1.0, 5.0 y 10.0 el esquema presenta el mismo comportamiento de los esquemas SMART Y WACED.

#### **6.2.4 Emisividad de las paredes**

A continuación se presenta el tiempo computacional de los esquemas con ambas formulaciones para los tres valores de emisividad. Los resultados son presentados en la Figura 6.12.

Para el primer parámetro de emisividad (0.1) se observa en la Figura 6.12a que todos los esquemas han requerido mayor tiempo computacional con ambas formulaciones respecto al esquema STEP. Los esquemas SOU y OSHER con la formulación NWF

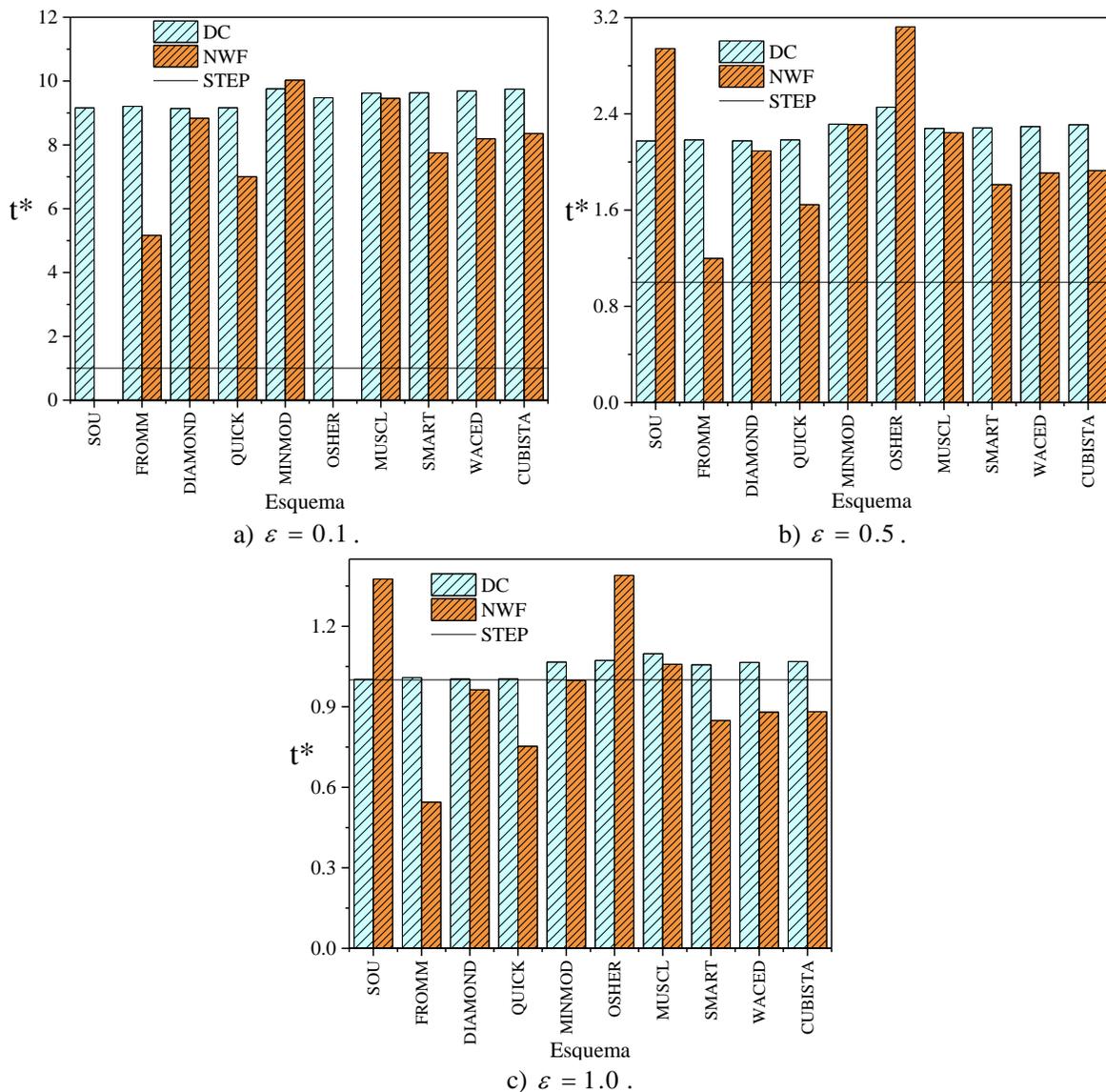
no convergen para emisividad de 0.1. Mientras que el esquema MINMOD requirió mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, alrededor de 78.28, 3.49, 30.81, 1.72, 24.23, 18.26 y 16.65% respectivamente. El esquema con menor tiempo computacional ha sido el esquema FROMM con la formulación NWF. Sin embargo ha requerido mayor tiempo computacional que el esquema STEP. Por otro lado, el esquema con mayor tiempo computacional es el esquema MINMOD con la formulación NWF.

En la Figura 6.12b se presenta el rendimiento de los esquemas con ambas formulaciones para 0.5 de emisividad. Se observa que el tiempo computacional de los esquemas ha reducido respecto al valor de emisividad de 0.1. Sin embargo todos los esquemas han requerido mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. Por otra parte, los esquemas SOU y OSHER han logrado converger con la formulación NWF. Sin embargo el tiempo computacional ha sido mayor respecto a la formulación DC. El tiempo computacional requerido con la formulación DC para cada esquema ha sido reducido con la formulación NWF para los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, SMART, WACED y CUBISTA, el porcentaje de reducción del tiempo computacional de la formulación DC es, 82.26, 4.0, 32.70, 0.11, 21.39, 26.02, 20.21, 19.73% respectivamente. A diferencia del valor de emisividad anterior, el esquema MUSCL presenta reducción de tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. El esquema que ha requerido mayor tiempo computacional ha sido el esquema OSHER, mientras que el esquema con menor tiempo computacional ha sido el esquema FROMM.

Por último, se observa en la Figura 6.12c que para emisividad de 1 los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK y MINMOD han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto al esquema STEP. Por otra parte los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA

## 6.2 Horno rectangular tridimensional con medio participante absorbente-emisor

han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, el porcentaje de reducción es de 85.20, 4.16, 33.37, 6.93, 3.71, 24.48, 21.07, 21.17%, respectivamente. El esquema con mayor tiempo computacional ha sido el esquema OSHER y el esquema con menor tiempo computacional es el esquema FROMM, el cual ha requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP y al resto de los esquemas.



**Figura 6. 12** Tiempo computacional obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la emisividad de las paredes.

En la Tabla 6.12 se presenta el número de iteraciones que han requerido cada esquema con ambas formulaciones. De manera general se observa que para emisividad de 0.1 todos los esquemas requiere un alto número de iteraciones para obtener la solución de la variable. Al aumenta la emisividad de las paredes del horno se observa que el número de iteraciones reduce para todos los esquemas. Sin embargo, particularmente con la formulación NWF los esquemas SOU y OSHER no logran converger para emisividad de 0.1. Además se observa que todos los esquemas reducen el número de iteraciones respecto al requerido con la formulación DC para los tres valores de emisividad, excepto los esquemas SOU, DIAMOND, MINMOD OSHER, MUSCL. En el caso del esquema DIAMOND con la formulación NWF solo para emisividad de 0.1 requiere la misma cantidad de iteraciones respecto a la formulación DC, mientras que en los otros valores de emisividad la diferencia es de hasta 90 iteraciones a favor de la formulación NWF.

En el caso del esquema MINDMOD la formulación NWF ha requerido siete iteraciones adicionales respecto a la formulación DC, mientras que en los otros valores de emisividad se tiene beneficio con la formulación NWF de hasta 30 iteraciones.

En el caso de los esquemas FROMM, QUICK, SMART, WACED y CUBISTA se tiene una reducción de iteraciones similares. En el caso del esquema FROMM, logra reducir hasta 556 iteraciones, mientras que el esquema QUICK logra reducir hasta 664 iteraciones, en el caso del esquema SMART, WACED y CUBISTA reducen hasta 634, 517 y 502 iteraciones respectivamente.

En la Tabla 6.12 se presenta el rendimiento de los esquemas con ambas formulaciones en términos de iteraciones necesarias para obtener la convergencia de la variable. Solo los esquemas que han requerido menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC son los esquemas FROMM, QUICK, SMART, WACED y CUBISTA. En el caso del esquema DIAMOND solo en dos valores de emisividad han presentado beneficio con la formulación NWF. Mientras que el

esquema MUSCL ha presentado beneficio con la formulación NWF para emisividad de 1.0.

**Tabla 6. 12** Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la emisividad de las paredes.

Esquema	Emisividad ( $\varepsilon$ )					
	0.1		0.5		1.0	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	3773	--	895	1256	412	586
FROMM	3774	2218	895	513	413	233
DIAMOND	3774	3774	896	895	413	413
QUICK	3774	3012	895	707	413	323
MINMOD	3773	3780	894	860	413	387
OSHER	3773	--	980	1290	427	569
MUSCL	3774	3833	895	908	430	425
SMART	3774	3140	895	736	413	341
WACED	3774	3257	895	762	413	349
CUBISTA	3774	3272	895	761	413	346

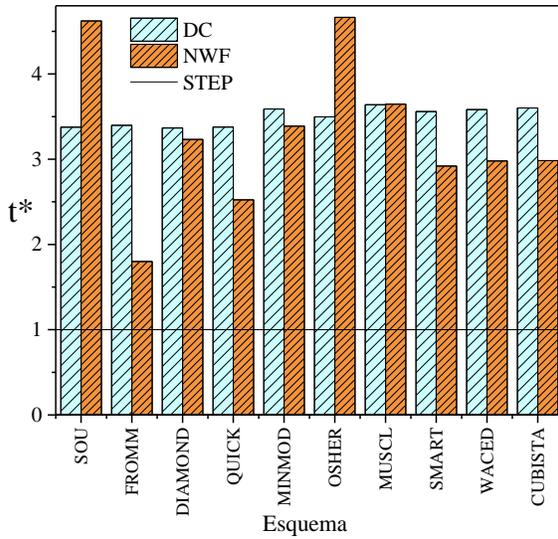
Obsérvese además que conforme se aumenta la emisividad, todos los esquemas requieren menor número de iteraciones con ambas formulaciones.

En el caso del esquemas FROMM se observa que para 0.1 de emisividad, las formulaciones presenta diferencia de iteraciones de hasta 1500, mientras que para emisividad de 1.0 se observa que la diferencia de iteraciones es de 80 iteraciones, por lo que tienden a ser el mismo número de iteraciones para ambas formulaciones. Mismo comportamiento se presenta con los esquemas QUICK, SMART, WACED y CUBISTA. Sin embargo con valores de iteraciones distintas.

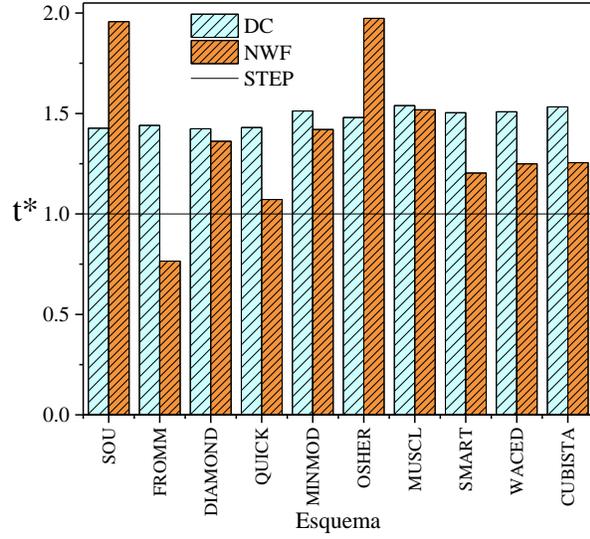
### 6.2.5 Coeficiente de relajación

El siguiente parámetro a presentar es el coeficiente de bajo-relajación. En la Figura 6.13 se presenta el rendimiento computacional de cada esquema con ambas

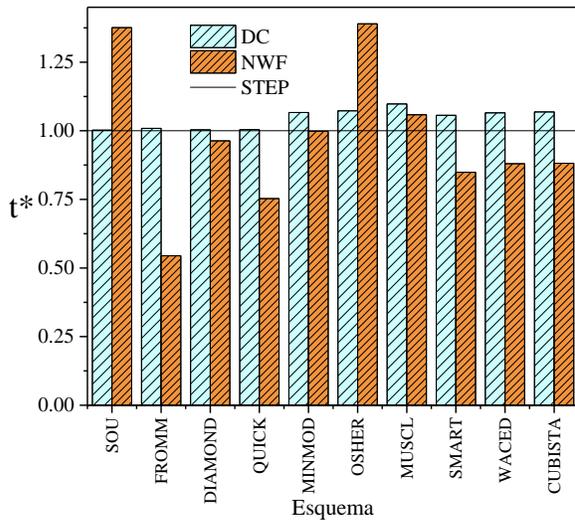
formulaciones para los cinco valores de bajo-relajación mencionados al inicio de la sección dos.



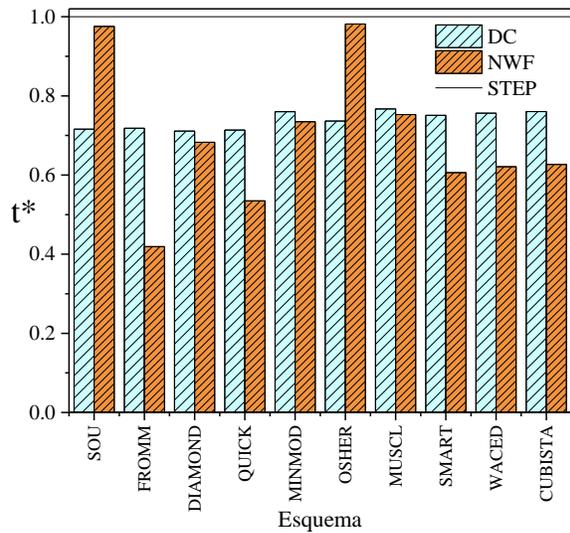
a)  $\alpha = 0.2$ .



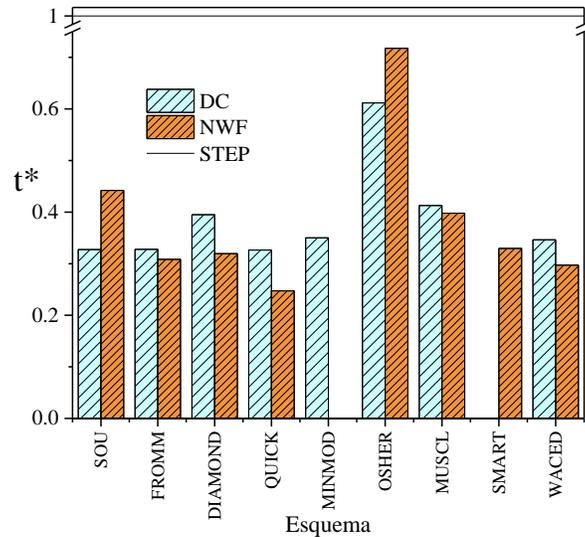
b)  $\alpha = 0.4$ .



c)  $\alpha = 0.5$ .



d)  $\alpha = 0.6$ .



e)  $\alpha = 0.8$ .

**Figura 6. 13** Tiempo computacional obtenido con las formulacions DC y NWF en función del coeficiente de relajación.

En la Figura 6.13a se presenta el rendimiento de los esquemas con ambas formulaciones para 0.2 de bajo-relajación. Se observa que los esquemas SOU, OSHER y MUSCL han requerido mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 88.71, 4.18, 33.86, 5.94, 25.03, 0.18, 21.90, 20.25 y 20.69%, respectivamente. Respecto al esquema STEP, se observa que todos los esquemas han requerido mayor tiempo computacional. El esquema con menor tiempo computacional es el esquema FROMM respecto al resto de los esquemas, mientras que el esquema con mayor tiempo computacional es el esquema OSHER respecto al esquema STEP y al resto de los esquemas.

En la Figura 6.13b se observa que los esquemas con mayor tiempo computacional con la formulación NWF son los esquemas SOU y OSHER nuevamente. En el caso del esquema MUSCL, para bajo-relajación de 0.4 el esquema requiere menor tiempo computacional, a comparación de 0.2 de bajo relajación, donde requirió mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. El resto de los

esquemas reducen el tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 88.24, 4.56, 33.42, 6.48, 1.38, 24.95, 20.70 y 22.10 % para los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA, respectivamente. Para 0.4 de bajo-relajación los esquemas requirieron menor tiempo computacional respecto al valor anterior de bajo-relajación. Sin embargo, todos los esquemas excepto el FROMM con la formulación NWF requirieron mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. El esquema con mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP y al resto de los esquemas, es el esquema OSHER.

En la Figura 6.13c se observa que nuevamente los esquemas SOU y OSHER requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Por otro lado, los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, OSHER, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA ha reducido el tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC alrededor de 85.20, 4.16, 33.37, 6.93, 22.80, 3.71, 24.48, 21.07 y 21.17%, respectivamente. La mayoría de los esquemas han requerido ligeramente mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP. El esquema FROMM con la formulación NWF ha requerido menor tiempo computacional respecto al resto de los esquemas restantes y respecto al esquema STEP. Mientras que el esquema OSHER con la formulación ha sido de nuevo el esquema con mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP y al resto de los esquemas.

En la Figura 6.13d se observa que para bajo-relajación de 0.6 todos los esquemas requieren menor tiempo computacional con ambas formulaciones respecto al esquema STEP. El esquema con menor tiempo computacional es el esquema FROMM con la formulación NWF. Mientras que el esquema con mayor tiempo computacional es el esquema OSHER con la formulación NWF. Sin embargo, requiere menor tiempo computacional que el esquema STEP. Los esquemas con mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC son los

esquemas SOU y OSHER. Mientras que los esquemas con la formulación NWF que han requerido menor tiempo computacional respecto a la formulación DC son los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA con 71.38, 4.13, 33.41, 3.43, 1.84, 23.91, 21.78 y 21.30% respectivamente.

Por último, en la Figura 6.13e se presenta el rendimiento en términos de tiempo computacional de los esquemas con ambas formulaciones para coeficiente de bajo-relajación de 0.8. Se observa que los esquemas MINMOD y SMART con la formulación NWF no convergen. Por otra parte, los esquemas SOU y OSHER requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Mientras que los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MUSCL, WACED y CUBISTA requieren menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, alrededor de 6.28, 23.61, 31.97, 3.75, 16.54 y 22%, respectivamente. Todos los esquemas han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP. El esquema con mayor reducción del tiempo computacional del esquema STEP es el esquema QUICK con la formulación NWF, mientras que el esquema con mayor tiempo computacional es el esquema OSHER con la formulación NWF. Sin embargo, requiere menor tiempo computacional respecto al esquema STEP.

En la Tabla 6.13 se presenta el rendimiento computacional en términos de iteraciones de cada con ambas formulaciones. Solo los esquemas SOU y OSHER requirieron mayor número de iteraciones para todos los valores de bajo-relajación.

En el caso del esquema MUSCL se observa que no es continuo la reducción de iteraciones con la formulación NWF conforme se reduce la bajo-relajación, ya que para 0.2 de bajo-relajación redujo el número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC, mientras que para 0.4 aumento el número de iteraciones respecto a la formulación DC y nuevamente redujo el número de iteraciones para 0.5.

El esquema MINDMOD redujo iteraciones con la formulación respecto a la formulación DC para todos los valores de bajo-relajación, nótese que conforme se disminuye la bajo-relajación, requiere menor número de iteraciones. Mismo comportamiento se presenta con los esquemas FROMM, DIAMOND y QUICK. Además nótese que conforme se disminuye la bajo-relajación la diferencia de iteraciones entre formulaciones aumenta para los cuatro esquemas.

**Tabla 6. 13** Número de iteraciones obtenido con las formulaciones en función del coeficiente de bajo-relajación.

esquema	Coeficiente de bajo-relajación ( $\alpha$ ).									
	0.2		0.4		0.5		0.6		0.8	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	1387	1970	586	833	412	586	292	415	134	188
FROMM	1389	772	586	328	413	233	293	179	134	132
DIAMOND	1390	1389	587	586	413	413	293	293	162	134
QUICK	1389	1085	587	458	413	323	293	229	134	106
MINMOD	1388	1314	586	552	413	387	293	279	134	--
OSHER	1387	1900	586	807	427	569	292	403	242	296
MUSCL	1421	1421	603	610	430	425	300	304	161	162
SMART	1389	1166	587	484	413	341	293	245		134
WACED	1389	1182	587	496	413	349	293	247	134	119
CUBISTA	1389	1169	586	490	413	346	293	245	134	113

El esquema SMART presenta beneficio con la formulación NWF para todos los valores de bajo-relajación excepto para 0.8. Además, para valores altos de bajo-relajación se tiene mayor diferencia de iteraciones entre formulaciones a comparación de 0.6 bajo-relajación, es decir conforme tiende el coeficiente de relajación a valor de uno, el esquema con la formulación NWF tiende a requerir el mismo número de iteraciones que la formulación DC. Sin embargo a partir de 0.8 la formulación no permite al esquema converger. Este mismo comportamiento se presenta en los esquemas WACED y CUBISTA. Sin embargo, estos dos esquemas si logran converger para bajo-relajación de 0.8 con la formulación NWF, además con esta

misma formulación requieren menor número de iteraciones respecto a la formulación DC.

### **6.2.6 Generación volumétrica**

El último parámetro presentado para el segundo caso de estudio, es la variación de la generación volumétrica. En la Figura 6.14 se presenta el rendimiento de los esquemas implementados con ambas formulaciones para los tres valores de generación volumétrica.

Para el primer valor de generación volumétrica ( $1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$ ) se presenta el rendimiento de los esquemas con ambas formulaciones en términos de tiempo computacional en la Figura 6.14a. Los esquemas SOU, OSHER y MUSCL presentan mejor rendimiento con la formulación DC, ya que con la formulación NWF requieren mayor tiempo computacional. Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD SMART, WACED y CUBISTA requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, alrededor de 84.09, 4.45, 33.64, 8.36, 26.47, 21.55 y 24.41%, respectivamente. Por otro lado los esquemas que han presentado beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC, también ha presentado beneficio respecto al esquema STEP. El esquema con menor tiempo computacional es el esquema FROMM con la formulación NWF, mientras que el esquema OSHER con la formulación NWF ha sido el esquema con el mayor tiempo computacional respecto al esquema STEP y respecto al resto de los esquemas.

En la Figura 6.14b se presenta el tiempo computacional requerido por cada esquema con ambas formulaciones para una generación volumétrica de  $5 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$ . Se observa que nuevamente los esquemas SOU, OSHER y MUSCL requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Mientras que los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA requieren mayor tiempo computacional con la formulación NWF respecto

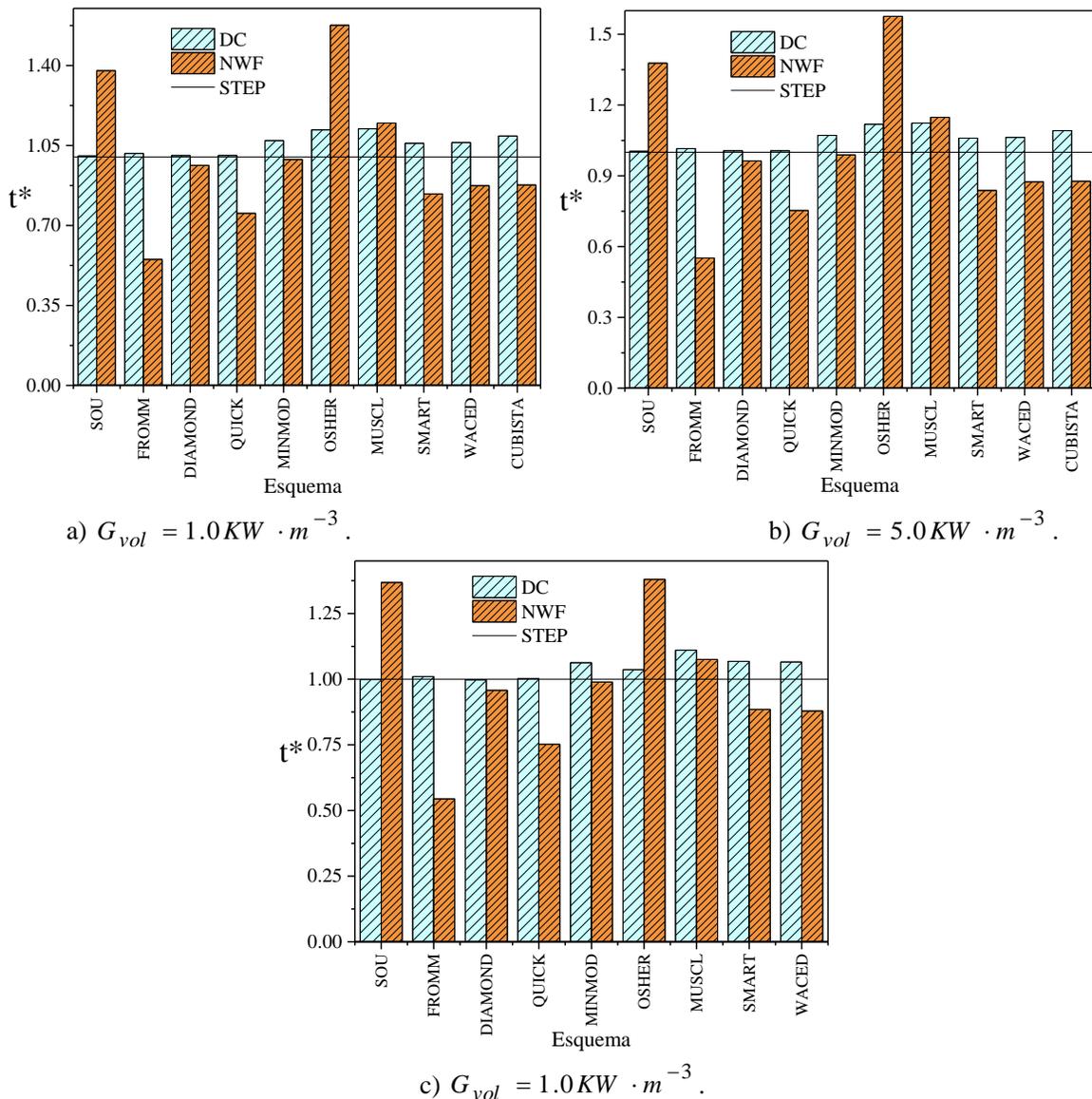
a la formulación DC, aproximadamente 85.20, 4.16, 33.37, 6.93, 24.48, 21.07 y 21.17%, respectivamente. A diferencia del valor anterior de generación volumétrica, para  $5 \text{ KW} \cdot \text{m}^3$  el esquema MUSCL ha requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Todos los esquemas con la formulación NWF han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP excepto los esquemas SOU, OSHER y MUSCL. El esquema con el menor tiempo computacional respecto al resto de los esquemas es el esquema FROMM con la formulación NWF, mientras que el tiempo máximo obtenido es con el esquema OSHER.

Por último, para generación volumétrica de  $10 \text{ KW} \cdot \text{m}^{-3}$  se observa en la Figura 6.14c que todos los esquemas han requerido menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC excepto los esquemas SOU y OSHER. El porcentaje de reducción de tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC ha sido de 85.59, 4.19, 33.23, 7.39, 3.26, 20.64, 21.23 y 21.01% con los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, MUSCL, SMART, WACED y CUBISTA, respectivamente. Solo los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, SMART, WACED, CUBISTA con la formulación NWF y SOU con la formulación DC han requerido menor tiempo computacional respecto al esquema STEP, de estos esquemas, el que ha requerido menor tiempo computacional ha sido el esquema FROMM, mientras que el esquema con mayor tiempo computacional respecto al resto de los esquemas ha sido el esquema OSHER.

En la Tabla 6.14 se presenta el rendimiento de los esquemas con ambas formulaciones en términos de iteraciones requeridas para obtener la convergencia de la solución de la variable. De manera general se observa que la mayoría de los esquemas requieren menor número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC para los tres valores de generación de calor volumétrica. Los esquemas SOU, DIAMOND y OSHER no han presentado beneficios con la formulación NWF. Sin

## 6.2 Horno rectangular tridimensional con medio participante absorbente-emisor

embargo, en el caso del esquema DIAMOND ha tenido beneficio en términos de tiempo computacional, ya que de acuerdo a la Figura 6.14 cada iteración con la formulación NWF requiere ligeramente menor tiempo computacional que la formulación DC. A pesar de esto se debe tener en cuenta que para que el esquema tenga beneficio con la formulación NWF, el consumo de iteraciones del esquema debe ser alto con la formulación de DC.



**Figura 6. 14** Tiempo computacional obtenido con las formulación DC y NWF en función de la generación de calor volumetrica.

**Tabla 6. 14** Número de iteraciones obtenido con las formulaciones DC y NWF en función de la generación de calor volumétrica.

esquema	Generación de calor volumétrica ( $G_{vol}, KW \cdot m^3$ )					
	1		5		10	
	DC	NWF	DC	NWF	DC	NWF
SOU	413	588	412	586	411	584
FROMM	414	235	413	233	412	233
DIAMOND	414	414	413	413	412	412
QUICK	414	324	413	323	412	322
MINMOD	414	385	413	387	412	383
OSHER	444	648	427	569	411	566
MUSCL	441	464	430	425	435	432
SMART	414	339	413	341	416	357
WACED	414	348	413	349	414	349
CUBISTA	414	345	413	346	412	345

En el caso del esquema MUSCL se observa que solo para el primer valor de generación de calor no presenta reducción de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC, mientras que para el resto de los valores de generación solo se tiene reducción de iteraciones hasta de siete iteraciones y el aumento de iteraciones para cada formulación en función de la generación de calor es ligero.

En el caso del esquema FROMM se observa que conforme se aumenta la generación de calor volumétrica, el número de iteraciones con la formulación DC aumenta solo una iteración, mientras que con la formulación NWF aumenta dos iteraciones de 1 a  $5 \text{ KW} \cdot m^{-3}$  y de 5 a  $10 \text{ KW} \cdot m^{-3}$  se tiene la misma cantidad de iteraciones. Sin embargo la diferencia de iteraciones entre ambas formulaciones es de 180 iteraciones aproximadamente a favor de la formulación NWF. El mismo comportamiento se presenta para los esquemas QUICK y MINMOD. Sin embargo, en el caso del esquema QUICK la diferencia entre formulaciones es de 90 iteraciones aproximadamente a favor de la formulación NWF. Mientras que en el caso del esquema MINDMO la

diferencia de iteraciones entre formulaciones es de 30 aproximadamente a favor de la formulación NWF.

Se observa que el esquema SMART con la formulación DC el consumo de iteraciones aumenta ligeramente dos iteraciones, mientras que con la formulación NWF el número de iteraciones aumenta hasta 20 de 1 a  $10 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$ . Por último, los esquemas WACED y CUBISTA han presentado el mismo comportamiento que se tiene en los esquemas FROMM, QUICK y MINMOD. Sin embargo, la diferencia de iteraciones que se tiene entre formulaciones para los esquemas WACED y MINMOD es aproximadamente de 83 iteraciones a favor de la formulación NWF para los dos esquemas.

Como ultimo capítulo, se presenta las conclusiones de los resultados en el siguiente capítulo, se presenta las conclusiones en tres secciones.

# Capítulo 7

## Conclusiones

Finalmente, en este último capítulo se presenta las conclusiones a partir del análisis de los resultados, además las recomendaciones. El capítulo se divide en cuatro secciones, la primera sección como conclusión de lo observado en el ejercicio del caso uno, la segunda sección las conclusiones del caso dos, la tercera sección conclusiones generales y por último la sección de recomendaciones.

### 7.1 Conclusión caso uno

De manera general, en el caso uno se ha observado primeramente que algunos esquemas presentan problemas de convergencia para algunos parámetros. En todos los parámetros solo los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA han presentado beneficios para todos los valores de cada parámetro. Sin embargo, en algunos casos el esquema DIAMOND no ha presentado beneficios en términos de iteraciones. A pesar de esto, ha presentado beneficio en términos de tiempo computacional.

Particularmente, en el caso de la malla los únicos esquemas que han presentado beneficios con la formulación NWF para todas las mallas han sido los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA. La máxima reducción de tiempo computacional ha sido de 37% con el esquema QUICK con la formulación NWF respecto a este mismo esquema implementado con la formulación DC para la malla de 41 nodos, mientras que la mínima reducción de tiempo computacional ha sido con el esquema CUBISTA con 17% respecto a la formulación DC.

Para la variación del esquema de cuadratura, nuevamente los esquemas beneficiados con la formulación NWF han sido los esquemas DIAMOND, QUICK y DIAMOND. El esquema con mayor beneficio ha sido el esquema QUICK con 35% de reducción del tiempo computacional del requerido con la formulación DC para la cuadratura  $s_6$ , mientras que la mínima reducción de tiempo computacional ha sido con el esquema CUBISTA, alrededor de 16% respecto a la formulación DC para la cuadratura  $s_6$ . En términos de iteraciones se ha observado que la reducción ha sido menos de 100 iteración con cada esquema.

En el tercer parámetro presentado, el cual es el coeficiente de absorción, se ha observado que a partir del valor de 1.0, todos los esquemas tienen a converger con ambas formulaciones. Sin embargo, con menor tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Los esquemas que han presentado beneficio con la formulación NWF para todos los valores de absorción han sido los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA la reducción de tiempo computacional respecto a la formulación DC para cada esquema está en el intervalo de 1.97-335%, 26-35% y 5.75-18.45%, respectivamente.

En la variación del coeficiente de emisividad, se ha observado que los esquemas con beneficio con la formulación NWF en términos de iteraciones han sido los esquemas QUICK y CUBISTA, con reducción entre 70-162, 48-93 iteraciones, respectivamente. En el caso del esquema DIAMOND, se ha tenido poca diferencia entre ambas formulaciones, ya que para emisividad de 0.1 el consumo de iteraciones es el mismo con ambas formulaciones, en el caso de emisividad de 0.5 la formulación NWF ha aumentado una iteración, en el caso de 1.0 de emisividad, se tiene una 42 iteraciones a favor de la formulación NWF. Sin embargo, en términos de tiempo de cómputo, la formulación ha presentado beneficio para el esquema DIAMOND en los tres valores de emisividad, entre 3.88-21.37% de reducción de tiempo computacional respecto a la formulación DC. En el caso del esquema QUICK la reducción del tiempo computacional es de hasta 35.51% con la formulación NWF respecto a la formulación

DC, mientras que con la esquema CUBISTA se reduce el tiempo computacional hasta 18.45

En el caso del parámetro de bajo-relajación se ha observado que los esquemas beneficiados con la formulación NWF son los esquemas DIAMOND, QUICK Y CUBISTA. El porcentaje de reducción de tiempo computacional respecto a la formulación DC es 4-124%, 34.02-36.54%, 16.38-38.31%, respectivamente.

Por último, para el parámetro de dispersión de albedo se observa que una vez más los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA han presentado beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC, han reducido el tiempo de cómputo aproximadamente 114-3.68%, 25.77-37.45%, 29.75-16.29%, respectivamente. El consumo de iteraciones del esquema DIAMOND con la formulación es menor respecto a la DC para valores de dispersión de albedo de 0.05 a 0.5, mientras que para el resto de valores el esquema requiere el mismo número de iteraciones con ambas formulaciones. Con los esquemas QUICK y CUBISTA se presenta mayor diferencia entre formulaciones. Sin embargo, el esquema CUBISTA para 0.05 de dispersión de albedo solo converge con la formulación NWF, por lo cual para este valor no se puede comparar ambas formulaciones. A pesar de esto, se considera como beneficiado, ya que proporciona la solución del caso para el valor de dispersión mencionado.

Finalmente se concluye que para el primer caso de estudio, solamente los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA han presentado beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC en términos de tiempo computacional para todos los valores de todos los parámetros, en algunos casos el esquema DIAMOND ha requerido igual o ligeramente más iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Sin embargo, en términos de tiempo computacional se ve reflejado a favor de la formulación NWF.

## 7.2 Conclusión caso dos

En el segundo caso se ha observado que en la mayoría de los parámetros todos los esquemas logran converger con ambas formulaciones. Sin embargo, en algunos parámetros algunos esquemas no obtienen beneficio con la formulación NWF para todos los valores.

Particularmente, para todos los valores de la malla solo los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK y CUBISTA han presentado beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Sin embargo, el esquema DIAMOND ha requerido el mismo número de iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. A pesar de esto se observa que en términos de tiempo computacional el esquema tiene mejor rendimiento con la formulación NWF. El porcentaje de reducción del esquema DIAMOND con la formulación NWF respecto a la formulación DC está en el intervalo entre 3.44 y 4.16%. En el caso del esquema FROMM, el intervalo de reducción de tiempo computacional con la formulación NWF respecto a la formulación DC, es de 71.9-86.01%, en términos de iteraciones es de 91-333 iteraciones, con mayor disminución de iteraciones conforme se aumenta el número de nodos. En el caso del esquema QUICK, el porcentaje de reducción de tiempo con la formulación NWF es de 33.12–34.48%.

Con el uso de diferentes esquemas de cuadratura solo los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA han presentado beneficio con la formulación NWF para todos los esquemas de cuadraturas. En el caso del esquema DIAMOND solo ha presentado beneficio en términos de tiempo computacional, ya que en términos de iteraciones, consume la misma cantidad que la formulación DC. La reducción de tiempo computacional con el esquema DIAMOND ha sido de 2.65–4.11%. En el caso del esquema FROMM el tiempo reducido ha sido 73.76–85.20% del tiempo requerido con la formulación DC. Mientras que los

esquemas QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA han reducido 33.37-32.60%, 6.59-7.31%, 23.42-24.68%, 14.84-21.07% y 15.16-22.25%, respectivamente. En términos de iteraciones los esquemas QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA redujeron 25-90 iteraciones, 25-27 iteraciones, 73 iteraciones, 46-65 iteraciones y 49-67 iteraciones, respectivamente.

Para el parámetro de absorción, se ha observado que los esquemas con beneficio con la formulación NWF solo han sido los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA. A diferencias de los parámetros anteriores mencionados para el segundo caso, el esquema DIAMOND ha sido beneficiado con la formulación NWF respecto a la formulación DC en términos de tiempo computacional e iteraciones. En términos de tiempo computacional, el esquema DIAMOND ha reducido 1.32-180.39% del tiempo requerido con la formulación DC. Los esquemas QUICK y CUBISTA con la formulación NWF han reducido 20.26-36.38% y 14.44-21.17% del tiempo computacional requerido con la formulación DC, respectivamente. En términos de iteraciones los esquemas QUICK y CUBISTA han requerido 56-72 iteraciones, y 45-171 iteraciones, respectivamente.

Los esquemas FROMM, QUICK, SMART, WACED y CUBISTA han presentado reducción de tiempo computacional e iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. En el caso del esquema DIAMOND solo ha presentado beneficio en términos de tiempo computacional, ya que en términos de iteraciones ha requerido la misma cantidad con ambas formulaciones. El esquema FROMM ha reducido el tiempo computacional del requerido con la formulación entre 78.28-85.20% con la formulación NWF. En el caso de los esquemas QUICK, SMART, WACED, y CUBISTA el tiempo reducido con la formulación NWF respecto a la formulación DC es 30.81-64.34%, 24.23-26.02%, 18.26-20.21% y 16.65-21.17%, respectivamente. En términos de iteraciones, la reducción con la formulación NWF respecto a la formulación DC es de 90-762 iteraciones, 72-634 iteraciones, 64-517 iteraciones y 67-502 iteraciones, respectivamente.

Los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, WACED y CUBISTA han presentado beneficio con la formulación respecto a la formulación DC para todos los valores de bajo-relajación. En el caso del esquema DIAMOND para la mayoría de los valores de bajo-relajación solo se tiene una iteración de diferencia entre formulaciones a favor de la formulación NWF. Los esquemas FROMM, QUICK, WACED y CUBISTA han reducido 6.28–88.71%, 31.97–33.86%, 16.54–21.78% y 20.69–22.10%, respectivamente. En términos de iteraciones han reducido 2–617 iteraciones, 28–304 iteraciones, 15–207 iteraciones y 21–220 iteraciones, respectivamente.

Por último, para el parámetro de generación de calor, sea observado que los esquemas FROMM, QUICK, MINMOD, SMART, WACED y CUBISTA requieren menor tiempo computacional e iteraciones con la formulación NWF respecto a la formulación DC. La reducción de tiempo computacional con la formulación NWF ha sido de 84.09–85.59%, 33.23–33-37%, 6.93–8.36%, 20.64– 6.47%, 21.07–21.55 y 21.01–21.41%, respectivamente. En términos de iteraciones la reducción ha sido, 179, 90, 29, 59-75, 59–66 y 67–69 iteraciones, respectivamente.

## 7.3 Conclusión general

Por último, se concluye que en la mayoría de los parámetros en ambos casos, los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA presentan beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC. Se ha observado en el caso de la cavidad con medio absorbente-emisor-dispersante que solo los esquemas DIAMOND, QUICK y CUBISTA presenta beneficio con la formulación NWF, en el resto de los esquemas, se tiene beneficio en algunos valores de algunos parámetros, además, en el algunos parámetros se ha observado que algunos esquemas que parcialmente son beneficiados con la formulación NWF presenta mayor consumo de tiempo computacional respecto a la formulación DC conforme se aumenta el valor de algunos parámetros.

En el segundo caso de estudio, se ha observado que la mayoría de los esquemas en la mayoría de valores de parámetros presentan beneficio con la formulación NWF respecto a la formulación DC. En promedio, los esquemas que presentan beneficio con la formulación NWF son los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINDMOD, SMART, WACED y CUBISTA. El resto de los esquemas presentan parcialmente beneficios con la formulación NWF.

## 7.4 Recomendaciones

Las recomendaciones para trabajos futuros son:

- Considerar mallas con mayor número de nodos para los esquemas que presentan beneficios con la formulación NWF en mallas finas, así como parámetros que puede ser aumentados.
- Implementar diferentes esquemas a los presentados en este trabajo.
- Realizar un estudio paramétrico en casos diferentes, por ejemplo en un horno rectangular con medio dispersante y medio absorbente-emisor-dispersante.
- Evaluar principalmente los esquemas FROMM, DIAMOND, QUICK, MINDMOD, SMART, WACED y CUBISTA con la combinación de los valores de los parámetros en los que presentaron mayor reducción de tiempo computacional. Por ejemplo, seleccionar el valor del parámetro del coeficiente de absorción y coeficiente de bajo-relajación con mayor reducción de tiempo computacional, y combinar todos en un solo caso y evaluar los esquemas mencionados.

- Implementar la formulación NWF en la transferencia de calor por convección y radiación para observar el rendimiento computacional.

# Referencias

Altaç Z., Tekkalmaz M., Benchmark solutions of radiative transfer equation for three-dimensional rectangular homogeneous media. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 109, Págs. 587-607, 2008.

Amano R. S., Sudén B., *Computacional fluid dynamics and heat transfer*. Wit Press, 1ra edición, 2010.

Balaji C., *Essentials of radiation heat transfer*. John Wiley & Sons. 2014.

Capdevila R., Pérez-Segarra C. D., Oliva A. Development and comparison of different spatial numerical schemes for the radiative transfer equation resolution using three-dimensional unstructured meshes. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 111, Págs. 264-273, 2010.

Chai J. C., Lee H. S., Patankar V., Ray effect and false scattering in the discrete ordinates method. *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 24, Págs. 373-389, 1993.

Chai J. C., Lee H. S., Patankar S. V., Finite volume method for radiation heat transfer. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 8, Págs. 419-425, 1994a.

Chai J. C., Patankar S. V., Lee H. S., Evaluation of spatial differencing practices for the discrete-ordinates method. *Journal of Thermophysics and Transfer*, Vol. 8, Págs. 140-144, 1994b.

Chai J. C., Lee H. S., Patankar S. V., Improved treatment of scattering using the discrete ordinates method. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 116, Págs. 260-263, 1994c.

Chourushi T., Computationally inexpensive and revised normalized weighting factor method for segregated solvers. *International Journal of computer mathematics*, Vol. 95:8, Págs. 1622-1653, 2018.

Chui E. H., Raithby G. D., Implicit solution scheme to improve convergence rate in radiative transfer problems. *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 22, Págs. 251-272, 1992.

Coelho P. J., Advances in the discrete ordinates and finite volume methods for the solution of radiative heat transfer problems in participating media. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 145, Págs. 121-146, 2014.

Coelho P. J., Bounded skew high-order resolution schemes for the discrete ordinates method. *Journal of computational physics*, Vol. 175, Págs. 412-437, 2002.

Colomer G., Costa M., Cònsul R., Oliva A. Three-dimensional numerical simulation of convection and radiation in a differentially heated cavity using the discrete ordinates method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 47, Págs. 257-269, 2004.

Darwish M., Moukalled F., The normalized weighting factor method: a novel technique for accelerating the convergence of high-resolution convective schemes. *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 30, Págs. 217-237, 1996.

Dinshaw Balsara, Fast and accurate discrete ordinates methods for multidimensional radiative transfer. Part I, basic methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. Vol. 69, Págs. 671-707, 2001.

Fiveland W. A., Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in Isotropically and Anisotropically scattering media. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, Págs. 809-812, 1987.

Fiveland W. A., Jamaluddin A. S., Three-dimensional spectral radiative heat transfer solutions by the discrete-ordinates method. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 5, Págs. 335-339, 1991.

Fiveland W. A., Jessee J. P., Acceleration schemes for the discrete ordinates method. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 10, Págs. 445-451. 1996.

Fiveland W. A., Jessee J. P., Comparison of discrete ordinates formulations for radiative heat transfer in multidimensional geometries. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 9, Págs. 47-53, 1995.

Fiveland W. A., Jessee J. P., Finite element formulation of the discrete method for multidimensional geometries. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 8, Págs. 426-433, 1994.

Fiveland W. A., Three-dimensional radiative heat-transfer solutions by the discrete-ordinates method. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 2, Págs. 309-316. 1988.

Fiveland W.A. Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for Rectangular enclosures. *Journal of Heat transfer*, Vol. 106, Págs. 699-706, 1984.

Hamaker H. C., Radiation and heat conduction in light-scattering material. *Phillips Research Repts*, Vol. 2, Págs. 55-67, 1947.

Hassanzadeh P., Raithby G. D., Efficient calculation of radiation heat transfer in participating media. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. Vol. 22, Págs. 129-139, 2008.

Heaslet M. A., Warming R. F., Radiative transport and wall temperature slip in an absorbing planar medium. *International Journal of Thermodynamics of Heat and Mass Transfer*, Vol. 8, Págs. 979-994, 1965.

Howell R. John, Siegel Robert, Mengüç M. Pinar, Thermal radiation heat transfer. Taylor & Francis Group, 5ta. Edición, 2010.

Il-Kyoung Kim, Woo-Seung Kim, A hybrid spatial differencing scheme for discrete ordinates method in 2D rectangular enclosures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.44, Págs. 575-586. 2001.

Jamaluddin A. S. Smith P. J. Predicting radiative transfer in rectangular enclosures using the discrete ordinates method. *Combustion Science and Technology*, Vol. 59, Págs. 321-340, 1988.

Lari K., Baneshi M., Gandjalikhan Nassab S. A., Komiya A., Maruyama S., Combined heat transfer of radiation and natural convection in a square cavity containing participating gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, Págs. 5087-5099, 2011.

Leonard B. P., A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, Vol. 19, Págs. 59-98, 1979.

Leonard B. P., Simple high-accuracy Resolution program for convective modelling discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, Págs. 1291-1318, 1988.

Li Ben-Wen, Yao Qiang, Cao Xin-Yu, Cen Ke-Fa, A new discrete ordinates quadrature scheme for three-dimensional radiative heat transfer. *Journal of Heat Transfer*. Vol. 120, Págs. 514-518, 1998.

Lockwood F. C., Shah N. G., A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedures. *Symposium (International) on Combustion*, Vol. 18, Págs. 1405-1414. 1981.

Mathur S. R., Coupled ordinates method for multigrid acceleration of radiation calculations. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. Vol. 13, Págs. 467-473. 1999.

Modest M. F., *Radiative heat transfer*. McGraw-Hill, 3ra Edición, 2013.

Moukalled F., Abdel-Aziz A., Darwish M., Comparison between the NWF and DC methods for implementing HR Schemes within a fully coupled finite volume solver. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2, Págs. 580-584, 2009.

Moukalled F., Abdel-Aziz A., Darwish M., Performance comparison of the NWF and DC methods for implementing high-resolution schemes in a fully coupled incompressible flow solver. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, Págs. 5041-5054, 2011.

Raithby G. D., Chui E. H., A Finite –Volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 112, Págs. 415-423, 1990.

Razzaque M. M., Klein D. E., Howell J. R., Finite element solution of radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure with gray participating media. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 105, Págs. 933-936. 1983.

Sadat H., On the use of a meshless method for solving radiative transfer with the discrete ordinates formulations. *Journal of Quantitative Spectroscopy & radiative transfer*, Vol. 101, Págs. 263-268, 2016.

Sakami M., Charette A., Dez V. L., Radiative heat transfer in three-dimensional enclosures of complex geometry by using the discrete-ordinates method. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 59, Págs. 117-136, 1998.

Seo S. H., Kim T. K., Study on interpolation schemes of the discrete ordinates interpolation method for three-dimensional radiative transfer with nonorthogonal grids. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 120, Págs. 1091-1094, 1998.

Sun Y., Zhang X., Howell J. R., Assessment of different radiative transfer equation solvers for combined natural convection and radiation heat transfer problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 194, Págs. 31-46, 2017.

Truelove J. S. Discrete-ordinate solutions of the radiation transport equation. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, Págs. 1048-1051. 1987.

Truelove J. S., Three-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the discrete-ordinates approximation. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 39, Págs. 27-31, 1988.

Xamán J., Gijón-Rivera M., *Dinámica de fluidos computacional para ingenieros*. Palibrio, 1ra. Edición, 2016.

Xamán J., Zavala-Guillén I., Hernández-López I., Uriarte-Flores J., Hernández-Pérez I., Macías-Melo E.V., Aguilar-Castro K.M. Evaluation of the cpu time for solving the radiative transfer equation with high-order resolution schemes applying the normalized weighting-factor method. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 208, Págs. 45-63, 2018a.

Xamán J., Hernández-López, Uriarte-Flores J., Hernández-Pérez I., Zavala-Guillén I., Moreno-Bernal P., Hinojosa J. F. X-factor: A modified relaxation factor to accelerate the convergence of the radiative transfer equation with high-order resolution schemes using the normalized weighting-factor method. *Computer Physics Communications*, Vol. 231, Págs. 72-93, 2018b.

# Anexos

## Anexo 1

### Esquemas HO y HR con DC

**Tabla A1. 1** Función de variable normalizada para varios esquemas.

Esquema	$[mm, k]$	Intervalo	Esquema	$[mm, k]$	Intervalo
STEP (LO)	$\bar{\varphi}_f = \bar{\varphi}_c$	Cualquiera	OSHER (HR)	$\bar{\varphi}_f = \begin{cases} \frac{3}{2}\bar{\varphi}_c & 0 < \bar{\phi}_c < \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \leq \bar{\phi}_c < 1 \\ \bar{\varphi}_c & \text{Restante} \end{cases}$	
SOU (HO)	$\bar{\varphi}_f = \frac{3}{2}\bar{\varphi}_c$	Cualquiera	MUSCL (HR)	$\bar{\varphi}_f = \begin{cases} 2\bar{\varphi}_c & 0 < \bar{\phi}_c < \frac{1}{4} \\ \bar{\varphi}_c + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \leq \bar{\phi}_c < \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{3}{4} \leq \bar{\phi}_c < 1 \\ \bar{\varphi}_c & \text{Restante} \end{cases}$	
DIAMOND (HO)	$\bar{\varphi}_f = \frac{1}{2}\bar{\varphi}_c + \frac{1}{2}$	Cualquiera	SMART (HR)	$\bar{\varphi}_f = \begin{cases} 3\bar{\varphi}_c & 0 < \bar{\phi}_c < \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4}\bar{\varphi}_c + \frac{3}{8} & \frac{1}{6} \leq \bar{\phi}_c < \frac{5}{6} \\ 1 & \frac{5}{6} \leq \bar{\phi}_c < 1 \\ \bar{\varphi}_c & \text{Restante} \end{cases}$	

**Tabla A1. 2** Continuación de la Tabla A.1.

Esquema	$[mm, k]$	Intervalo	Esquema	$[mm, k]$	Intervalo
FROMM (HO)	$\bar{\varphi}_f = \bar{\varphi}_c + \frac{1}{4}$	Cualquiera	WACED (HR)	$\bar{\varphi}_f = \begin{cases} 2\bar{\varphi}_c & 0 < \bar{\phi}_c < \frac{3}{10} \\ \frac{3}{4}\bar{\varphi}_c + \frac{3}{8} & \frac{3}{10} \leq \bar{\phi}_c < \frac{5}{6} \\ 1 & \frac{5}{6} \leq \bar{\phi}_c < 1 \\ \bar{\varphi}_c & \text{Restante} \end{cases}$	
QUICK (HO)	$\bar{\varphi}_f = \frac{3}{4}\bar{\varphi}_c + \frac{3}{8}$	Cualquiera	CUBISTA (HR)	$\bar{\varphi}_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\bar{\varphi}_c & 0 < \bar{\phi}_c < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\bar{\varphi}_c + \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \leq \bar{\phi}_c < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\bar{\varphi}_c + \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \leq \bar{\phi}_c < 1 \\ \bar{\varphi}_c & \text{Restante} \end{cases}$	
MINMOD (HR)	$\bar{\varphi}_f = \begin{cases} \frac{3}{2}\bar{\varphi}_c & 0 < \bar{\phi}_c < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\bar{\varphi}_c + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq \bar{\phi}_c < 1 \\ \bar{\varphi}_c & \text{Restante} \end{cases}$				

## Anexo 2

### Esquemas HO y HR con NWF

**Tabla A2. 1** Valores de los coeficientes para varios esquemas.

Esquema	$[mm, k]$	Intervalo	Esquema	$[mm, k]$	Intervalo
STEP (LO)	[1,0]	Cualquiera	OSHER (HR)	$\left[\frac{3}{2}, 0\right]$	$0 < \bar{\phi}_c < \frac{2}{3}$
				[0,1]	$\frac{2}{3} \leq \bar{\phi}_c < 1$
				[1,0]	Restante
SOU (HO)	$\left[\frac{3}{2}, 0\right]$	Cualquiera	MUSCL (HR)	[2,0]	$0 < \bar{\phi}_c < \frac{1}{4}$
				$\left[1, \frac{1}{4}\right]$	$\frac{1}{4} \leq \bar{\phi}_c < \frac{3}{4}$
				[0,1]	$\frac{3}{4} \leq \bar{\phi}_c < 1$
				[1,0]	Restante
DIAMOND (HO)	$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	Cualquiera	SMART (HR)	[3,0]	$0 < \bar{\phi}_c < \frac{1}{6}$
				$\left[\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\frac{1}{6} \leq \bar{\phi}_c < \frac{5}{6}$
				[0,1]	$\frac{5}{6} \leq \bar{\phi}_c < 1$
				[1,0]	Restante
FROMM (HO)	$\left[1, \frac{1}{4}\right]$	Cualquiera	WACED (HR)	[2,0]	$0 < \bar{\phi}_c < \frac{3}{10}$
				$\left[\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\frac{3}{10} \leq \bar{\phi}_c < \frac{5}{6}$
				[0,1]	$\frac{5}{6} \leq \bar{\phi}_c < 1$
				[1,0]	Restante
QUICK (HO)	$\left[\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right]$	Cualquiera	CUBISTA (HR)	$\left[\frac{7}{4}, 0\right]$	$0 < \bar{\phi}_c < \frac{3}{8}$
				$\left[\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\frac{3}{8} \leq \bar{\phi}_c < \frac{3}{4}$
				$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$	$\frac{3}{4} \leq \bar{\phi}_c < 1$
				[1,0]	Restante

Tabla A2. 2 Continuación de la Tabla A.3.

Esquema	$[mm, k]$	Intervalo	Esquema	$[mm, k]$	Intervalo
MINMOD (HR)	$\left[\frac{3}{2}, 0\right]$	$0 < \bar{\phi}_c < \frac{1}{2}$			
	$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	$\frac{1}{2} \leq \bar{\phi}_c < 1$			
	[1,0]	Restante			

## Anexo 3

### Ejemplos de esquemas de cuadraturas

Tabla A3. 1 Ejemplos de cuadraturas  $S_n$  y  $T_n$ .

Cuadratura	$\mu$	$\xi$	$\eta$	$W_f$
$S_2$	0.577350269189 6257	0.5773502691896 257	0.57735026918962 57	3.141592653589793 2
	0.868890300722 2013	0.3500211745815 406	0.35002117458154 06	0.523598775598298 93
$S_4$	0.350021174581 5406	0.8688903007222 013	0.35002117458154 06	0.523598775598298 93
	0.350021174581 5406	0.3500211745815 406	0.86889030072220 13	0.523598775598298 93
$T_2$	0.5773503	0.5773503	0.5773503	0.5512855
	0.2357023	0.2357023	0.9428090	0.3398372
	0.2357023	0.2357023	0.2357022	0.3398372
	0.9428090	0.9428090	0.2357022	0.3398372

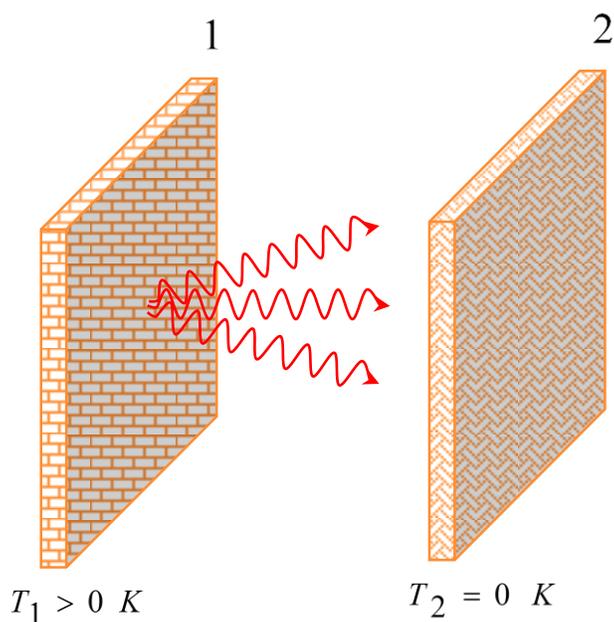
## Anexo 4

### Conceptos fundamentales

Primero, se debe tener en cuenta que toda materia posee una cierta cantidad de energía, la cual puede ser aprovechada, transformada o transferida de un lugar a otro por medio de conducción, convección, radiación o algún tipo de trabajo. Sin embargo, dependerá del proceso al que esté sometido esta cantidad de materia, para que se

presente solo conducción, convección, radiación o conjugados. La transferencia de energía en forma de calor solo se presenta si existe un gradiente de temperatura en el sistema a estudiar.

La transferencia de calor por conducción se presenta a partir de la vibración a nivel atómico, donde, los electrones están en movimiento constantemente y al ser excitados estos tienen perturbaciones generando estas mismas en electrones de otros átomos, cambiando el nivel energético de los átomos que se encuentran a su alrededor, y consecuentemente presentándose a nivel macro como cambios de temperatura. Este mecanismo se presenta tanto en fluidos como en sólidos. Sin embargo, se debe considerar que, en el caso de fluidos, no se tiene velocidades, es decir el fluido está estático y la temperatura es tan baja que no genera movimiento del fluido.



**Figura A4. 1** Transferencia de calor por radiación entre dos cuerpos.

A diferencia de la transferencia de calor por conducción en un sólido o en casos especiales, en un fluido, la transferencia de calor por convección se presenta entre un fluido y un sólido, se transfiere energía del sólido al fluido y viceversa, dependerá del nivel energético de ambos cuerpos. Sin embargo, existen dos maneras en las que se presente la transferencia de calor por convección, ya sea de manera forzada o natural. En el caso de transferencia de calor por convección forzada, se presenta a partir del

empuje del fluido a través de una fuerza externa, en el caso de convección natural, se presenta cuando un fluido que está en contacto con un sólido, y debido al gradiente de temperatura entre estos dos, se genera un cambio de densidad en el fluido generando movimiento de este mismo.

En el caso de la transferencia de calor por radiación, el transporte de energía es a través fotones sin masa u ondas electromagnéticas de un cuerpo a otro, los cuales no están en contacto, y al menos la temperatura de uno de ellos está por arriba del cero absoluto, además, la transferencia de calor se presenta mejor en el vacío, ya que no existe un medio en su trayecto que perturbe su nivel energético, en la Figura A4.1 se observa la transferencia de calor por radiación del cuerpo uno al cuerpo dos. Nótese que, la temperatura del cuerpo uno está arriba del cero absoluto. El concepto de cero absoluto se refiere, cuando a nivel atómico no existe movimiento, es decir, los electrones que rodean al átomo están estáticos.

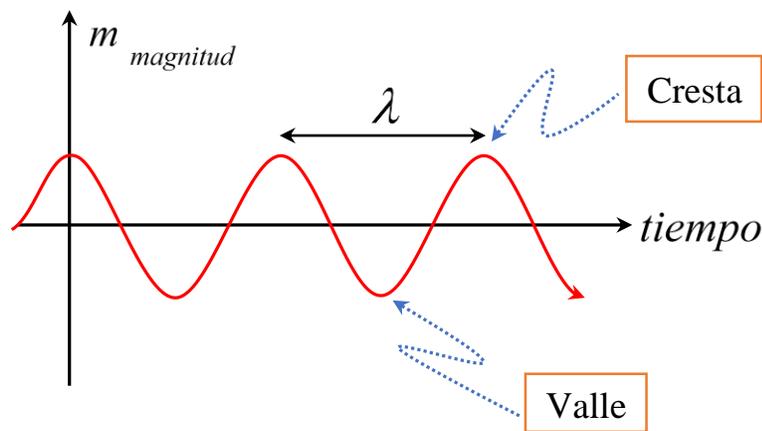


Figura A4. 2 Características de una onda electromagnética.

La transferencia de calor por radiación es el mecanismo más complejo de estudiar, ya que actualmente existen dos teorías para su estudio, la mecánica clásica (modelo de onda) y la mecánica cuántica (modelo cuántico). La radiación tiene hasta el momento dos definiciones diferentes, ninguna aceptada como única, Balaji (2014). Desde el punto de vista cuántico, la energía radiativa viaja en paquetes de energía sin masa, mientras que, desde el punto de vista clásico, la energía viaja a través de ondas electromagnéticas. El enfoque cuántico se relaciona generalmente con el estudio de

gases, mientras que el enfoque clásico se relaciona más con el estudio de líquidos y sólidos (Modest, 2013). La onda electromagnética tiene dos parámetros característicos, la frecuencia y longitud de onda como se muestra en la Figura A4.2 y denotada por la Ecuación (A4.1).

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (\text{A4.1})$$

Donde:

$c$  es la rapidez de propagación

$\nu$  es la frecuencia

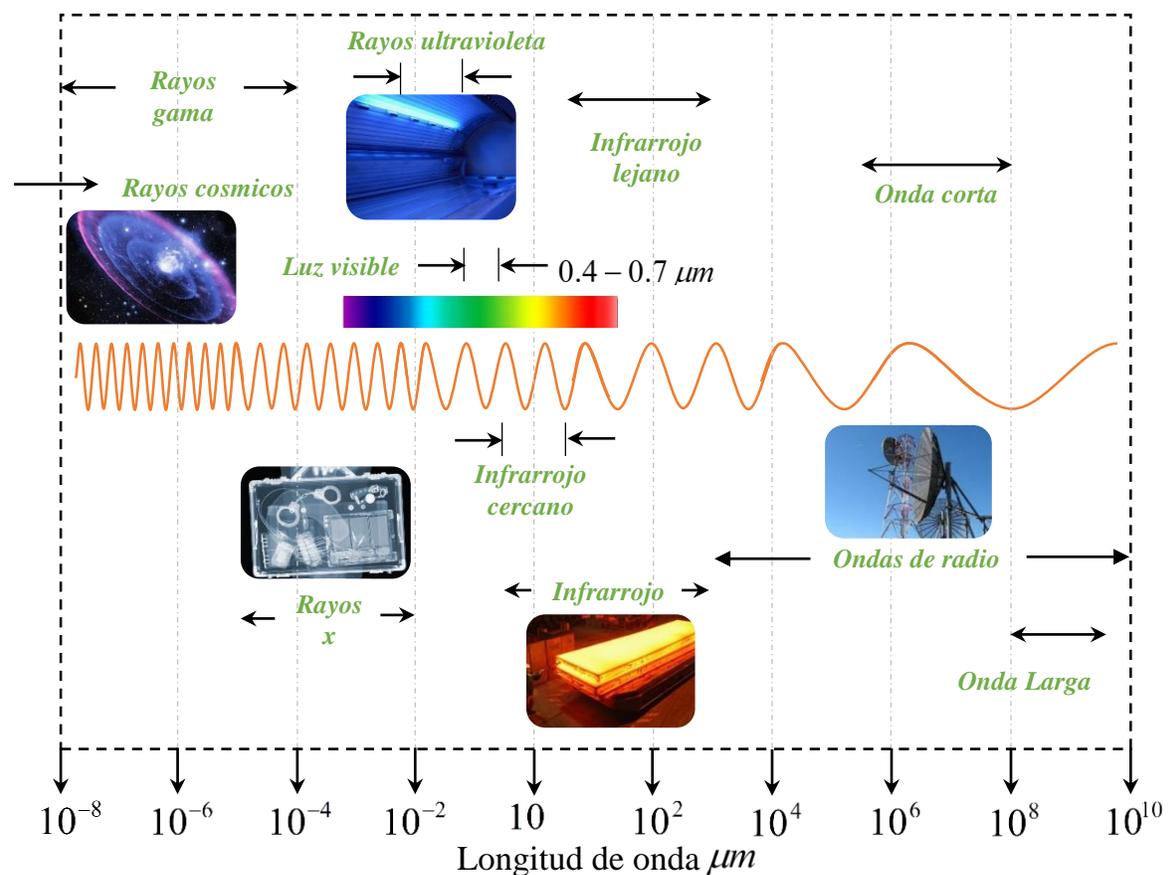


Figura A4. 3 Espectro electromagnético.

En la Figura A4.2 se observa que, la onda electromagnética tiene diferentes frecuencias o longitudes de onda, a mayor frecuencia la longitud de onda es menor, y viceversa. La energía radiativa que emita un cuerpo dependerá de la longitud de onda.

Las ondas electromagnéticas con longitud de onda muy corta  $10^{-8} \mu m$  se considera como rayos cósmicos, mientras que las ondas electromagnéticas con longitud de onda larga se consideran como ondas de radio  $10^{-3} \mu m$  (Howell et al., 2010), en la Figura A4.3, se presenta el espectro de  $10^{-8} \mu m$  a  $10^{10} \mu m$  del cual, el intervalo de  $0.4$  a  $0.7 \mu m$  es la energía visible y el intervalo de  $0.7$  a  $10^3 \mu m$  es la energía infrarroja.

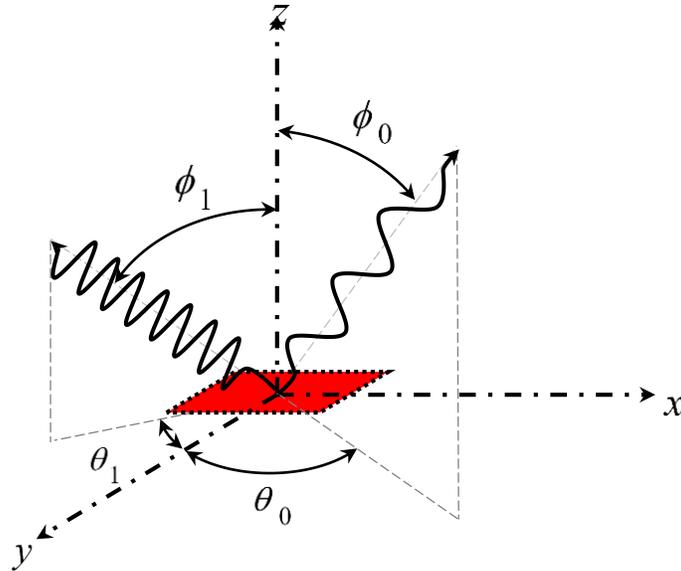


Figura A4. 4 Dependencia angular y direccional.

La energía radiativa también es emitida en cualquier dirección, bajo esta observación y la anterior, la energía radiativa es dependiente de la longitud de onda y su dirección, como se muestra en la Figura A4.4. Se conoce como cuerpo gris cuando la energía radiativa es independiente de la longitud de onda y como difuso cuando la energía es independiente de la dirección.

Una de las características que hace que la radiación sea compleja, es que no requiere un medio para transportarse, en realidad, las longitudes de onda o fotones viajan mejor en el vacío, ya que en su trayecto no existe ningún medio que interfiera con su nivel de energía. Sin embargo, pueden sufrir cambios a lo largo de su trayecto fuera del vacío, por lo que bajo este contexto, se pueden definir algunas propiedades radiativas que permite o no de manera eficiente este transporte de energía radiativa.

## Cuerpo negro

Todo cuerpo que emite todas las longitudes de onda recibidas o incidentes en él es un absorbente perfecto, nombrado cuerpo negro, sí el cuerpo emite menos energía que la absorbida, entonces se dice que es un cuerpo real. El cuerpo negro solo es una idealización de un cuerpo radiativamente perfecto que sirve como referencia para la evaluación de cuerpos reales.

## Potencia emisiva

La energía que es emitida desde la superficie de un cuerpo se le conoce como Flux de calor radiativo o como potencia emisiva la cual, tiene dependencia de la dirección, de las propiedades del material y temperatura, por lo que se tiene que:

$$E = f(T, \theta, \phi) \quad (\text{A4.2})$$

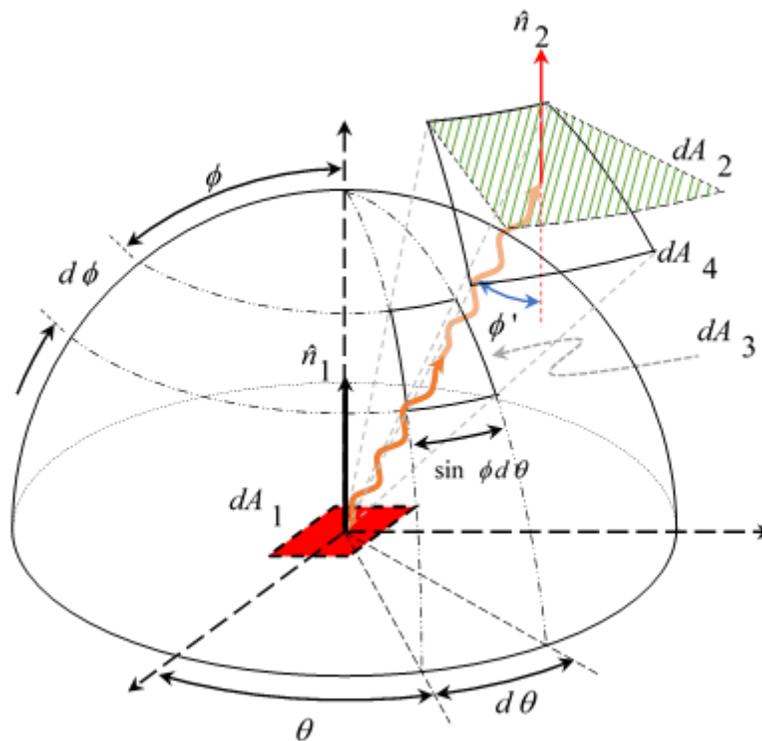


Figura A4. 5 Ángulo sólido.

## Ángulo sólido

Otra de las dificultades para la transferencia de calor por radiación es su cuantificación, en ocasiones la energía que surge de un cuerpo no es desde la superficie, si no desde su interior además, todos los cuerpos emiten energía radiativa en todas las direcciones ya sea de manera constante o variante con el ángulo. Sin embargo, esta energía logra atravesar un área con respecto de un punto. A partir de esto se define el ángulo sólido como, la porción de área esférica que un haz de energía atraviesa en su trayecto al emerger de un punto, como se muestra en la Figura A4.5. El ángulo sólido está dado por la Ecuación (A4.3) (Modest, 2013).

$$d\Omega = \frac{dA_4}{S_*^2} = \frac{\cos \phi' dA_4}{S_*^2} = dA_3 \quad (\text{A4.3})$$

### **Radiación en superficies opacas**

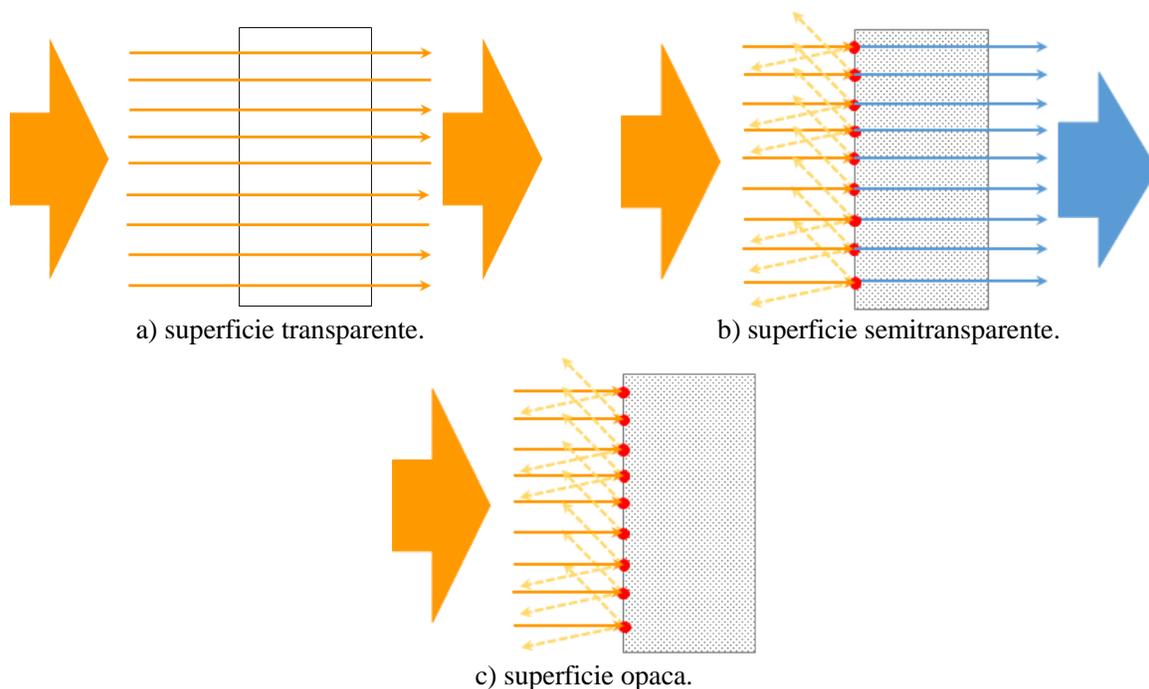
Anteriormente se mencionó que la energía radiativa se transporta mejor en el vacío. Sin embargo, en la mayoría de los procesos donde se presenta este fenómeno se tiene un medio, ya sea una superficie sólida, un fluido o partículas demasiadas pequeñas con lo que interactúa antes de llegar a su destino. En el caso de radiación en superficies sólidas, se considera como superficie opaca, semi-transparente o completamente transparente.

Se considera como superficie transparente cuando ésta misma se encuentra en el trayecto de la energía. Sin embargo, no la perturba. Una superficie opaca o semi-transparente puede perturbar esa energía de diferentes maneras. Existen tres casos en los que la energía puede ser perturbada al momento de interactuar con una superficie opaca o semi-transparente:

Caso 1: Toda la energía se transmite. (Figura A4.6a), la superficie es considerada como transparente. La superficie no tiene la capacidad de perturbar la energía radiativa que incide sobre él, ya que el medio no es reflejante o absorbente lo cual, pueda generar alguna perturbación sobre la energía, generalmente, en algunos casos los cristales son considerados como superficies transparentes.

Caso 2: Parte de la energía incidente es atenuada por reflexión y absorción, y la restante transmitida (Figura A4.6b), lo que se le conoce como superficie semi-transparente, generalmente los cristales son considerados como semi-transparente.

Caso 3: Se considera el medio como opaco, ya que parte de la energía incidente es reflejada y la restante absorbida (Figura A4.6c). En este caso, las superficies que son consideradas como opacas son aquellas que tienen propiedades ópticas diferentes a los cristales, por ejemplo una superficie negra.



**Figura A4. 6** Interacción de la energía radiativa con varios tipos de superficies.

A partir de estos casos de superficies, se puede definir tres propiedades radiativas, la reflectancia, la absorptancia y la transmitancia como:

$$\rho^* = \frac{\text{Energía reflejada}}{\text{Energía incidente total sobre la superficie}} \quad (\text{A4.4a})$$

$$\alpha^* = \frac{\text{Energía absorbida}}{\text{Energía incidente total sobre la superficie}} \quad (\text{A4.4b})$$

$$\tau^* = \frac{\text{Energía transmitida}}{\text{Energía incidente total sobre la superficie}} \quad (\text{A4.4c})$$

Para superficie semitransparente, se tiene que:

$$\rho^* + \alpha^* + \tau^* = 1 \quad (\text{A4.5})$$

Para el caso de superficie transparente ideal se tiene:

$$\rho^* = 0 \quad (\text{A4.6a})$$

$$\alpha^* = 0 \quad (\text{A4.6b})$$

$$\tau^* = 1 \quad (\text{A4.6c})$$

Por último, para la superficie opaca, se tiene:

$$\rho^* + \alpha^* = 1 \quad (\text{A4.7a})$$

$$\tau^* = 0 \quad (\text{A4.7b})$$

Para las superficies sólidas, existe una cuarta propiedad la cual es, la emitancia, esto debido a que todo cuerpo arriba del cero absoluto emite su energía y a partir de la definición del cuerpo negro, el coeficiente de emitancia esta denotada por la relación de energía emitida de la superficie real entre la energía emitida máxima de la superficie negra a la misma temperatura:

$$\varepsilon = \frac{\text{Energía emitida por la superficie real}}{\text{Energía máxima emitida por el cuerpo negro a la misma temperatura}} \quad (\text{A4.8})$$

### **Radiación en gases**

En la transferencia de calor por radiación en gases, se puede tener también la absorción o emisión de energía. Sin embargo, en gases, la disminución de la energía radiativa conforme atraviesa al primero es de manera exponencial, por lo que el valor de la transmisividad se denota como:

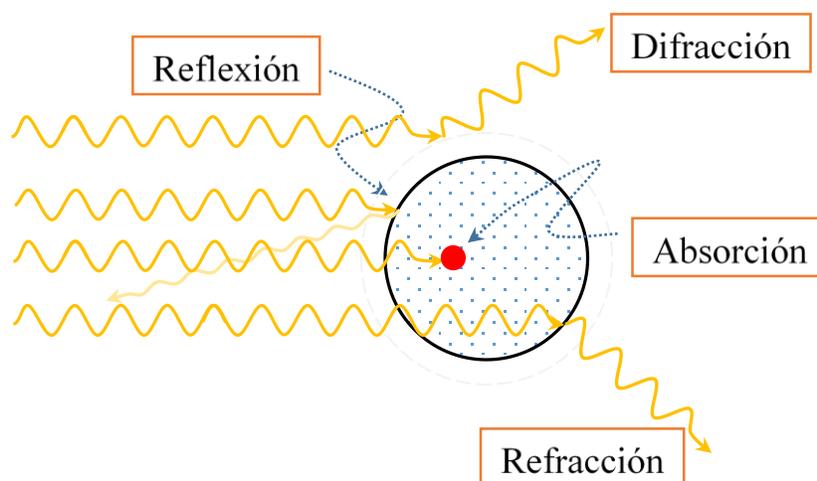
$$\tau_{\eta}^* = e^{-Ks} \quad (\text{A4.9a})$$

Mientras que la absortancia como:

$$\alpha_{\eta}^* = 1 - \tau_{\eta}^* \quad (\text{A4.9b})$$

### Radiación en partículas

La interacción de la energía radiativa con partículas muy pequeñas es diferente a la interacción entre la energía radiativa y una superficie, gas, sólido o líquido. La energía radiativa puede al igual que en superficies, ser reflejada, absorbida o transmitida. Sin embargo, también puede cambiar de dirección. El cambio de dirección se debe por tres fenómenos, difracción, reflexión y refracción como observa en la Figura A4.7, a lo cual se le da el nombre de dispersión de energía radiativa.



**Figura A4. 7** Dispersión de la energía radiativa con la interacción con una partícula.

### Intensidad radiativa

En general, no es conveniente expresar el flux de calor en términos de la potencia emisiva ya que, como se mencionó anteriormente, en algunas ocasiones en un medio, los fotones u ondas electromagnéticas no surge de una superficie. Por lo que se denota en términos de la intensidad radiativa (Ecuación (A4.10)). La intensidad radiativa se define como flux de energía radiativa por unidad de ángulo sólido por unidad de área, mientras que la potencia emisiva se denota en términos de la intensidad radiativa como se muestra en la Ecuación (A4.11) por Modest (2013).

$$I(r, \hat{s}) = \int_0^{\infty} I_{\lambda}(r, \hat{s}, \lambda) d\lambda \quad (\text{A4.10})$$

$$E(r) = \int_{2\pi} I(r, \hat{s}) \hat{n} \cdot \hat{s} d\Omega \quad (\text{A4.11})$$